# КВАНТ
# ЖУРНАЛ

# 1976

1 - 12

# НОМЕР
# 1

# КВАНТ

*Основан в 1970 году*

1976
1

*Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*

*Издательство «Наука»*
*Главная редакция физико-математической литературы*

Главный редактор
*академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора
*академик* А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
*(главный художник)*
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
*(зам. главного редактора)*
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
*(зам. главного редактора)*
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

**Редакция:**
В. Н. Березин
А. Н. Виленкин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова
*(художественный редактор)*
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чернова
*(зав. редакцией)*

**В НОМЕРЕ:**

2 *В. Савченко.* Полуправильные многогранники
8 *В. Гамаюнов.* Тайна геометрических чертежей
12 *С. Овчинников.* Плоские переключательные схемы
19 *Г. Коткин.* Всплывающий воздушный пузырек и закон Архимеда
24 *М. Хапланов.* Трансцендентные числа
28 *З. Тьмеладзе.* Нелинейное программирование

**У нас в гостях журнал «Человек и закон»**

35 *Я. Шестопал.* Наука читает невидимые следы

**Лаборатория «Кванта»**

40 *М. Головей.* «Водяная улитка» Архимеда

**Математический кружок**

44 *В. Рыжик.* Давайте складывать точки...

**Задачник «Кванта»**

49 Задачи М361—М365; Ф373—Ф377
51 Решения задач М321—М325; Ф333, Ф335—Ф338

**Практикум абитуриента**

60 *И. Шарыгин.* Достраивание тетраэдра
65 *А. Забоев, Г. Пантюхов, Н. Шолохов.* Московский инженерно-физический институт

**Рецензии, библиография**

67 *В. Лешковцев.* Плазма — четвертое состояние вещества

**Информация**

68 *Ж. Раббот.* Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу
70 *В. Асланян, А. Кирьянов, Т. Чугунова.* Заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте

**«Квант» для младших школьников**

73 Задачи
74 *А. Савин.* Как нарисовать пятиконечную звезду?
77 **Ответы, указания, решения**
**Смесь** *(с. 18, 23, 43, 59)*

Первая и четвертая страницы обложки выполнены архитектором В. А. Сомовым по эпюре В. Н. Гамаюнова (см. статью на с. 8).

© *Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1976 год.*

*В. Савченко*

# Полуправильные многогранники

Читатели журнала «Квант» не раз встречались с правильными многогранниками *). У правильных многогранников грани — равные правильные многоугольники, и все многогранные углы равны. Но есть еще и такие многогранники, у которых все многогранные углы равны, а грани — правильные многоугольники нескольких видов. Они не могут быть отнесены к правильным — их называют *равноугольно полуправильными многогранниками*.

Простейшим из полуправильных многогранников является правильная $n$-угольная *призма* ($n = 3, 5, 6, \dots$), все ребра которой равны, а боковые грани — квадраты. Основания, например, шестиугольной призмы — правильные шестиугольники; у нее 12 вершин, 8 граней и 18 ребер.

Другой представитель равноугольно полуправильных многогранников — так называемая *антипризма*. Представьте себе, например, два правильных шестиугольника, расположенных в параллельных плоскостях, один из которых повернут вокруг центра относительно другого на 30°. Каждая вершина как нижнего, так и верхнего шестиугольников, соединена с двумя ближайшими вершинами другого. Расстояние между шестиугольниками (основаниями) подбирается так, чтобы боковыми гранями были правильные треугольники (рис. 1) — в случае шестиугольной антипризмы это расстояние (высота) равно $H = a\sqrt{\sqrt{3} - 1}$ (проверьте, что это так). У шестиугольной антипризмы 12 вершин, 14 граней и 24 ребра, все ребра и все четырехгранные углы равны между собой.

Используя для призм и антипризм все правильные многоугольники, мы получим бесконечные серии полуправильных многогранников. Однако эти серии не исчерпывают всех равноугольно полуправильных многогранников: существуют и другие полуправильные многогранники. Простейший из них получится, если срезать углы правильного тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть от ребер, выходящих из одной вершины (рис. 2); этот многогранник имеет 12 вершин, 8 граней и 18 ребер, и называется *усеченным тетраэдром*. Все его трехгранные углы равны между собой — каждый из них содержит по два плоских угла в 120° и один плоский угол в 60°. У усеченного тетраэдра четыре грани являются правильными шестиугольниками, и еще четыре — правильными треугольниками.

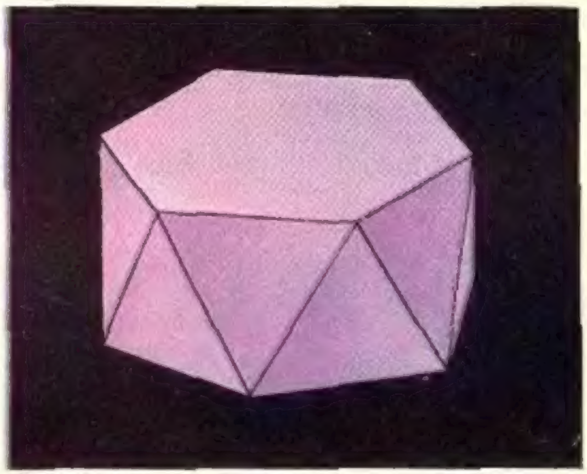


Рис. 1.

---

*) См., например, статью В. Н. Березина «Правильные многогранники», «Квант», 1973, № 5.

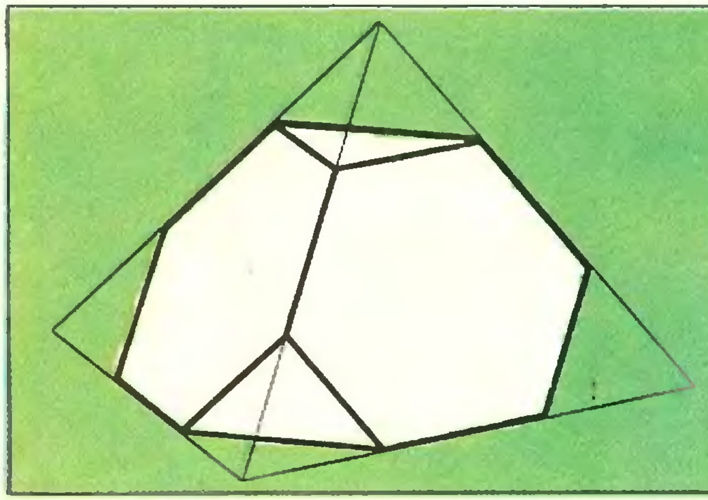


Рис. 2.

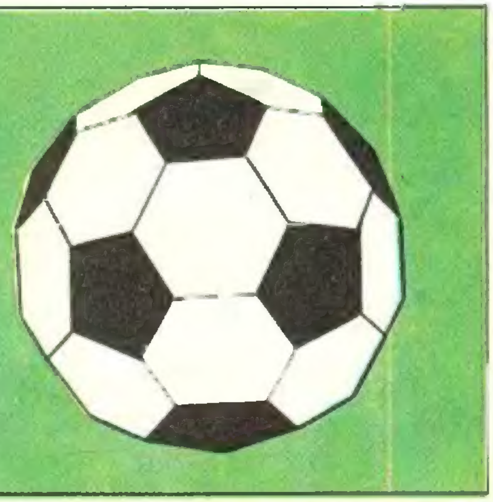


Рис. 3.

Если описанным образом срезать вершины правильного икосаэдра, то мы получим еще один полуправильный многогранник (см. рис. 3). Он называется *усеченным икосаэдром* и напоминает изображение футбольного мяча, которое можно увидеть на экране телевизора.

Из других правильных многогранников можно получить еще несколько полуправильных многогранников. Наиболее сложный из них называется *плосконосым додекаэдром* и имеет 60 вершин, 92 грани и 150 ребер.

Сколько же всего существует полуправильных многогранников? Более двух тысяч лет думали, что только тринадцать(их называют *телами Архимеда*), не считая двух бесконечных серий, составленных из призм и антипризм. Но совсем недавно советский математик В. Г. Ашкинузе нашел еще один полуправильный многогранник. Посмотрите на рисунок 4: если в этом многограннике верхнюю «восьмиугольную чашу» повернуть на 45°, то получится многогранник, изображенный на рисунке 5. Именно его и обнаружил Ашкинузе. Правда, этот многогранник «не совсем архимедово» тело: он не обладает некоторыми свойствами, которыми обладают первые тринадцать представителей (но зато у него есть свои свойства). Многогранник Ашкинузе иногда называют «псевдоархимедовым» телом.

Но оказывается, что тела Архимеда не исчерпывают всех видов полуправильных многогранников. Возьмем шестиугольную призму (рис. 6) и проведем плоскости через середины каждой тройки ребер, выходящих из одной вершины. Взаимно пересекаясь, эти плоскости образуют новый многогранник, имеющий столько же граней, сколько вершин было у призмы (в данном случае — 12). Одна из таких плоскостей — $SFG$ — содержит отрезок $AB$, принадлежащий основанию призмы, а другая плоскость — $PFG$ — содержит отрезок $CD$, принадлежащий нижнему основанию призмы.

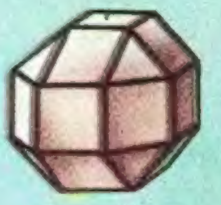


Рис. 4.

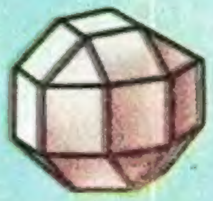


Рис. 5.

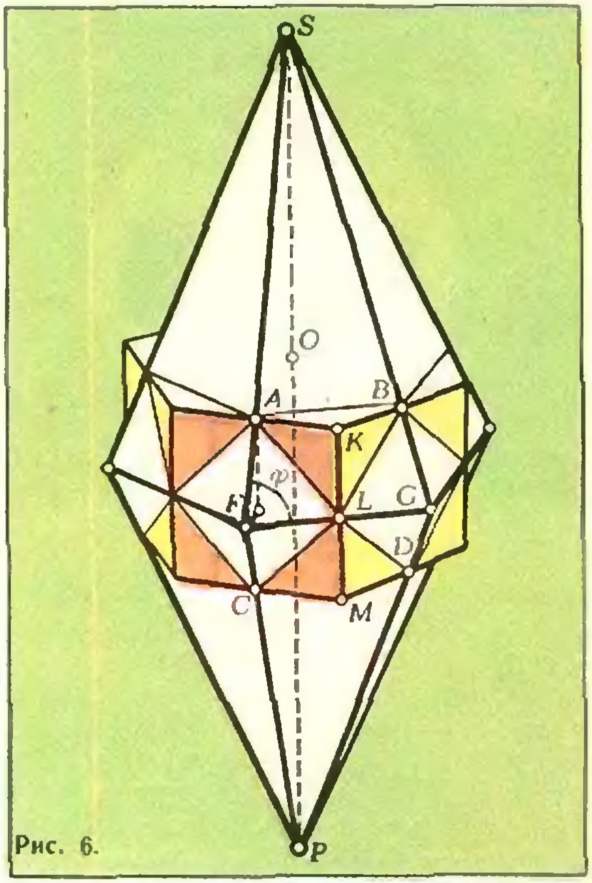


Рис. 6.

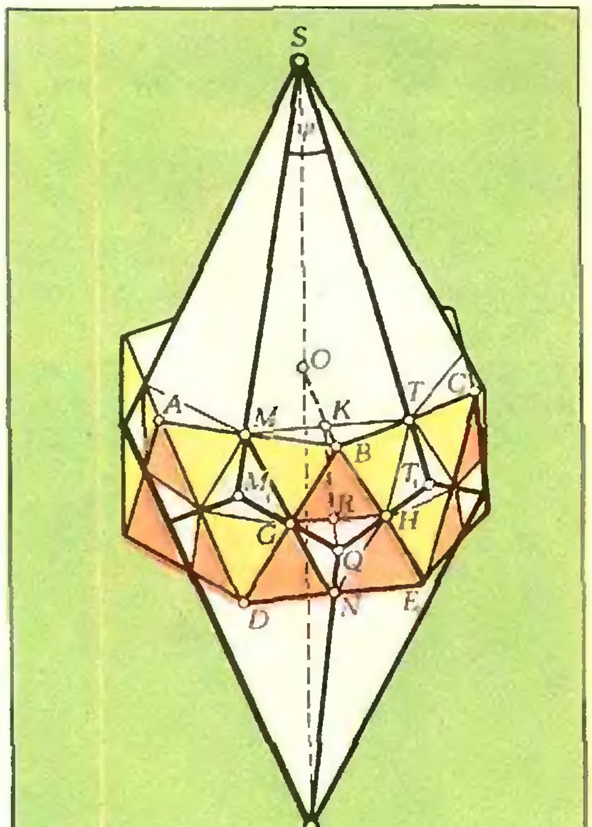


Рис. 7.

Так как $[AB] \parallel [CD]$, то плоскости $SFG$ и $PFG$ пересекаются по прямой $FG$, параллельной $AB$. Образовавшийся многогранник представляет собой объединение двух равных правильных шестиугольных пирамид, вершины $S$ и $P$ которых лежат по разные стороны их общего основания. Многогранник такого вида называется *бипирамидой*. Шесть плоскостей, проходящие через точку $S$, пересекаются с плоскостями, проходящими через точку $P$, образуя правильный шестиугольник, серединами сторон которого являются середины боковых ребер призмы. Отсюда следует, что бипирамида, получившаяся из шестиугольной призмы, имеет 8 вершин и 18 ребер. Она содержит многогранные углы двух видов: шестигранные и четырехгранные. Так как все грани бипирамиды — равные между собой равнобедренные треугольники, то ее относят к *равногранно полуправильным* многогранникам.

Аналогично можно получить еще один равногранно полуправильный многогранник, если провести плоскости через середины каждой четверки ребер антипризмы, выходящих из одной вершины. Так, плоскость $SM_1QT_1$ (рис. 7) проходит через середины $M$, $T$, $G$ и $H$ ребер $BA$, $BC$, $BD$ и $BE$. Число граней этого многогранника равно числу вершин антипризмы, то есть 12. Подсчитаем число вершин такого многогранника. Через середину каждого из боковых ребер антипризмы проходит ребро нового многогранника, образуя пространственный двенадцатиугольник. Прибавив к его двенадцати вершинам точки $S$ и $P$, получим, что всего 14 вершин. Нетрудно видеть, что этот многогранник имеет 24 ребра. Все его грани равны между собой и являются четырехугольниками, сложенными из двух равнобедренных треугольников с общим основанием (такой четырехугольник называется *дельтоидом*). Многогранник содержит два шестигранных угла и две-

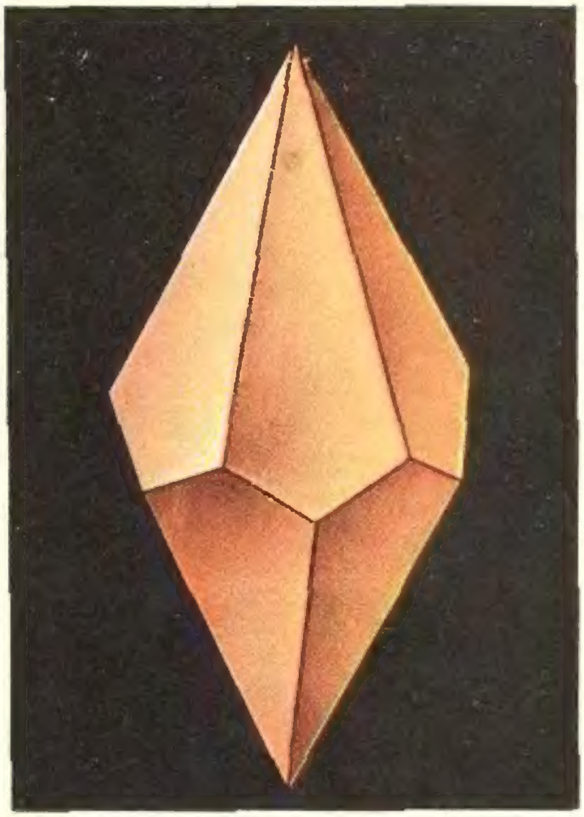


Рис. 8.

надцать трехгранных углов. Все углы правильные. (Выпуклый многогранный угол называется правильным, если все его плоские углы равны.) На рисунке 8 дан общий вид такого многогранника*).

Если провести плоскости через середины каждой тройки ребер, исходящих из одной вершины усеченного тетраэдра (рис. 2), то, взаимно пересекаясь, эти плоскости образуют новый равногранно полуправильный многогранник. Он имеет 12 граней, 8 вершин и 18 ребер. Построение такого многогранника изображено на рисунке 9. У этого многогранника по четыре правильных трехгранных и шестигранных угла, а гранями являются равные между собой равнобедренные треугольники. Общий вид многогранника показан на рисунке 10.

Между равноугольно полуправильными многогранниками и получающимися из них равногранно полуправильными многогранниками существует определенная зависимость. Сопоставим число вершин,

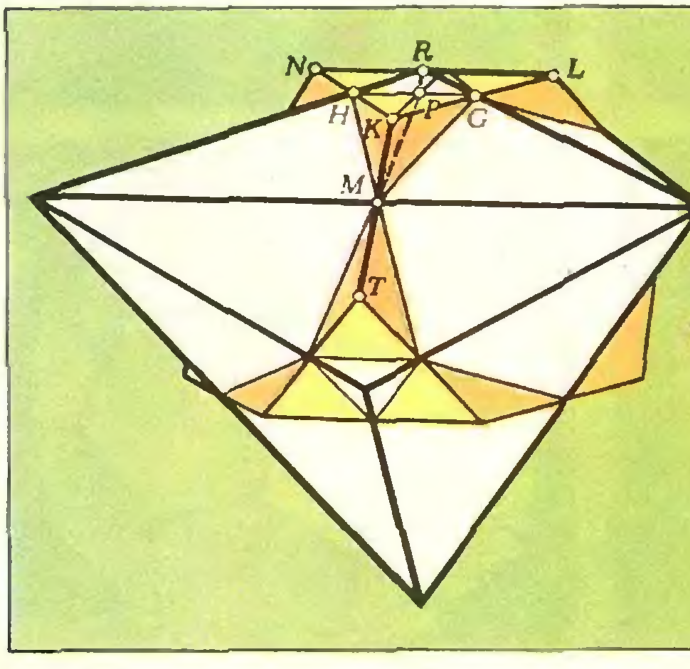


Рис. 9.

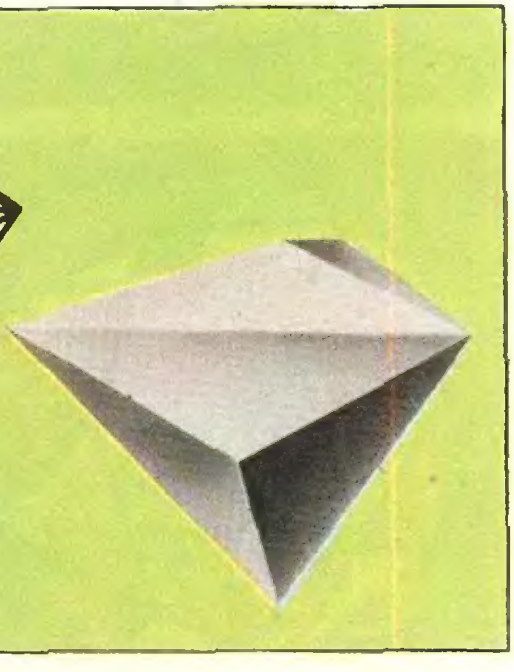


Рис. 10.

---

*) Из рисунка 7 видно, что вершина $S$ может быть определена как точка пересечения осевой линии $SP$ с прямой $KR$, где $K$ и $R$ — середины параллельных отрезков $MT$ и $GH$. Одновременно прямая $KR$ определяет точку $Q$ на ребре $PN$.

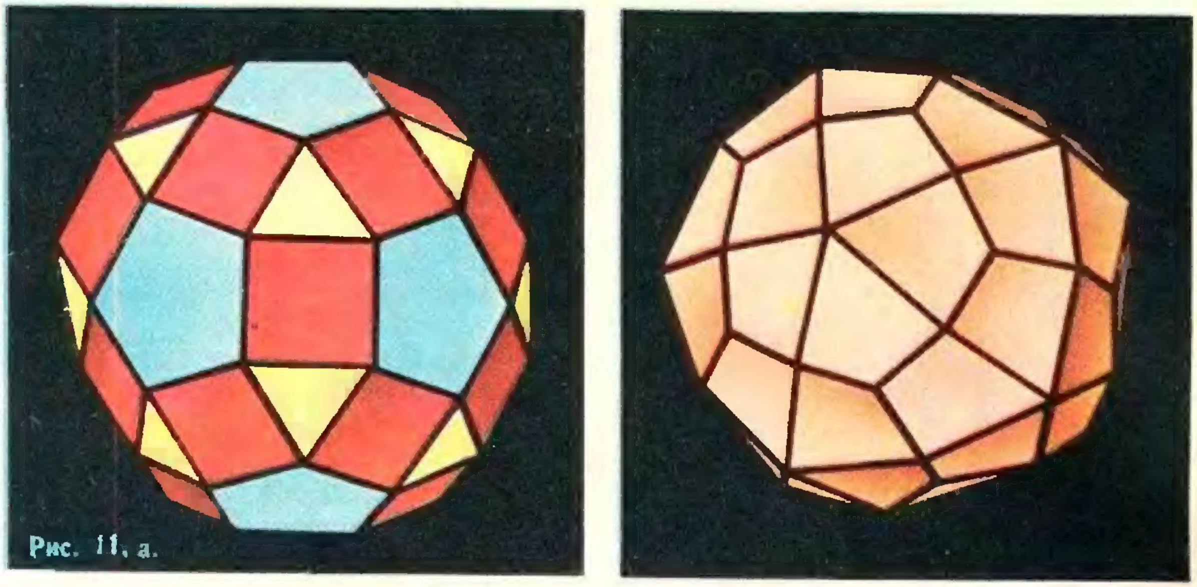


Рис. 11, а.

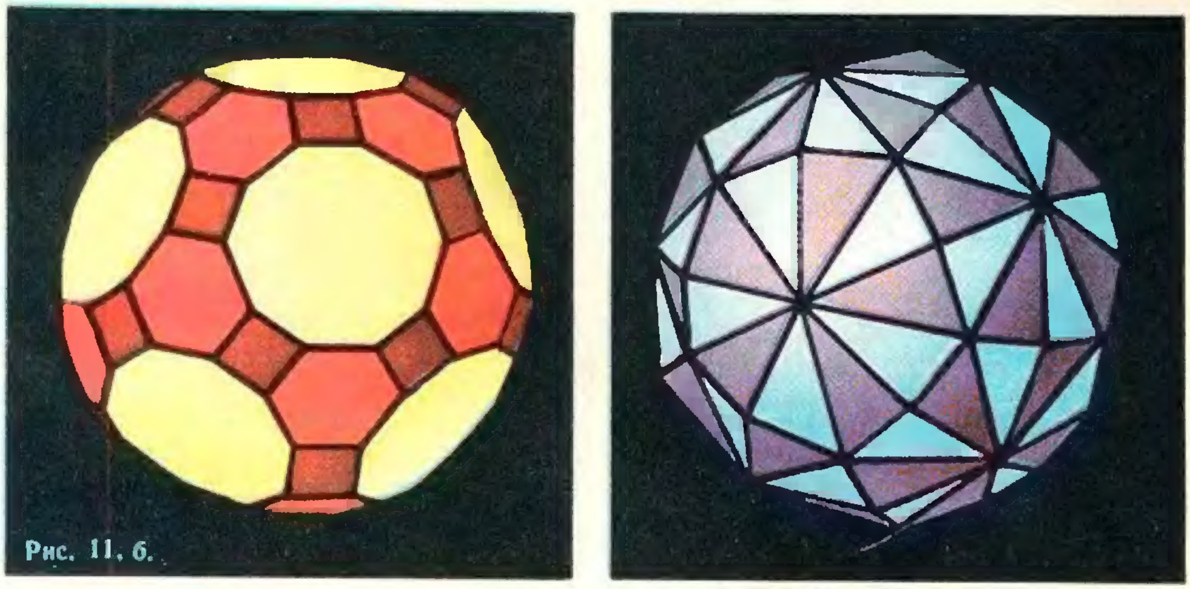


Рис. 11, б.

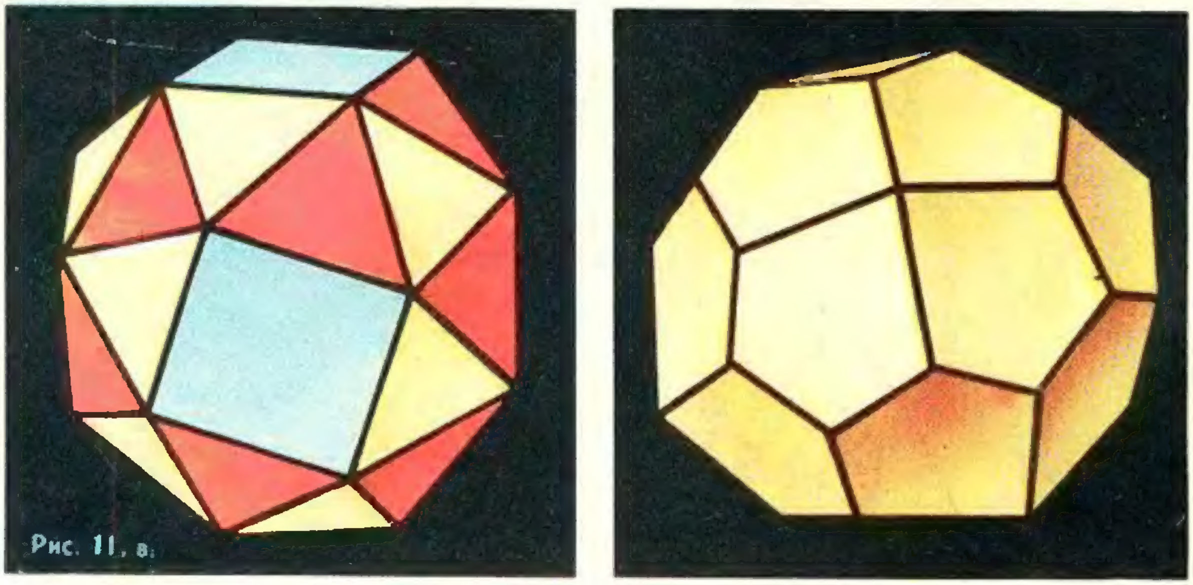


Рис. 11, в.

граней и ребер каждой пары рассмотренных многогранников.

У шестиугольной призмы 12 вершин, 8 граней и 18 ребер, а полученная из нее бипирамида имеет 8 вершин, 12 граней и 18 ребер. Таким образом, числа вершин и граней у призмы и у бипирамиды как бы «переставлены», а число ребер остается неизменным. Убедитесь, что такое же соотношение наблюдается и у остальных пар рассмотренных многогранников. Установленная закономерность вытекает из *принципа двойственности*, который состоит в следующем: *для всякого предложения относительно точек, прямых и плоскостей всегда можно сформулировать двойственное ему предложение, заменив слово «точка» словом «плоскость», а слово «плоскость» — словом «точка», оставив слово «прямая» без изменения.*

Принцип двойственности относится не только к многогранникам: он распространяется на все фигуры и утверждения, которые рассматриваются в *проективной геометрии*. Там же этот принцип находит свое обоснование, а здесь мы доказывать его не будем.

Выше указывалось, что существует 14 равноугольно полуправильных многогранников. Каждому из них соответствует определенный двойственный ему равногранно полуправильный многогранник. На рисунке 11 вы видите три архимедовых тела (в левой колонке), изображенных вместе с их равногранно полуправильными «двойниками» (в правой колонке). С полным перечнем всех этих многогранников читатели могут ознакомиться по статье В. Г. Ашкинузе, помещенной в Энциклопедии Элементарной Математики, книга четвертая (М., «Наука», 1963).

Проверьте, есть ли равногранно полуправильный многогранник, отвечающий телу, найденному Ашкинузе. Подумайте, какие свойства равноугольно полуправильных многогранников обеспечивают наличие «двойственных» им равногранно полуправильных многогранников.

### Упражнения

1. Что представляет собой антипризма, основаниями которой служат правильные треугольники? Определите двойственный ей многогранник.

2. Вычислите объем антипризмы с шестиугольным основанием (рис. 1), считая, что длина ребра равна $a$ *).

3. Многогранник, показанный на рисунках 9 и 10, можно получить другим способом. Достаточно на каждую грань правильного тетраэдра поставить правильную треугольную пирамиду. Вычислите высоту этой пирамиды и плоский угол при ее вершине, если ребро тетраэдра равно $a$.

4. В условиях упражнения 3 вычислите объем полученного многогранника.

5. Вычислите плоский угол $\varphi$ при вершине грани многогранника, показанного на рисунке 7, и постройте его развертку.

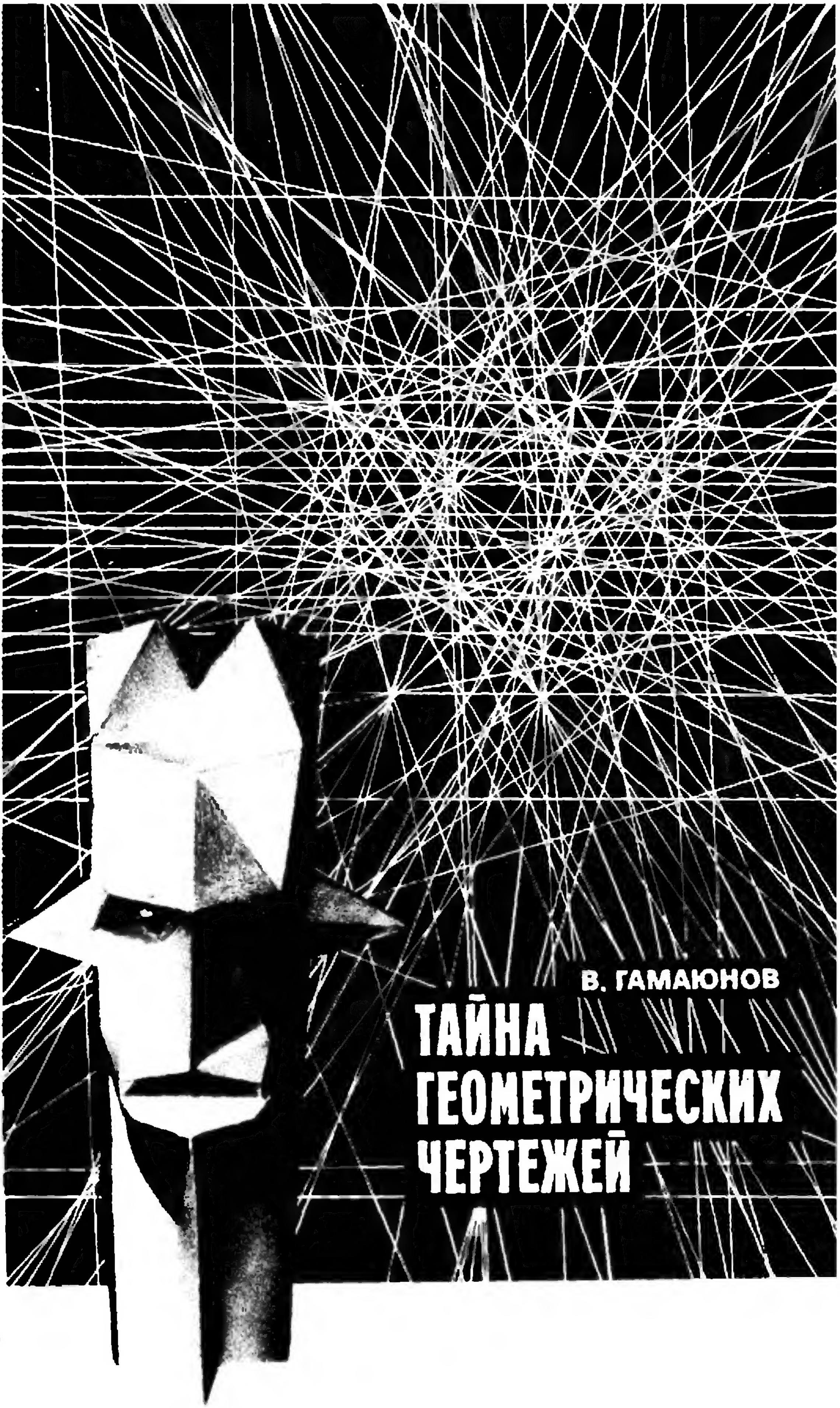
6. Срезая углы правильного октаэдра, постройте полуправильный многогранник, у которого 8 граней — правильные шестиугольники и 6 граней — квадраты, и найдите его объем.

7. Определите многогранник, двойственный к *усеченному октаэдру* (упражнение 6). Найдите плоский угол $\varphi$ при вершине его грани.

**Рис. 11. Равноугольно полуправильные многогранники вместе с двойственными к ним равногранно полуправильными:**
**а) ромбоикосаэдр;**
**б) ромбоусеченный икосододекаэдр;**
**в) курносый куб.**

---

*) Объем антипризмы можно вычислить по *формуле Ньютона — Симпсона*: $V = \frac{1}{6} h (S_1 + S_2 + 4S_3)$, где $h$ — высота, $S_1$ и $S_2$ — площади оснований, $S_3$ — площадь среднего сечения (см. статью Н. Шарыгина «Достраивание тетраэдра», с. 60).


В. ГАМАЮНОВ
ТАЙНА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЧЕРТЕЖЕЙ

Среди полуправильных тел, о которых рассказывается в статье В. Савченко (см. с. 2), наиболее интересны с точки зрения конструктора равногранные полуправильные многогранники и правильные платоновы тела.

Дело в том, что если продолжить плоскости граней любого равногранного полуправильного тела, то линии их пересечения с каждой из плоскостей образуют конгруэнтные между собой системы. (Например, на заставке к статье приведена система линий, получающихся в каждой из плоскостей граней равногранного полуправильного 120-гранника, изображенного на рис. 11, *б* на с. 6.) С другой стороны, продолженные грани равногранного многогранника «вырубают» в пространстве огромное множество всевозможных многогранных образований, порой самой причудливой формы. И все эти образования, благодаря отмеченному свойству, удобно задавать на системе *псевдоребер*, лежащих в одной плоскости (псевдоребром мы будем называть линии пересечения продолженных граней).

Поясним это на примере. Возьмем равногранный 24-гранник (см. рис. 11, *в*, с. 6). Система его псевдоребер, принадлежащих одной плоскости, показана на рисунке 1. Пометим на нем особые точки $O$, $O_1$, $O_2$, $O_3$, . . . и некоторые углы с вершинами в этих точках. Что это за точки и углы и как их находить, мы скажем немного позже. Пока лишь заметим, что если одно из псевдоребер, проходящих через такую точку, повернуть на отмеченный угол, то оно перейдет в другое псевдоребро, проходящее через эту же точку, так, что все точки пересечения, лежащие на этих псевдоребрах, совместятся.

Сконструируем с помощью рисунка 1 многогранник, состоящий из двух пересекающихся неправильных треугольных пирамид.

Сначала построим эти пирамиды. Возьмем отмеченную точку $O$ (см. рис. 1), проходящие через нее псевдоребра и точки $S'$ и $S'''$ на этих псевдоребрах, переходящие друг в друга при повороте на отмеченный угол вокруг точки $O$. Точки $S'$ и $S'''$ — это точки пересечения *двух* псевдоребер; возьмем вторые псевдоребра, проходящие через них. Пересекаясь с ранее выбранными, они задают нам точку $A'$ (на прямой $OS'''$) и точку $B'''$ (на прямой $OS'$). Получаются два треугольника $S'OA'$ и $S'''OB'''$. Поскольку ребро $OS'$ конгруэнтно ребру $OS'''$, то эти два треугольника можно по этим ребрам «приклеить» друг к другу; примем их за две боковые грани одной из будущих пирамид. Заметим теперь, что при повороте вокруг точки $O$ на отмеченный угол против часовой стрелки точка $A'$ переходит в точку $A$, а при повороте вокруг $O$ по часовой стрелке точка $B'''$ переходит в точку $B$. Вместе с точкой $O$ эти две точки образуют треугольник $ABO$, который «приклеивается» к выбранным боковым граням по ребрам $OB$ (к грани $S'''OB'''$: $[OB'''] \cong [OB]$) и $OA$ (к грани $S'OA'$: $[OA'] \cong [OA]$). Примем этот треугольник за основание будущей пирамиды.

Осталось найти еще одну боковую грань так, чтобы ее можно было приклеить к уже выбранным боковым граням и к основанию. И тут происходит чудо!

Возьмем отмеченную точку $O_2$ на ребре $A'S'$ и повернем вокруг нее на отмеченный угол в 180° точку $A'$ и точку $S'$. Эти точки перейдут в точки $A''$ и $S''$ соответственно, причем $[A'S'] \cong [A''S'']$. Вторые псевдоребра, проходящие через точки $A''$ и $S''$, пересекаются в точке $B''$, образуя треугольник $S''A''B''$. Отмеченная точка $O_1$ является точкой пересечения ребер $A''B''$ и $AB$, так

---

*) Исключением является лишь «псевдоравногранный» многогранник, двойственный так называемому псевдоархимедову телу, найденному В. Ашкинузе.

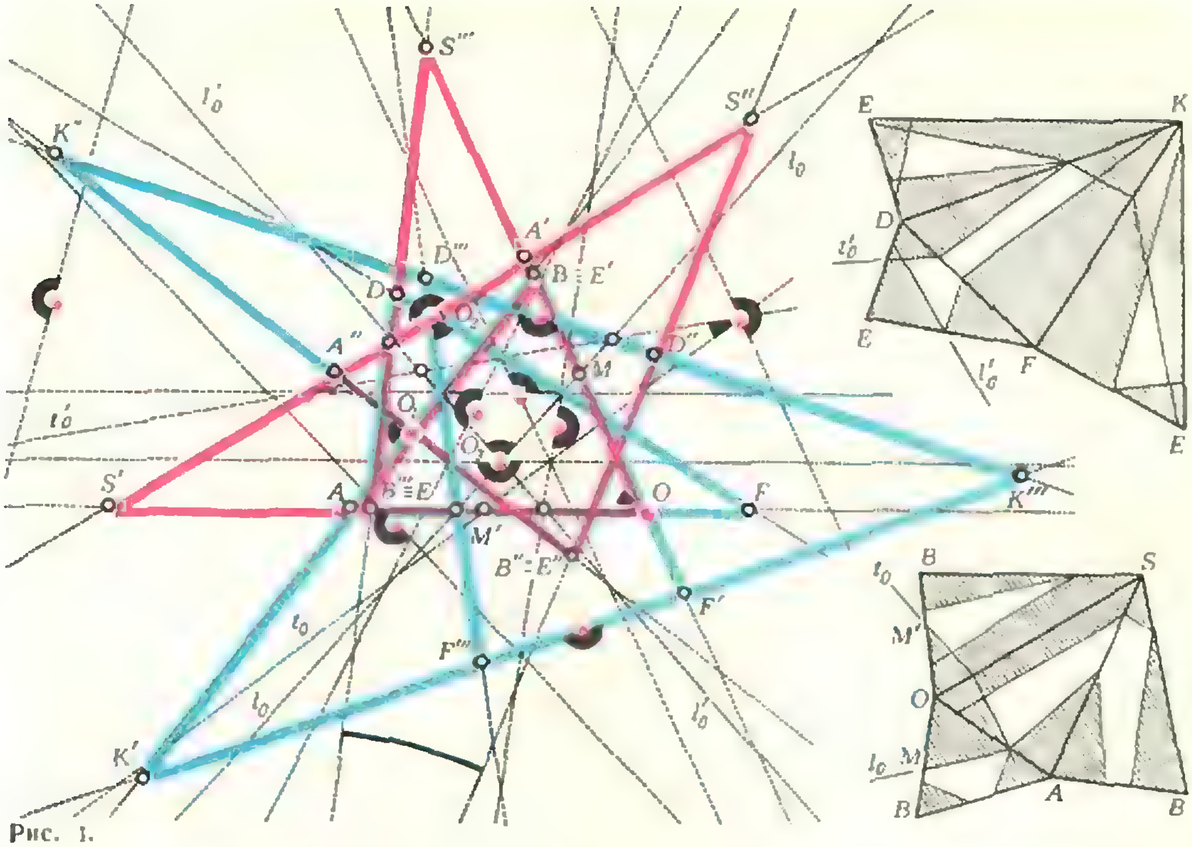


Рис. 1.

что при повороте на отмеченный угол вокруг $O_1$ эти ребра совмещаются ($A''$ переходит в $A$, $B$ переходит в $B''$, и $[AB] \cong [A''B'']$). Таким образом, треугольник $S''A''B''$ приклеивается к основанию по ребру $A''B''$ и к боковой грани $S'OA'$ по ребру $A''S''$. Осталось приклеить $S''A''B''$ к грани $S'''OB'''$. Но тут нас снова «спасает» отмеченная точка — ее не видно на рисунке, дужкой помечен только угол с вершиной в этой точке; она является точкой пересечения ребер $S'''B'''$ и $S''B''$; так что при повороте на отмеченный угол вокруг этой точки ребра $S''B''$ и $S'''B'''$ совмещаются ($[S''B''] \cong [S'''B''']$); по этим ребрам и осуществляется последнее приклеивание.

Точно так же удается выбрать вторую пирамиду: ее ребра на рисунке 1 отмечены синим цветом (причем треугольник $DEF$ — это основание второй пирамиды).

Теперь нужно понять, как эти пирамиды пересекаются. Здесь возможна большая свобода: грань пирамиды, например, ее основание, в рассматриваемом примере может занимать 24 различных положения в пространстве (по числу пересекающихся плоскостей), а потому столько же различных положений может занимать и каждая пирамида. Однако взаимное размещение этих двух пирамид можно задать всего одной линией — линией пересечения каких-нибудь двух их граней; например, на рисунке 1 линии $l_0$ и $l'_0$ конгруэнтны и представляют собой ту одну линию в пространстве, по которой пересекаются основания $ABO$ и $DEF$ построенных пирамид. Прямая $l_0$ имеет с каждым из ребер основания по одной общей точке (или на самом ребре, или на его продолжении; всего — три точки); например, с ребром $BO$ — точку $M$. Но основание $ABO$ «приклеивается» по ребру $BO$ к боковой грани $S'''OB'''$, значит, точке $M$ на ребре $B'''O$, конгруэнтном $BO$, будет соответствовать точка $M'$ (точки $M$ и

$M'$ на нашем рисунке — шестые по счету точки). Через точку $M'$ в грани $S'''OB'''$ проходит, кроме ребра $B'''O$, еще одна прямая — обозначим ее $l_0$. В основании $DEF$ ей соответствует прямая $l_0'$. По линии, задаваемой $l_0$ и $l_0'$, и пересекает основание $DEF$ второй пирамиды грань $S'''OB'''$ первой пирамиды. Точно так же находятся линии пересечения всех остальных граней первой пирамиды с основанием второй. Затем находятся линии пересечения всех граней второй пирамиды с основанием первой.

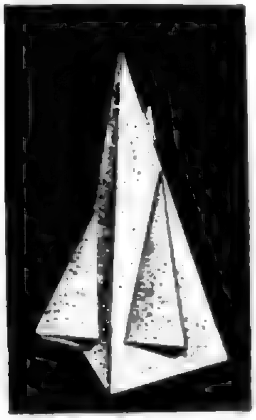


Рис. 2.

На рисунке 1 справа изображена развертка получающегося тела, а на рисунке 2 — его общий вид.

Объясним теперь вкратце, откуда берутся наши отмеченные точки и углы. Мы уже говорили, что в каждой из плоскостей граней равногранного правильного или полуправильного многогранника в результате ее пересечения с остальными плоскостями-гранями образуются конгруэнтные системы линий (это получается благодаря тому, что многогранник равногранно полуправильный, и существует перемещение пространства, которое одну из его граней переводит в любую наперед заданную, так, что при этом сам многогранник переходит в себя). Зафиксируем плоскость какой-нибудь грани нашего многогранника и получившуюся в ней систему линий пересечения с остальными плоскостями-гранями. Возьмем еще какую-нибудь грань и отметим линию ее пересечения с первой выбранной гранью на нашем чертеже — пусть это прямая $l_1$. Повернем теперь наш многогранник вокруг некоторой оси так, чтобы вторая грань перешла в первую (эта ось вращения либо пересекается с линией пересечения двух выбранных граней, либо ей параллельна — попробуйте доказать это самостоятельно). При этом первая выбранная грань перейдет в еще какую-то грань, а их линия пересечения — в линию пересечения $l_2$ первой грани с той гранью, в которую она перешла в результате поворота. Найдем теперь прямую, соответствующую линии $l_2$ на нашем «плоском» чертеже — пусть это прямая $l_2'$. Точка пересечения прямых $l_1$ и $l_2'$ и есть отмеченная точка, а угол между этими прямыми — отмеченный угол.

На первой странице обложки приведен более сложный чертеж — он получен в результате продолжения плоскостей граней многогранника, изображенного на рисунке 11, *а* на с. 6. Аспиранты кафедры прикладного искусства МГПИ им. В. И. Ленина под руководством автора этих строк сконструировали по этому чертежу много сложных и красивых многогранных форм; некоторые из них легли в основу реальных архитектурных проектов: комплекса университета в Калабрии (Италия), оперного театра в Софии (Болгария), дворца культуры в Ногинске. На 3-ей странице обложки вы видите один из таких проектов.

Мы рассказали вам «рецепт», по которому получаются все эти замечательные тела, и теперь вы можете приступить к конструированию своего, еще никем не найденного многогранника*). Желаем вам удачи!

---

*) Многогранник-«голову», изображенный на заставке к статье (с. 8), «изобрела» студентка 2 курса МГПИ Марина Бойцова.

*С. Овчинников*

# Плоские переключательные схемы

Что такое переключательная схема, легко понять из рисунка 1. Имеются две группы по $n$ *полюсов* — группа *входов* и группа *выходов* (на рис. 1 $n = 4$). Каждый полюс входа соединен связью с одним и только с одним полюсом выхода. Читатели, знакомые с понятием *графа*, могут заметить, что переключательная схема представляет собой граф специального вида. Такие графы называются *сетями*.

При создании технических устройств, использующих переключательные схемы, требуется, чтобы пересекающиеся связи были изолированы друг от друга. В обычных устройствах соединения осуществляются проводами, и поэтому это требование легко удовлетворяется. Примером такого устройства может служить переключательная схема, подсоединяющая ваш телефон к подстанции.) Однако при переходе к микросхемам современной электроники задача сильно усложняется. Соединения в таких схемах реализуются напылением на изолирующий слой в нужные места тончайшего проводящего слоя. Ясно, что в этих случаях пересекающиеся связи нужно размещать в разных слоях. Например, в переключательной схеме на рисунке 1 связи разного цвета надо расположить в разных слоях, а связи одного цвета можно расположить в одном слое. Схему, изображенную на рисунке 1, можно выполнить в двух проводящих слоях: в первом слое разместить связи красного цвета, а во втором — связи синего цвета (см. рис. 2).

Возникает естественный вопрос: каково минимальное число слоев для реализации данной переключательной схемы без пересечения связей? (При этом предполагается, что все связи находятся внутри *платы* — прямоугольника на нашем рисунке).

Рассмотрим два «крайних» случая. Для схемы на рисунке 3, очевидно, нужен один слой. На рисунке 4

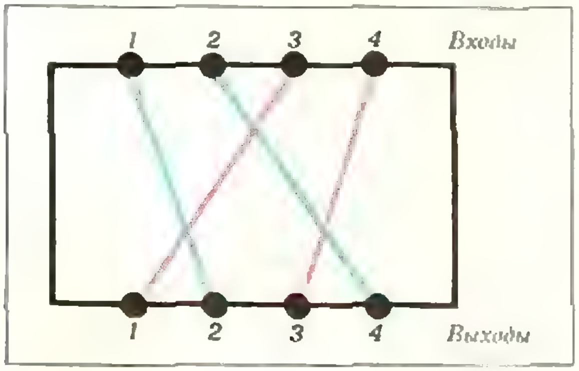


Рис. 1.

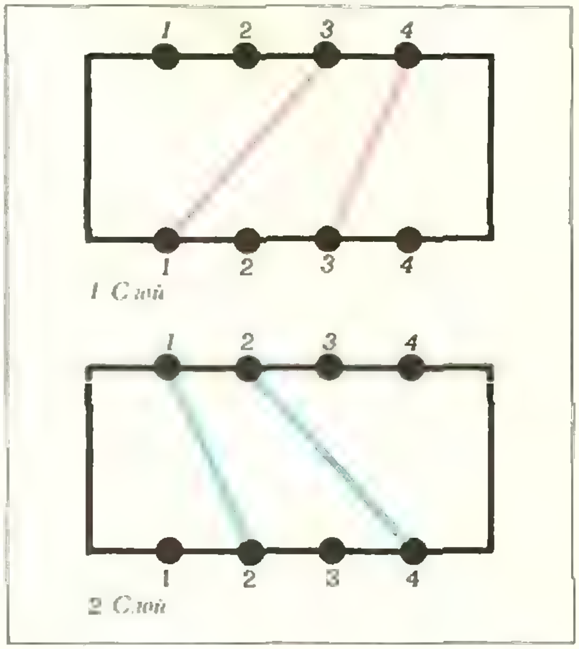


Рис. 2.

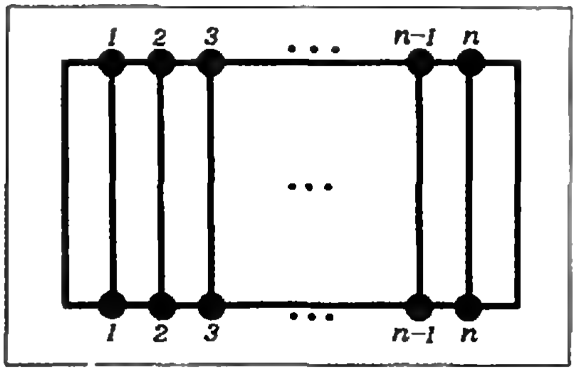


**Рис. 3.**

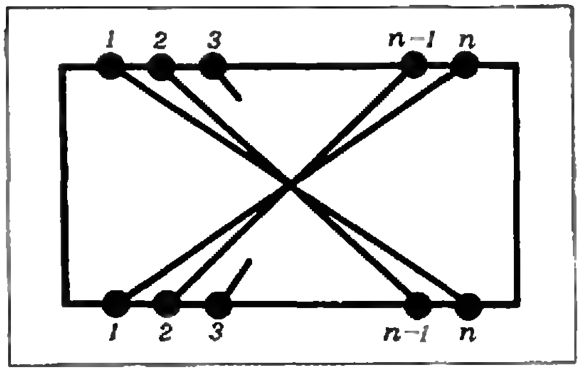


**Рис. 4.**

изображена схема, реализующая симметрию $n$ чисел: $i$-й вход соединен с $(n-i+1)$-м выходом. Для этой схемы необходимо $n$ слоев, так как каждая пара связей должна лежать в разных слоях.

Сформулируем теперь строго условия задачи и докажем основную теорему.

Пусть нам задана переключательная схема с $n$ входами и $n$ выходами; занумеруем их целыми числами 1, 2, ..., $n$. Каждая такая схема задает взаимно однозначное отображение на себя множества чисел $\{1, 2, \dots, n\}$; иными словами, схема задает *перестановку* $P$ множества чисел $\{1, 2, \dots, n\}$, ставящую в соответствие номеру входа номер соединенного с ним выхода. Например, переключательной схеме на рисунке 1 соответствует перестановка $1\to2$, $2\to4$, $3\to1$, $4\to3$. Очевидно, что каждой перестановке, в свою очередь, соответствует некоторая переключательная схема. Поэтому в дальнейшем мы не будем различать переключательные схемы и соответствующие им перестановки.

Число $n$ называется *степенью* перестановки $P$. Связь, соединяющую вход $i$ с выходом $j$, будем обозначать $(i, j)$. Тогда перестановка $P$ может быть определена как множество $\{(i, j)\}$ всех связей.

Рассмотрим некоторые примеры. Схеме на рисунке 1 соответствует перестановка степени 4, которую можно записать в виде множества связей:

$$P_1 = \{(3, 1), (1, 2), (4, 3), (2, 4)\}.$$

Перестановки степени $n$, соответствующие схемам на рисунках 3 и 4, записываются так:

$$P_2 = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)\},$$
$$P_3 = \{(n, 1), (n-1, 2), \dots, (1, n)\}.$$

Задача 1. Докажите, что две связи $(i, j)$ и $(p, q)$ пересекаются тогда и только тогда, когда $(i-p)(j-q) < 0$.

Подмножество связей называется *слоем* перестановки $P$, если никакие две связи из этого подмножества не пересекаются. На рисунке 2 изображены два слоя перестановки $P_1$. Перестановка $P_2$ сама является слоем, а для перестановки $P_3$ каждый слой состоит ровно из одной связи.

*Толщиной перестановки* $P$ называется минимальное число слоев, на которые ее можно разложить. В наших примерах толщина $P_1$ равна 2, толщина $P_2$ равна 1, а толщина $P_3$ равна $n$. Очевидно, что толщина любой перестановки не превосходит ее степени $n$.

Задача 2. Докажите, что для любого целого $p \leqslant n$ существует перестановка $P$ степени $n$ и толщины $p$.

Перестановки толщины 2 называются *2-реализуемыми* (их можно разложить ровно на два слоя) и обладают следующим свойством. Назовем связь $(i, j)$ правой, если $i \geqslant j$, и левой, если $i < j$ (на рисунке 5 изображена перестановка, правые связи которой выделены красным цветом, а левые — синим). Оказывается, что множество всех левых связей 2-реализуемой перестановки является слоем. (Докажите это.)

Например, перестановка на рисунке 5 не 2-реализуема: ее левые

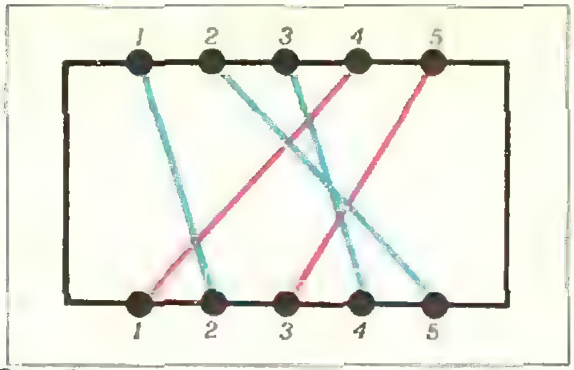


**Рис. 5.**

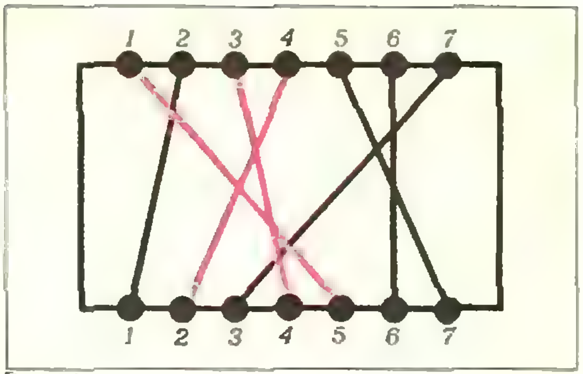


**Рис. 6.**

связи (2, 5) и (3, 4) пересекаются. Противоположным по смыслу понятию слоя является понятие пучка. Подмножество связей называется *пучком*, если любые две связи из этого подмножества пересекаются. Толщиной пучка называется число входящих в него связей. Каждую связь мы будем считать пучком толщины 1.

Вернемся к нашим примерам. У перестановки $P_1$ (см. рис. 1) имеется три пучка толщины 2:

$\{(3, 1), (1, 2)\}$, $\{(3, 1), (2, 4)\}$ и $\{(4, 3), (2, 4)\}$.

Все пучки перестановки $P_2$ (рис. 2) имеют толщину 1. У перестановки $P_3$ (рис. 3) любое подмножество связей является пучком. В частности, сама перестановка $P_3$ является пучком.

Среди пучков данной перестановки особый интерес представляют пучки максимальной толщины. Такие пучки назовем *максимальными*.

Задача 3. Докажите, что максимальный пучок произвольной перестановки не может состоять из одних только левых ее связей.

Между толщиной перестановки и толщиной ее максимального пучка существует очевидная зависимость: чем более толстые пучки имеются у перестановки, тем она сама толще. Следующая теорема конкретизирует эту зависимость.

Теорема 1. *Толщина перестановки равна толщине ее максимального пучка.*

Так как связи из максимального пучка должны лежать в разных слоях, то число слоев не может быть меньше толщины пучка. Поэтому для доказательства теоремы достаточно построить такое разложение данной перестановки, число слоев которого равно числу связей в максимальном пучке. Иными словами, в каждом слое такого разложения должна лежать ровно одна связь из максимального пучка.

Прежде, чем доказывать теорему 1, установим одно важное свойство максимального пучка.

Лемма. *Пусть*

$$(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_p, j_p)$$

*— связи, входящие в максимальный пучок, причем*

$$j_1 < j_2 < \ldots < j_p.$$

*Если некоторая связь* $(i, j)$ *пересекает связь* $(i_1, j_1)$, *то* $i < i_1$.

Доказательство. Предположив противное, из результата задачи 1 получим, что $j < j_1$. Но тогда связь $(i, j)$ пересекает все связи данного пучка, а это противоречит его максимальности.

Будем говорить, что связь $(i, j)$ *начинается в полюсе* $i$. Тогда доказанное свойство геометрически означает, что любая связь начинающаяся левее максимального пучка, не пересекает самой левой его связи. Аналогично, всякая связь, начинающаяся правее максимального пучка, не пересекает его самой правой связи. Перестановка на рисунке 6 иллюстрирует нашу лемму. Красным отмечены связи максимального пучка. (1, 5) — самая правая связь максимального пучка, (4, 2) — самая левая. Заметим, кстати, что максимальных пучков может быть несколько. Для перестановки на рисунке 6 их три:

$\{(4, 2), (3, 4), (1, 5)\}$, $\{(7, 3), (3, 4), (1, 5)\}$ и $\{(7, 3), (6, 6), (5, 7)\}$.

### Доказательство теоремы 1.

Мы дадим конструктивное доказательство, то есть укажем процесс, с помощью которого можно каждую перестановку разложить на минимальное число слоев.

Обозначим толщину максимального пучка через $p$. Отнесем связь $(u_1, 1)$ (то есть самую левую связь перестановки) в первый слой и обозначим ее $(u_1, v_1)$. Среди всех связей $(i, j)$, не пересекающих $(u_1, v_1)$, рассмотрим связь с наименьшим $j$. Ее обозначим $(u_2, v_2)$ и тоже отнесем в первый слой. Перебирая подряд связи, начиная с самой левой, и относя к первому слою те, которые не пересекают уже выбранных, мы получим множество попарно непересекающихся связей $(u_1, v_1)$, $(u_2, v_2), \ldots, (u_k, v_k)$, которые и образуют первый слой.

Связи, не попавшие в первый слой, сами образуют некоторую перестановку. Применяя к этой перестановке предыдущее построение, мы получим второй слой и так далее.

Посмотрим, что при этом построении происходит с максимальным пучком. Обозначим связи, входящие в этот пучок через $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_p, j_p)$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$. Согласно лемме, связь $(i_1, j_1)$ не пересекается ни с одной связью, начинающейся слева от нее, и, следовательно, должна попасть в первый слой. Никакие другие связи из этого максимального пучка в первый слой уже не попадут, так как они пересекают связь $(i_1, j_1)$. Поэтому из каждого максимального пучка в первый слой попадет по одной связи.

Выделим из нашей перестановки первый слой. Легко видеть, что в оставшейся перестановке максимальные пучки имеют толщину $p-1$. Выделив второй слой, мы получим в оставшейся перестановке максимальные пучки толщины $p-2$. Продолжая этот процесс выделения слоев, мы на $(p-1)$-м шаге получим перестановку, максимальные пучки которой имеют толщину 1. Но это означает, что связи в этой перестановке не пересекаются, и, следовательно, она сама образует последний $p$-й слой.

Итак, мы показали, что любую перестановку можно разложить на слои, число которых равно толщине максимального пучка; это разложение и доказывает теорему.

Упражнение. Проверьте справедливость теоремы для $P_1$, $P_2$ и $P_3$.

Рассмотрим переключательные схемы, соответствующие перестановкам толщины 2, то есть 2-реализуемым перестановкам; они представляют особый интерес, так как для их изготовления требуется всего два проводящих слоя. Пусть две такие переключательные схемы соединены так, как показано на рисунке 7. Очевидно, что получившаяся на рисунке 7 схема эквивалентна переключательной схеме на рисунке 8. Обозначим перестановку, соответствующую схеме рисунка 8, через $P$, а перестановки, соответствующие верхней и нижней схемам рисунка 7 — через $P_1$ и $P_2$ соответственно. Будем говорить, что перестановка $P$ равна *произведению* перестановок $P_1 \cdot P_2$.

Аналогичным образом можно определить произведение любого числа перестановок. Порядок сомножителей в таком произведении важен: например, если взять перестановку

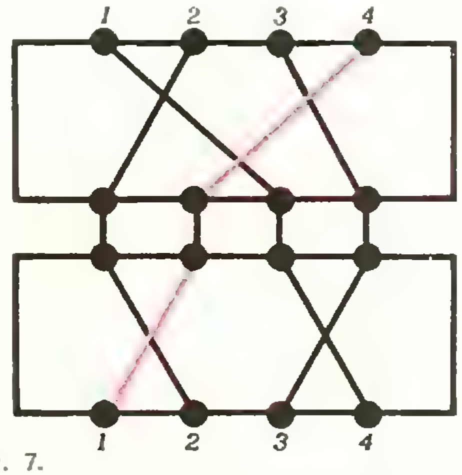


Рис. 7.

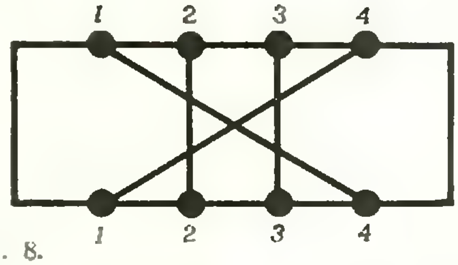


Рис. 8.

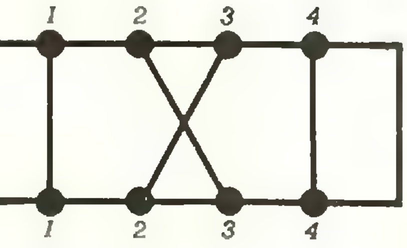


Рис. 9.

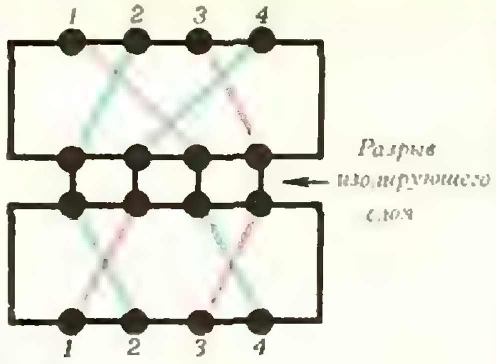


Рис. 10.

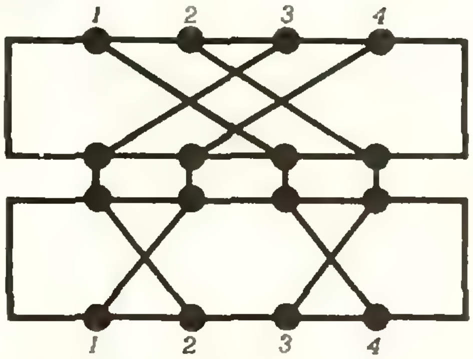


Рис. 11.

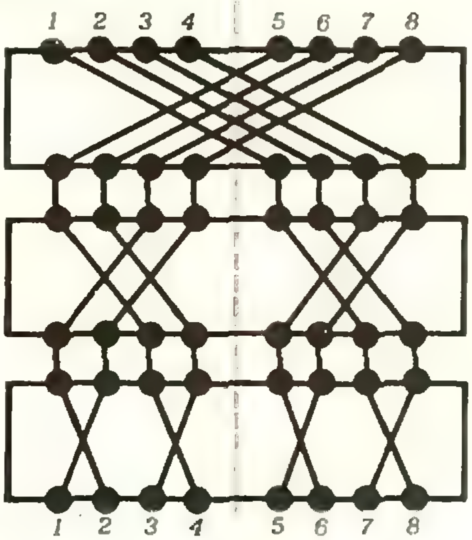


Рис. 12.

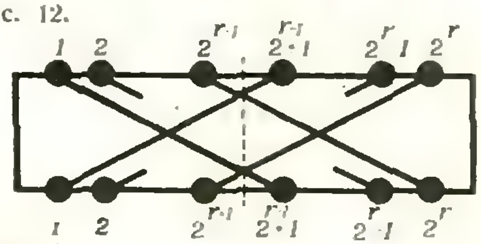


Рис. 13.

$P_2 \cdot P_1$ (см. рис. 7), то ей будет соответствовать схема, изображенная на рисунке 9 (а не на рисунке 8!).

Оказывается, любую перестановку можно разложить в произведение нескольких 2-реализуемых! (Докажите это.)

Если перестановка представляется в виде произведения $s$ «штук» 2-реализуемых перестановок, то говорят, что она *s-каскадно реализуема.* (Так, изображенная на рисунке 8 перестановка $P$ (толщины 3) 2-каскадно реализуема: разложение $P$ на 2 каскада 2-реализуемых перестановок осуществляют перестановки $P_1$ и $P_2$ рисунка 7.) Технологически $s$-каскадно реализуемая перестановка имеет два проводящих слоя и один изолирующий, прерванный $s-1$ раз. Прерыванию изолирующего слоя соответствует разрыв между каскадами; очевидно, что в разрыве изолирующего слоя пересечения связей не происходит. Каждая связь $s$-каскадно реализуемой перестановки (разложенной в произведение 2-реализуемых) проходит через каждый каскад, но, быть может, в разных проводящих слоях — см. рисунок 10; связи, лежащие в одном проводящем слое, обозначены одним цветом.

Итак, как мы сказали, для любой перестановки каскадное разложение существует. А чему равно минимальное число каскадов, необходимых для каскадного разложения данной перестановки? Попробуем это выяснить.

Начнем с перестановки $K_p$, ставящей в соответствие числу $i$ число $p-i+1$, то есть реализующей симметрию $p$ чисел.

Как уже отмечалось, перестановка $K_p$ совпадает со своим максимальным пучком и имеет толщину, равную $p$. Сейчас мы построим некоторое каскадное разложение перестановки $K_p$ на *двуслойные* перестановки и затем покажем, что построенное разложение минимально.

При $p = 2$ перестановка $K_2$ сама является каскадом (единственным). Как разложить перестановку $K_4$ ($p = 4$), видно из рисунка 11. Используя идею разложения на каскады для перестановки $K_4$, построим каскадное разложение перестановки $K_8$ ($p = 8$) — см. рисунок 12. Теперь уже ясно, как построить каскадное разложение перестановки $K_p$, если $p$ равно степени двойки. Верхний каскад (для $p = 2^r$) изображен на рисунке 13. Остальные каскады симметрично реализуют перестановки полюсов 1, 2, ..., $2^{r-1}$ и полюсов $2^{r-1}+1$, $2^{r-1}+2$, ..., $2^r$; при этом $k$-й каскад перестановки степени $2^r$ получается объединением двух одинаковых ($k-1$)-х каскадов перестановки степени $2^{r-1}$. Очевидно, что число каскадов в построенном каскадном разложении перестановки $K_{2^r}$ равно $r$.

Пусть теперь $p$ не является степенью двойки; тогда существует такое $r$, что $2^r < p < 2^{r+1}$. Рассмотрим каскадное разложение перестановки $K_{2^{r+1}}$ степени $2^{r+1}$ и выделим в нем связи, начинающиеся в полюсах с номерами, не превосходящими $p$. Очевидно, что эти связи определяют перестановку $K_p$ (входы с номерами $2^{r+1}-p+1$, $2^{r+1}-p+2$, ..., $2^{r+1}$ нужно перенумеровать, начиная с единицы: 1, 2, ... $p$), а данное каскадное разложение перестановки $K_{2^{r+1}}$ осуществляет также разложение перестановки $K_p$. Например, на рисунке 14 каскадное разложение для перестановки $K_6$ выделено из разложения для $K_8$.

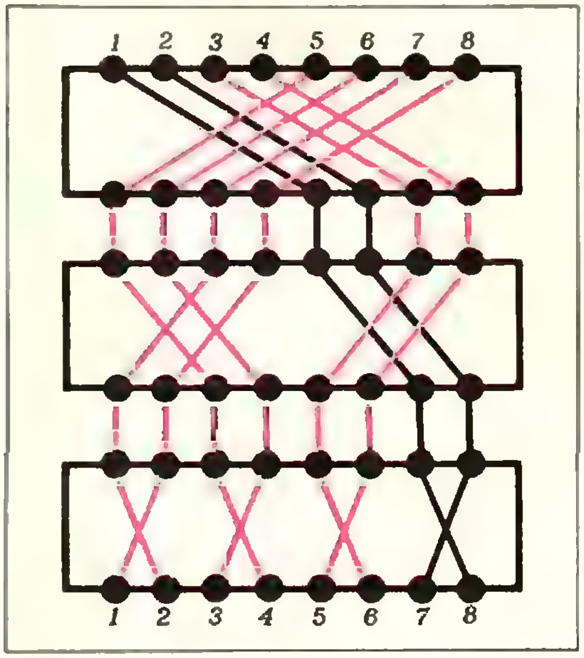


Рис. 14.

Итак, для перестановок $K_p$, являющихся пучками, мы построили каскадные разложения. Если $p$ таково, что $2^{r-1} < p \leqslant 2^r$, то число каскадов равно $r$. Иначе это можно записать так: $r = ]\log_2 p[$, где $]a[$ обозначает наименьшее целое, не меньшее $a$.

Покажем теперь, что построенные каскадные разложения перестановок $K_p$ состоят из минимального числа каскадов. Для этой цели применим индукцию по $p$. Заметим, что если $p < q$, то для минимального каскадного разложения перестановки степени $q$ требуется каскадов не меньше, чем для минимального разложения перестановки степени $p$.

При $p = 2$ наше утверждение очевидно. Пусть утверждение доказано для $p = k$. Рассмотрим два случая.

а) $2^{r-1} < k < 2^r$.

Для перестановки $K_k$ степени $k$ имеем $r$-каскадное разложение. При переходе от $k$ к $k+1$ число каскадов, как следует из нашего замечания, не уменьшается. Но так как $k$ — число целое, то $k+1 \leqslant 2^r$, и, значит, мы можем построить $r$-каскадное разложение перестановки $K_{k+1}$ степени $k+1$; понятно теперь, что оно и является минимальным.

б) $k = 2^r$.

Рассмотрим перестановку $K_{k+1} = K_{2^r+1}$. Так как $2^r+1 < 2^{r+1}$, то мы можем построить для перестановки $K_{k+1}$ ($r+1$)-каскадное разложение. Покажем, что $r$ каскадов для разложения перестановки $K_{k+1}$ недостаточно (тогда ($r+1$)-каскадное разложение как раз и будет минимальным).

Предположим противное: пусть имеется $r$-каскадное разложение перестановки $K_{2^r+1}$ степени $2^r+1$. Рассмотрим верхний каскад этого разложения. Один из двух слоев этого каскада содержит больше половины связей, то есть больше, чем $2^{r-1}$ связей. Эти связи не пересекаются и, следовательно, оставшиеся $r-1$ каскадов должны реализовать разложение пучка этих связей, что невозможно, так как степень этого пучка больше $2^{r-1}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Так как для каскадного разложения произвольной перестановки (не являющейся, как $K_p$, пучком) требуется каскадов не меньше, чем для разложения ее максимального пучка, то справедлива

Теорема 2. *Минимальное число каскадов, необходимое для двуслойной реализации перестановки степени $n$ и толщины $p$, не меньше, чем* $]\log_2 p[$.

Мы получили оценку «снизу» для минимального числа каскадов. Используя очень похожие рассуждения, можно получить оценку «сверху»:

Теорема 3. *Произвольная перестановка степени $n$ допускает $]\log_2 n[$-каскадную реализацию.*

Задача 4. Докажите теорему 3.

Полученные «верхняя» и «нижняя» оценки мало отличаются для «толстых» перестановок. Однако для перестановок малой толщины различие весьма существенно, и возникает необходимость в более точных оценках. Следующие две задачи дают некоторое продвижение в этом вопросе, однако точная формула для минимального числа двуслойных каскадов, необходимых для разложения данной перестановки, пока неизвестна.

Задача 5. Докажите, что перестановка толщины $p$ допускает $(2\cdot]\log_2 p[-1)$-каскадную реализацию.

Задача 6. Докажите, что перестановка толщины $p$ допускает $\left(2\cdot]\log_2\frac{p}{3}[+2\right)$-каскадную реализацию.

# Пленники царя Дадона

Во время набега царь Дадон захватил 100 пленников. Их посадили в одиночные камеры, а по тюремному коридору ходила до зубов вооруженная стража. Каждая камера запиралась на замок; ко всем ста замкам подходил ключ, хранившийся у царя Дадона на поясе. Один поворот ключа отпирал замок, еще один поворот вновь запирал, следующий поворот опять отпирал и т. д.

Ко дню своего рождения царь решил освободить заключенных, и еще накануне послал человека, который вставлял ключ в замок каждой камеры и поворачивал на один оборот. Все двери оказались отпертыми. Однако день рождения еще не наступил, и выйти из камер было невозможно: вдоль коридора ходила вооруженная стража.

Едва посыльный успел возвратить ключ, как царь Дадон изменил свое решение. Он поручил новому посланцу повернуть ключ в замке каждой второй камеры. Двери второй, четвертой, шестой и всех остальных четных камер оказались вновь запертыми. Следующий посланец сделал по одному обороту в замках третьей, шестой, девятой, двенадцатой и т. д. камер. Еще один — в каждой четвертой камере. То же самое повторяли следующие посланцы царя — до сотого включительно, который повернул ключ лишь в замке сотой камеры.

Наконец день рождения царя наступил. Стража была снята и сидевшие в открытых камерах вышли на свободу.

Сколько пленников отпустил на свободу царь Дадон?

*А. Х.*

*Г. Коткин*

# Всплывающий воздушный пузырек и закон Архимеда

Представьте себе, что вы готовитесь к экзамену по физике, расположившись на лесной опушке на берегу озера. Повторяя второй закон Ньютона, вы хотите применить этот закон к движению всплывающих со дна пузырьков газа. И тут начинается что-то странное...

Сила тяжести, действующая на пузырек, раз в тысячу меньше веса вытесняемой им воды (плотности воздуха и воды отличаются примерно в тысячу раз). Сила сопротивления при жидком трении, пропорциональная скорости пузырька, поначалу мала, поэтому ее учитывать не стоит *). Таким образом, ускорение определяется, в основном, архимедовой выталкивающей силой:

$$a = \frac{V\rho g - mg}{m} \approx \frac{V\rho g}{m}. \qquad (1)$$

Здесь $m$ — масса, $a$ — ускорение пузырька, $V$ — его объем, $\rho$ — плотность воды. Пусть плотность газа $\rho_0$. Тогда $m = V\rho_0$ и

$$a \approx \frac{\rho}{\rho_0} g \approx 10^3 g.$$

Итак, ускорение пузырька порядка тысячи $g$. Это очень большая величина. Вспомним, что ускорение, которое приходится переносить космонавтам и летчикам, достигает нескольких $g$ (скажем, до $10\,g$). Если снаряд будет двигаться в стволе длиной 1 *м* с таким ускорением, то он сможет взлететь на высоту $h = 1$ *км* (проверьте это самостоятельно); если внутрь нашего всплывающего пузырька попадет букашка, она будет раздавлена в таком «лифте»; и т. д. и т. п. Поистине богатые возможности для изобретателей!

Впрочем, сидя на берегу озера, можно увидеть собственными глазами, что на самом деле ускорение пузырька вовсе не так велико.

Вместо того чтобы сразу дать ответ на возникшую загадку, зададим еще одну.

Пусть вы без труда можете поднять пудовую гирю ($m = 16$ *кг*) на высоту 1 *м*. А что если приложить силу, равную весу этой гири, к камешку массы 1 *г* (или к копеечной монете) на пути тоже в 1 *м*? Нетрудно сообразить, что камешек после этого взлетит на высоту 16 *км*. (Сопротивление воздуха не учитываем. Ясно, что дело не в нем.) Что это — еще один фантастический проект? Нет, на этот раз разоблачить автора проекта совсем легко: поднимать придется не только камешек, но и собственную руку! К каждому ее грамму нужно приложить силу порядка 160 *н*. Вся рука будет весить несколько тонн, и поднять ее не хватит сил.

Таким образом, неподвижная или движущаяся с небольшим ускорением рука может приложить к грузу силу гораздо бо́льшую, чем рука, которая движется с большим ускорением.

Но ведь при движении воздушного пузырька в воде возникает аналогичная картина. Когда пузырек поднимается, некоторая масса воды устремляется вниз, заполняя освобожденное место. Пузырек взаимодействует с движущейся, а не с неподвижной водой. По-видимому,

---

*) О роли силы сопротивления будет сказано дальше.

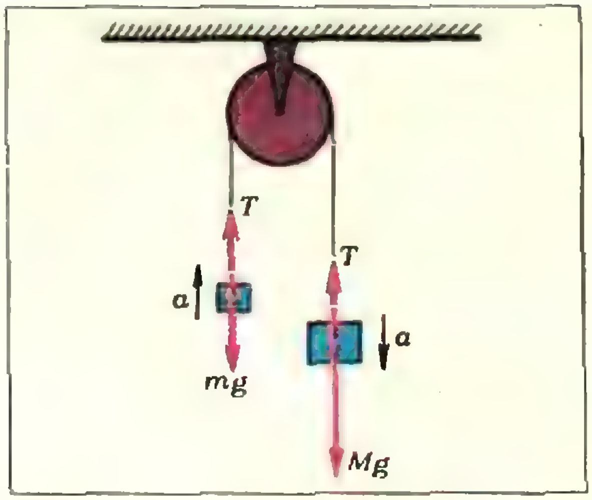


Рис. 1.

и сила, действующая со стороны воды на пузырек, зависит от ускорения самой воды. Закон Архимеда, записанный в обычном виде $F_{\text{выт}} = V\rho g$, неприменим к пузырьку, движущемуся ускоренно!

Оказывается, задача о пузырьке очень близка к задаче о движении грузиков, связанных переброшенной через неподвижный блок нитью (рис. 1). Нетрудно увидеть аналогию между ними. Действительно, один из грузиков (с массой $m$) как бы играет роль пузырька, другой (с массой $M$) — роль воды, а натяжение нити $T$ — роль выталкивающей силы.

Второй закон Ньютона в применении к грузику массы $m$ можно записать так:

$$ma = T - mg. \qquad (2)$$

Если грузик массы $m$ удерживать, то натяжение нити $T$ окажется численно равным весу грузика $Mg$ (весу «вытесненной» воды). Подставив $T = Mg$ в уравнение (2), получаем:

$$a = \frac{M-m}{m} g \quad \text{(неверно!)}. \qquad (3)$$

При $M \gg m$ оказывается $a \gg g$. Этот вывод своей нелепостью похож на вывод об огромном ускорении пузырька (см. (1)). Причина обеих ошибок одна и та же: необходимо учитывать движение грузика массы $M$ и движение «вытесненной» воды. Напомним, что для правильного решения задачи о грузиках нужно записать еще уравнение второго закона Ньютона для грузика массы $M$

$$Ma = Mg - T \qquad (4)$$

и решить систему уравнений (2) и (4). Отсюда

$$a = \frac{M-m}{M+m} g, \qquad (5)$$

$$T = \frac{2mM}{M+m} g.$$

При $m \ll M$ оказывается $a \approx g$, $T \ll Mg$, что вполне соответствует действительности.

Можно решить эту задачу и другим способом — воспользоваться законом сохранения энергии. При смещении грузика массы $m$ вверх (и соответственно, грузика массы $M$ вниз) на расстояние $h$ потенциальная энергия системы уменьшится на величину $Mgh - mgh$. Кинетическая энергия станет равной $\frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}$, где $v$ — скорость грузиков (начальную скорость считаем равной нулю). Приравняв величины

$$Mgh - mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2},$$

находим

$$v^2 = 2\frac{M-m}{M+m} gh,$$

или (см. (5))

$$v^2 = 2ah. \qquad (6)$$

Такая связь скорости и перемещения характерна для движения с постоянным ускорением $a$. $\left(\text{В данном случае } a = \frac{M-m}{M+m} g.\right)$

Воспользуемся этим для решения задачи о движении тела в жидкости. Правда, привести полное решение задачи о воздушном пузырьке мы не сможем. Дело в том, что распределение скоростей жидкости вокруг пузырька слишком сложно (рис. 2). Однако мы решим похожую задачу.

Рассмотрим движение длинного стержня радиуса $r$, длины $l$ и массы $m$ вдоль оси заполненной жидкостью плотности $\rho$ трубки радиуса $R \ll l$ (рис. 3). В этом случае движение жидкости легко рассчитать. Вытесняемая верхней частью стержня жидкость смещается вниз и заполняет место, освобождаемое нижней частью стержня. Если исключить небольшие участки вблизи торцов стержня, то скорость жидкости всюду между стержнем и стенками трубки оказывается одной и той же. Обозначим через $v$ скорость стержня, а через $v_1$ — скорость воды, движущейся между стержнем и стенками трубки, в тот момент, когда стержень поднялся на высоту $h$ от того уровня, на котором его скорость была равна нулю. Приравняв объем $\pi r^2 v \Delta t$ жидкости, вытесненной стержнем за малый промежуток времени $\Delta t$, объему $\pi (R^2 - r^2)\, v_1 \Delta t$ жидкости, прошедшей за это же время между стержнем и трубкой, находим

$$v_1 = \frac{r^2}{R^2 - r^2}\, v\,.$$

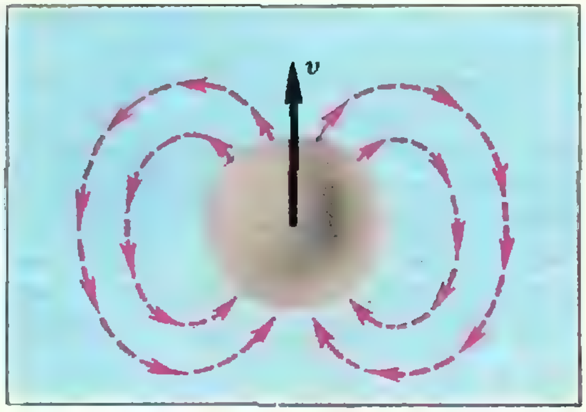


Рис. 2.

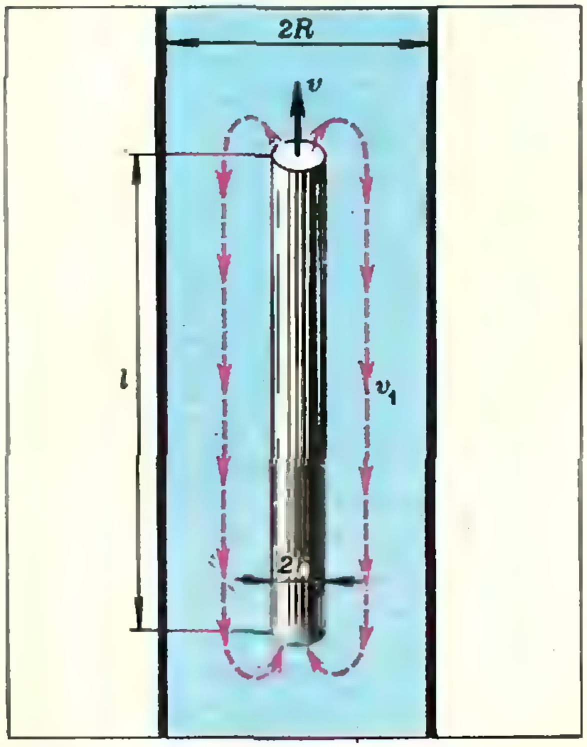


Рис. 3.

За то время, пока стержень поднимался на высоту $h$, масса жидкости, равная $V\rho$ ($V = \pi r^2 l$ — объем стержня), опустится тоже на $h$, тогда уменьшение потенциальной энергии стержня и жидкости равно $V\rho g h - m g h$. Кинетическая энергия системы равна $\frac{mv^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2}$, где $m_1$ — масса движущейся жидкости. Кинетическую энергию жидкости удобно записать в таком виде:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{\pi (R^2 - r^2)\, l\rho}{2}\, v_1^2 =$$

$$= \frac{V\rho r^2}{2(R^2 - r^2)}\, v^2 = \frac{m' v^2}{2},$$

где $m' = \frac{V\rho r^2}{R^2 - r^2}$.

Воспользовавшись законом сохранения энергии, получим

$$V\rho g h - m g h = \frac{mv^2}{2} + \frac{m' v^2}{2},$$

откуда

$$v^2 = 2\,\frac{V\rho - m}{m + m'}\, g h\,.$$

Такой зависимости скорости $v$ от перемещения $h$ отвечает движение с ускорением (см. (6))

$$a = \frac{V\rho - m}{m + m'}\, g\,. \qquad (7)$$

Таким образом, стержень движется так, будто бы его масса увеличилась на величину $m'$, а выталкивающая сила осталась равной гидростатической архимедовой силе ($V\rho g$). Величину $m'$ называют присоединенной массой. Это чисто формальное, но удобное толкование равенства (7). Формула (7) получается из неправильной формулы (1) добавлением в знаменателе слагаемого $m'$. Отметим, что подобным же образом формула (5) получается из (3) добавлением в знаменателе слагаемого $M$.

Силу $F_{\text{выт}}$, с которой движущаяся жидкость действует на стержень, теперь легко получить из второго закона Ньютона

$$ma = F_{\text{выт}} - mg,$$

откуда

$$F_{\text{выт}} = m(g+a) = mg\frac{V\rho + m'}{m+m'}. \qquad (8)$$

В частности, если $m \ll m'$, то $F_{\text{выт}} \approx \approx mg\frac{R^2}{r^2}$; при $R \sim r$ выталкивающая сила оказывается порядка веса стержня (и не имеет отношения к весу вытесненной воды). Если же $m \gg m'$, то $F_{\text{выт}} \approx V\rho g$, то есть мы возвращаемся к закону Архимеда в обычном виде.

Для шарика (в частности, для пузырька) расчет дает такой результат: кинетическая энергия жидкости равна $\frac{1}{4}V\rho v^2$, где $V$ — объем шарика, $v$ — его скорость. Тогда присоединенная масса для пузырька $m' = \frac{1}{2}V\rho$, т. е. она равна половине массы вытесненной воды. Пузырек всплывает с ускорением

$$a = \frac{V\rho - V\rho_0}{V\rho_0 + V\rho/2}\, g \approx 2g.$$

Выталкивающая сила определяется из уравнения (8), она приблизительно равна $F_{\text{выт}} \approx 3\,mg$, т. е. тройному весу неподвижного пузырька (и во много раз меньше веса вытесненной воды).

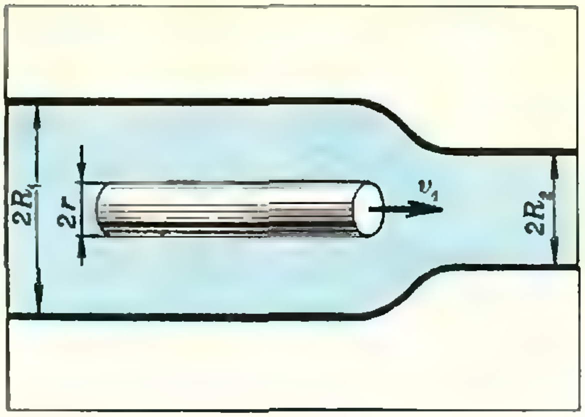


Рис. 4.

Теперь вспомним о силе сопротивления. Для пузырька газа в жидкости она определяется формулой $F_c = 12\pi\eta r v$, где $r$ — радиус пузырька, $v$ — его скорость, $\eta$ — так называемый коэффициент вязкости среды *). С учетом силы сопротивления уравнение движения пузырька запишется так (см. (7)):

$$(m+m')a = V\rho g - mg - F_c. \qquad (9)$$

Очевидно, что $F_c$ уменьшает ускорение (а значит, и скорость) пузырька по сравнению с тем случаем, когда мы не учитываем сопротивление жидкости. Однако, если $\frac{4}{3}\pi r^3\rho g \gg 12\pi\eta r v$, т. е. при $v \ll \frac{r^2\rho g}{9\eta}$, силой сопротивления можно пренебречь. Например, если речь идет о пузырьке радиуса $r = 3$ *мм* **), движущемся в воде ($\rho = 1$ *г/см*$^3$, $\eta = 1{,}0 \cdot \times 10^{-2}$ *г/(см·сек)*), то его скорость должна быть много меньше величины $v_0 = \frac{r^2\rho g}{9\eta} = 10$ *м/сек*. Прикинем, на каком пути $h_0$ пузырек достигнет

---

*) Приведенная формула справедлива при $\rho v r \gg \eta$; если $\rho v r \ll \eta$, коэффициент $12\pi$ следует заменить на $4\pi$. Для твердого шарика при $\rho v r \ll \eta$ коэффициент равен $6\pi$ (формула Стокса).

**) Пузырек большего радиуса не может сохранить шарообразную форму (подобно падающей дождевой капле, деформируемой силой давления воздуха; см., например, статью Н. Ш. Слободецкого «О форме дождевой капли», «Квант», 1970, № 8).

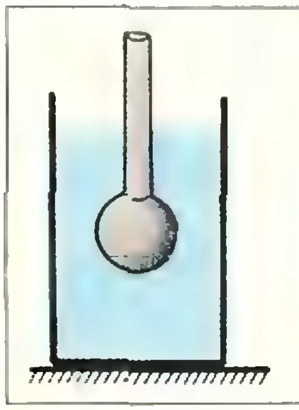


Рис. 5.

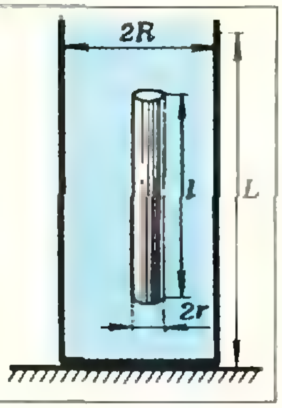


Рис. 6.

такой скорости. Для грубой оценки воспользуемся равенством $v_0^2 = 2ah_0$, где $a = 3g$:

$$h_0 = \frac{v_0^2}{6g} \approx 1{,}5\ м.$$

*Таким образом, на пути* 1,5 *м* силой сопротивления можно пренебречь. При этом $v_0 = 10$ *м/сек* — это предельная скорость, которой может достичь всплывающий пузырек газа в воде.

Упражнения

1. Цилиндрическая труба, состоящая из двух частей с радиусами $R_1$ и $R_2$ (рис. 4), соединенных плавным переходом, заполнена водой. Вдоль оси трубы движется длинный стержень радиуса $r$ и плотности $\rho_0$. Скорость стержня в левой части трубы равна $v_1$. Какой станет его скорость после перехода в правую часть трубы?

2. В жидкости плотности $\rho$ плавает шарик радиуса $R$ с трубкой радиуса $r \ll R$ (рис. 5). Масса шарика с трубкой равна $m$. Шарик удален от поверхности жидкости, дна и стенок сосуда на расстояние, много большее его радиуса. Шарик слегка приподняли за трубку и отпустили. Определить период возникших колебаний шарика.

3. Вдоль оси трубки с водой всплывает стержень массы $m$ (рис. 6). Определить силу, действующую на дно.

## Ребусы

В каждом из следующих примеров цифры заменены буквами (каждой цифре соответствует одна буква), вместо звездочек могут стоять любые цифры. Восстановите первоначальный вид примеров.

```
1.        и к с
        × и к с
        -------
        с * * *
    * т * *
    -----------
    д е в я т ь

2.        и к с
        × и к с
        -------
        * * * *
      * * * к
    с * * *
    -----------
    ч е т ы р е

3.      и к с
      × и к с
      -------
        * * *
      и к с
    * * *
    ---------
    ш е с т ь

4.      д в а
      × д в а
      -------
      к * * *
    * * *
    ---------
    и г р е к

5.      с т о
        с т о
      -------
      * * * *
    * * * г
    * * *
    ---------
    и г р е к

6.      з е т
      × з е т
      -------
      * * * *
      * * е
    * * *
    ---------
    с о р о к
```

*Э. Рекстин*

*М. Хапланов*

# Трансцендентные числа

Понятие о *числе* формировалось на протяжении тысячелетий. И лишь двести лет тому назад — прежде всего в трудах Л. Эйлера (1707—1783) — в математику вошли комплексные числа, и завершилось развитие понятия о числе.

Напомним этапы (нехронологические) этого развития:

а) *натуральные числа* 1, 2, 3, ...;

б) *целые числа* ... —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, ...;

в) *рациональные числа*, т. е. числа вида $\frac{p}{q}$, где $p$ — целое, $q$ — натуральное число;

г) *действительные числа*, т. е. числа, выражаемые бесконечными десятичными дробями;

д) *комплексные числа*, т. е. числа вида $a+bi$, где $a$ и $b$ — действительные числа, а символ $i$ определяется условием $i^2 = -1$.

В этой последовательности каждый следующий класс содержит все числа предыдущего класса и дополнительно «новые» числа. При каждом расширении класса чисел мы приобретаем возможность производить во всех случаях те или иные действия, которые не всегда выполнимы в «старых» числах. Так, в классе целых чисел всегда выполнимо вычитание, а в классе рациональных сверх того всегда выполнимо деление, в классе действительных чисел всегда выполнимы не только четыре арифметических действия, но — для положительных чисел — извлечение корня, и вообще возведение в любую действительную степень, а также нахождение логарифма. Наконец, как доказал в 1799 году Гаусс (1777—1855), в комплексных числах всегда разрешимы *алгебраические уравнения* любой степени: уравнение

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n=0, \qquad (1)$$

где $n$ — натуральное число, а коэффициенты — комплексные, имеет $n$ комплексных корней. Еще раньше (1748 г.) Эйлер построил теорию показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных им функций от комплексного аргумента.

В настоящей статье мы рассмотрим другую классификацию чисел, именно, разбиение их на *алгебраические* и *неалгебраические* (иначе — *трансцендентные*)*).

Определение. *Число называется алгебраическим, если существует алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого оно является.*

Подчеркнем, что для того, чтобы число было алгебраическим, уравнение (1), которому оно удовлетворяет, должно иметь коэффициентами целые числа (или может быть приведено к такому уравнению).

Очевидно, рациональные числа являются алгебраическими: $\frac{p}{q}$ есть корень уравнения $qz-p=0$ с целыми коэффициентами $q$ и $-p$. Алгебраическими числами являются корни квадратных уравнений с целыми коэффициентами, например: число $i$ (корень уравнения $z^2+1=0$), число $-\sqrt{5}-1$ (корень уравнения

---

*) См. также статью Д. Б. Фукса и М. Б. Фукса «Рациональные приближения и трансцендентность» и статью Л. А. Калужнина «К 100-летию теории множеств Георга Кантора», «Квант», 1973, № 12.

$z^2+2z-4=0$), число $1-i\sqrt{5}$ (корень уравнения $z^2-2z+6=0$).

### Существуют ли трансцендентные числа?

Естественно возникает вопрос: а есть ли вообще трансцендентные числа?

Положительный ответ на него дал в 1844 году французский математик Лиувилль (1809—1882). В 1873 году Эрмит доказал трансцендентность числа $e$, в 1882 году Линдеман — трансцендентность числа $\pi$. В 1900 году на II Международном конгрессе математиков в Париже Д. Гильберт (1860—1940), среди поставленных им и ставших знаменитыми 23 проблем, сформулировал седьмую проблему: *трансцендентны ли числа вида* $\alpha^\beta$, *где* $\alpha$ *— алгебраическое число, отличное от нуля и единицы, а* $\beta$ *— иррациональное алгебраическое число?*

Положительный ответ на этот вопрос дал в 1934 году выдающийся советский математик А. О. Гельфонд (1906—1968).

### Результаты Лиувилля

В дальнейшем мы будем предполагать, что алгебраические и трансцендентные числа — действительные, хотя все остается справедливым и для комплексных чисел (см. упражнения в конце статьи).

**Теорема 1.** *Пусть* $\alpha$ *— иррациональное число, являющееся корнем уравнения*

$$f(z)\equiv a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n=0. \quad (2)$$

*По коэффициентам уравнения и произвольному* $A>|\alpha|$ *можно найти такое число* $M$, *что для любой дроби* $\frac{p}{q}$, $\left|\frac{p}{q}\right|\leqslant A$, *не являющейся корнем уравнения* (2), *справедливо неравенство*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{1}{Mq^n}. \quad (3)$$

**Доказательство.** По условию теоремы имеем:

$$f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n=0,$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)+a_n\neq0.$$

Отсюда

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(\frac{p}{q}\right)-f(\alpha)=a_0\left[\left(\frac{p}{q}\right)^n-\alpha^n\right]+a_1\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}-\alpha^{n-1}\right]+\ldots+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}-\alpha\right)=\left(\frac{p}{q}-\alpha\right)\times$$
$$\times\left\{a_0\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}\alpha+\ldots+\left(\frac{p}{q}\right)\alpha^{n-2}+\alpha^{n-1}\right]+a_1\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}+\left(\frac{p}{q}\right)^{n-3}\alpha+\ldots+\alpha^{n-2}\right]+\ldots+a_{n-1}\right\}.$$

Так как $|\alpha|<A$, $\left|\frac{p}{q}\right|\leqslant A$, то

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|\leqslant\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|M, \quad (4)$$

где

$$M=|a_0|nA^{n-1}+|a_1|\times(n-1)A^{n-2}+\ldots+|a_{n-1}|. \quad (5)$$

Но

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\frac{|a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\ldots+a_nq^n|}{q^n}. \quad (6)$$

В числителе дроби (6) $a_0$, $a_1,\ldots$, $a_n$, $p$, $q$ — целые числа, поэтому числитель (6) — целое число, а так как $f\left(\frac{p}{q}\right)\neq0$, то он не меньше единицы. Следовательно,

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|\geqslant\frac{1}{q^n}. \quad (7)$$

Из (4) и (7) следует (3). Теорема доказана.

Теорема 2. *Число*

$$\alpha = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^{2!}} + \frac{c_3}{10^{3!}} + \ldots + \frac{c_k}{10^{k!}} + \ldots,$$

*где $c_0$ — произвольное целое, а $c_1$, $c_2$,… принимают одно из значений 0, 1, 2,…, 9 и не равны нулю подряд, начиная с некоторого, — трансцендентно.*

Доказательство. Положим

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^{2!}} + \ldots + \frac{c_k}{10^{k!}} = \frac{p}{q}. \quad (8)$$

Тогда

$$\alpha - \frac{p}{q} = \frac{c_{k+1}}{10^{(k+1)!}} + \frac{c_{k+2}}{10^{(k+2)!}} + \ldots > 0,$$

и так как $q = 10^{k!}$, то

$$\alpha - \frac{p}{q} = \frac{c_{k+1}}{q^{k+1}} + \frac{c_{k+2}}{q^{(k+1)(k+2)}} + \ldots$$

Отсюда

$$\alpha - \frac{p}{q} \leqslant 9\left(\frac{1}{q^{k+1}} + \frac{1}{q^{(k+1)(k+2)}} + \ldots\right) < \frac{9}{(q-1)q^k}. \quad (9)$$

Чтобы доказать трансцендентность числа $\alpha$, предположим противное — что оно алгебраическое; тогда $\alpha$ удовлетворяет уравнению (1), коэффициенты которого — целые числа. Обозначим через $d$ кратчайшее расстояние от корня $\alpha$ до других действительных корней уравнения.

Положив $A = |\alpha| + d$, вычислим по формуле (5) число $M$ и выберем натуральное число $k$ таким большим, чтобы одновременно выполнялись следующие три неравенства:

$$k > n, \quad \frac{9}{(q-1)q^k} < d,$$

$$\frac{9}{(q-1)q^{k-n}} < \frac{1}{M}. \quad (10)$$

В силу неравенства (9) и среднего из условий (10), $\frac{p}{q}$ отстоит от $\alpha$ меньше чем на $d$, и потому $\frac{p}{q}$ не является корнем уравнения (1). Так как

$$\left|\frac{p}{q}\right| = \left|\alpha - \left(\alpha - \frac{p}{q}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\alpha| + \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < |\alpha| + d = A,$$

то выполняются условия теоремы 1, и следовательно,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{Mq^n}. \quad (11)$$

С другой стороны, из неравенства (9) и последнего из условий (10)

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Mq^n}. \quad (12)$$

Таким образом, предположение, что $\alpha$ — алгебраическое число, привело к противоречивым неравенствам (11) и (12). Следовательно, $\alpha$ — трансцендентное число.

Итак, теорема 2 позволяет нам строить трансцендентные числа. Именно, трансцендентное число можно получить из всякой бесконечной дроби, у которой не все цифры, начиная с некоторой, нули, по следующему способу: нужно $k$-ю цифру после запятой поставить на место с номером $k!$, а остальные места заполнить нулями. Например, из числа 0,314159… получается такое трансцендентное число:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{6-е} \\ \text{место}}}{0{,}3100040\ldots} \qquad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{24-е} \\ \text{место}}}{010\ldots} \qquad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{120-е} \\ \text{место}}}{050\ldots}$$

## Заключение

С одной стороны, действительные трансцендентные числа составляют часть всех действительных чисел. Но приведенный в конце предыдущего пункта пример показывает, что в некотором смысле трансцендентных чисел «столько же», сколько и действительных, — именно в том смысле, что из каждого действительного числа (кроме конечных десятичных чисел) можно образовать трансцендентное.

Однако в некотором другом смысле *почти все действительные числа — трансцендентные, алгебраические же составляют лишь ничтожную часть действительных чисел*!

В 1878 году немецкий математик Г. Кантор (1845—1918) доказал, что алгебраические числа можно занумеровать так, что каждое алгебраическое число получит свой номер, и под каждым номером будет алгебраическое число (см. Приложение). Возьмем отрезок сколь угодно малой длины, например длины $\varepsilon = 10^{-15}$ *см* (напомним, что радиус электрона равен приблизительно $10^{-12}$ *см*). Изобразив действительные числа точками числовой прямой, покроем алгебраическую точку № 1 отрезком длины $\frac{1}{2}\varepsilon$, алгебраическую точку № 2 — отрезком длины $\frac{1}{2^2}\varepsilon$, алгебраическую точку № $n$ — отрезком длины $\frac{1}{2^n}\varepsilon$ и так далее. Сумма длин покрывающих отрезков равна $\varepsilon$, хотя они частично и накладываются друг на друга и покрывают не только все алгебраические числа, но и часть трансцендентных. Вся числовая ось бесконечна, а сумма длин отрезков, покрывающих алгебраические точки, составляет всего тысячную долю радиуса электрона! Это наглядно показывает, что почти все числа — трансцендентные, алгебраические же числа являются редкими исключениями.

## Приложение

Назовем *рангом уравнения* (1) число $r$:

$$r = n + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|; \qquad (13)$$

здесь $n \geqslant 1$, $|a_\nu| \geqslant 1$, следовательно, $r \geqslant 2$.

Для каждого натурального $r \geqslant 2$ неопределенное уравнение (13) имеет конечное число решений в целых неотрицательных числах. Следовательно, существует конечное число уравнений каждого ранга. Например, ранга 2 — два уравнения: $\pm x = 0$; ранга 3 — шесть уравнений:

$$\pm x^2 = 0, \quad \pm x \pm 1 = 0;$$

ранга 4 — уравнения

$$\pm x^3 = 0, \quad \pm x^2 \pm x = 0, \quad \pm x^2 \pm 1 = 0,$$
$$\pm x \pm 2 = 0, \quad \pm 2x \pm 1 = 0.$$

Найдем корни этих уравнений и выпишем их друг за другом: сначала корни уравнений ранга 2, затем — корни уравнений ранга 3 и так далее; корни уравнений одного ранга выписываем в произвольном порядке, причем если число является корнем нескольких уравнений, то выписываем его только один раз. Получим последовательность чисел:

$$0,\ 1,\ -1,\ i,\ -i,\ 2,\ -2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},$$

далее — корни уравнений ранга 5 и т. д.

Каждое алгебраическое число, таким образом, будет выписано и получит свой порядковый номер в последовательности. Если интересуются только действительными алгебраическими числами, то комплексные опускают.

### Упражнения

1. Докажите, что число

$$\alpha = c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^{2!}} + \ldots + \frac{c_k}{2^{k!}} + \ldots,$$

где $c_0$ — целое, а $c_1, c_2, \ldots$ принимают одно из значений 0 или 1, — трансцендентно.

2. Докажите, что теорема 2 справедлива и в том случае, если числа $\{c_k\}$ принимают любые целые значения, ограниченные в совокупности, т. е. если существует такая константа $B$, что $\{c_k\} < B$ для всех значений индекса $k$.

3. Докажите, что в теореме 2 можно положить

$$\alpha = c_0 + \frac{c_1}{10^{n_1}} + \frac{c_2}{10^{n_2}} + \ldots,$$

где $\{n_k\}$ — любая последовательность натуральных чисел, подчиненная условию

$$n_{k+1} \geqslant \lambda_k n_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

а $\{\lambda_k\}$ — произвольная бесконечно возрастающая последовательность действительных чисел, например, $\lambda_k = \lg k$.

В следующих упражнениях под *целым комплексным числом* мы понимаем число вида $a + bi$, под *рациональным комплексным* — число $(a + bi)/q$, где $a$, $b$ — целые, $q$ — натуральное число, а $i$ — такое, что $i^2 = -1$.

4. Докажите, что если число $\alpha$ удовлетворяет уравнению (1) с целыми комплексными коэффициентами, то оно алгебраическое.

5. Докажите, что теорема 1 справедлива, если в ее условиях $\alpha$ — комплексное иррациональное, а $p/q$ — комплексное рациональное число.

6. Докажите, что теорема 2 и утверждения упражнений 1, 2, 3 справедливы и тогда, когда коэффициенты $\{c_k\}$ принимают целые комплексные значения.

*З. Тьмеладзе*

# Нелинейное программирование

### Земля! Земля!

Густая мгла тропической ночи обволокла остров, но люди, почувствовав под ногами твердую почву, поверили в спасение. Поверили впервые за неделю, прошедшую с тех пор, как смыло за борт бочонки с водой, впервые за те тринадцать суток, что прошли после кораблекрушения.

— Пить! — бормотали пересохшие губы, когда группа отошла подальше от моря вглубь острова. Никаких припасов не осталось — только бесполезные судовые приборы тащили они с собой, словно не решаясь расстаться с этой последней реликвией с затонувшего судна.

— На острове должна быть вода. Утром мы займемся ее поисками.

— Боюсь, кое для кого к утру будет уже поздно, — через силу произнес Зейдель. — Искать нужно сейчас. В низине должен быть ручей.

— Но как мы доберемся до низины? У нас нет ничего, кроме нескольких слабых фонарей, которых хватит ненадолго, а тьма такая, что я не вижу собственной руки, — устало возразил Коши. — Вот если бы можно было подняться над местностью на воздушном шаре и осветить ее...

— Воздушный шар? — хрипло воскликнул Растригин. — Прожекторы?! Зачем предаваться грезам? Нам нужно подумать, как обойтись фонарями. Что скажете вы, Ферма?

— Господа судьи, — начал Ферма, но тут же поправился. — Простите — галлюцинации! Мне показалось, что я снова в суде — ведь я юрист. По моему разумению, нам поможет обычный плотницкий уровень. Есть ли он среди корабельных приборов?

— Да, их несколько. Но какое отноше...

— Погодите. Мы должны двигаться в направлении низины, прикладывая к земле уровень. Как только уровень покажет, что поверхность горизонтальна, — мы в низине. Вот как я здесь представил на рисунке.

И он изобразил на листке из судового журнала рисунок 1.

— Но позвольте, — как можно вежливее остановил его измученный Гаусс, — ведь так мы найдем лишь самую низкую точку по выбранному направлению. А как его выбрать, если ни зги не видно? Что думаете вы, Зейдель?

— Спасибо, господин Гаусс, что вы сочли возможным обратиться ко мне. Я думаю, что в этой ситуации нам не помешал бы компас, — ага,

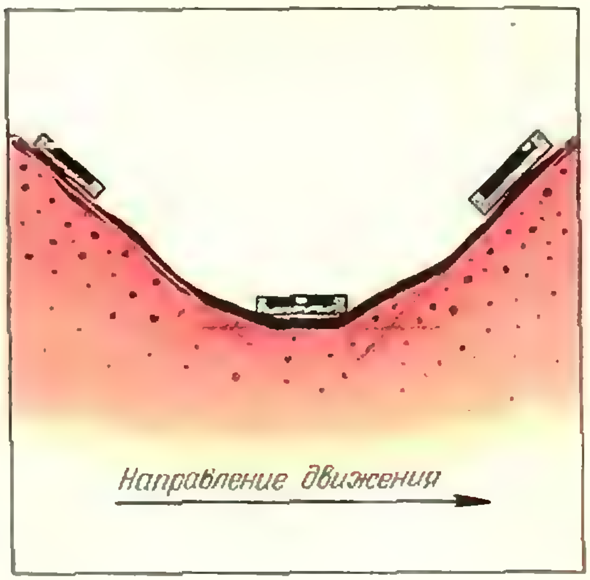


Рис. 1.

вот и он. Давайте действовать так: сначала установим уровень, ориентируя его с запада на восток, — он показывает снижение местности к востоку, видите? Пойдем на восток до тех пор, пока местность будет понижаться, как нам любезно подсказал господин Ферма. А дойдя до этой точки, снова приложим уровень к земле, но уже в направлении с юга на север. Допустим он укажет на понижение местности к северу. Тогда отправимся на север и будем идти, пока местность будет понижаться. Так мы будем сворачивать до тех пор, пока не придем в низшую точку. В ней уровень будет горизонтален, как его ни поверни. Не так ли?

— Я думаю, сын мой, вы правы, и через час мы уже будем здесь с полными фляжками,—ответил Гаусс, и оба побрели к востоку, захватив с собой компас и один из уровней. Ферма отправился за ними.

— Они правы, правы, — приговаривал деятельный Коши, нетерпеливо поглядывая на другой уровень, — но не во всем. Гаусс и Зейдель отправились на восток. И действительно, местность понижается к востоку. Но понижается слабо. Смотрите, сильнее всего снижение происходит в направлении на северо-восток. Может, туда и стоит отправиться? Пожалуй, я так и сделаю. Пройду несколько шагов и снова проверю, в каком направлении нужно спускаться, и снова сделаю несколько шагов. Где моя фляжка? Ах, вот она. Минут через сорок она уже будет полна!

— Месье! Кажется, можно прийти к цели и проще! — крикнул ему вслед Канторович, с трудом раскрывая пересохшие губы. — Вам не следует останавливаться через несколько шагов. Последуйте лучше совету господина Ферма и идите до тех пор по выбранному направлению, пока местность снижается. На уменьшении числа промеров вы изрядно сэкономите время!

Но энергичного Коши уже поглотила мгла, и Канторович был вынужден поспешить с фляжкой за ним.

— Ну как? Догнал он его? — зачем-то спросил Иномата.

— Куда там! — возразил ему со вздохом Кумада, который в этот момент возился с глобусом, снимая его с оси. — Им уже не встретиться. Они могли бы уже здесь сказать друг другу «до свидания». Ну что, двинулись и мы, Иномата-сан?

— Конечно! Зачем нам уровень, а тем паче компас? Вот этот шар доведет нас до цели. Пусть он свободно катится, а мы просто пойдем вслед. Ведь шар скатится в самую низкую точку.

И оба скрылись в темноте, стараясь не упустить шар из виду.

Цетлин утомленно смотрел вслед людям, растаявшим в ночи.

— О чем вы думаете? — спросил его Гельфанд, с трудом поднимаясь с земли. — Не о том ли, что Гаусс и Зейдель придут не туда, куда направлялись?

— Вы угадали. Они собирались найти самую низкую точку, представляя себе местность в виде впадины с гладкими стенками (рис. 2). Но судьба может сыграть с ними злую шутку: им может встретиться

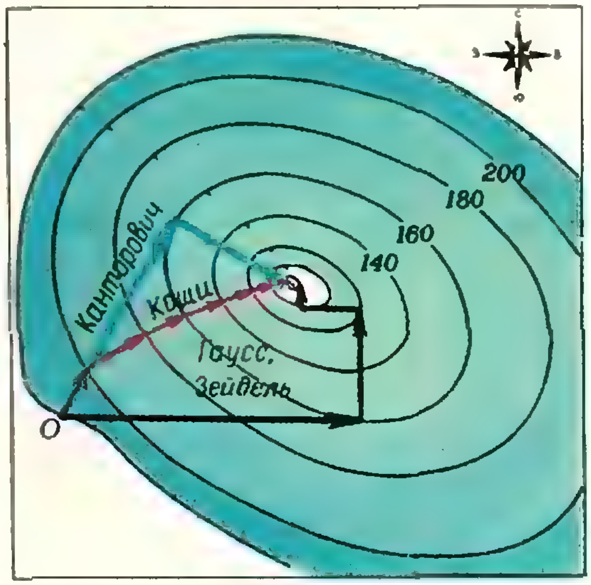


Рис. 2.

на пути овраг. И он быстро начертил на листке из судового журнала рисунок 3.

— Их счастье, если по дну оврага протекает ручей. А если родник в самой низкой точке?

— Да, тогда судьбе Гаусса и Зейделя не позавидуешь: идя на восток, они придут в точку *А* — это самое низкое место на их пути. А в направлении север — юг самая низкая точка — это снова точка *А*. Таким образом, бедняги придут к выводу, что *А* — самая низкая точка на местности и умрут в ней от жажды.

— Но может быть, их спасет фляжка Коши?

— Боюсь, что и фляга Коши останется пустой, если он встретится с оврагом. Оказавшись у дна оврага, он будет искать направление самого крутого спуска, и оно неизбежно приведет его в точку по другую сторону оврага. Из этой точки он вернется на прежнюю сторону и дальше пойдет небольшими шажками до тех пор, пока жажда не свалит его. Ведь весь овраг он увидеть не может — его фонарь способен осветить местность лишь у самых ног. Надо придумать что-нибудь другое...

— А что если Канторович достигнет цели? Хотя не думаю: если овраг искривлен, а овраги редко бывают прямыми, то он начнет метаться по дну оврага, почти не приближаясь к цели. Надо стараться двигаться по дну оврага.

— Разумеется, но как? Впрочем... кажется, придумал. Посмотрите на рисунок 4. Давайте мы оба, вы и я, пойдем из двух разных точек методом Канторовича. Скажем, я отсюда, а вы — отойдя шагов на сто в любом направлении.

— Понятно, а дальше? Ага, дальше мы оба спустимся на дно оврага и постараемся увидеть фонари друг друга. Допустим, нам это удастся. Тот из нас, чей фонарь выше, двинется по направлению к тому, чей фонарь ниже.

— Но встретившись, не остановится, а пройдет дальше в том же направлении до точки *D*. Из этой точки он снова спустится на дно оврага, и мы опять попытаемся увидеть друг друга. И так до тех пор, пока уровень на дне оврага не укажет горизонтальный участок.

И, выбрав фонари поприметнее, оба отправились каждый своим путем.

— А вы, я вижу, не торопитесь к влаге? — спросил Растригина Винер. — Иначе почему бы вам не воспользоваться одним из весьма ра-

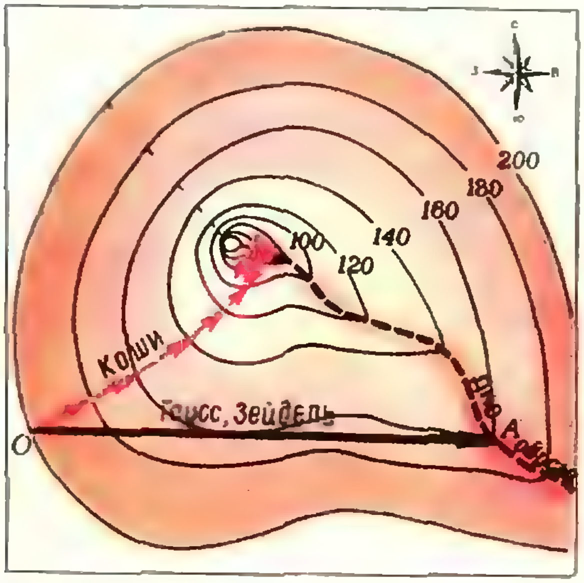


Рис. 3.

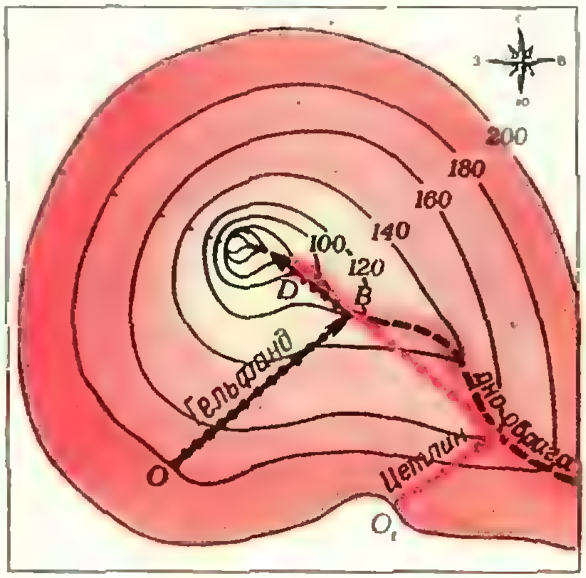


Рис. 4.

зумных способов, которые предложили наши друзья по несчастью?

— У всех этих способов один недостаток — слишком много приходится возиться с уровнем, пока найдешь нужное направление. А что если пойти по какому-либо направлению наугад, пока оно ведет на спуск? Потом изменить направление и снова спускаться по нему. Изменить, разумеется, тоже наугад. Разве таким образом я не приду к цели? Стоит ли терять время на отыскание направления наискорейшего спуска, если уже через несколько шагов оно перестает им быть?

И не успел Винер возразить или согласиться, как Растригин закрыл глаза, повернулся несколько раз на месте, как делают при игре в жмурки, и отправился в темноту.

## Методы спуска

Необходимость найти *максимум* или *минимум* (объединяемых названием «экстремум» — «крайнее значение») некоторой функции возникает во многих задачах экономики и техники. А местность можно считать макетом функции двух переменных, скажем широты и долготы. Значение функции — это высота местности (над уровнем моря) в данной точке, горизонтали — линии уровня, вдоль них функция постоянна. И ситуация, возникающая при поиске экстремума, во многом сходна с той, в которой оказались неудачливые путешественники. Поиск экстремума происходит как бы в темноте, единственным средством ориентации служат значения минимизируемой (максимизируемой) функции в какой-то точке, а также направления ее наискорейшего убывания или возрастания.

Придумано уже немало методов отыскания экстремума. Не случайно, как заметил читатель, фамилии потерпевших кораблекрушение совпадают с фамилиями ряда математиков прошлого и настоящего, которые решали эту проблему. А путь, которым они отправились, показывает сущность их методов отыскания экстремума.

Великий француз П. Ферма (1601—1665) первым ясно осознал и сумел описать аналитически свойство экстремума гладкой непрерывной функции: *касательная в этом месте должна быть горизонтальна*. К. Гаусс (1777—1855) и А. Зейдель (1821—1896), следуя своему методу *покоординатного спуска*, по очереди спускались то вдоль одной, то вдоль другой координаты. Спускались до тех пор, пока касательная к направлению движения не станет горизонтальной. А положение уровня естественно определяет направление касательной.

Обратите внимание на то, что Гаусс и Зейдель не стремились спускаться по тому направлению, где крутизна больше всего. К этой идее первым пришел О. Коши (1789—1857). Вектор, указывающий направление (вверх) с наибольшей крутизной, называется *градиентом*, а сам метод Коши — *градиентным методом*. Именно по градиенту стал бы прокладывать свой путь Коши, если бы его целью была самая высокая точка местности, чтобы осмотреться. Но вспомним, что на острове стояла мгла кромешная и целью Коши была вода. Поэтому он отправился по направлению наискорейшего убывания высоты местности, или по направлению *антиградиента*. Для определения антиградиента функции существуют точные и приближенные методы, но нам достаточно представить себе уровень, который мы прикладываем к земле и разыскиваем то направление, при котором воздушный пузырек быстрее всего убегает к краю шкалы. Конечно, способ этот весьма неточен, да и мороки с ним немало. Но и для определения градиента с помощью упомянутых аналитических методов тоже приходится повозиться.

А потому нетрудно понять наших современников, японцев

С. Иномату и М. Кумаду, которые попытались придать процессу спуска по антиградиенту вышеописанный физический смысл. Между прочим, их метод так и назвали «*методом тяжелого шарика*». Только разумеется, при его использовании не катают глобус по макету функции, а лишь решают дифференциальные уравнения движения.

Немало трудностей ждет того, кто ищет экстремум функции, но одна из самых коварных — это овраги. Любой из методов, даже наиболее совершенный в вычислительном отношении *метод наискорейшего спуска* Л. В. Канторовича, известного советского математика, приводит к беспомощному метанию по дну оврага. Поэтому советские математики И. М. Гельфанд и М. Л. Цетлин и предложили «*овражный поиск*», который позволяет выследить дно оврага. Итак, как мы видим, почти все численные методы поиска наилучшего направления спуска так или иначе связаны с антиградиентом. Правда, оказалось, что труды по отысканию антиградиента не всегда вознаграждаются качеством найденного направления спуска, и советский ученый Л. А. Растригин предложил вообще не тратить сил и машинного времени на поиск антиградиента, а шагать куда себе вздумается, то бишь *по случайному направлению*. И представьте, результаты такого образа действий оказались ничуть не хуже в вычислительном отношении, чем поиски наилучших путей. Иначе говоря, не настолько эти наилучшие пути превосходят по качеству случайный, чтобы стоило тратить время на их поиск. Разумеется, чтобы выбрать направление спуска случайным образом, не крутятся на месте с закрытыми глазами — для этого в машине используют *датчики случайных чисел*. И вообще численную сторону методов нелинейного программирования трудно продемонстрировать на бумаге — это существенно машинные методы.

Но вернемся к потерпевшим кораблекрушение и узнаем, кому из них сопутствовал успех в поиске воды.

## Там, за перевалом

Итак, все разбрелись в поисках воды, кроме кучки Скептиков.

— Дьявольская жажда! — промолвил один из них. — Неужели вас она не мучит?

— Не меньше, чем вас, — ответил Винер от имени остальных. И я охотно двинулся бы на поиски воды, если бы меня убедил какой-то из предложенных способов. Но увы! Если мы начнем таким способом искать высшую точку Земли, то вместо Эвереста окажемся на вершине соседнего холмика. И самое ужасное то, что у нас нет никакого средства отличить этот холмик от Эвереста. Если, конечно, не привлечь на помощь математике обыкновенную географию.

— Как это нет? Почему? — поинтересовался молодой Скептик, которого скептицизм не отучил еще задавать вопросы.

— Очень просто. С помощью фонарика мы способны лишь убедиться, что из данной точки пути ведут вниз. А что там, дальше? Вот тут наши

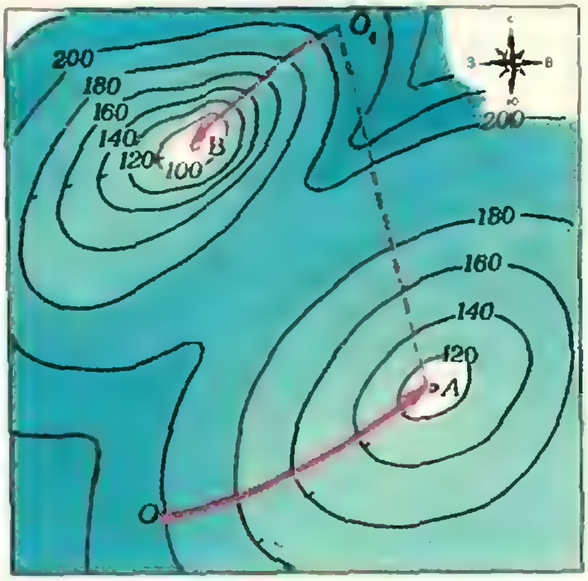


Рис. 5.

друзья предложили ряд способов, — он снисходительно показал на оставшиеся листки из судового журнала.— Они исходили из того, что на острове только одна низина. А если их много, и вода лишь в самой низкой из этих низин (рис. 5)? Спуск приведет нас в точку $A$, а вода в точке $B$ — там гуще горизонтали и, следовательно, ниже отметка. Задумайтесь над этим.

— Я уже задумывался, — сказал первый Скептик. — И решил действовать так. Сначала пойду куда глаза глядят. Потом спущусь в ближайшую низину и замерю ее высоту высотомером. Запомню ее расположение и перейду в новую случайную точку. Из нее снова спущусь в низину и снова взгляну на высотомер. Допустим, он покажет на сей раз меньшую высоту. Это значит, что вторая низина ниже первой, и там больше шансов найти воду. Затем...

— Что будет затем, ясно, — прервали его. — Но уверены ли вы, что найдете воду прежде, чем свалитесь с ног?

— Могу ли я быть в этом уверен? Ведь я же Скептик! Просто это лучше, чем стоять сложа руки.

И первый Скептик скрылся в темноте.

Второй Скептик привязывал в это время шпагат к футбольному мячу, невесть как оказавшемуся среди приборов.

— Уж не собираетесь ли вы по следам Кумады? — спросил его Винер, одновременно к чему-то прислушиваясь.

— Вы почти угадали. Но я поступлю несколько иначе. Спустившись в низину, я замерю ее высоту, а затем буду бить по мячу ногой в разные стороны. Если мяч будет каждый раз скатываться назад, значит, поблизости нет перевала, за которым новая низина. Если же мяч не скатится ко мне, я отправлюсь по шпагату за ним, приду в низину, в которой он застрял, и замерю ее высоту. И так далее...

— Но так можно обнаружить лишь недалекий перевал.

— Что вы! У меня сильный удар. Меня обычно просят ударить от ворот.

— В таком случае может произойти еще худшее: вы перебьете мяч через низину, которую ищите. Мяч не вернется к вам, но уведет вас от цели.

— Вы правы... Тогда, пожалуй, я не буду стараться каждый раз ударить посильнее. Я буду чередовать сильные и слабые удары. Или, скажем, буду постепенно усиливать их, начав со слабых.

— Что ж, я желаю вам успеха. Если наградой вам и не послужит вода, то во всяком случае вы повысите свою спортивную форму.

— А я поступлю иначе, — обратился третий Скептик к Винеру. — Я отправлюсь просто бродить по острову, не стараясь найти наилучшее направление, и буду поглядывать на высотомер. Побродив, замечу, где самая низкая точка, и уже там начну поиски воды. Все эти разговоры убедили меня, что если у нас нет карты острова, то никакой разумной стратегии движения быть не может. Так зачем же тогда тратить время на возню с приборами? Но вы, кажется, не слушаете меня?

## Где кончается асфальт

Когда приходится определять экстремум функции, у которой их много, задача намного усложняется. В этом случае обычно требуется не только найти экстремум (скажем, минимум), но и определить *глобальный* (общий) *экстремум*, или «минимум миниморум». К великому сожалению, большинство реальных математических задач, для которых ищется минимум, *многоэкстремальны*. Точно так же трудно найти местность, на которой одна вершина господствовала бы безраздельно на очень большом пространстве. Обычно даже вблизи высочайших вершин имеются вершины поменьше, но есть и относительно небольшая область, из которой подъем безусловно приведет к высочайшей вершине. Эта область называется *областью притяжения* глобального экстремума. Достаточно выйти за границы этой области или оказаться за ними в начале поиска, как достижение глобального экстремума уже становится трудно гарантировать. Увеличиваются шансы попасть в местный (*локальный*) экстремум.

Существует много способов борьбы с многоэкстремальностью, однако ни один из них не гарантирует успеха. Эти методы носят нестрогий, как говорят математики, *эвристический* характер. Сторонники трех разных многоэкстремальных методов встретились в группе Скептиков. Мы не приводим их имена: фронт научных исследований в этой области за последнее время настолько расширился и столь многие вступили в борьбу с многоэкстремальностью, что указанные методы трудно связать с чьими-то конкретными именами.

Одни пробовали выскакивать из экстремума, если уже попали в него, и по успешности или неуспешности этих попыток судить о достижении глобального экстремума. Другие пытались спускаться из нескольких случайно выбранных точек. Наконец, третьи (верх скептицизма!) пришли в выводу, что разумнее всего не напрягать разума, а просто бродить по острову, поглядывая на высотомер.

Все эти три образа действий находят приверженцев среди ученых, хотя третий — все реже. Составлены специальные программы для вычислительных машин, которые реализуют каждый из этих способов и еще многие другие. Тем не менее не только завзятые скептики, но и неунывающие оптимисты не рискуют сегодня считать проблему решенной. И первое побуждение при анализе какой-либо функции на экстремум — это попытка доказать ее одноэкстремальность. Нередко это достоинство почитается не ниже, чем правильность математической модели вообще. Так, например, отсутствие локальных экстремумов в задачах линейного программирования — важный довод в пользу линейных моделей, перевешивающий многие их недостатки.

Существуют весьма изощренные способы объединения разных методов. Например, всех трех скептиков можно было объединить в один коллектив. Вы скажете, между ними мало родства? А много и не требуется. Достаточно того, что они мало верят в свои собственные методы. Можно отправить их на поиск низины общей группой из трех человек, порешив, что на каждом шаге поиска будет действовать тот из них, на которого падет жребий. Скажем, все трое будут тянуть из шапки свернутые бумажки, на одной из которых стоит крестик. И, представьте себе, в пользу такого образа действий есть свои доводы.

## Эпилог

— Простите, что вы сказали? — переспросил Винер.

— Я говорю, вы, кажется, не слышите меня? Разве мой метод не разумен?

— Прошу прощения, быть может, ваш метод и хорош, хотя лично я поостерегся бы назвать его методом. Но меня отвлек иной звук. Слышите?

— Нет... впрочем, да. Кажется, это журчание. Но почему здесь, а не в низине?

Оба бросились на слабый звук, который раньше заглушали голоса, и припали к родинку, бьющему из скалы. Хрустальные струйки, истекая, тут же терялись среди камней.

— Как видите, в нашем случае решить проблему отыскания воды было весьма просто, — сказал Винер, светя фонарем своему спутнику. — Достаточно было всем замолчать на минуту.

*Я. Шестопал*

# Наука читает невидимые следы

Никто не упрекнет историка, если он не знает первого закона термодинамики. Зато его безусловно должен знать физик. Никого не удивит, если специалист по ботанике плохо разбирается в математических законах, как не удивит и математик, не разбирающийся в законах живой природы. Как говорится, каждому — свое.

Но есть законы, знать которые обязан каждый. Это — правовые нормы государства, в котором мы живем. Им должны подчиняться люди разных профессий, рангов и званий, разных возрастов — и подросток, и убеленный сединами старик.

Часто можно слышать, особенно в среде подростков, ссылку на незнание законов. «Я не знал, что этого делать нельзя». «Не думал, что то-то и то-то влечет за собой уголовную ответственность». Можно ли в таком случае остаться безнаказанным? Нет! Нормами права предусмотрено, что незнание законов не освобождает от ответственности. Вот почему совсем недавно приказом министра просвещения СССР с нового учебного года в восьмых классах общеобразовательных школ страны введено преподавание курса «Основы советского государства и права». Право изучается и в ПТУ. Однако, овладение этим предметом еще впереди. А пока... Пока расскажем о том, как математика и физика помогают бороться с правонарушениями.

Публикуемый ниже материал подготовлен по нашей просьбе редакцией научно-популярного журнала Министерства юстиции СССР «Человек и закон».

Наверное, многие читатели «Кванта» искренне удивятся, узнав, что М. В. Ломоносов занимался судебными экспертизами. Между тем, это действительно так. Его участие в большом количестве экспертных работ по делам о подделке золотых и серебряных изделий, об изготовлении фальшивых монет и т. д. в свое время сыграло важную роль в установлении истины.

Довольно часто следователи и судьи обращались за помощью к таким ученым, как Д. И. Менделеев, А. М. Бутлеров, Н. Н. Зинин, Н. Д. Зелинский, Н. И. Пирогов, А. Н. Крылов и другим, чьи имена известны всему миру. Произведенные ими экспертизы позволили юристам раскрыть ряд серьезных преступлений, найти истинных виновников.

Впрочем, список таких имен можно продолжить, и о каждом рассказать множество интересных историй, связанных с детективными изысканиями, которые проводились задолго до зарождения подлинно научной криминалистики. В наше время в научных институтах и лабораториях Министерства юстиции СССР, которые имеются во всех союзных республиках, в научно-технических отделах органов внутренних дел бок о бок с юристами трудятся физики, математики, химики, биологи. На службу правосудию поставлены высшая математика и электронно-вычислительная техника, лазеры и невидимые лучи, микробиология и тончайший химический анализ.

Здесь же речь пойдет лишь о том, что наиболее близко читателям «Кванта», — о применении достижений физики и математики в криминалистических исследованиях.

Широкое применение в криминалистике нашел люминесцентный анализ, основоположником которого по праву считается советский физик С. И. Вавилов, чей вклад в изучение природы люминесценции неоспорим. С именем американского физика Р. Вуда связано фотографирование в инфракрасных и ультрафиолетовых лучах, что также используется в криминалистических целях.

...Возникло подозрение, что у гражданина Х. поддельный военный

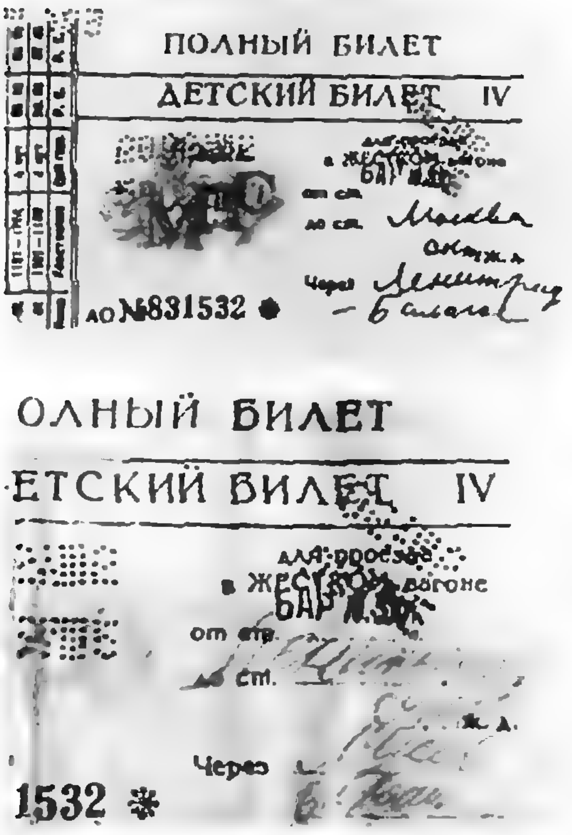


Рис. 1. Фотографии поддельного железнодорожного билета, сделанные в обычном свете и в ультрафиолетовых лучах.

билет. Эксперт сфотографировал документ в ультрафиолетовых лучах. В результате удалось прочитать текст, невидимый при обычном свете. Как это ему удалось?

Ультрафиолетовые лучи, подчиняясь общим законам поглощения, отражения и преломления электромагнитных волн, вместе с тем поглощаются и отражаются рядом веществ иначе, чем видимые лучи. Одни вещества обладают свойством поглощать ультрафиолетовые лучи, другие, наоборот, беспрепятственно их пропускают, оставаясь в то же время непрозрачными для лучей видимого света. Под воздействием ультрафиолетовых лучей многие вещества люминесцируют, т. е. испускают видимый свет. Наблюдение этого свечения — самый удобный и распространенный способ исследования ультрафиолетовых лучей. При облучении изучаемого объекта (например, картины или документа) ультрафиолетовыми лучами становятся видны детали, невидимые при обычном освещении. Можно получать и фотографии в ультрафиолетовых лучах (см. рис. 1). Для этого на светочувствительный слой фотопластинки накладывают слой люминесцентного вещества, который преобразует невидимое излучение в видимое. Фотографии, полученные таким образом, оказываются более четкими, с большим количеством деталей.

Так именно и засветилась старая запись в военном билете. Оказалось, что он принадлежал другому человеку, был присвоен Х., который вытравил фамилию и другие данные, относившиеся к прежнему владельцу.

На свойстве инфракрасных лучей поглощаться и отражаться некоторыми веществами не так, как видимый свет, основано их применение в судебно-экспертной практике. Например, фотографирование в инфракрасных лучах позволяет выявить подчистки в документах, читать залитые или замазанные тексты (см. рис. 2).

Так же, как в случае ультрафиолетовых лучей, присутствие инфракрасного излучения можно обнаружить с помощью люминесценции. Известны некоторые кристаллофосфоры (твердые люминесцентные вещества), которые дают вспышки свечения под действием инфракрасного излучения. Правда, для этого атомы вещества должны быть предварительно возбуждены. Иногда инфракрасные лучи оказывают, наоборот, гасящее действие на возбужденный кристаллофосфор. В обоих случаях результат действия невидимого излучения становится видимым. Сравнительно недавно для наблюдений в инфракрасных лучах стали использоваться электроннооптические преобразователи. В этих приборах (см. рис. 3) изображение предмета в инфракрасных лучах получается на поверхности светочувствительного слоя. Электроны, «выбитые» с поверхности слоя под действием инфракрасных лучей, ускоряются электрическим полем, попадают на люминесцентный экран и заставляют его светиться. Такой метод обнаружения инфракрасного излучения оказывается гораздо чувствительнее, чем обнаружение с помощью прямого действия инфракрасных лучей на люминесцентный экран.

Известно, что рентгеновские лучи обладают большой проникающей способностью. Это позволяет использовать их для выяснения внутреннего устройства оружия, боеприпасов, замков и т. п. С помощью этих лучей можно, например, легко обнаружить частицы металла или другие инородные предметы в теле человека, в деревянных предметах и т. д. Между прочим, первым в России начал исследования по применению рентгеновских лучей в криминалистических целях изобретатель радио А. С. Попов. В частности, им были проведены успешные исследования в кронштадском морском госпитале, которые позволили обнаружить ружейную дробь в теле человека.

В настоящее время эксперты, владеющие современными научными методами исследований, порой не только помогают установить истину при разоблачении преступников, но и оказывают большие услуги науке. Так, во Всесоюзном научно-исследовательском институте судебных экспертиз Министерства юстиции СССР умеют восстанавливать «угасшие» тексты. Удалось, например, прочесть рукописи и документы прошедших веков. Делается это с помощью радиоактивных изотопов. Дело в том, что некоторые сорта бумаги интенсивно собирают на своей поверхности радиоактивные ионы. А выцветшие чернильные штрихи эти ионы не притягивают. Поэтому, если пропитать «угасший» текст реактивом, содержащим радиоактивные изотопы, и затем сделать отпечаток, фиксирующий их излучения (например, опять с помощью люминесцентного экрана), то получится негативное изображение «угасших» записей.

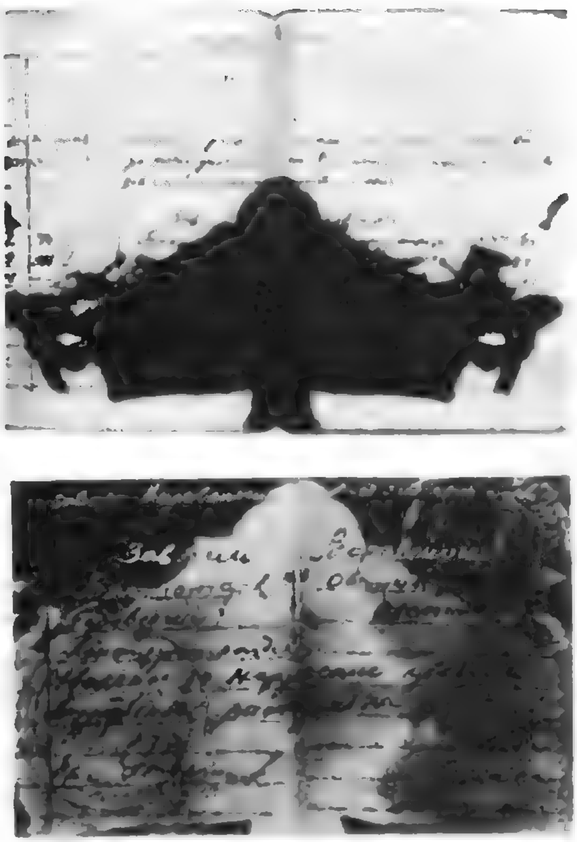


Рис. 2. Фотографии трудовой книжки с текстом, залитым чернилами, и той же книжки с текстом, выявленным с помощью инфракрасных лучей.

Теперь немного расскажем об использовании в криминалистике одного из самых современных методов исследования внутренней структуры веществ — спектрального анализа.

...Из охотничьего дробовика убит человек. Как найти убийцу? Следователь изъял у нескольких подозреваемых лиц дробь одного и того же калибра. Казалось бы, что может быть более схожим между собой, чем одинаковые, как капли воды, дробинки? В отличие от пуль на них даже не остается следов канала ствола ружья. И все же сходство дробинок кажущееся. На самом де-

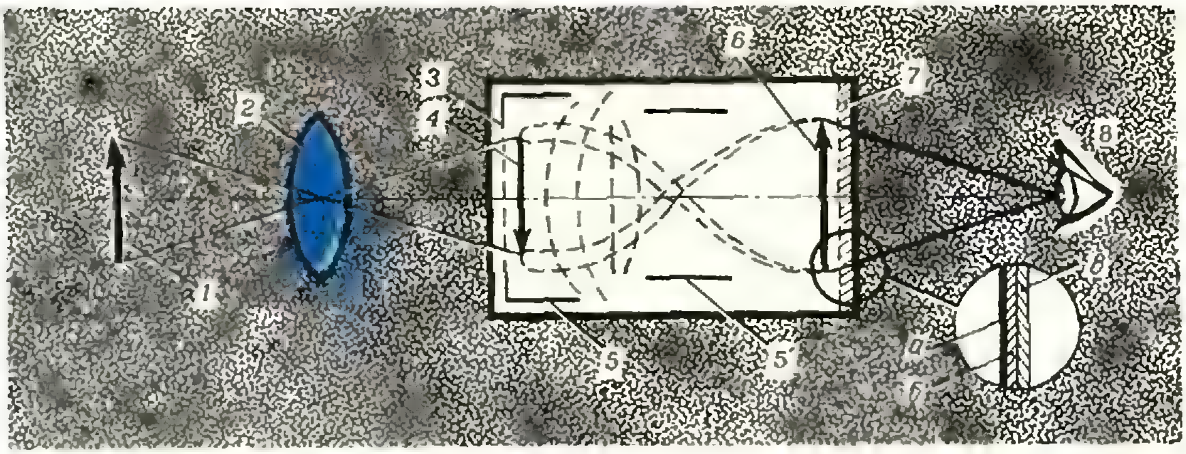


Рис. 3. Схема электроннооптического преобразователя. *1* — объект, освещенный инфракрасными лучами; *2* — объектив; *3* — фотокатод (светочувствительный слой); *4* — световое изображение; *5—5'* — фокусирующие электроды; *6* — электронное изображение; *7* — люминесцирующий экран (*а* — алюминиевая пленка, защищающая фотокатод от излучения кристаллофосфора, *б* — слой кристаллофосфора, *в* — стеклянная подложка); *8* — глаз наблюдателя.

ле, свинец, из которого они сделаны, имеет различные примеси. Количества этих примесей в различных партиях дроби, хотя и очень незначительно, но все таки различаются. Для тщательного исследования в таких случаях применяется спектральный анализ. Каждый химический элемент имеет свой собственный и только ему присущий спектр излучения и, соответственно, спектр поглощения. Если кусочек свинца, из которого была изготовлена дробь, сжигать в пламени, например, электрической дуги, то в спектроскоп можно будет увидеть «следы» примесей в виде соответствующих черных линий на фоне сплошного спектра излучения дуги. По «интенсивности» этих черных линий можно судить и о количестве каждой примеси. Таким образом была установлена тождественность химических составов дробинок, обнаруженных в теле убитого и изъятых у одного из подозреваемых, т. е. был найден человек, совершивший убийство.

Или такой случай... Хулиган нанес человеку удар трехгранным слесарным инструментом — шабером. Из раны пострадавшего был извлечен крошечный осколок металла, а у подозреваемого обнаружили свежезаточенный шабер. По всей вероятности инструмент и заточили специально для того, чтобы замаскировать следы облома. Необходима тщательная проверка. Для этого следствие прибегло к серьезному комплексному исследованию. С помощью спектрального анализа определили, какие металлы и в каких соотношениях входят в состав материала шабера и найденного осколка. Рентгеноспектральный анализ дополнительно выявил микропримеси, не обнаруженные спектральным анализом. В результате удалось установить полное совпадение химических составов металлов осколка и шабера и таким образом найти преступника.

Все чаще и чаще для криминалистических исследований используются различные математические методы и электронно-вычислительная техника.

...В одном городе участились ограбления учреждений. Исчезали пишущие машинки, вентиляторы, настольные лампы и личные вещи, оставленные сотрудниками. По всему было ясно, что орудует одна и та же хорошо организованная и очень осторожная группа. Но как поймать преступников?

Тут на помощь следственным органам пришли математики. Они проанализировали все точки, где были совершены ограбления, и вероятные транспортные пути, по которым следовали преступники. Затем с помощью электронно-вычислительной машины был просчитан возможный пункт следующего ограбления. Расчет оказался настолько точным, что грабителей задержали прямо на месте преступления.

Электронно-вычислительные машины широко используются в правовой справочно-информационной службе, судебной статистике, для проведения различных судебно-экспертных исследований. В частности, для идентификации фотопортретов (т. е. для установления их тождественности). Сущность этого метода вкратце в следующем.

Как известно, любое изображение на плоскости можно представить в виде отдельных точек. Для установления идентичности фотопортретов на них на самых характерных зонах — глазах, бровях и т. п. наносят группы точек. Затем соответствующие сочетания точек и их положения на плоскости сравниваются между собой.

Криминалисты проводят такие исследования с помощью ЭВМ, снабженных специальными устройствами ввода и вывода. Машины сами проставляют точки на фотографиях, проводят сравнения и выдают готовые результаты.

В заключение — немного о Международной выставке криминалистической техники, которая проходила недавно в Москве. В выставке принимали участие более шестидесяти стран и фирм. Здесь были представлены самые современные приборы и аппараты, всего около десяти тысяч экспонатов.

Посетители выставки могли увидеть охранные устройства, излучающие на десятки метров вокруг электромагнитные волны, которые, собственно, и создают охранное поле. Стоит преступнику попасть в него, как моментально срабатывает сигнал опасности, по которому вызываются патрульные машины. Или аппарат, фотографирующий даже в кромешной темноте, и портативные телеустановки, которые фиксируют и передают дежурному по городу информацию с места происшествия. Любопытное новшество — электронноуправляемые печатающие автоматы. Они экономят много времени, уходящего обычно на составление различных протоколов, постановлений. Из заранее запрограммированных стандартных предложений, фраз, слов автомат со скоростью 50 000 знаков в минуту находит нужный вариант и печатает необходимый документ со скбростью 900 знаков в минуту.

Были представлены на выставке сравнительные микроскопы, помогающие криминалистам идентифицировать мельчайшие частички пыли, волос, ниток, бумаги; масс-спектрометр, обнаруживающий и исследующий один пикограмм ($10^{-12}$ *г*) вещества (причем бóльшая часть работы производится автоматически); телефонный анализатор—гроза телефонных хулиганов, определяющий номер аппарата, с которого звонят абоненту, и записывающий голос говорящего на пленку.

Рассказ о том, как слу́жат юстиции достижения физики и математики, мог бы заполнить солидную книгу. В этой статье мы ограничились лишь незначительным количеством примеров. Но и их достаточно, чтобы понять, какое обширное поле деятельности может ожидать будущих специалистов, окончивших физико-математические факультеты, если они захотят посвятить себя борьбе с преступностью и нарушениями закона. Приведенные примеры дают также понять, что любое преступление может быть раскрыто. Невидимые следы остаются всегда, и современная наука научилась с достаточной полнотой их читать.

Физика — наука экспериментальная. Каждое физическое исследование начинается с наблюдения и изучения какого-либо природного явления и заканчивается сравнением теории с результатами эксперимента.

Многие законы и явления природы в основе своей не так уж сложны, а их характерные черты можно проследить даже в сравнительно простых экспериментах. Галилей открыл законы падения тел, наблюдая за тем, как они падали с вершины Пизанской башни. Ньютон установил, что солнечный свет является сложной смесью различных цветов, с помощью простой стеклянной призмы. Поразительно простыми, но необычайно глубокими по содержанию и выводам были многие опыты Фарадея.

Конечно, сегодня очень мало надежды на то, что с подручными средствами можно открыть новый закон природы. Физикам наших дней нужны очень сложные экспериментальные установки — ускорители заряженных частиц, атомные реакторы, электронные и протонные микроскопы и т. п. Но многое из того, что уже известно науке, можно самому проверить в простых домашних экспериментах. Движение маятников, рост кристаллов, дифракция и интерференция волн, поверхностное натяжение или сухое трение — все это можно исследовать простыми подручными средствами. Деревянные кубики или шары, лист бумаги, швейная игла, мыльный пузырь или струя воды из открытого крана, не говоря уже о компасе и карманном фонаре, — все это можно использовать для разнообразных и поучительных физических экспериментов. Такие эксперименты — первая ступень к самостоятельным исследованиям. Они помогают глубже проникнуть в суть различных физических явлений, развивают наблюдательность и сообразительность.

Раздел «Лаборатория «Кванта» принадлежит к числу систематических разделов нашего журнала. В нем мы стремимся дать нашим читателям возможность произвести простые, но весьма поучительные эксперименты, не требующие специального лабораторного оборудования.

Из писем наших читателей мы видим, что многие из них охотно проделывают предлагаемые нами эксперименты и даже стремятся творчески видоизменить их (варьировать условия — менять температуру, напряжение или другие участвующие в опыте физические величины, подбирать другие вещества и материалы и т. д.). При этом у них возникает много неожиданных и интересных вопросов, с которыми они обращаются в нашу редакцию.

При воспроизведении описываемых нами опытов необходимо обращать особое внимание на технику безопасности и строго выполнять рекомендуемые в статьях меры предосторожности.

Мы надеемся, что «Лаборатория «Кванта» поможет нашим читателям лучше разобраться в своих способностях, развить навыки будущих серьезных исследователей природы.

*М. Головей*

# «Водяная улитка» Архимеда

> *Насколько это великолепно, предоставляю решать тем, кто это до конца поймет.*
>
> *Галилео Галилей*

Начальный этап развития физики тесно связан с изобретением различных механизмов, облегчающих труд человека. Пользуясь совершенно примитивными средствами и материалами, познавая на практике в процессе работы основные законы геометрии, механики, гидравлики, ученые еще задолго до нашей эры создавали машины, которые и по сей день поражают нас глубиной конструкторской мысли, остроумием и мастерством исполнения.

Одним из самых выдающихся изобретателей древности был Архимед. И хотя в настоящее время с его именем связывают прежде всего закон о выталкивающей силе, действующей на тело, погруженное в жидкость, Архимеду принадлежит огромное число хитроумнейших изобретений. И самое выдающееся из них — подъемный винт, который до сих пор так и называется винтом Архимеда. Галилей в одной из своих работ писал, что это изобретение «не только великолепно, но просто чудесно, поскольку мы видим, что вода поднимается в винте, беспрерывно опускаясь».

И действительно, при первом беглом знакомстве с этим устройством даже трудно себе представить, как может вода, опускаясь по лопасти винта или винтовому каналу, на самом деле подниматься вверх по трубе. В одном из своих сочинений Галилей дает подробное описание принципа действия этой машины, называя ее «водяной улиткой Архимеда». Издали эта машина действительно чем-то напоминает улитку.

Как же работает винт Архимеда? Взгляните на рисунок 1, *а*. На нем изображен цилиндр $AKCB$, на боковой поверхности которого сделан винтовой канал $AEOPXTHC$, по которому может, не выливаясь, протекать вода или скатываться шарик.

Если опустить конец винтового канала $A$ в воду, наклонить цилиндр

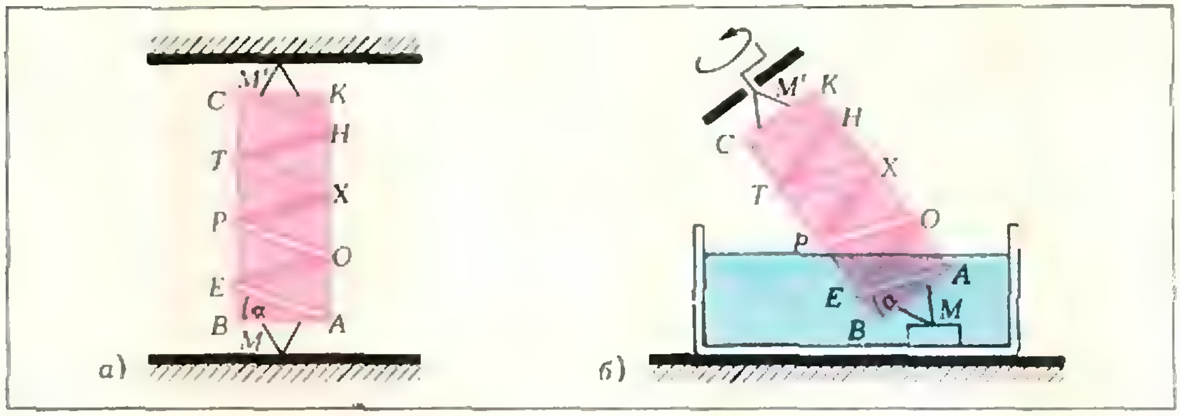


**Рис. 1.**

так, как показано на рисунке 1, *б*, и начать вращать его вокруг опор *M* и *M'*, то вода потечет по каналу и начнет выливаться из верхнего отверстия *C*. Как это ни кажется парадоксальным, но вода, начиная двигаться из точки *A*, все время опускается относительно поверхности винта, и в результате этого поднимается вверх до точки *C*. Попытаемся разобраться, как это происходит. Пусть участок желоба *AE* составляет угол $\alpha$ с «дном» цилиндра *AB*. Наклоним цилиндр с желобом на угол, больший $\alpha$. Тогда вода заполнит участок *AE* и часть участка *EO*.

Начнем вращать цилиндр вокруг его оси. Все точки участка *AE* (кроме точки *A*) начнут подниматься, в то время как все точки участка *EO* (кроме точки *E*) будут опускаться, и вода будет постепенно перемещаться из «затопленного» участка дальше по желобу, опускаясь относительно него вниз и поднимаясь относительно поверхности земли. Это будет происходить потому, что при вращении различные части желоба, последовательно замещая одна другую, будут находиться по отношению к воде в таком же положении, в каком находился участок *AE*; поэтому вода начнет опускаться по желобу, но в конце концов окажется, что она поднялась из точки *A* в точку *C*.

У некоторых читателей уже, наверное, возник закономерный вопрос: «А не противоречат ли все эти рассуждения закону сохранения энергии, не представляет ли собой этот механизм вечный двигатель?» Действительно, на первый взгляд кажется, что так оно и есть. Мы вращаем колесо, вода стекает по винту, как по наклонной плоскости, под действием собственного веса и выливается из верхнего отверстия. Остается только преобразовать запасаемую водой энергию в энергию вращения самого винта, и вечный двигатель готов!

Если бы эту задачу вам предложили на уроке физики, то, по-видимому, многие из вас сразу же возразили бы, что такое рассуждение противоречит закону сохранения энергии, а некоторые из вас пошли бы в рассуждениях еще дальше и добавили бы, что вода поднимается по желобу за счет энергии, подводимой извне и приводящей винт во вращение, поэтому потенциальная энергия воды всегда будет меньше затрачиваемой на ее подъем работы.

Все это, конечно, верно, но каким образом желоб передает воде подводимую извне энергию? В каких его участках это происходит? Как направлена при этом действующая на воду сила? Попробуйте ответить на эти вопросы сами. Для упрощения рассмотрения движение воды в желобе можно заменить движением шарика по винтовому каналу.

Примитивную модель винта Архимеда легко сделать и в домашних условиях. Возьмите кусок трубы диаметром 3—5 *см* и длиной 20—30 *см* или круглый деревянный брусок таких же размеров. Роль желоба может выполнять любая резиновая, полихлорвиниловая (кембрик) или медная трубки диаметром несколько миллиметров (чем больше диаметр, тем лучше и нагляднее будет модель). Очень хорошо, если в вашем распоряжении имеется прозрачная гибкая трубка; тогда движение воды или шарика можно прослеживать и внутри винта Архимеда.

Сделайте из этой трубки винтовой желоб, обмотав ею выбранный вами цилиндр по винтовой линии, и закрепите концы трубки у верхнего и нижнего оснований этого цилиндра с помощью ниток или проволоки. Вот и все, ваша модель готова к работе. Опустите один конец винта в сосуд с водой и наклоните его на угол, больший угла наклона спирали к основанию цилиндра. Если теперь вращать винт Архимеда так, чтобы казалось, что он как бы ввинчивается в поверхность жидкости, оставляя его при этом на одной и той же высоте, то через несколько оборотов вода потечет из верхнего конца трубки. Вместо воды можно взять маленький шарик. И если поместить его в нижний конец желоба, то через несколько оборотов винта вокруг его оси шарик выпадет из верхнего конца этого необычного желоба.

Таким же способом можно изготовить и настоящий насос, приводимый в движение, например, от ветряного или какого-либо другого двигателя. По сравнению с поршневыми насосами, пригодными для откачивания только чистой воды, у них есть важное преимущество: они могут откачивать и сильно загрязненную воду. В сравнении же с центробежными насосами Архимедов винт является устаревшим механизмом и совершенно неконкурентоспособен с ними, а поэтому в настоящее время для подъема воды он употребляется очень редко. Отдельные его экземпляры можно встретить еще и до сих пор только в слаборазвитых странах.

Устройство типа Архимедова винта, изображенного на рисунке 1, называемое в технике шнеком (в переводе с немецкого буквально «улитка»), широко используется в различных машинах для перемешивания и смешения сыпучих, жидких и тестообразных материалов. Одной из наиболее распространенных его разновидностей является винтовой ротор обычной мясорубки.

## Ребусы

В каждом из этих ребусов цифры зашифрованы буквами или звездочками. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные, вместо звездочек в ребусе «Простые числа» должны стоять простые числа. Расшифруйте примеры.

**Шесть на два**

```
_шесть | два
 тис   |-----
 ----- | три
 _авт
  рьс
  ----
  _неь
   неь
   ----
```

**Партитура**

$$\begin{cases} RE + MI = FA \\ DO + SI = MI \\ LA + SI = SOL. \end{cases}$$

**Простые числа**

```
×   ***
    ***
 ------
   ****
  ****
 ****
 ------
 ******
```

*Л. Мочалов*

**Математику можно изучать по-разному. Можно слушать лекции или взять толстую книгу и читать ее подряд: определения, теоремы, доказательства. А можно действовать более активно: прочитать только определения и формулировки теорем, отложить книгу в сторону и придумывать доказательства самому. Первый способ дает возможность поначалу двигаться быстрее. Но мимо тех, кто придерживается исключительно этого способа усвоения информации, зачастую проходят приемы и методы, с помощью которых были получены рассматриваемые результаты. Читатель и не подозревает, как много он пропустит интересного, увлекательного, полезного, обрекая себя на роль пассивного воспринимателя истин.**

**Второй способ, хотя он и отнимает больше времени, позволяет глубоко разобраться в математической теории, учит выделять то, что в данном контексте является наиболее важным, дает возможность надолго запоминать полученные собственным трудом результаты, развивает математические способности школьников и открывает перед ними все новые пути применения математических знаний. Поэтому именно такой способ — самостоятельное открытие известных истин (иногда наряду с ними открываются и ранее неизвестные) обычно используется в работе математических семинаров, школ и кружков.**

**Именно на такую активную работу читателей рассчитаны статьи, помещаемые в разделе «Математический кружок». Значительная часть содержания статьи преподносится обычно в виде задач. Некоторые из них решены в тексте, но большинство — и легких, и трудных — оставлены для самостоятельного решения читателю. Краткие решения этих задач, указания или ответы к ним иногда помещаются на последних страницах журнала, но мы советуем попробовать решить задачи без подсказки.**

**Как правило, наш «Математический кружок» доступен ученикам 8—9, а иногда и 7 класса. Письма с замечаниями и пожеланиями по поводу этого раздела просьба присылать с пометкой «Математический кружок» на конверте.**

*В. Рыжик*

# Давайте складывать точки...

Можно ли складывать точки? С детства мы умеем складывать числа. Научились складывать многочлены, функции, векторы. Именно векторы и помогут нам научиться действовать с точками. После того, как мы научимся складывать точки и умножать их на числа, многие геометрические факты можно будет проверять, проводя формальные алгебраические выкладки.

Вспомним основные правила действий с векторами. Векторы можно складывать, причем сложение *коммутативно* ($\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$) и *ассоциативно* ($(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$). Векторы можно вычитать. Векторы можно умножать на числа; при этом верны следующие равенства:

1°. $(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\vec{a}=\lambda_1\cdot\vec{a}+\lambda_2\cdot\vec{a}$.

2°. $\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot\vec{a})=(\lambda_1\cdot\lambda_2)\cdot\vec{a}$.

3°. $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$.

(Здесь $\lambda$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ — любые действительные числа, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы.)

Займемся теперь сложением точек. Зафиксируем произвольную точку $O$; назовем ее *полюсом*. Возьмем произвольные точки $A$ и $B$. Соединим их с точкой $O$ — получим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Как сложить два этих вектора, известно — по правилу треугольника. Точку $C$, получившуюся в результате сложения, и будем называть *суммой* точек $A$ и $B$: $C=A+B$ (рис. 1). Аналогично, точку $D$, которая получится, если из вектора $\overrightarrow{OA}$ вычесть вектор $\overrightarrow{OB}$, назовем *разностью* точек $A$ и $B$: $D = A - B$.

Ясно, что при этом сумма точек зависит от того, где мы выбрали полюс. Но как только полюс зафиксирован, сложение точек сводится к сложению векторов.

Упражнения

1. Как надо выбрать полюс, чтобы сумма двух точек $A$ и $B$ лежала на прямой $AB$? На луче $AB$? На отрезке $AB$?

2. Сложите три вершины равностороннего треугольника при различном выборе полюса: в вершине треугольника, в его центре, в произвольной точке.

3. $A$, $B$, $C$ — три любые точки, не лежащие на одной прямой. Выберите полюс так, чтобы их сумма лежала внутри треугольника $ABC$; вне его.

4. Пусть $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ — правильный многоугольник. Где надо выбрать полюс $O$, чтобы выполнялось равенство $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = O$? Однозначно ли определяется полюс этим условием?

5. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда $A + C = B + D$.

Теперь несложно сообразить, что значит *умножить точку на число*. Пусть полюс $O$ задан. Возьмем произвольную точку $A$. Предположим, что ее нужно умножить на 2. Умножим на 2 вектор $OA$, получится вектор $OB$; точка $B$ и будет искомой. Мы пишем: $B = 2A$. Вообще, если $\overrightarrow{OB} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$, то точку $B$ мы будем называть *произведением* точки $A$ на число $\lambda$: $B = \lambda A$. Так как умножение точек на числа мы определили через умножение векторов на числа, то для умножения точек на числа выполняются равенства $1^\circ$ — $3^\circ$, если заменить в них векторы на точки.

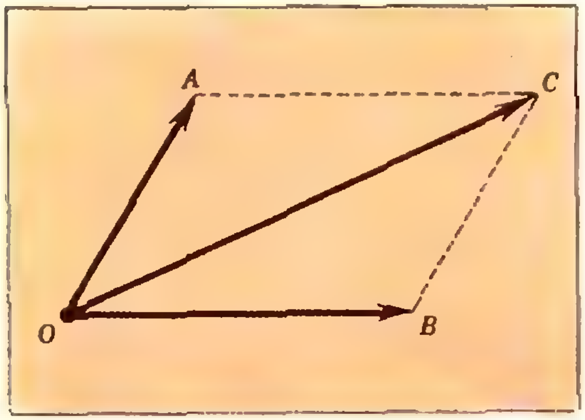


Рис. 1.

Назовем выражение $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, где $\alpha$ и $\beta$ — любые числа, *линейной комбинацией* точек $A$ и $B$.

Упражнения

6. Постройте разность точек $A$ и $B$. Постройте, взяв точки $A$, $B$ и полюс $O$ не на одной прямой, точки $-B$, $-A$, $-A-B$, $-A+B$.

7. Докажите, что если полюс не лежит на одной прямой с точками $A$ и $B$, то всякую точку плоскости можно представить как линейную комбинацию точек $A$ и $B$, причем единственным образом.

8. Полюс выбран в центре правильного шестиугольника $A_1A_2 \ldots A_6$. Запишите точки $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$ в виде линейных комбинаций точек $A_1$ и $A_2$.

9. Может ли точка $2 \cdot A + 3 \cdot B$ лежать на прямой $AB$? При каком условии?

В предыдущих задачах результаты действий с точками зависели от выбора полюса и тем самым были неоднозначны. Однако существует такой способ действия с произвольной системой точек, результат которого уже не зависит от этого выбора (этот способ окажется полезным нам в дальнейшем, при решении «настоящих» геометрических задач). Посмотрим, когда не будет зависеть от выбора полюса линейная комбинация двух точек $A$ и $B$.

Пусть $X_1 = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$, если полюсом является точка $O_1$, и $X_2 = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$, если полюсом является точка $O_2$. Мы хотим, чтобы точки $X_1$ и $X_2$ совпали; для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\overrightarrow{O_1X_1} = \overrightarrow{O_1X_2}$. Имеем: $\overrightarrow{O_1X_2} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2X_2} = \overrightarrow{O_1O_2} + \alpha \cdot \overrightarrow{O_2A} + \beta \cdot \overrightarrow{O_2B} = \overrightarrow{O_1O_2} + \alpha \cdot (\overrightarrow{O_1A} - \overrightarrow{O_1O_2}) + \beta \cdot (\overrightarrow{O_1B} - \overrightarrow{O_1O_2}) = \alpha \cdot \overrightarrow{O_1A} + \beta \cdot \overrightarrow{O_1B} + [1 - (\alpha + \beta)] \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_1X_1} + [1 - (\alpha + \beta)] \cdot \overrightarrow{O_1O_2}$. Для равенства векторов $\overrightarrow{O_1X_2}$ и $\overrightarrow{O_1X_1}$

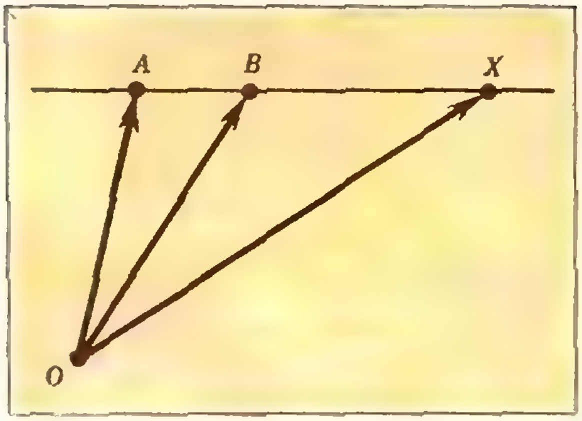


Рис. 2.

необходимо и достаточно, чтобы $\alpha + \beta = 1$.

Точно так же доказывается аналогичное утверждение для $n$ точек: *линейная комбинация* $\alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2 + \ldots + \alpha_n \cdot A_n$ *определяет единственную точку тогда и только тогда, когда* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Докажите его.

Будем называть линейную комбинацию точек *нормированной*, если сумма коэффициентов в этой линейной комбинации равна 1. В дальнейшем мы будет работать в основном с нормированными линейными комбинациями точек, не оговаривая этого каждый раз.

Понятие нормированной линейной комбинации $n$ точек имеет простой механический смысл: пусть в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ помещены массы $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\ldots$, $\mu_n > 0$, причем $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = 1$. Линейная комбинация $\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \ldots + \mu_n A_n$ — это центр тяжести $C$ системы $n$ масс (см. упражнение 14) *).

Следующая теорема объясняет наглядный геометрический смысл произвольной нормированной линейной комбинации двух точек.

Теорема 1. *Всякая точка $X$ прямой $AB$ является нормированной линейной комбинацией точек $A$ и $B$.*

Докажем эту теорему.

Пусть $X$ — точка прямой $AB$ (рис. 2). Тогда $\overrightarrow{AX} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$; следовательно,

$$\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \lambda \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}),$$

то есть

$$X - A = \lambda \cdot (B - A),$$

и потому

$$X = (1 - \lambda) \cdot A + \lambda \cdot B.$$

Мы видим, что сумма коэффициентов равна 1. Обозначим число $1 - \lambda$ через $\alpha$, а $\lambda$ — через $\beta$. Получим

$$X = \alpha \cdot A + \beta \cdot B, \text{ где } \alpha + \beta = 1.$$

Упражнения

10. Докажите обратное утверждение: всякая нормированная линейная комбинация точек $A$ и $B$ принадлежит прямой $AB$.

Утверждение, доказанное в упражнении 10, позволяет вместе с теоремой 1 охарактеризовать прямую $AB$ как множество всех точек, являющихся нормированными линейными комбинациями точек $A$ и $B$.

11. Найдите множество точек, которое получится, если рассматривать всевозможные нормированные линейные комбинации точек $A$ и $B$ при следующих ограничениях:

а) коэффициент при $A$ неотрицателен;
б) коэффициент при $B$ неотрицателен;
в) оба коэффициента неотрицательны;
г) коэффициент при $A$ неотрицателен, а при $B$ неположителен.

12. Пусть $X = \frac{1}{4} A + \frac{3}{4} B$. В каком отношении делится отрезок $AB$ точкой $X$ (считая от $A$)?

13. Докажите, что середины сторон произвольного (даже пространственного) четырехугольника образуют параллелограмм.

14. Докажите, что если $C = \alpha A + \beta B$, $\alpha + \beta = 1$, то $|AC| : |CB| = |\beta : \alpha|$ (если $\alpha \neq 0$).

Из упражнения 14 видно, что если $\alpha$ и $\beta$ — положительные числа, то точка $\alpha A + \beta B$ совпадает с центром тяжести двух масс $\alpha$ и $\beta$, помещенных в точках $A$ и $B$. Подумайте, как, используя свойства 1°, 2°, 3°, показать, что аналогичный смысл имеет и нормированная линейная комбинация $n$ точек с положительными коэффициентами.

Посмотрим теперь, как будет выглядеть доказательство теоремы о медианах треугольника, если использовать действия с точками.

*Три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся*

---

*) С помощью этой механической интерпретации можно получить многие красивые факты и теоремы геометрии — см., например, статью З. А. Скопеца «Расстояние между центроидами двух систем точек» («Квант», 1975, № 3). Однако в нашей заметке мы выводим все нужные нам понятия из операций над *векторами* на плоскости и в пространстве. (Одно из преимуществ такого изложения в том, что сразу можно рассматривать линейные комбинации, в которых некоторые из «масс» $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ отрицательны).

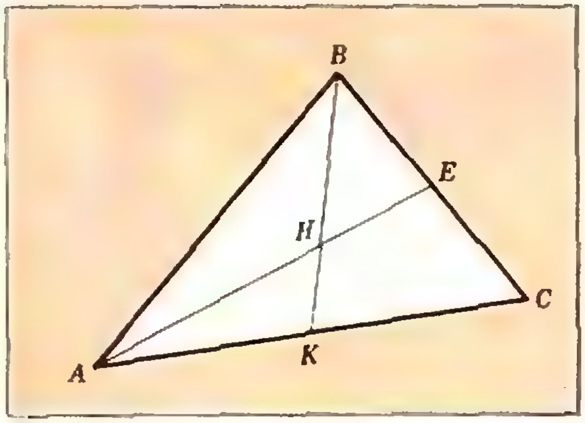


**Рис. 3.**

*ею в отношении* 2 : 1, *считая от вершины.*

Пусть в треугольнике $ABC$ проведены медианы $AE$ и $BK$, $H$ — точка их пересечения (рис. 3). Выберем полюс в точке $A$. Тогда $H=\lambda E=\lambda\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C\right)=\frac{\lambda}{2}B+\frac{\lambda}{2}C$ (чему равно число $\lambda$, мы пока не знаем). С другой стороны, точка $H$ лежит на прямой $BK$; поэтому $H=\alpha B+\beta K=\alpha B+(1-\alpha)K$, то есть $H=\alpha B+\frac{1-\alpha}{2}C$.

В силу единственности представления точки $H$ в виде линейной комбинации точек $B$ и $C$ (см. упражнение 7)

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2}=\alpha,\\[2mm] \dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{1-\alpha}{2}.\end{cases}$$

Решив эту систему, получим $\lambda=\frac{2}{3}$, $\alpha=\frac{1}{3}$, откуда $\beta=\frac{2}{3}$. Эти значения коэффициентов дают такие отношения длин отрезков: $|AH|:|HE|=2:1$, $|BH|:|HK|=2:1$. Осталось показать, что $H$ принадлежит третьей медиане. Так как $H=\frac{2}{3}E$, то $H=\frac{1}{3}(B+C)$. Но $B=2T$, где $T$ — середина стороны $AB$. Поэтому $H=\frac{1}{3}(2T+C)$, то есть $H=\frac{2}{3}T+\frac{1}{3}C$. Сумма коэффициентов равна 1, оба они положительны, поэтому $H$ — точка отрезка $CT$, делящая его в отношении 2:1.

Рассуждения, примененные нами при доказательстве теоремы о медианах, помогают во многих случаях вместо дополнительных построений, рассмотрения подобных треугольников и т. п. обойтись простыми вычислениями.

Обычно схема рассуждений такова:

1) выбираем полюс в наиболее удобной для решения точке (если мы работаем с нормированными линейными комбинациями, то это ни на что не влияет);

2) получаем для какой-либо точки два представления в виде линейной комбинации двух точек, не лежащих с полюсом на одной прямой;

3) решаем систему, связывающую между собой коэффициенты полученных линейных комбинаций (в нормированных комбинациях появляется еще условие, что сумма коэффициентов равна 1).

Попробуйте применить эту схему в следующих задачах.

Упражнения

**15.** В треугольнике $ABC$ отложили на сторонах $AC$ и $BC$ точки $K$ и $E$ так, что $|AK|=\frac{1}{n}|AC|$, $|BE|=\frac{1}{n}|BC|$. В каком отношении делятся точкой пересечения отрезки $AE$ и $BK$? Лежит ли она на медиане, проведенной из вершины $C$?

**16.** В треугольнике $ABC$ отложили на сторонах $AC$, $CB$ и $BA$ отрезки $AK$, $CE$ и $BM$ так, что каждый из них составляет $\frac{1}{3}$ соответствующей стороны. Проведены отрезки $AE$, $CM$, $BK$. В каком отношении они разделились точками пересечения?

**17.** Прямая пересекает треугольник $ABC$ так, что сторона $AB$ делится в отношении 2:1, сторона $BC$ — в отношении 3:1. В каком отношении делится вершиной $C$ отрезок $AE$ от вершины $A$ до точки $E$ пересечения прямой $AC$ с данной прямой? Попробуйте обобщить эту задачу.

**18.** Вершина параллелограмма соединена с серединами противоположных сторон. В каком отношении делят проведенные отрезки диагональ параллелограмма, противоположную данной вершине?

В основном все, что мы до сих пор делали, происходило в плоскости. А теперь «выйдем» в пространство.

Теорема 2. *Всякая точка плоскости ABC является нормированной*

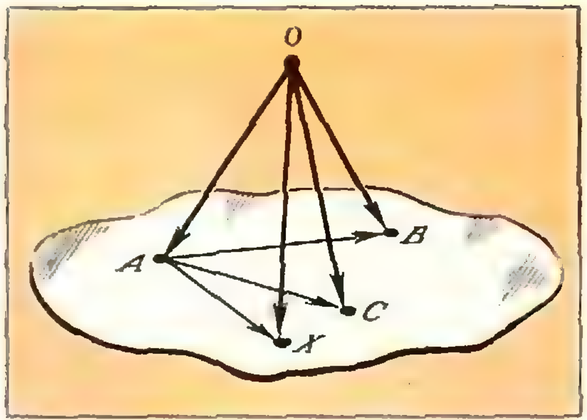


Рис. 4.

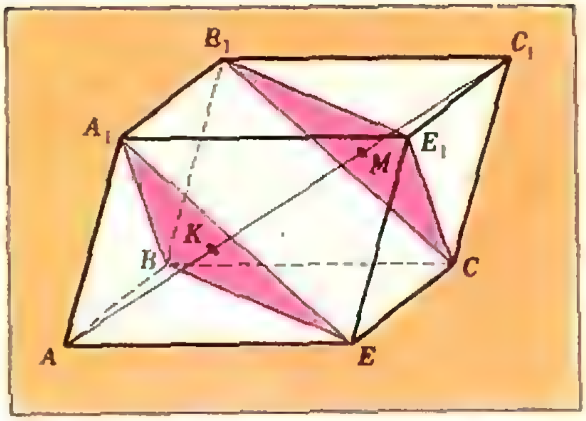


Рис. 5.

*линейной комбинацией точек A, B и C.*

Доказательство. Пусть точка $X$ принадлежит плоскости $ABC$ (рис. 4). Имеем $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$. Так как точки $A$, $B$, $C$ не лежат на одной прямой, то $\overrightarrow{AX} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{AC}$. Теперь получаем: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda_1 \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \lambda_1 \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \lambda_2 (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda_1 \cdot \overrightarrow{OB} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{OC}$. Сумма коэффициентов равна 1. Обозначим число $1 - \lambda_1 - \lambda_2$ через $\alpha$, число $\lambda_1$ — через $\beta$ и $\lambda_2$ — через $\gamma$; тогда $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$, где $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Упражнения

19. Докажите обратное утверждение: всякая нормированная линейная комбинация точек $A$, $B$ и $C$, не лежащих на одной прямой, принадлежит плоскости $ABC$.

20. Если три точки и полюс не лежат в одной плоскости, то всякая точка пространства единственным образом представляется в виде линейной комбинации трех данных точек. Докажите это.

Решение элементарных стереометрических задач с использованием действий над точками основано на тех же принципах, что и решение задач планиметрии. Рассмотрим, например, такую задачу: *в параллелепипеде $ABCEA_1B_1C_1E_1$ проведена диагональ $AC_1$; доказать, что плоскости $A_1BE$ и $B_1E_1C$ делят эту диагональ на три равных по длине отрезка.*

Для доказательства выберем полюс в точке $A$ (рис. 5). Пусть $K$ — точка пересечения прямой $AC_1$ и плоскости $A_1BE$. Тогда $K = \lambda \cdot C_1$, то есть $K = \lambda \cdot (B + E + A_1)$. С другой стороны, $K$ принадлежит плоскости $A_1BE$; поэтому $K = \alpha \cdot A_1 + \beta \cdot B + \gamma \cdot E$, где $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Получаем систему:

$$\alpha = \lambda; \quad \beta = \lambda; \quad \gamma = \lambda; \quad \alpha + \beta + \gamma = 1,$$

из которой находим, что $\lambda = \frac{1}{3}$. Таким образом, $|AK| = \frac{1}{3}|AC_1|$. Пусть теперь $M$ — точка пересечения прямой $AC_1$ и плоскости $B_1E_1C$. Аналогичными рассуждениями показывается, что $M = \frac{2}{3}C_1$, откуда $|AM| = \frac{2}{3}|AC_1|$.

Упражнение

21. Докажите, что все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке.

Заметим, что названия операций «сложение» и «умножение на число», которые мы ввели для точек, не общеприняты. Обычно говорят не о линейных комбинациях точек $\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_n A_n$, а о линейных комбинациях векторов $\alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \ldots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n}$, явно указывая выбор «полюса» $O$. Это, разумеется, не меняет существо дела — разница лишь в обозначениях; именно в краткости обозначений состоит главное преимущество «алгебры точек», с которой вы познакомились в этой статье.

# задачник Кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Задачи, публикуемые здесь, нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Многие задачи будут понятны ученикам 7—8 классов. Наряду с относительно легкими задачами здесь встречаются и такие, которые нелегко решить и специалистам — математикам и физикам. Самые трудные задачи помечены звездочкой. Если не сумеете быстро справиться с задачей, — не опускайте руки, попробуйте вернуться к ней еще раз — через день, через неделю. Если задача вас заинтересовала, то не откладывайте ее даже после того, как решение найдено, — подумайте, как наиболее рационально и убедительно записать решение, как можно обобщить задачу, уточнить или усилить ее результат, какие близкие к ней задачи вы встречали. Мы будем рады получить от читателей решения задач и относящиеся к ним соображения.

Во второй части раздела «Задачник «Кванта» мы помещаем решения задач (примерно через полгода после публикации условий) с учетом присланных читателями писем. По существу, решения задач — это небольшие заметки, и мы советуем познакомиться с ними и тем, кто не получал в прошлом году «Квант» или не решал задач. В нечетных номерах «Кванта» (№№ 1, 3, ...) мы приводим фамилии читателей, приславших нам правильные решения задач. Школьники, которые в течение года регулярно присылают интересные и полные решения, получают приглашение на республиканские олимпиады по математике или физике (эти олимпиады, как правило, проходят в весенние каникулы). Кроме того, для победителей нашего постоянного конкурса по решению задач редакция устанавливает несколько специальных премий.

Разумеется, не все наши задачи публикуются впервые. После формулировки мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Придумать новую оригинальную задачу — сделать небольшое самостоятельное «открытие» — пожалуй, даже труднее, чем решить готовую чужую. Если вам это удастся, пришлите нам задачу вместе с решением. Напишите, как возникла у вас задача: встречали ли вы похожие задачи или идеи решения, с какими общими явлениями или математическими теоремами связан ваш новый результат. Наиболее красивые и интересные задачи мы опубликуем в «Задачнике» или других разделах «Кванта».

Наш адрес: 113035, Москва, Ж-35, ул. Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». На конверте после адреса напишите, решения каких задач вы посылаете (например: «задачи М361, М362» или «Ф373» или «новая задача по математике (по физике)». Решения задач по каждому предмету (по математике, и по физике), а также новые задачи по каждому предмету присылайте в отдельных конвертах. Формулировки новых задач (как и любые другие материалы, предназначенные для публикации в журнале) нужно присылать в двух экземплярах. Мы получаем очень много писем от читателей и стараемся отвечать всем нашим постоянным корреспондентам. Очень просим оформлять решения аккуратно, чтобы облегчить работу редакции и консультантам раздела «Задачник «Кванта». В начале письма обязательно напишите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес, а также класс и школу, в которой вы учитесь (и ваш «номер», если вы — ученик ВЗМШ). В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (для ответа после проверки решений). Письма от читателей мы сможем учитывать только в том случае, если они будут написаны на русском языке и присланы не позже, чем через полтора месяца после выхода из печати соответствующего номера.

Крайний срок присылки ответов на задачи этого номера — 1 марта 1976 года.

# Задачи

## М361—М365; Ф373—Ф377

**М361**. Двое играют в следующую игру. На клетчатой бумаге выделяется прямоугольник $m \times n$ клеток. Каждый по очереди вычеркивает все клетки какого-нибудь горизонтального или вертикального ряда, в котором еще есть невычеркнутые клетки. Выигрывает тот, кто вычеркивает последние клетки.

Кто может обеспечить выигрыш: начинающий или его партнер? (Ответ, конечно, зависит от $m$ и $n$.)

*А. Бернард, А. Фельштын, А. Ткачев*

**М362**. Поделим каждую сторону выпуклого четырехугольника $ABCD$ на три равные части и соединим отрезками соответствующие точки на противоположных сторонах (рис. 1). Докажите, что площадь «среднего» четырехугольника в 9 раз меньше площади четырехугольника $ABCD$.

*А. Лопшиц*

**М363.** Две параболы с параллельными осями пересекаются в точках $A_0$ и $B_0$. На первой из них берутся точки $A_1, \dots, A_{2n}$, на второй — точки $B_1, \dots, B_{2n}$ так, что $A_0A_1 \parallel B_0B_1$, $A_1A_2 \parallel B_1B_2, \dots, A_{2n-1}A_{2n} \parallel B_{2n-1}B_{2n}$. Докажите, что $A_0B_{2n} \parallel B_0A_{2n}$.

*Нгуен Конг Кви*

**М364.** Из 16 космонавтов нужно выбрать 4-х — экипаж космического корабля. Тренировки проводятся с 4-мя экипажами по 4 человека в каждом. Можно ли составить расписание тренировок таким образом, чтобы любые два космонавта побывали в одном экипаже ровно один раз?

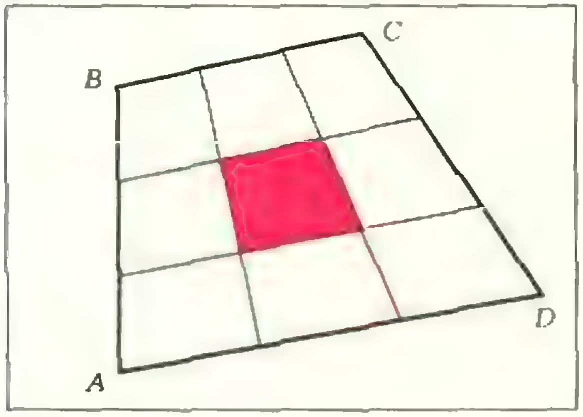


Рис. 1.

**М365**. а) Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их кубов быть больше единицы?

б) Тот же вопрос для чисел, каждое из которых меньше единицы.

в) Может ли случиться, что ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ сходится, а ряд $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 \dots$ — нет?

(Напомним, что ряд $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$ называется сходящимся, если последовательность чисел $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ имеет предел.)

**Ф373***. Два биллиардных шара, один из которых первоначально покоится, испытывают упругое «косое» столкновение. Линия, проходящая через центры шаров при столкновении, составляет угол 60° с направлением первоначального движения налетающего шара. Во время столкновения шары деформируются, и часть кинетической энергии налетающего шара переходит в потенциальную энергию упругой деформации шаров, которая при разлете шаров вновь переходит в кинетическую энергию. Определить максимальную часть энергии шаров, переходящую в энергию упругой деформации в процессе удара. Шары считать абсолютно гладкими.

**Ф374***. На дне стакана с водой лежат несколько запаянных с одного конца и заполненных воздухом капиллярных трубок. Диаметр трубок $d = 0{,}2$ *мм*, высота уровня воды в стакане $h = 10$ *см*. При кипении воды у открытых концов трубок образуются пузырьки пара. Чему равна температура воды на дне стакана, если атмосферное давление равно $10^5$ *н/м*$^2$? Коэффициент поверхностного натяжения воды принять равным 57 *дин/см*. Считать, что давление насыщенных паров воды вблизи 100°С возрастает на 27 *мм рт. ст.* при повышении температуры на 1°.

**Ф375.** На горизонтальной поверхности лежат два бруска с массами $m_1$ и $m_2$, соединенные недеформированной пружинкой. Какую наименьшую горизонтальную силу $F$ нужно приложить к одному из брусков, чтобы сдвинулся и второй брусок? Коэффициент трения брусков о поверхность равен $k$.

*Г. Коткин*

**Ф376.** Песочные часы диаметра $d$ вставлены в запаянную и заполненную водой стеклянную трубку диаметра $D$ ($D \approx d$). В начальный момент часы находятся внизу трубки (рис. 2). При переворачивании трубки часы на некоторое время остаются вверху трубки, затем медленно опускаются вниз. Найти время, в течение которого часы находятся вверху трубки, если высота часов $h$ ($h > d$), их масса $M$, масса находящегося в часах песка $m$ и коэффициент трения часов о стенки трубки равен $k$. Время пересыпания песка из верхнего в нижний отсеки часов равно $\tau$.

**Ф377.** Если смотреть прищурившись на далекие яркие лампы, то обычно видны вертикальные или слегка наклонные столбы света, идущие вниз и вверх от лампы. Объясните это явление. Придумайте и поставьте опыты для того, чтобы проверить ваше объяснение.

Подсказка. Поверхность роговицы не бывает сухой. Она всегда покрыта слоем слезной жидкости.

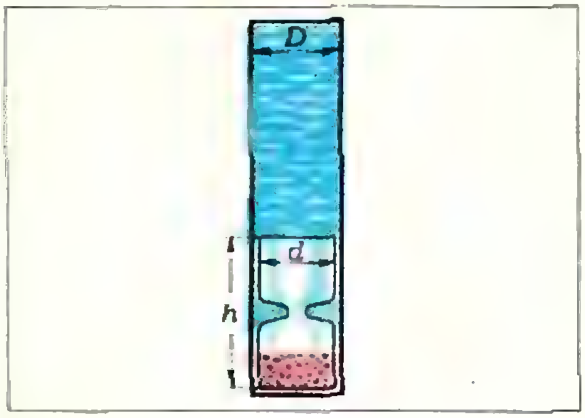


Рис. 2.

# Решения задач

## М321—М325; Ф333, Ф335—Ф338

**М321.** *Имеется прямоугольный стол площади 1. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать систему прямоугольных салфеток, покрывающих этот стол (края салфеток параллельны краям стола), такую, что любая ее подсистема, состоящая из неперекрывающихся салфеток, имеет площадь, меньшую $\varepsilon$.*

Мы будем говорить, что система салфеток $A$ является *подсистемой* системы $B$, если всякая салфетка из $A$ является салфеткой из $B$. Введем такое обозначение $S(A)$ — *площадь системы* $A$ — это площадь части стола, покрытой всеми салфетками из $A$.

Прежде чем начать решать задачу, опишем построение двух систем салфеток, которые пригодятся нам в дальнейшем.

1. Построение системы $A^k$.

Система $A^0$ состоит из одной салфетки с координатами вершин (0, 0), ($a$, 0), (0, $b$), ($a$, $b$).

Система $A^0$ получается из системы $A^{k-1}$ добавлением двух салфеток: (см. рисунок 1): салфетки с координатами вершин
(0, 0), ($2^k a$, 0), (0, $2^{-k} b$), ($2^k a$, $2^{-k} b$),
и салфетки с координатами вершин
(0, 0), ($2^{-k} a$, 0), (0, $2^k b$), ($2^{-k} a$, $2^k b$).
Каждая из этих салфеток имеет площадь $ab$ и ровно наполовину вылезает из системы $A^{k-1}$, поэтому
$S(A^k) = S(A^{k-1}) + ab$ и $S(A^k) = (k+1) \cdot ab$,
то есть

$$(\textit{площадь каждой салфетки}) = \frac{S(A^k)}{k+1}. \quad (*)$$

Заметим, что всякие две салфетки из системы $A^k$ перекрываются.

2. Построение системы $B_n^k$.

Система $B_0^k$ совпадает с уже построенной системой $A^k$, у которой параметры $a$ и $b$ подобраны так, что $2^k \cdot a$ и $2^k \cdot b$ — это длины сторон стола, и система координат $xOy$ связана со столом следующим образом: начало координат $O$ — произвольный угол стола, а оси координат направлены по сторонам стола.

Система $B_n^k$ получается из системы $B_{n-1}^k$ так. Нужно часть стола, не покрытую салфетками системы $B_{n-1}^k$, мысленно разрезать на прямоугольные столики и на каждом из них построить «свою» систему $B_0^k$. Затем к салфеткам системы $B_{n-1}^k$ нужно добавить получившиеся новые салфетки — это и будет система $B_n^k$.

Теперь легко решить задачу. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $k$ так, чтобы $\frac{1}{k+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Заметим,

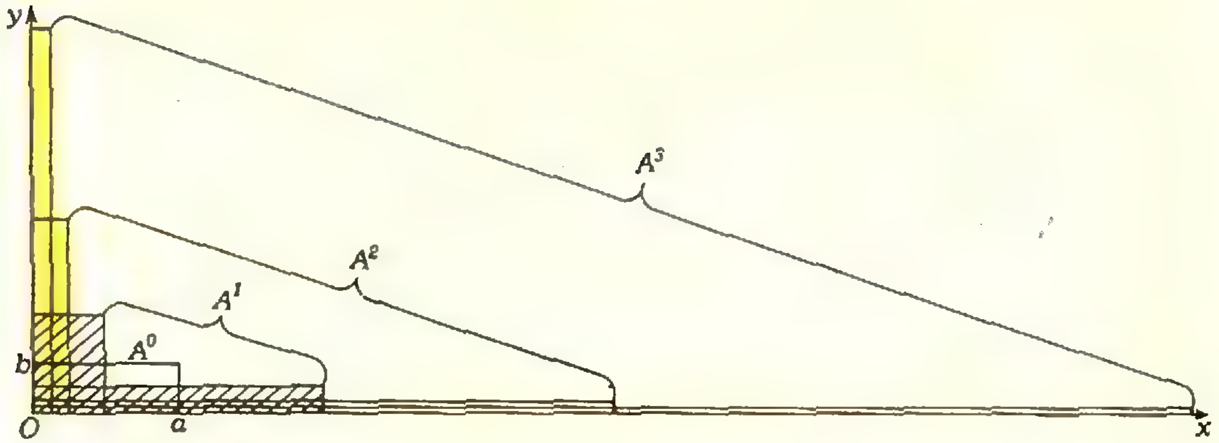


Рис. 1.

что система $B_n^k$ состоит из большого числа попарно неперекрывающихся подсистем, подобных $A^k$. Если в $B_n^k$ выбрать подсистему $C$ непересекающихся салфеток, то в каждую из таких систем, составляющих $B_n^k$, входит не более одной салфетки из $C$. Используя (*), получим, что $S(C) \leqslant \frac{S(B_n^k)}{k+1}$.

А так как $S\left(B_n^k\right) < 1$ и $\frac{1}{k+1} < \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$S(C) < \frac{1}{2}\varepsilon \qquad (**)$$

для любого $n$ и любой подсистемы $C \subset B_h^k$. Осталось выбрать $n$. Заметим, что

$$S\left(B_0^k\right) = S\left(A^k\right) = (k+1)ab;$$

но так как $S_{\text{стола}} = 2^{2k} \cdot ab\ (=1)$, то, следовательно,

$$S\left(B_0^k\right) = \frac{k+1}{2^{2k}} \cdot \textit{(площадь стола, на котором построена } B_0^k).$$

Теперь ясно, что площадь части стола, не покрытой салфетками системы $B_n^k$, равна разности между площадью части стола, непокрытой салфетками системы $B_{n-1}^k$, и произведением $\frac{k+1}{2^{2k}}$ на эту площадь, то есть

$$1 - S\left(B_n^k\right) = \left(1 - S\left(B_{n-1}^k\right)\right)\left(1 - \frac{k+1}{2^{2k}}\right).$$

Из этого следует, что площадь части стола, не покрытой системой $B_n^k$, меньше, чем $\left(1 - \frac{k+1}{2^{2k}}\right)^n$.

Выберем $n$ так, чтобы $\left(1 - \frac{k+1}{2^{2k}}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}$.

Часть стола, не покрытую системой $B_n^k$, покроем неперекрывающимися салфетками как-нибудь, а затем добавим их к системе $B_n^k$. Тогда мы получим нужную систему. Действительно, пусть в ней выбрана подсистема неперекрывающихся салфеток. Те из них, которые принадлежат к $B_n^k$, имеют общую площадь меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу выбора $k$ и соотношения (**). А все остальные салфетки имеют общую площадь также меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ в силу выбора $n$.

*А. Браилов*

**М322.** *а) Фигура, состоящая более чем из одной точки, является пересечением $N$ кругов. Докажите, что границу этой фигуры можно представить в виде объединения не более $2N-2$ дуг окружностей.*

*б) В алфавите $N$ букв. Несколько букв выписано по окружности так, что никакая буква не встречается два раза подряд и для любых двух различных букв $a$, $b$ можно провести прямую так, что все буквы $a$ будут по одну сторону от прямой, а буквы $b$ — по другую (рис. 2). Докажите, что выписано не более $2N-2$ букв.*

Покажем, каким образом задача *а)* выводится из задачи *б)*.

Возьмем алфавит из $N$ букв и присвоим каждому из данных кругов одну из букв этого алфавита. Будем обходить границу данной фигуры, выписывая последовательно буквы, обозначающие круги, по границам которых мы

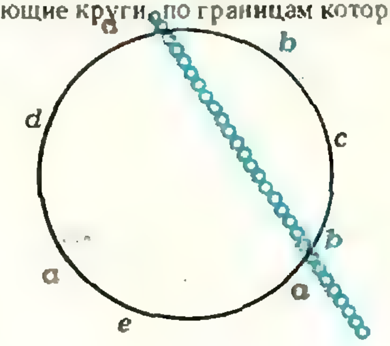


Рис. 2.

проходим (рисунок 3; на нем изображены четыре круга). Если эти буквы с сохранением порядка расположить по окружности (рис. 4), то полученное расположение будет удовлетворять условию задачи *б*), потому что окружности не могут пересекаться так, как на рисунке 5. Так как (в силу задачи *б*) выписано не более $2N-2$ букв, то граница данной фигуры состоит не более чем из $2N-2$ дуг окружностей.

Утверждение задачи *б*) докажем индукцией по $N$.

База индукции очевидна. Для осуществления индукционного перехода предположим, что буквы расположены по окружности равномерно (в вершинах правильного многоугольника), и выберем пару одинаковых букв с минимальным расстоянием между ними (*расстоянием* между двумя точками окружности мы называем длину меньшей из дуг, соединяющих эти точки). Пусть это будет пара букв *a*, и пусть *b* — одна из букв на кратчайшей дуге, соединяющей две буквы *a*. Тогда из условия задачи вытекает, что буква *b* встречается на окружности в единственном экземпляре. Вычеркнем букву *b* и одну из букв *a*, если после вычеркивания буквы *b* две буквы *a* окажутся рядом. Так как теперь на окружности встречаются лишь $N-1$ разных букв, то по индукционному предположению выписано не более $2(N-1)-2=2N-4$ букв, а так как было вычеркнуто не более двух букв, то всего было выписано не более $2N-2$ букв, что и требовалось доказать.

*С. Фомин*

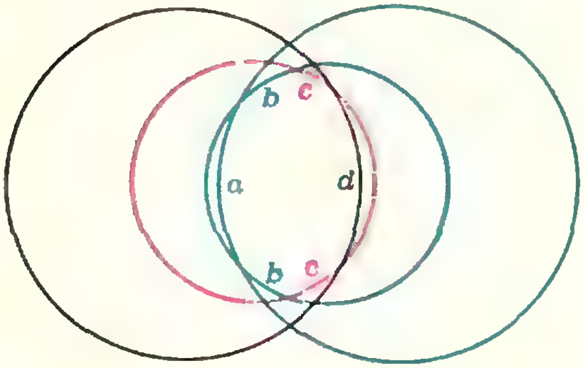


Рис. 3.

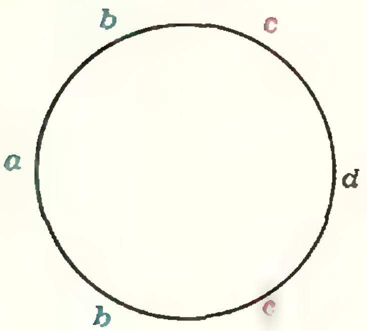


Рис. 4.

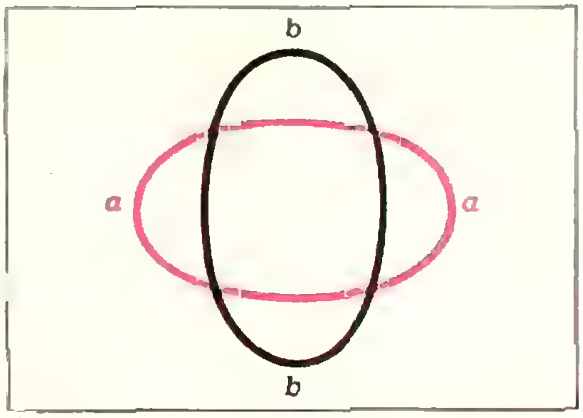


Рис. 5.

**М323.** *Докажите, что любую функцию, определенную на всей числовой прямой, можно представить в виде суммы двух функций, график каждой из которых имеет центр симметрии.*

Пусть функция $f$ определена по всей числовой оси. Представим ее в виде суммы функций $g$ и $h$, график первой из которых симметричен относительно начала координат, а график второй — относительно точки с координатами $(1, 0)$.

На промежутке $[-1, 1[$ определим функцию $g$ так, чтобы она была нечетной, а функцию $h$ зададим равенством $h(x)=f(x)-g(x)$. Затем положим $h(1)=0$, а на промежутке $[1, 3[$ определим функцию $h$ так, чтобы ее график был симметричен относительно точки $(1,0)$. Для этого нужно положить $h(x)=-h(2-x)$ (если $x\in[1, 3[$, то $2-x\in]-1, 1[$). Функцию $g$ на промежутке $[1, 3[$ зададим равенством $g(x)=f(x)-h(x)$. Теперь мы можем определить функцию $g$ на промежутке $]-3, -1]$ равенством $g(x)=-g(-x)$, а затем и функцию $h$ на этом промежутке равенством $h(x)=f(x)-g(x)$. Далее можно определить функции $g$ и $h$ на промежутке $[3, 5[: h(x)=-h(2-x)$, $g(x)=f(x)-h(x)$, затем на промежутке $]-5, -3]: g(x)=-g(-x)$, $h(x)=f(x)-g(x)$ и так далее.

*А. Сергеев*

**М324.** *Имеется несколько кучек камней. Двое играют в игру, ход которой состоит в том, что игрок разбивает каждую кучку, состоящую более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Ходы делаются поочередно до тех пор, пока во всех кучках не останется по одному камню. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. Как должен играть начинающий, если сначала в каждой кучке было от 80 до 120 камней?*

Будем следить за максимальным числом камней в одной кучке (назовем его $M$).

Своим первым ходом начинающий может сделать $M=63$. Тогда после первого хода второго игрока $M$ будет заключено между 32 и 62, и начинающий своим вторым ходом может сделать $M = 31$. После очередного хода второго игрока будет выполнено неравенство $16 \leqslant M \leqslant 30$, и начинающий своим третьим ходом делает $M = 15$. Далее своими ходами начинающий последовательно добивается, чтобы число $M$ равнялось 7, 3 и, наконец, 1, что и означает его победу.

Так же можно доказать, что в этой игре выигрывает начинающий, если вначале $M \neq 2^k - 1$, где $k$ — натуральное, и его партнер — если $M = 2^k - 1$.

*С. Фомин*

**M325.** *В числовом треугольнике верхнее число равно 1 и крайние числа в каждой строке — тоже 1, а каждое из остальных чисел не меньше суммы двух чисел, стоящих над ним (в частности, этому условию удовлетворяет «треугольник Паскаля»). Пусть натуральное число $a$, большее 1, встречается в этом треугольнике $k$ раз. Докажите, что $2^k < a^2$.*

Разобьем числовой треугольник на прямые углы (см. рисунок 6) и занумеруем эти углы числами 0, 1, 2, 3, 4, ... Пусть $x_m$ — число, стоящее в вершине $m$-го угла, а $y_m$ и $z_m$ — числа, стоящие над числом $x_m$, $m \geqslant 1$. Тогда $y_m \geqslant x_{m-1}$ и $z_m \geqslant x_{m-1}$, а так как $x_m \geqslant y_m + z_m$, то $x_m \geqslant 2x_{m-1}$, причем если $m \geqslant 2$, то $y_m > x_{m-1}$, $z_m > x_{m-1}$, так что $x_m > 2x_{m-1}$. Так как $x_0 = 1$, то $x_m \geqslant 2^m$, причем $x_m > 2^m$ при $m \geqslant 2$. Предположим теперь, что $x_m$ — наибольшее из чисел, расположенных в вершинах углов, не превосходящее числа $a$, то есть $x_m \leqslant a$, $x_{m+1} > a$. «Стороны» каждого из углов с номерами 1, 2, ..., $m$ содержат не более двух чисел, равных $a$, а углы с номерами, большими $m$, состоят из чисел, бóльших $a$. Следовательно, $k \leqslant 2m$. В то же время $a \geqslant x_m \geqslant 2^m$, откуда следует, что $2^k \leqslant 2^{2m} \leqslant a^2$, причем равенство $2^k = a^2$ возможно лишь при $m = 1$. Но тогда $k \leqslant 2$, $2^k \leqslant 4$, так что $a = 2$. Но легко убедиться, что число 2 может встретиться в числовом треугольнике не более одного раза, так что и в этом случае $2^k < a^2$.

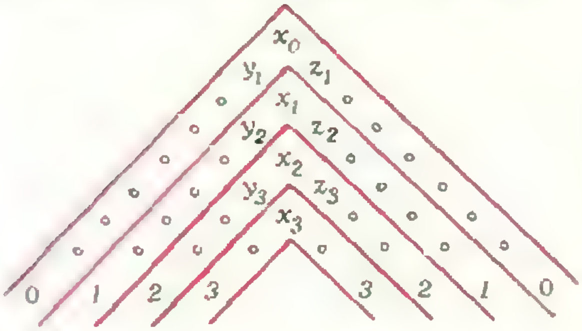


Рис. 6.

*Ю. Ионин*

**Ф333.** *На непроводящем диске радиуса $R$ закреплена по хорде проволока длиной $l$. Диск вращается с постоянной угловой скоростью $\omega$. Перпендикулярно к диску направлено магнитное поле с индукцией $B$ (рис. 7). Найти разность потенциалов между серединой и концом проволоки.*

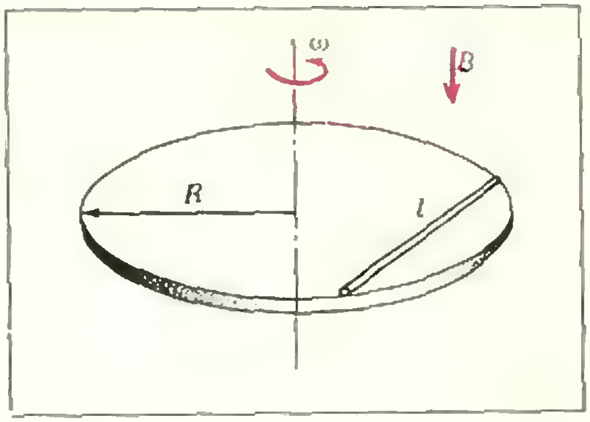


Рис. 7.

Рассмотрим сначала проводник $OA$ длины $R$, закрепленный на диске вдоль его радиуса. При вращении диска на свободные электроны проводника будут действовать силы Лоренца, вследствие чего между концами проводника возникнет разность потенциалов. Ее можно рассчитать, представив, что движущийся конец $A$ проводника скользит по полукруглому контактному проводу, соединенному с концом $O$ через вольтметр (рис. 8). Тогда за малый промежуток времени $\Delta t$ площадь контура, образованного движущимся и покоящимися проводниками, изменится на $\Delta S = R^2\omega\Delta t/2$, а магнитный поток через этот контур — на $\Delta\Phi = B\Delta S$. Следовательно, абсолютная величина э. д. с. индукции в контуре, равная модулю разности потенциалов на концах проводника, будет равна

$$|\mathscr{E}_1| = \Delta\Phi/\Delta t = BR^2\omega/2,$$

причем потенциал неподвижного конца $O$ проводника будет выше потенциала конца $A$.

Если бы длина проводника была равна $a$, то потенциал конца $O$ был бы выше соответственно на величину

$$\mathscr{E}_2 = Ba^2\omega/2.$$

Вернемся теперь к исходной задаче. Дополним проволоку длины $l$, закрепленную по хорде, двумя проводниками длины $R$ и $a = \sqrt{R^2 - l^2/4}$, соединяющими центр диска с одним из концов проволоки и с ее серединой (точки $A$ и $C$ на рисунке 9). При вращении диска магнитный поток через треугольный контур $AOCA$ не меняется, следовательно, полная э. д. с. индукции в контуре равна нулю, т. е.

$$\mathscr{E}_{CA} - \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = 0.$$

Это означает, что искомая разность потенциалов между серединой $C$ проволоки и ее концом $A$ равна

$$\mathscr{E}_{CA} = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = \frac{B\omega}{2}(R^2 - a^2) = Bl^2\omega/8.$$

*Б. Буховцев*

**Ф335.** *Цилиндрический сосуд радиуса $R$, ось которого составляет угол $\alpha$ с вертикалью, заполнен водой. В цилиндр опускают хорошо притертый поршень, материал которого пропускает воздух, но непроницаем для воды. При каком минимальном весе поршня вся его нижняя поверхность будет касаться воды?*

Рассмотрим силы, действующие на поршень. Это — сила тяжести $m\mathbf{g}$, равнодействующая $\mathbf{Q}$ сил давления воды и сила реакции $\mathbf{N}$ со стороны стенок цилиндра (рис. 10).

По условию задачи вес поршня должен быть минимальным. Это означает, что в самой верхней точке касания поршня и воды (точка 0 на рисунке 10) давление воды равно нулю. С увеличением $x$ давление $p$ растет пропорционально $x$:

$$p = \rho gh = \rho gx \sin\alpha$$

($\rho$ — плотность воды). Для того чтобы найти равнодействующую $Q$ сил давления на поршень, разобьем его поверхность соприкосновения с водой на узкие полоски такие, что на каждой из них давление можно считать постоянным. Выберем две одинаковые полоски $A$ и $B$ (с площадью $s$ каждая), расположенные по разные стороны от центра поршня на равных расстояниях $a$ от него (рис. 11), и подсчитаем силу $\Delta Q$, действующую на обе полоски вместе. Давление воды в точках полоски $A$ равно $p_A = \rho gx_A \sin\alpha = \rho g(R - a)\sin\alpha$, а в точках полоски $B$ — $p_B = \rho gx_B \sin\alpha = \rho g(R + a)\sin\alpha$. Поэтому

$$\Delta Q = p_A s + p_B s = 2s\rho gR\sin\alpha.$$

Отсюда видно, что сила $\Delta Q$ не зависит от расстояния $a$, т. е. не зависит от положения полосок. Она определяется лишь суммарной площадью выбранных полосок. Следовательно, сила давления, действующая на *весь поршень*, будет равна

$$Q = \rho gR\sin\alpha \cdot \Sigma s_i,$$

где $s_i$ — площадь $i$-й полоски. Но $\Sigma s_i$ — это площадь поршня, т. е. $\Sigma s_i = \pi R^2$, и

$$Q = \pi\rho gR^3 \sin\alpha.$$

Будем считать, что трения между поршнем и стенками цилиндра нет; тогда сила реакции $\mathbf{N}$ направлена перпендикулярно к стенкам цилиндра.

При равновесии поршня сумма проекций всех сил на любое направление, а значит, и на ось $Y$, равна нулю. Тогда

$$Q - mg\cos\alpha = 0, \quad \text{или } mg = \pi\rho gR^3 \operatorname{tg}\alpha.$$

Так как в нашем случае вес поршня (сила $\mathbf{P}$, с которой поршень действует на опору — на воду и стенки цилиндра) равен по абсолютной величине силе тяжести, то

$$P = mg = \pi\rho gR^3 \operatorname{tg}\alpha.$$

*И. Слободецкий*

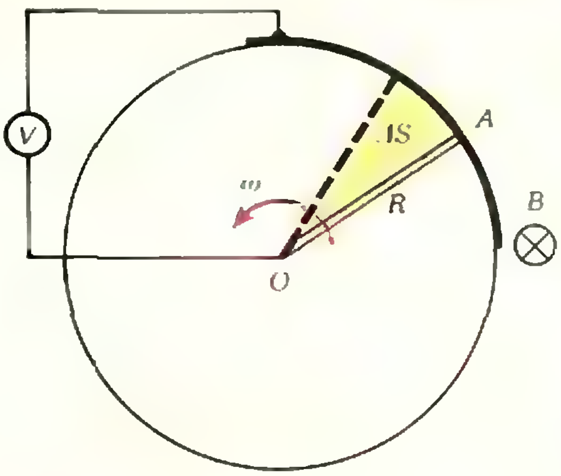


Рис. 8.

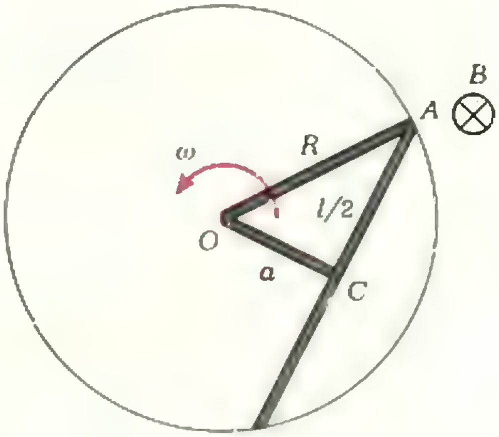


Рис. 9.

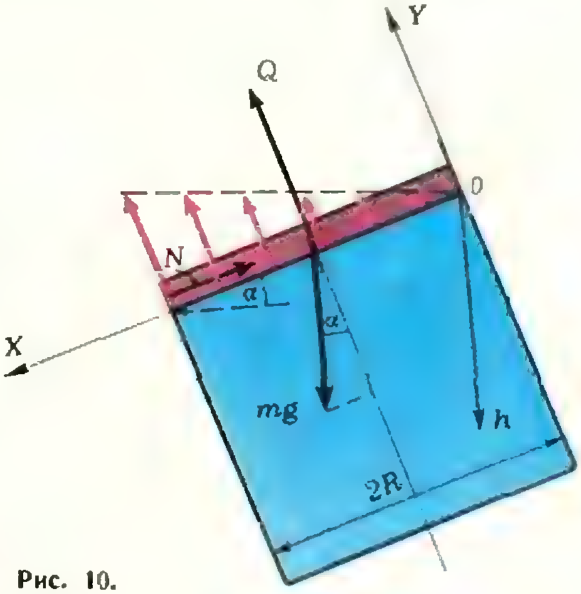


Рис. 10.

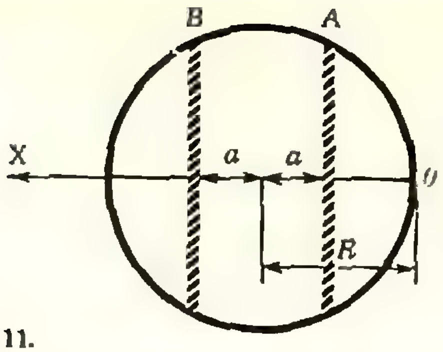


Рис. 11.

**Ф336.** *Цилиндрическая чашка со ртутью вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. При этом поверхность ртути образует параболическое зеркало. Определить фокусное расстояние этого зеркала. Плотность ртути ρ, ускорение свободного падения g.*

Свободная поверхность жидкости во вращающемся сосуде принимает форму параболоида вращения. Рассмотрим на поверхности жидкости некоторый малый элемент массы $m$, находящийся на расстоянии $x$ от оси вращения (рис. 12). На этот элемент действуют сила тяжести $mg$ и сила реакции $N$ со стороны остальной жидкости. Сила $N$ направлена перпендикулярно свободной поверхности жидкости. Это следует из того, что свободная поверхность жидкости есть поверхность постоянного давления.

Поскольку выбранный элемент равномерно вращается по окружности радиуса $x$, результирующая сила, действующая на него, направлена по горизонтали к оси вращения и равна $m\omega^2 x$. Из параллелограмма сил на рисунке 12 находим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 x}{g}, \tag{1}$$

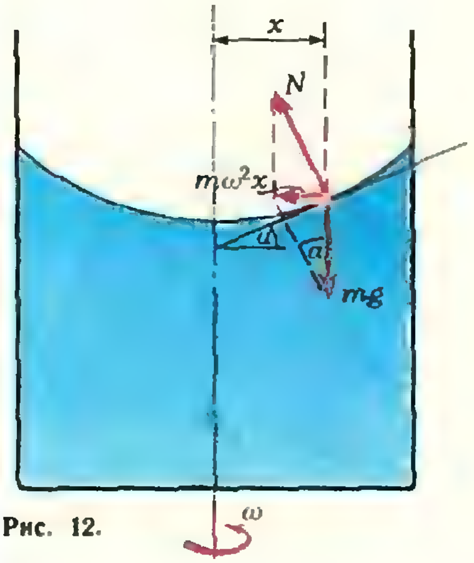


Рис. 12.

где α — угол наклона касательной к поверхности жидкости в выбранной нами точке. Отметим, что из соотношения (1) следует, что поверхность жидкости имеет форму параболоида.

Рассмотрим теперь сферу некоторого радиуса $R$ и найдем угол β наклона касательной к этой сфере в точке, находящейся на расстоянии $x$ от вертикального диаметра. Из рисунка 13 следует, что

$$\sin\beta = \frac{x}{R}. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2), вообще говоря, описывают разные поверхности. Однако, если нас интересуют участки поверхностей, не очень сильно удаленные от оси, для которых углы наклона достаточно малы, то приближенно можно тангенсы и синусы заменить самими углами, и мы получим:

$$\alpha \approx \frac{\omega^2 x}{g}, \quad \beta \approx \frac{x}{R}.$$

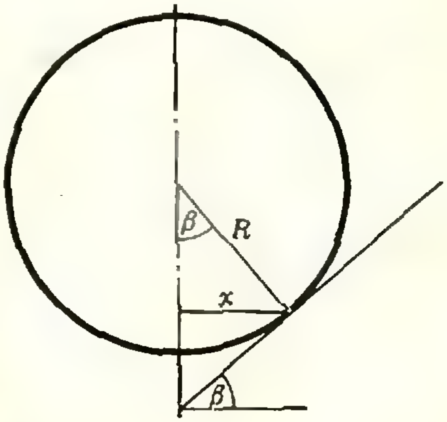


Рис. 13.

Отсюда следует, что наилучшим приближением к поверхности вращающейся жидкости является сфера радиуса $R = \frac{g}{\omega^2}$. Фокусное расстояние такой поверхности (вогнутого зеркала) есть *)

$$F = \frac{R}{2} = \frac{g}{2\omega^2}.$$

---

*) Фокусное расстояние параболического зеркала можно найти непосредственно. Для этого надо воспользоваться каноническим уравнением параболы и ее фокальным свойством (см., например, статью И. Н. Бронштейна «Парабола», «Квант», 1975, № 4).

**Ф337.** *При наблюдении в телескоп яркие звезды видны даже днем. Объясните, почему.*

Если смотреть невооруженным глазом, то звезды не видны на фоне яркого дневного неба из-за слабой контрастной чувствительности глаза. Контраст может быть резко повышен, если наблюдения вести с помощью телескопа. Разберемся в этом подробнее.

Глаз оценивает яркость объектов по освещенности их изображений на сетчатке. Чем более яркий источник, тем больше освещенность его изображения. Мерой контрастности изображения звезды на фоне неба может служить отношение освещенностей их изображений на сетчатке глаза, т. е. $E_{зв}/E_{ф}$. Это отношение зависит как от параметров самих источников (звезды и фона), так и от оптических инструментов, с помощью которых ведутся наблюдения.

Рассмотрим сначала картину, которая образуется на сетчатке невооруженного глаза. Пусть $d$ — диаметр зрачка, $f$ — фокусное расстояние глазной оптики. Освещенность находится как отношение светового потока к площади изображения. При этом нужно иметь в виду, что изображение звезды (точечного источника) имеет вид дифракционного пятна. Размер этого пятна нельзя получить по формулам геометрической оптики. В теории дифракции показывается, что линейный размер дифракционного пятна в фокусе линзы порядка $\frac{\lambda}{d} f$, где $\lambda$ — длина волны *).

Выберем небольшой элемент неба (фона). Световой поток от этого удаленного источника света, попадающий в глаз, очевидно, пропорционален $d^2$. Площадь изображения такого протяженного источника пропорциональна $f^2$. Отсюда освещенность фона $(E_{ф})_1 \sim \frac{d^2}{f^2}$. Коэффициент пропорциональности определяется яркостью источника и не меняется при изменении способа наблюдений.

Световой поток от звезды также пропорционален $d^2$, а площадь дифракционного изображения на сетчатке пропорциональна $\left(\frac{\lambda}{d} f\right)^2$. Таким образом, $(E_{зв})_1 \sim \frac{d^2}{\left(\frac{\lambda}{d} f\right)^2} = \frac{d^4}{\lambda^2 f^2}$. Важно отметить, что освещенность дифракционного изображения звезды оказалась пропорциональной $d^4$. Отношение освещенностей изображений звезды и фона на сетчатке невооруженного глаза пропорционально $d^2/\lambda^2$, т. е.

$$(E_{зв}/E_{ф})_1 \sim \frac{d^2}{\lambda^2}. \qquad (1)$$

В реальных условиях дневного наблюдения это отношение $(E_{зв}/E_{ф})_1$, являющееся мерой контрастности изображений, таково, что невооруженный глаз практически не видит звезды на фоне яркого неба.

Пусть теперь глаз вооружен телескопом. Телескоп состоит из двух линз: объектива и окуляра. Ход лучей от бесконечно удаленного объекта, находящегося на оптической оси телескопа, показан на рисунке 14. Первое изображение объекта получается в фокальной плоскости объектива $O_1$. Глаз рассматривает это изображение через окуляр $O_2$ как через лупу. Изображение, которое получается на сетчатке глаза, подобно изображению в фокальной плоскости объектива. Поэтому для решения нашей задачи достаточно рассмотреть отношение освещенностей изображений звезды и фона в этой плоскости. Повторяя рассуждения, приведенные выше, получим:

$$(E_{зв}/E_{ф})_2 \sim \frac{D^2}{\lambda^2}, \qquad (2)$$

где $D$ — диаметр объектива телескопа. Поскольку коэффициенты пропорциональности в выражениях (1) и (2) одни и те же (они зависят только от самих источников света — звезды и фона), то

$$\frac{(E_{зв}/E_{ф})_2}{(E_{зв}/E_{ф})_1} = \frac{D^2}{d^2}.$$

Таким образом, телескоп увеличивает контрастность изображения звезды на фоне неба в $\left(\frac{D}{d}\right)^2$ раз.

Для больших астрономических телескопов это отношение достигает значений порядка $10^5 — 10^6$. С помощью таких телескопов можно увидеть днем даже очень слабые звезды.

*С. Козел*

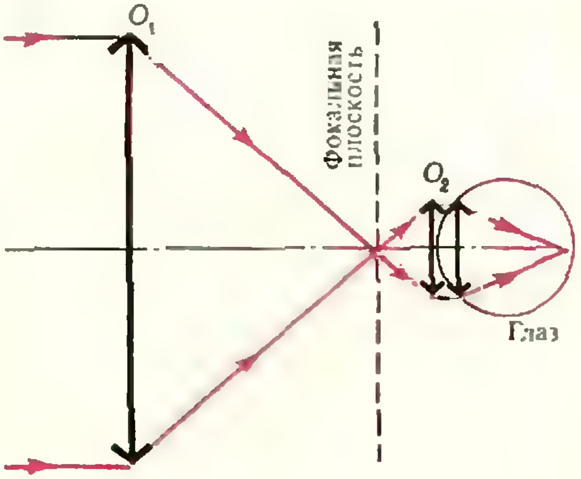


Рис. 14.

---

*) См., например, статью В. Е. Белонучкина и С. М. Козела «Оптический телескоп», «Квант», 1972, № 4.

**Ф338.** *Два стержня из разных металлов с коэффициентами линейного расширения $\beta_1$ и $\beta_2$ при температуре 0°С имеют малоразличающиеся длины $l_1$ и $l_2$ и поперечные сечения $S_1$ и $S_2$. При каких температурах стержни будут иметь одинаковые а) длины? б) поперечные сечения? в) объемы?*

Так как длины, площади сечений и, следовательно, объемы стержней при 0 °С различаются мало, можно считать, что искомые температуры таковы, что $\beta t \ll 1$. В этих условиях коэффициент объемного расширения $\alpha \approx 3\beta$, а коэффициент расширения площади $\gamma \approx 2\beta$.

Температуру $t_1$, при которой стержни будут иметь одинаковую длину, можно найти из уравнения

$$l_1(1+\beta_1 t_1) = l_2(1+\beta_2 t_1).$$

Соответственно, для температуры $t_2$, при которой одинаковы площади поперечных сечений, получим уравнение

$$S_1(1+2\beta_1 t_2) = S_2(1+2\beta_2 t_2),$$

а для температуры $t_3$ (одинаковые объемы) — уравнение

$$V_1(1+3\beta_1 t_3) = V_2(1+3\beta_2 t_3).$$

Таким образом,

$$t_1 = \frac{l_1 - l_2}{\beta_2 l_2 - \beta_1 l_1}; \quad t_2 = \frac{S_1 - S_2}{2(\beta_2 S_2 - \beta_1 S_1)};$$

$$t_3 = \frac{V_1 - V_2}{3(\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1)}.$$

*Б. Буховцев*

---

**В этом номере мы приводим список читателей, приславших правильные решения задач М316 — М325 и Ф328 — Ф337 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).**

**Математика**

В большинстве писем содержалось верное решение задачи М316. Остальные задачи решили: *Д. Азов* (Челябинск) **8**; *Е. Асарин* (Москва) **8**; *М. Бабаев* (Баку) **8**; *И. Бандос* (Харьков) **4**; *В. Басманов* (Воронеж) **8**; *З. Беркалиев* (Караганда) **8, 9**; *В. Берман* (Херсон) **4**; *О. Бобрович* (Могилев) **4**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **8**; *И. Бохан* (ст. Красноармейская Краснодарского края) **8, 4**; *Ю. Булавский* (Новосибирск) **8**; *В. Варин* (Воронеж) **8, 4**; *А. Верпаховский* (Ленинград) **8**; *Я. Верховский* (Рыбное Московской обл.) **7, 8, 9а), 2б), 3, 4**; *А. Ворович* (Москва) **7**; *А. Гарнаев* (Таллин) **4**; *Р. Гассиев* (с. Сунжа СОАССР) **4**; *И. Гасско* (Москва) **4**; *Р. Гилязов* (Навои) **9, 4**; *В. Гишларкаев* (с. Урус-Мартан ЧИАССР) **4**; *С. Гришин* (Рыбное Рязанской обл.) **8**; *М. Грищенко* (ГСВГ) **8**; *А. Гусев* (Абакан) **8**; *А. Данилов* (Шумерля Чув. АССР) **4**; *А. Иванов* (Москва) **7, 8**; *Р. Измайлов* (Баку) **9 а)**; *А. Камалян* (Иджеван) **8, 2 б), 4, 5**; *Б. Каплан* (Киев) **8**; *И. Клевчук* (с. Ставчаны Черновицкой обл.) **4**; *Л. Клименок* (Москва) **8**; *А. Князюк* (Киев) **8, 9а), 2, 5**; *В. Кулаков* (Ленинград) **2а), 3**; *К. Купалов* (Москва) **8**; *Д. Литвиненко* (Севастополь) **7, 8, 5**; *О. Лищенко* (Киев) **8**; *А. Малышев* (пос. Курагино Красноярского края) **9а)**; *А. Манасян* (Тбилиси) **8**; *Е. Мартынова* (Нежин) **8**; *В. Медведь* (Молодечно) **8, 2б), 4, 5**; *М. Морайнз* (ПНР) **7, 8, 2, 4, 5**; *И. Морозов* (Горький) **8, 4, 5**; *С. Мягков* (Челябинск) **7, 8**; *В. Нейман* (Ленинград) **4**; *О. Окунев* (Казань) **5**; *И. Панин* (Апатиты) **3—5**; *Д. Папуш* (Харьков) **4**; *В. Паразян* (Чаренцаван) **4**; *М. Питателев* (Москва) **4**; *П. Побыллица* (Ленинград) **4**; *Р. Портной* (Черновцы) **4**; *С. Пославский* (Харьков) **7, 8, 2, 4, 5**; *Ю. Пошехонов* (Энгельс) **2, 4**; *С. Путинцев* (Краснодар) **8, 9, 2б), 3—5**; *А. Радулу* (Кишинев) **2б)**; *А. Разборов* (Люберцы) **4**; *А. Рейбольд* (с. Соколовка Северо-Кустанайской обл.) **4**; *В. Рогава* (Тбилиси) **8**; *В. Розовский* (Минск) **4**; *И. Рудаков* (Брянск) **8, 9, 4**; *Ю. Рудяк* (Тернополь) **4**; *К. Стемпак* (ПНР) **3**; *В. Ткачук* (Москва) **8, 9а)**; *С. Трегуб* (Ташкент) **7, 8, 2б), 4, 5**; *Н. Тренев* (Москва) **2а), 4**; *В. Третьяков* (Москва) **8, 4**; *В. Фалько* (Харьков) **4**; *С. Филимонов* (Ленинград) **8, 9а)**; *Ю. Философов* (Саратов) **8**; *Д. Флаас* (Иркутск) **4**; *В. Харатоник* (ПНР) **7—9**; *С. Цалиев* (Великие Луки) **8**; *Э. Цхададзе* (Тбилиси) **8**; *С. Шаташвили* (Тбилиси) **8**; *К. Шахназарян* (Баку) **8, 9а)**; *В. Шпильрайн* (Москва) **4**; *С. Яковенко* (Москва) **9**; *Б. Яцало* (с. Морочное Ровенской обл.) **8, 2б), 4**.

**Физика**

*Х. Абдуллин* (Алма-Ата) **1, 3, 4, 6**; *Г. Айзин* (Брест) **8**; *М. Алексеев* (Уфа) **1, 2**; *К. Алиакберов* (Казань) **1**; *А. Аскаров* (Уфа) **1, 3**; *И. Астров* (Таллин) **7**; *И. Бабакулов* (Каттакурган) **4**; *С. Батуев* (Ангарск) **8, 1**; *И. Бандос* (Харьков) **3, 4**; *В. Бахрушин* (Орджоникидзе) **4**; *А. Беликов* (Москва) **1—4, 6**; *В. Бойко* (Москва) **4**; *Ю. Богомолов* (Казань) **1, 2**; *А. Вечер* (Минск) **3**; *О. Вишнепольский* (Рига) **3, 7**; *Б. Виноградова* (Великие Луки) **1**; *Н. Высккарко* (д. Киевичи Минской обл.) **3, 4**; *В. Гаврилов* (Камень-Каширский) **1**; *В. Галашов* (п. Кубинка Московской обл.) **1**; *Ю. Гараженко* (Воркута) **2**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **8, 1, 2**; *Е. Глуз* (Черкесск) **4**; *О. Годин* (Симферополь) **1, 3, 4, 6, 7**; *Ю. Гоник* (Брянск) **1, 3, 4**; *В. Губени* (Угнев) **1**; *С. Данилов* (Дрогичин) **3**; *В. Демчук* (Луцк) **1**; *У. Джуманиязов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **6**; *В. Докучаев* (Иваново) **1**; *Г. Залескис* (Вильнюс) **3, 4**; *А. Измайлов* (Зеленодольск) **4**; *А. Казаков* (Белая

Церковь) 1; *Р. Кашаева* (Волжский) 4; *С. Керем* (Рига) 3, 7; *А. Князюк* (Киев) 8, 3, 4, 6; *К. Копейкин* (Ленинград) 4, 6; *Д. Корин* (Киев) 1; *Л. Кузнецова* (Волгоград) 4; *О. Кузнечихин* (Котово) 4; *Ш. Кухалейшвили* (с. Зеда-Эцери Зугдидского р-на) 3, 4; *А. Куцман* (Черновцы) 1; *С. Кушнир* (п. Быково Московской обл.) 1; *А. Листовничий* (Киев) 8, 4; *Ю. Литвинович* (п/о Ситница Брестской обл.) 4; *О. Лищенко* (Киев) 8, 1, 3, 4, 6, 7; *М. Магид* (Даугавпилс) 1, 3, 6, 7; *В. Маргвелашвили* (Тбилиси) 4; *Е. Мартынова* (Курск) 8, 1, 3, 6, 7; *Е. Мартынова* (Нежин) 1; *П. Мидодашвили* (Цхинвали) 4; *С. Мельниченко* (Комсомольск-на-Амуре) 1; *А. Минин* (Чебоксары) 4; *Г. Мирзоян* (Горис) 1; *И. Морозов* (Горький) 3, 4, 6; *Ю. Мукарский* (Киев) 3, 4; *П. Мухин* (Симферополь) 4; *С. Немнюгин* (Волгоград) 3; *Ю. Никулин* (с. Кривцово Брянской обл.) 1; *Е. Огневецкий* (Днепропетровск) 4; *В. Окунев* (Рудный) 1, 2; *А. Остапов* (Орджоникидзе) 8; *А. Папоян* (Кафан) 2; *В. Паразян* (Чаренцаван) 3; *В. Пиотух* (Севастополь) 2; *П. Побылица* (Ленинград) 4; *А. Пожалов* (Лиепая) 7; *В. Поздняк* (Барановичи) 8, 9, 1, 3, 4, 6; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 3, 4, 6; *В. Потемкин* (Великие Луки) 4; *А. Прохоров* (Барнаул) 1, 2; *С. Пятернев* (Саратов) 1; *А. Радул* (Кишинев) 3; *С. Распономарев* (Оренбург) 3; *В. Розовский* (Минск) 4; *А. Рудерман* (Ленинград) 8, 1; *А. Савельев* (Киев) 8, 1; *И. Сапаев* (Саратов) 1; *Т. Саргазаков* (Фрунзе) 3; *В. Смолко* (Кишинев) 1; *А. Смоляков* (Кадиевка) 3; *А. Святченко* (Кишинев) 6; *В. Сухолет* (Калинин) 2; *В. Старшенко* (Запорожье) 8, 1; *Н. Тикунов* (Артемовск Красноярского кр.) 4; *К. Третьяченко* (Киев) 8, 3; *А. Тымчук* (Львов) 1; *Н. Федин* (Омск) 8, 9, 1; *А. Фролов* (Старая Русса) 1; *А. Фрумкин* (Курск) 8, 1; *Ю. Хабаров* (Павловский Посад) 1, 3, 4; *И. Хамитов* (Ухта) 4, 6, 7; *К. Хачатурян* (Москва) 8; *С. Цветков* (Егорьевск) 3, 4, 6; *Г. Ципурский* (Сухуми) 3, 4, 6, 7; *Э. Цхададзе* (Тбилиси) 2; *Л. Черных* (Лида) 4; *Р. Шарипов* (Каракуль) 4; *А. Шведов* (Запорожье) 1; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) 4; *С. Шихарев* (ст. Раевская Краснодарского кр.) 8, 1, 2; *Г. Шпарик* (Стрый) 4; *Е. Яценко* (Киев) 8, 4, 6.

## Курьёзный рекорд

Миссис Дрю, домохозяйка из американского города Уотерлу, потратила пять лет и 2473 листа бумаги на то, чтобы перепечатать на машинке последовательно все числа от единицы до миллиона. А побудило ее к этому заявление сына, в то время еще школьника, который утверждал, ссылаясь на слова учителя, что ни один человек в мире не сосчитал еще до миллиона, начав с единицы.

Определите, на одной или на двух сторонах листа печатала цифры миссис Дрю (стандартная машинописная страница имеет 30 строк по 60 знаков в каждой; между каждыми двумя числами должна быть запятая и пробел, на которые уходит два знака).

## Геометрическая задача

Четыре точки $A$, $B$, $C$ и $D$ не лежат в одной плоскости. Точки $K\in[AB]$, $L\in[BC]$, $M\in[CD]$ и $N\in[DA]$ делят эти отрезки в отношениях

$$\frac{|AK|}{|KB|}=\alpha,\quad \frac{|BL|}{|LC|}=\beta,$$

$$\frac{|CM|}{|MD|}=\lambda,\quad \frac{|DN|}{|NA|}=\gamma.$$

Найдите, какому условию должны удовлетворять числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\lambda$, чтобы точки $K$, $L$, $M$ и $N$ лежали в одной плоскости.

Сформулируйте и решите аналогичную задачу для трех точек на плоскости.

Вам поможет статья «Давайте складывать точки» (см. с. 44).

*В. Рыжик*

В 1976 году в нашем журнале будет продолжаться традиционный раздел «Практикум абитуриента». Редакционная почта, встречи с читателями «Кванта» свидетельствуют, что «Практикум абитуриента» вызывает большой интерес школьников, учителей, студентов и даже ... родителей, далеких по своей специальности от этих наук.

Вполне естественно: вопросы о том, какие задачи предлагают поступающим, как лучше организовать подготовку к приемным экзаменам, волнуют многих. Редакция «Кванта» надеется по возможности отвечать на подобные вопросы. Мы будем публиковать статьи по различным темам программы вступительных экзаменов; в этих статьях изложение теоретического материала сопровождается разбором задач, взятых из практики приемных экзаменов. На страницах журнала будут помещены тексты вариантов, предлагавшихся в прошлом году поступающим в различные вузы страны. Читатели сами убедятся, что для решения задач вариантов вступительных экзаменов достаточно хорошо и глубоко знать обычные школьные курсы физики и математики.

Авторы ряда писем в редакцию интересуются, как изменятся программы приемных экзаменов в связи с переходом к новым программам по математике и физике в школе. В 1976 году программы приемных экзаменов по математике и физике не меняются — они полностью соответствуют старым курсам средней школы.

Не секрет, что некоторые поступающие надеются без труда подготовиться к экзаменам и выдержать конкурс с помощью репетиторов. Однако опыт показывает, что «натасканные» репетиторами абитуриенты зачастую получают лишь формальные поверхностные знания, и это довольно легко выявляется на вступительных экзаменах. Залог подлинного успеха — систематическая и регулярная самостоятельная работа. Тот, кто действительно хочет стать студентом, добьется этого, если не теряя времени начнет настойчиво повторять теорию и активно тренироваться в решении задач. Мы надеемся, что добрым советчиком поступающих станет «Практикум абитуриента».

При подготовке к вступительным экзаменам будет полезно познакомиться и с теми материалами «Практикума абитуриента», которые уже публиковались в журнале. Тематический список статей для поступающих, напечатанных в 1970—1973 гг., можно найти в «Кванте» № 1, 1974, с. 52. Ниже помещен список таких статей, опубликованных в 1974 и 1975 гг. (в скобках указаны номера страниц).

## Математика

Арифметика: 1974 — № 9 (70); 1975 — № 3 (72), № 8 (59).
Алгебра и элементарные функции: 1974 — № 1 (53), № 3 (48), № 11 (54), № 12 (66); 1975 — № 1 (23, 36), № 2 (43), № 4 (37).
Геометрия: 1974 — № 2 (46), № 5 (58), № 9 (53), № 10 (32), № 12 (55); 1975 — № 1 (55), № 3 (61).
Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи: 1974 — № 6 (38, 49); 1975 — № 2 (25), № 3 (24), № 5 (58, 68), № 6 (31, 39), № 7 (53).

## Физика

Механика: 1974 — № 4 (18), № 8 (28), № 11 (60); 1975 — № 1 (60), № 4 (2).
Молекулярная физика: 1974 — № 1 (60), № 6 (57), № 7 (69), № 12 (70).
Основы электродинамики: 1974 — № 1 (22), № 5 (64); 1975 — № 1 (74), № 4 (41), № 12 (61).
Колебания и волны: 1974 — № 6 (31), № 11 (2).
Оптика: 1974 — № 6 (2), № 11 (30), № 12 (23); 1975 — № 2 (18), № 3 (25).
Физика атома и атомного ядра: 1974 — № 12 (7); 1975 — № 5 (14), № 6 (10).
Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи: 1974 — № 3 (52); 1975 — № 1 (9, 18, 22), № 5 (60), № 8 (54), № 9 (71), № 10 (9), № 11 (50).

*И. Шарыгин*

# Достраивание тетраэдра

Один из красивых приемов, который может быть использован при решении геометрических задач, состоит в замене изучаемой геометрической фигуры другой, в каком-то смысле более удобной. Так, например, если в условии задачи фигурирует треугольник, в котором проведена медиана, часто полезно достроить этот треугольник до параллелограмма, продолжая медиану на расстояние, равное ей самой. В данной статье рассматриваются несколько задач про треугольную пирамиду — тетраэдр,— которые оказывается возможным решить, достраивая тетраэдр до другого многогранника (как правило, параллелепипеда).

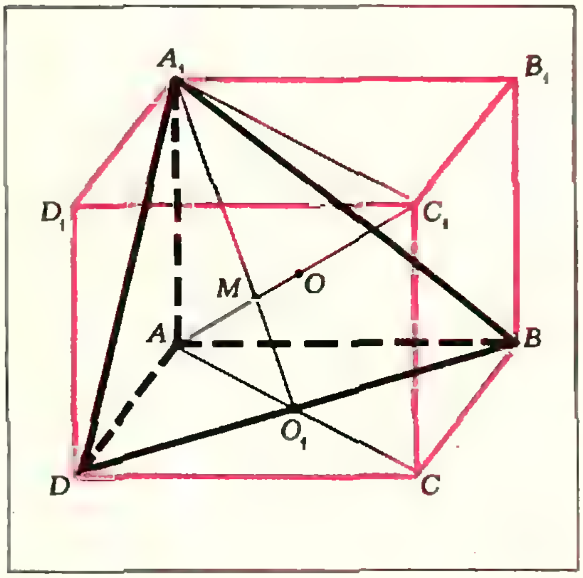


**Рис. 1.**

Первый способ достраивания пирамиды до параллелепипеда изображен на рисунке 1. Здесь $AA_1BD$ — данная пирамида, а плоскости граней $DCC_1D_1$, $CBB_1C_1$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллелепипеда проходят через одну вершину пирамиды и параллельны грани пирамиды, противолежащей этой вершине.

Задача 1. (Пункт а) задачи предлагался на вступительном экзамене на механико-математическом факультете МГУ.) *Дана треугольная пирамида $AA_1BD$, в которой ребра $AA_1$, $AB$ и $AD$ попарно перпендикулярны, а их длины равны соответственно $a$, $b$, $c$.*

а) *Доказать, что вершина $A$ пирамиды, точка пересечения медиан грани $A_1BD$ и центр описанного шара лежат на одной прямой.*

б) *Найти радиус шара, описанного около этой пирамиды.*

Достроим пирамиду $AA_1BD$ до параллелепипеда (прямоугольного!), как показано на рисунке 1. Тогда шар, описанный около этой пирамиды, является одновременно описанным шаром и для всего параллелепипеда. Радиус этого шара равен половине диагонали параллелепипеда, а именно $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^{1/2}$, это является ответом на пункт б).

Чтобы доказать утверждение пункта а), рассмотрим прямоугольник $AA_1C_1C$ (советуем сделать для него отдельный чертеж). Центр $O$ шара находится на диагонали $AC_1$, медиана $A_1O_1$ треугольника $A_1BD$ пересекается с $AC_1$ в точке $M$, и если мы докажем, что $\frac{|A_1M|}{|MO_1|}=2$, то это будет означать, что $M$ — точка пересечения медиан треугольника $A_1BD$; тем самым мы докажем утверждение пункта а). Из подобия треугольников $A_1C_1M$ и $AO_1M$

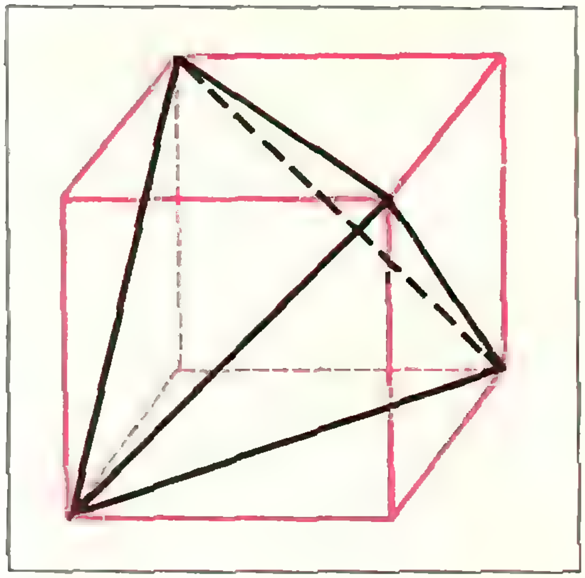


Рис. 2.

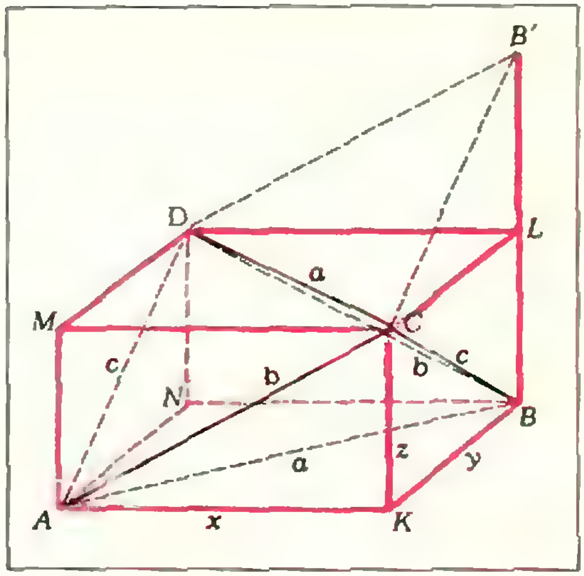


Рис. 3.

следует:

$$\frac{|A_1M|}{|MO_1|} = \frac{|A_1C_1|}{|AO_1|} = 2,$$

что и требовалось доказать.

Другой часто встречающийся способ достраивания тетраэдра до параллелепипеда состоит в следующем. Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Эти плоскости ограничат некоторый параллелепипед (рис. 2), диагоналями граней которого будут ребра исходного тетраэдра.

Небольшой практический совет: чертеж удобнее начинать с изображения параллелепипеда.

Задача 2. *Найти радиус шара, касающегося всех ребер правильного тетраэдра, длина ребра которого равна* $a$.

Как легко видеть из рисунка 2, построенный описанным способом параллелепипед будет кубом с ребром $a/\sqrt{2}$; шар, вписанный в этот куб, будет искомым. Ответ: $a/2\sqrt{2}$.

Первый из предложенных способов достраивания тетраэдра до параллелепипеда удобен, когда даны плоские углы при одной из вершин тетраэдра (особенно если все они прямые), второй используется в задачах, в которых фигурируют скрещивающиеся ребра тетраэдра.

Задача 3. *Длины двух скрещивающихся ребер тетраэдра равны* $a$, *два других скрещивающихся ребра имеют длину* $b$ *и оставшиеся два —* $c$. *Найти расстояние между центром вписанного в тетраэдр шара и центром шара, касающегося одной из граней тетраэдра и продолжений остальных граней.*

На рисунке 3 $ABCD$ — данный тетраэдр, а параллелепипед ограничен плоскостями, проходящими через ребра тетраэдра параллельно противоположным ребрам. Так как диагонали каждой грани равны соответственно противоположным ребрам тетраэдра, которые по условию равны, то все грани параллелепипеда — прямоугольники, а сам параллелепипед — прямоугольный.

Центр вписанного в тетраэдр $ABCD$ шара совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелепипеда (докажите!), а центр шара, касающегося грани $DCB$ тетраэдра (из дальнейшего видно, что ответ не зависит от выбора грани) и продолжений его остальных граней, совпадает с вершиной $L$ параллелепипеда (она равноудалена от граней $DCB$ и $ACD$ — для доказательства рассмотрите пирамиду $B'LCD$, где $|B'L| = |LB|$, равную пирамиде $BLCD$; точки $A$, $D$, $B'$ и $C$ лежат

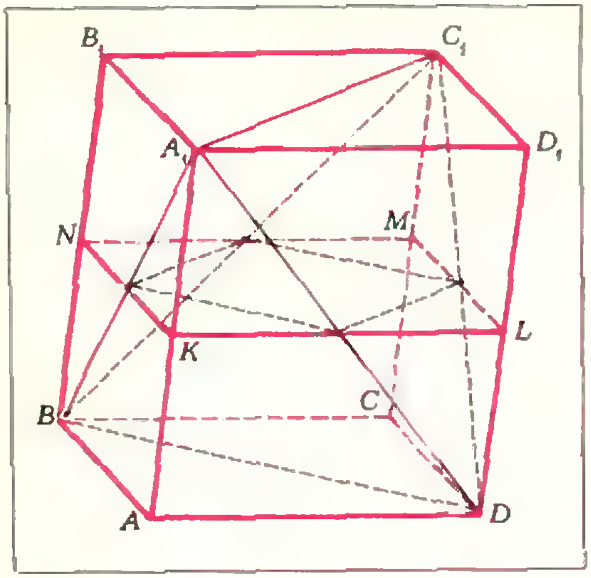


Рис. 4.

в одной плоскости; аналогично доказывается, что точка $L$ равноудалена от плоскостей $DCB$ и $ACB$, $DCB$ и $ADB$).

Значит, расстояние, о котором говорится в условии задачи, равно половине длины диагонали параллелепипеда. Обозначим через $x$, $y$, $z$ длины ребер параллелепипеда (см. рис. 3). По теореме Пифагора получаем систему трех уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ x^2+z^2=b^2, \\ y^2+z^2=c^2, \end{cases}$$

складывая которые, находим, что

$$\frac{|AL|}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}.$$

Задача 4. *Сечение тетраэдра плоскостью, параллельной двум его скрещивающимся ребрам и равноудаленной от этих ребер, имеет площадь S. Расстояние между этими скрещивающимися ребрами тетраэдра h. Найти объем тетраэдра.*

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, ограниченный плоскостями, проходящими через ребра тетраэдра параллельно противоположным ребрам (рис. 4). Тогда объем тетраэдра $A_1BC_1D$ равен объему параллелепипеда минус объемы четырех треугольных пирамид (одна из них $A_1ABD$), объем каждой из которых равен $^1/_6$ объема параллелепипеда (почему?). Значит, $V_{\text{тетр}}=V_{\text{пар}}/3$.

Пусть скрещивающиеся ребра, о которых говорится в условии,— $A_1C_1$ и $BD$, а $KLMN$ — сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середины $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ и $DD_1$. Тогда вершинами сечения, о котором говорится в условии, будут середины сторон параллелограмма $KLMN$. Следовательно, площадь параллелограмма $KLMN$ равна $2S$ и равна площади основания $ABCD$ параллелепипеда. Теперь найдем объемы параллелепипеда и тетраэдра:

$$V_{\text{тетр}}=\frac{1}{3}V_{\text{пар}}=\frac{2}{3}Sh.$$

С помощью только что решенной задачи нетрудно доказать справедливость *формулы Симпсона*, служащей для вычисления объема многогранников специального вида.

*Дан многогранник, все вершины которого лежат в двух параллельных плоскостях, находящихся на расстоянии h друг от друга. Пусть $S_1$ — площадь грани, лежащей в одной плоскости, $S_2$ — площадь грани, расположенной во второй плоскости, а $S_{\text{ср}}$ — площадь сечения многогранника плоскостью, удаленной на расстояние $\frac{h}{2}$ от каждой из данных плоскостей. Тогда для объема многогранника справедлива формула:*

$$V=\frac{h}{6}(S_1+S_2+4S_{\text{ср}}).$$

Для доказательства проверьте, что эта формула верна, если многогранник является тетраэдром, а потом разбейте произвольный многогранник, вершины которого расположены в двух параллельных плоскостях, на тетраэдры с вершинами в этих же плоскостях: площади граней тетраэдров, расположенных в одной плоскости, в сумме дадут $S_1$, расположенных во второй плоскости дадут в сумме $S_2$, а сумма площадей средних сечений тетраэдров равна $S_{\text{ср}}$ многогранника.

В заключение приведем пример задачи, в которой оказывается удобнее достраивать тетраэдр не до параллелепипеда, а до треугольной призмы.

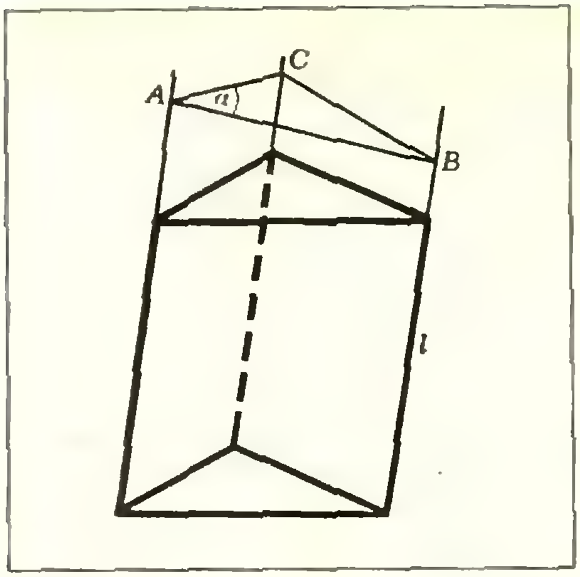


Рис. 5.

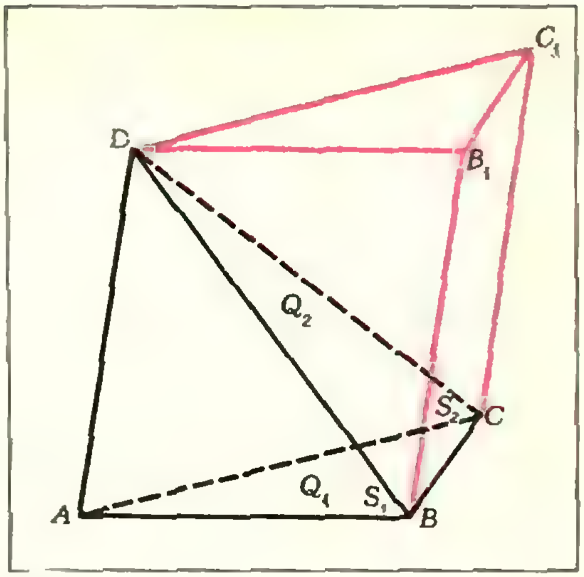


Рис. 6.

Задача 5. *В тетраэдре площади двух граней равны $S_1$ и $S_2$, двугранный угол между ними равен $\alpha$, площади двух других граней $Q_1$ и $Q_2$, угол между ними $\beta$. Доказать, что*

$$S_1^2+S_2^2-2S_1S_2\cos\alpha = Q_1^2+Q_2^2-2Q_1Q_2\cos\beta.$$

Докажем сначала, что если площадь одной боковой грани треугольной призмы равна $S$, две другие грани имеют площади $S_1$ и $S_2$, а двугранный угол между ними $\alpha$, то

$$S_1^2+S_2^2-2S_1S_2\cos\alpha = S^2.$$

В самом деле, пусть плоскость $ABC$ (рис. 5) перпендикулярна боковым ребрам призмы, $\measuredangle BAC=\alpha$. Запишем теорему косинусов для треугольника $ABC$

$$|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2-2\,|AB|\cdot|AC|\cos\alpha.$$

Осталось умножить последнее равенство на $l^2$, где $l$ — длина бокового ребра призмы.

Перейдем теперь к решению задачи 5. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, $S_{\triangle ABD}=S_1$, $S_{\triangle ADC}=S_2$, $S_{\triangle ABC}=Q_1$, $S_{\triangle DBC}=Q_2$, двугранный угол при ребре $AD$ равен $\alpha$, а при ребре $BC$ — $\beta$. Рассмотрим треугольную призму с основанием $ABC$, одно из боковых ребер которой — $AD$ (рис. 6). Обозначим через $S$ площадь параллелограмма $BB_1C_1C$, тогда по только что доказанной нами формуле

$$4S_1^2+4S_2^2-8S_1S_2\cos\alpha=S^2,$$

причем $S$ легко выразить через длины ребер $BC$ и $AD$ и угол $\varphi$ между ними: $S=|AD|\cdot|BC|\cdot\sin\varphi$.

Если мы рассмотрим другую треугольную призму с основанием $ACD$ и боковым ребром $BC$, то получим

$$4Q_1^2+4Q_2^2-8Q_1Q_2\cos\beta=S^2.$$

Отсюда следует утверждение задачи 5.

Упражнения

1. Доказать, что сумма квадратов длин ребер тетраэдра равна учетверенной сумме квадратов расстояний между серединами его скрещивающихся ребер.

2. (МГУ, физфак, 1964). Дан тетраэдр $ABCD$. Доказать, что его ребра $AD$ и $BC$ взаимно перпендикулярны в том и только в том случае, когда выполняется равенство

$$|AB|^2+|DC|^2=|AC|^2+|DB|^2.$$

3. Длины двух противоположных ребер тетраэдра равны $a$, длины двух других противоположных ребер равны $b$, оставшихся двух — $c$. Найти
   а) объем этого тетраэдра;
   б) радиус описанного вокруг него шара.

4. Длины двух противоположных ребер тетраэдра равны $a$ и $a_1$, угол между ними равен $\alpha$, длины двух других ребер соответственно равны $b$ и $b_1$, угол между ними $\beta$ и, наконец, длины двух оставшихся ребер равны $c$ и $c_1$, угол между ними $\gamma$ $\left(\alpha,\beta,\gamma\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$.
   а) Доказать, что одно из чисел $aa_1\cos\alpha$, $bb_1\cos\beta$, $cc_1\cos\gamma$ равно сумме двух других.
   б) Найти углы $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, если даны $a$, $a_1$, $b$, $b_1$, $c$, $c_1$.

# Московский инженерно-физический институт

Подробно о Московском ордена Трудового Красного Знамени инженерно-физическом институте мы рассказывали в «Кванте» № 1 за 1973 год. В этом номере мы приводим варианты вступительных экзаменов по математике и билеты экзаменов по физике в МИФИ в 1975 году.

### Математика

Вариант 1

1. Три лыжника проходят дистанцию, двигаясь равномерно. Через $m$ минут после старта третьего лыжника ему остается пройти часть дистанции, которую первый лыжник может пройти за $n$ минут, а второй — за $p$ минут. Определить, за сколько минут может пройти всю дистанцию каждый из лыжников, если скорость третьего лыжника равна полусумме скоростей первого и второго.

2. В треугольной пирамиде $SABC$ все плоские углы трехгранных углов с вершинами в точках $A$ и $B$ равны $\alpha$, $AB = a$. Определить объем пирамиды.

3. Решить неравенство

$$\frac{3\log_a x + 6}{\log_a^2 x + 2} > 1.$$

4. Решить уравнение

$$2\cos x\cdot(\cos x - \sqrt{8}\cdot \operatorname{tg} x) = 5.$$

Вариант 2

1. Лодка спускается по течению реки на расстояние 10 *км*, а затем поднимается против течения на расстояние 6 *км*. Скорость течения реки равна 1 *км/ч*. В каких пределах должна лежать собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 3 до 4 часов?

2. Найти объем правильной треугольной пирамиды, зная радиус $r$ вписанного в нее шара и угол наклона $\alpha$ ее боковой грани к плоскости основания.

3. Решить неравенство

$$(1{,}25)^{1-\log_2^2 x} < (0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}.$$

4. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{x^2 + x + 1} = -\sqrt{3}.$$

Вариант 3

1. В бассейн может поступать вода через две трубы разной пропускной способности. Меньшая труба за 1 секунду пропускает 1 *м*³ воды. В бассейне имеется кран, через который может вытекать в течение секунды 1 *м*³ воды. Найти, в каких пределах может изменяться пропускная способность большей трубы, чтобы за время, не меньшее 3 *с* и не большее 4 *с*, поступило в бассейн 16 *м*³, причем 10 *м*³ поступило при одновременном действии обеих труб при закрытом кране, а 6 *м*³ — при действии только большей трубы и открытом кране.

2. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами $\alpha$ и $\beta$. Найти угол между этими диагоналями.

3. Решить неравенство

$$\frac{\lg^2 x - 3\lg x + 2}{\sqrt{100 - x}} \geqslant 0.$$

4. Решить уравнение

$$\sin^4 x - 2\cos^2 x + a^2 = 0.$$

### Физика

Билет 1

1. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Понятие о потенциале. Потенциал поля точечного заряда (без вывода). Единицы потенциала электрического поля.

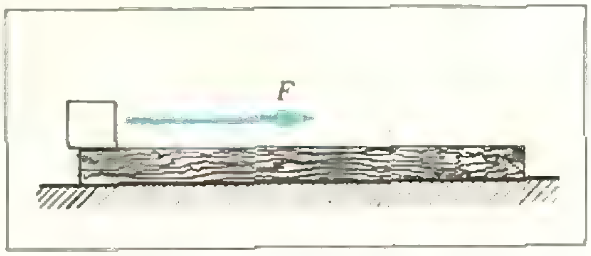


**Рис. 1.**

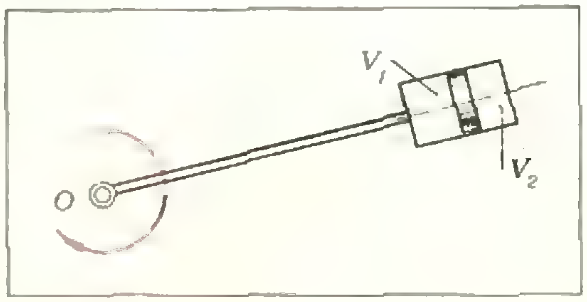


**Рис. 2.**

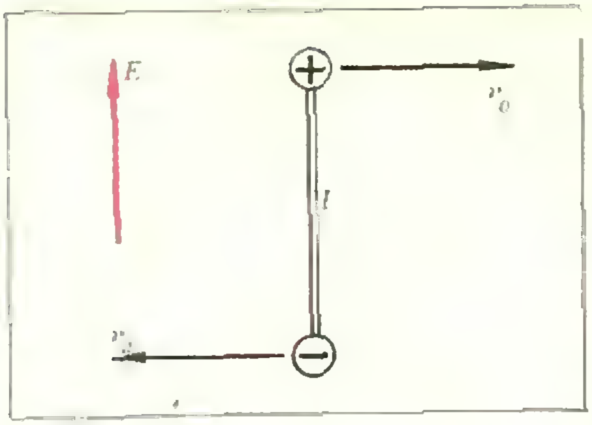


Рис. 3.

2. Абсолютная температурная шкала. Объединенный закон Бойля — Мариотта — Гей-Люссака.

3. На край доски массы $M = 3{,}2$ *кг*, лежащей на гладкой горизонтальной поверхности, поместили небольшой брусок массы $m = 1{,}6$ *кг* (рис. 1). Коэффициент трения между бруском и доской $k = 0{,}25$. Какая работа $A$ будет произведена над доской в течение времени, за которое брусок переместится относительно Земли из начального положения на расстояние, равное длине доски $l = 1$ *м*, если на брусок подействовать вдоль доски горизонтальной силой $F = 2$ *н*?

### Билет 2

1. Давление. Закон Паскаля для жидкостей и газов. Принцип устройства гидравлического пресса. Плотность. Давление жидкости на дно и на стенки сосуда. Закон сообщающихся сосудов.

2. Поток магнитной индукции. Электромагнитная индукция. Возникновение электродвижущей силы индукции. Э. д. с. индукции. Закон Ленца.

3. Длинный стержень с закрытым коротким цилиндром на конце вращается с угловой скоростью $\omega = 20$ *рад/сек* в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через конец стержня. $O$ (рис. 2). В цилиндре, площадь сечения которого $S = 100$ *см*$^2$, находится однородный воздух, разделенный поршнем массы $m = 490$ *г*. При вращении расстояние от центра поршня до точки $O$ $r = 1{,}36$ *м*. Найти отношение объемов $V_1/V_2$ воздуха в цилиндре при вращении, если известно, что в отсутствие вращения объемы одинаковы и давление воздуха в них $p = 1{,}1 \cdot 10^5$ *н/м*$^2$.

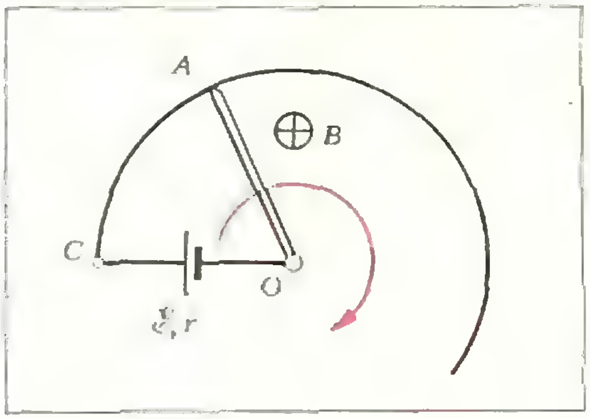


Рис. 4.

### Билет 3

1. Источники тока. Электродвижущая сила. Закон Ома для замкнутой цепи.

2. Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести.

3. В однородное электрическое поле с напряженностью $E = 100$ *в/см* поместили систему из двух одинаковых и противоположно заряженных шариков, соединенных тонким изолирующим стержнем длины $l = 5$ *см* (рис. 3). Масса каждого шарика $m = 2{,}5$ *г*, абсолютная величина заряда $q = 10^{-7}$ *к*. На какой угол повернется эта система, если шарикам сообщить начальные скорости, численно равные $v_0 = 0{,}1$ *м/сек*? Поле тяжести отсутствует.

### Билет 4

1. Кинетическая и потенциальная энергии. Переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Закон сохранения энергии в механике.

2. Дисперсия света. Спектр. Спектры испускания и поглощения. Спектроскоп. Понятие о спектральном анализе. Инфракрасная и ультрафиолетовая части спектра.

3. Проводящий стержень $OA$ вращается в плоскости, перпендикулярной к индукции магнитного поля $B = 1$ *тл*, с угловой скоростью $\omega = 300$ *рад/сек* вокруг оси, проходящей через один из его концов. Свободный конец стержня скользит по дуге окружности радиуса $R = 10$ *см*. Между точкой $C$ дуги и точкой закрепления стержня на оси вращения включена батарея, как показано на рисунке 4. На том же рисунке указаны направления вращения стержня и вектора магнитной индукции **B**. Сопротивления стержня, дуги и контакта между ними пренебрежимо малы по сравнению с внутренним сопротивлением батареи. Найдите напряжение на зажимах батареи.

*А. Забоев, Г. Пантюхов, Н. Шолохов*

# Плазма — четвертое состояние вещества

Так называется научно-популярная книга, написанная профессором Д. А. Франк-Каменецким и выпущенная в свет четвертым изданием в 1975 году издательством «Атомиздат» *). Давид Альбертович Франк-Каменецкий был одним из лучших популяризаторов современной физики. К сожалению, он умер в том же году, когда родился «Квант», и мы успели поместить на страницах нашего журнала только одну его статью («Электрическое сопротивление — квантовое явление», «Квант», 1970, № 9). Многие и сейчас считают ее одной из лучших статей по физике, напечатанных в нашем журнале за все годы его существования.

Идею создания этой книги предложил автору академик И. В. Курчатов. Он попросил Д. А. Франк-Каменецкого «изложить основы физики плазмы без лишней математики, но с достаточной полнотой». Будучи к этому времени крупным специалистом в области физики плазмы, автор, тем не менее, оказался перед очень трудной задачей. Ведь эта молодая и необычайно бурно растущая область физики практически не имела еще своей научно-популярной литературы. А многие процессы и явления, происходящие в плазме, совершенно не похожи на процессы и явления, происходящие в газах, жидкостях и твердых телах. И автору пришлось заново тщательно продумывать всю физику плазмы, чтобы, не пользуясь сложным математическим аппаратом, объяснить все основные происходящие в ней процессы.

Книга невелика по объему — в ней всего полтораста страниц. Но она действительно охватывает все основные процессы, протекающие как в низкотемпературной, так и в высокотемпературной плазме.

Рассказав о том, как получается и исследуется плазма, автор подробно характеризует различные типы неустойчивостей, которые до сих пор не позволяют удерживать горячую плазму в течение времени, достаточного для осуществления в ней управляемых термоядерных реакций. Он рассказывает о гидродинамической неустойчивости, неустойчивости так называемого «пинча», желобковой неустойчивости, благодаря которым плазма просачивается через изолирующие ее магнитные ловушки и попадает на стенки сосуда, в котором она заключена. В книге рассматриваются также разнообразные колебательные процессы, происходящие в плазме, распространение ударных волн в ней, различные варианты столкновений частиц плазмы друг с другом. Несколько параграфов посвящено практическим применениям плазмы. В них рассказывается об электромагнитных насосах, плазменных резонаторах и волноводах. Словом, рецензируемая книга — это маленькая научно-популярная энциклопедия по физике плазмы.

Создавая эту книгу, автор старался сделать ее доступной даже для читателей, имеющих образование в объеме средней школы. Книга не предполагает наличия каких-либо знаний из области физики плазмы у своих будущих читателей. Математический аппарат, используемый в основном тексте книги, не выходит за рамки школьной алгебры, а ее физическая часть опирается на тот объем знаний в области молекулярной физики, электричества и магнетизма, который полностью укладывается в рамки школьного курса физики. Автор не избегает строгих научных терминов — он беседует с читателем на языке своей науки. Однако каждый новый термин подробно разъясняется и выделяется курсивом для того, чтобы в случае необходимости его легко можно было бы найти в тексте. Более трудные для первоначального ознакомления места выделены в книге петитом.

Итак, книга вполне доступна даже для совершенно незнакомого с этой областью физики читателя, овладевшего школьным курсом физики и математики. Но читать ее надо неторопливо и вдумчиво, с карандашом и бумагой в руках. Такому читателю книга, безусловно, доставит истинное удовольствие, обогатив его пониманием интереснейших явлений, совершенно не отраженных в школьных учебниках.

Книга написана очень живо, образно, доступно и увлекательно. Автор использует неожиданные сравнения, глубокие физические аналогии, вскрывающие основные стороны рассматриваемых явлений.

Несомненные достоинства этой превосходной книги позволили автору послесловия к четвертому изданию академику Р. З. Сагдееву (кстати, одному из учеников Д. А. Франк-Каменецкого) высказать мнение о том, что ее можно причислить к золотому фонду научно-популярной литературы.

*В. Лешковцев*

---

*) Д. А. Франк-Каменецкий. Плазма — четвертое состояние вещества. Издание 4-е. М., Атомиздат, 1975 г. Тираж 80 000 экз., цена 26 к.

# Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в школу не принимаются.

Занятия начнутся с 1 сентября 1976 года. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно получать задания, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения. Срок обучения—три года.

Ниже публикуются задачи вступительной контрольной работы. Желающие поступить в ВЗМШ должны выслать решения этих задач не позднее 20 марта 1976 года. После проверки работ (примерно в июле 1976 года) будет сообщено, приняты ли вы в школу. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач отличаются по внешнему виду от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике. Для того чтобы быть принятым в школу, не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких обоснований может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько разных ответов, то надо указать их все.

*Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются и рецензии на них не выдаются.*

В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14×6 *см* с вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать вам ответ).

На обложку тетради наклейте листок клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет):

| | |
|---|---|
| Область | *Вологодская* |
| Фамилия, имя | *Иванов Петр* |
| Год рождения | *1962 г.* |
| Класс | *7-й класс «А»* |
| Школа (полное название) | *школа № 2 г. Тотьмы* |
| Фамилия, имя, отчество учителя математики | *Никаноров Владимир Алексеевич* |
| Место работы и должность родителей | *отец — шофер автобазы № 3, мать — домашняя хозяйка* |
| Полный почтовый адрес | *123456, г. Тотьма, ул. Ленина д. 3, кв. 23.* |

**Результаты проверки**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | 7 | | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | а | б | а | б | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |

Школьники, проживающие в Архангельской, Вологодской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, присылают работы по адресу: *г. Ленинград, П-228, ул. Савушкина, 61. Специнтернат при ЛГУ. ЗМШ. На конкурс.*

Учащиеся, проживающие в Воронежской, Белгородской, Тамбовской, Курской и Липецкой областях, присылают работы по адресу: *г. Воронеж, Университет, ФЗМШ. На конкурс.*

Школьники, проживающие в остальных областях РСФСР и в других союзных республиках, должны присылать работы по адресу: *117234, г. Москва, В-234, МГУ, мех-мат, ВЗМШ. На конкурс.*

## Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1976 году

**1**. По дороге едет телега. Диаметр ее колес — 1 метр. В одно колесо вбит гвоздь. Каждый раз, когда гвоздь ударяется о дорогу, раздается щелчок. Щелчки повторяются каждую секунду. С какой скоростью едет телега?

**2**. Три прямые пересекаются в одной точке так, что каждые две из них образуют угол 60°. Точка $M$ находится на расстоянии 3 *см* от одной прямой и на расстоянии 5 *см* — от другой. На каком расстоянии от третьей прямой может находиться точка $M$?

**3**. Какую цифру означает каждая из букв *М, И, Л, А, Н* в равенстве НАЛИМ × 4 = ЛИМАН?

**4**. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная линия, состоящая из 7 звеньев?

**5**. Сколько существует пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих неравенству $2^{x^2} + 2^{y^2} < 2^{1976}$?

**6**. Дедушка с внуком пошли вместе кататься на лыжах. Бабушка знает, что по ровному месту оба едут со скоростью 7 *км/час*; под гору: дедушка — 8 *км/час*, внук — 20 *км/час*; в гору: дедушка — 6 *км/час*, внук — 4 *км/час*. Оба проехали по одному и тому же маршруту.

Может ли бабушка определить, что больше — протяженность спусков или подъемов на их пути, — если первым вернулся

а) внук,

б) дедушка?

**7**. Сколько сторон может иметь многоугольник, являющийся:

а) пересечением;

б) объединением

треугольника и выпуклого четырехугольника? (Укажите все возможные значения и нарисуйте примеры.)

**8**. Можно ли вписать в клетки таблицы 3 × 3 числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы каждые два числа, стоящие в соседних клетках, отличались не больше чем на 2? (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону.)

**9**. Можно ли разрезать квадрат на несколько остроугольных треугольников?

**10**. Найдите три числа, каждое из которых равно квадрату разности двух других.

**11**. Докажите, что при любом натуральном $n$ число $n^6 + n^3 + 1$ — составное.

**12**. На плоскости нарисованы три конгруэнтных отрезка. Сколько осей симметрии может иметь это множество (объединение данных трех отрезков)?

**13**. Укажите три последние цифры суммы $1^{100} + 2^{100} + 3^{100} + 4^{100} + \ldots + 999998^{100} + 999999^{100}$.

Ниже мы приводим для образца тщательно выполненное решение одной из задач вступительной работы прошлого года. Надеемся, что и присылаемые вами решения будут так же хорошо обоснованы.

*Элементами множеств $A$, $B$ и $C$ служат числа 1, 2, 3, ..., 9. Известно следующее:* $A \cap B = \{1; 2\}$; $B \cap C = \{3; 7\}$; $A \cup B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8\}$; $A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}$. *Найдите множества $A$, $B$ и $C$. (Здесь $A \cap B$ — пересечение множеств $A$ и $B$, $A \cup B$ — объединение этих множеств.)*

Решение. В этой задаче можно рассуждать о каждом числе отдельно, фактически решая девять независимых задач.

1) Начнем с числа 1. Поскольку 1 принадлежит пересечению $A$ и $B$, то 1 принадлежит обоим множествам $A$ и $B$. Если бы 1 принадлежала еще и $C$, то 1 принадлежала бы пересечению $B$ и $C$, а это не так. Значит, 1 не принадлежит $C$.

2) Число 2 входит ровно в те же множества, что и 1. Поэтому для 2 проходит такое рассуждение.

3) Число 3 входит в $B \cap C$, поэтому оно входит и в $B$, и в $C$. Но 3 не входит в $A \cap B$, поэтому 3 не входит в $A$.

4) Число 4 не входит в $A \cup B$, поэтому оно не входит ни в $A$, ни в $B$. Но оно входит в $A \cup C$, поэтому оно входит только в $C$.

5) Для 5, 6, 8, 9 те же рассуждения, что и для 4.

6) Для 7 те же рассуждения, что и для 3.

Ответ. $A = \{1; 2\}$; $B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8\}$; $C = \{3; 4; 5; 7; 9\}$.

Если вы хорошо разобрались в приведенном решении, вам легко будет понять, что решение можно записать и гораздо короче.

1) Так как множества $A \cap B$ и $B \cap C$ не имеют общих элементов, то нет такого элемента, который принадлежал бы одновременно всем трем множествам $A$, $B$ и $C$. Отсюда следует, что числа 1, 2 принадлежат и $A$, и $B$, но не принадлежат $C$, а числа 3 и 7 принадлежат и $B$, и $C$, но не принадлежат $A$.

2) Если элемент не принадлежит $K \cup L$, то он не принадлежит ни $K$, ни $L$, а если он одновременно принадлежит $K \cup M$, то он принадлежит $M$. Отсюда следует, что числа 6 и 8 принадлежат $B$, но не принадлежат ни $A$, ни $C$, а числа 4, 5, 9 принадлежат $C$, но не принадлежат ни $A$, ни $B$.

*Ж. Раббот*

# Заочная физико-техническая школа

## при Московском физико-техническом институте

**Дорогие ребята! Заочная физико-техническая школа при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте объявляет набор учащихся на 1976—77 учебный год.**

Вот уже 10-й год заочная физико-техническая школа при МФТИ проводит набор учеников в 8-й, 9-й, 10-й классы.

Форма обучения в нашей школе отличается от привычной для вас работы с учителем на уроках. Заочное обучение прививает навыки самостоятельности, учит работать с дополнительной литературой, конспективно излагать свои мысли.

Выпускники ЗФТШ получают хорошие дополнительные знания по физике и математике. Многие выпускники ЗФТШ поступают в различные вузы страны и успешно в них занимаются.

В ЗФТШ принимаются учащиеся восьмилетних и средних школ, расположенных преимущественно на территории РСФСР.

Цель нашей школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по физике и математике. Вот почему при приеме в школу предпочтение отдается ученикам, проживающим в сельских местностях и рабочих поселках, где помощь ЗФТШ особенно необходима.

В ЗФТШ принимаются и физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание).

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания ЗФТШ включают теоретический материал и разбор характерных задач по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Задачи подбираются разными по сложности: от простых до сложных (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а членов кружка — его руководители.

С учащимися г. Москвы проводятся очные занятия по физике и математике 2 раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ.

Вступительное задание каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью. Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет.

На внешнюю сторону обложки тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу:

| | |
|---|---|
| 1. Область (край или АССР) | *Кемеровская обл.* |
| 2. Фамилия, имя, отчество | *Глухов Валерий Иванович* |
| 3. Класс | *восьмой* |
| 4. Номер и адрес школы | *школа № 6, ул. Шишкина, 26* |
| 5. Национальность | *русский* |
| 6. Профессия родителей и занимаемая должность | |
| отец | *слесарь, мастер цеха* |
| мать | *бухгалтер* |
| 7. Подробный домашний адрес | *653023, г. Прокопьевск,*<br>*ул. Урожайная, д. 11, кв. 20* |

Срок отправления решения — не позднее 10 марта 1976 года (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу будет производиться приемной комиссией Московского физико-технического института и приказом директора ЗФТШ. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1976 года.

Тетради с выполненными заданиями присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР, Латвийской, Литовской, Эстонской и Белорусской ССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Камчатской, Иркутской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР, Чукотки, Казахской, Киргизской, Таджикской, Туркменской, Узбекской ССР высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона, 7, Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся 7-х классов, 3—8, 12 — для учащихся 8-х классов, 6—12 — для учащихся 9-х классов. Во вступительном задании по математике задачи 1—5 — для седьмых классов, 4—10 — для восьмых классов, 7—13 для девятых классов.

## Вступительное задание по физике

**1.** Потребовалось срочно отвесить по 100 *г* растительного масла или манной крупы, но весов в доме не оказалось. Опишите, как вам удалось справиться с этой задачей.

**2.** Найти среднюю скорость поезда, если известно, что первую треть пути он прошел со скоростью 50 *км/час*, вторую — 75 *км/час*, а последнюю треть — со скоростью вдвое больше средней скорости на первых двух участках.

**3.** Герметично закрытая коробка массой 0,1 *кг* и размерами 5×10×10 *см* плавает на поверхности воды. Снизу к коробке подвесили алюминиевый грузик такой, что она целиком погрузилась в воду, но продолжает плавать в ней. Найти массу грузика, если плотность алюминия 2,7 $г/см^3$, и плотность воды 1 $г/см^3$.

**4.** Можно ли, пользуясь барометром, определить высоту здания? Проведите необходимые измерения и расчеты и сравните полученный результат с действительной высотой.

**5.** Топливная смесь приготовлена из сухих древесных опилок, торфа и каменного угля, массы которых взяты в отношении 6 : 3 : 1. Какое количество тепла выделится при сгорании 1 *кг* такой смеси, если удельные теплоты сгорания взятых горючих веществ соответственно равны $10^7$, $1{,}4 \cdot 10^7$ и $3 \cdot 10^7$ *дж/кг*?

**6.** Два сопротивления, включенные параллельно, выделяют в цепи электрического тока силой 4 *а* мощность 144 *вт*, а при последовательном соединении выделяется мощность 36 *вт* при силе тока 1 *а*. Найти величины этих сопротивлений.

7. Используя экспериментальные данные для ускорения свободного падения и длины земного экватора, оцените среднюю плотность Земли. Опишите другие возможные способы определения средней плотности планеты.

8. Тонкая нить из капрона, натянутая горизонтально, рвется, когда посередине нити подвешивают груз массой 2 *кг*. Какой массы груз можно подвесить на ней в вертикальном положении? Учесть, что в момент разрыва нить составляла с горизонтом угол 1°. Принять во внимание, что для малых углов $\sin\alpha \approx \alpha$.

9. В цилиндре объемом 2 *л* под невесомым поршнем находится некоторое количество идеального газа. На поршень положили груз массы 20 *кг*, в результате чего поршень опустился на 40 *см*. Во сколько раз изменилась температура газа после перемещения поршня? Площадь сечения поршня 50 $см^2$, атмосферное давление 1 *атм*.

10. Сможет ли воздушный шар, наполненный гелием, поднять груз массы 150 *кг*, если его объем 150 $м^3$ и масса его оболочки [illegible] *кг*? Давление и температура гелия внутри шара и воздуха снаружи одинаковы и соответственно равны 1 *атм* и 15°С. Относительная молекулярная масса гелия 4, воздуха 29.

11. Когда содержится больше влаги в 1 $м^3$ воздуха: осенью (льет холодный дождь, температура +3°С) или засушливым летом (температура +30°С, относительная влажность 20%)?

12. Предлагается измерить плотность частиц сахарного песка. Опишите подробно используемый метод и результат ваших измерений. Какие другие возможные способы измерения плотности частиц сахарного песка можно предложить?

## Вступительное задание по математике

1. Найти значение выражения

$$\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a-bx}}$$

при

$$x=\frac{2am}{b\,(1+m^2)}\quad (a>0,\ b>0,\ m>0).$$

2. Вкладчик взял из сберегательной кассы сначала 1/6 часть своих денег, потом 50 *р.* и, наконец, 2/5 оставшейся суммы. Всего за три раза он взял 510 *р*. Сколько денег после этого осталось у него в сберкассе?

3. Построить ромб по заданной стороне длины $a$, если известно, что длины диагоналей относятся как $m:n$.

4. Двузначное число, деленное на сумму своих цифр, дает в частном 4 и в остатке 3; если цифры этого числа переставить, то получится число, на 5 большее ушестеренной суммы его цифр. Найти это число.

5. Сократима ли дробь $\frac{14m+3}{21m+4}$, где $m$ — целое число?

6. Найти все действительные значения $a$, при которых корни уравнения

$$(a+1)x^2+2ax+a+3=0$$

положительны.

7. В прямоугольном треугольнике найти отношение длин катетов, если длины высоты и медианы, выходящих из прямого угла, относятся как 40:41.

8. Сумма членов и разность арифметической прогрессии положительны. Если увеличить разность прогрессии на 2, не меняя ее первого члена, то сумма ее членов увеличится в 3 раза. Если же разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза, не меняя первого члена, то сумма членов прогрессии увеличится в 5 раз. Определить разность исходной прогрессии.

9. В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($|AB|=|BC|$) на высоте $BD$ как на диаметре построена окружность. Через точки $A$ и $C$ к окружности проведены касательные $AM$ и $CN$, продолжения которых пересекаются в точке $O$. Определить отношение $\frac{|AB|}{|AC|}$, если $\frac{|OM|}{|AC|}=k$ и высота $BD$ больше основания $AC$.

10. Автобус из пункта $A$ и автомобиль из пункта $B$ отправляются одновременно и осуществляют безостановочное движение с постоянными скоростями между $A$ и $B$. Первая встреча их произошла через 42 *мин* после начала движения, а через 2 *ч* 34 *мин* после начала движения автомобиль первый раз обогнал автобус. Через какое время после начала движения автобус и автомобиль первый раз окажутся одновременно в пункте $A$?

11. Доказать методом математической индукции неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

при $n\geq 2$.

12. Найти количество всех трехзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что в каждое число входит не более двух одинаковых цифр.

13. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентной формулой

$$x_1=\frac{a}{2},\quad x_n=\frac{a}{2}+\frac{x_{n-1}^2}{2},\quad n\geq 2,$$

причем $0<a<1$. Найти предел последовательности.

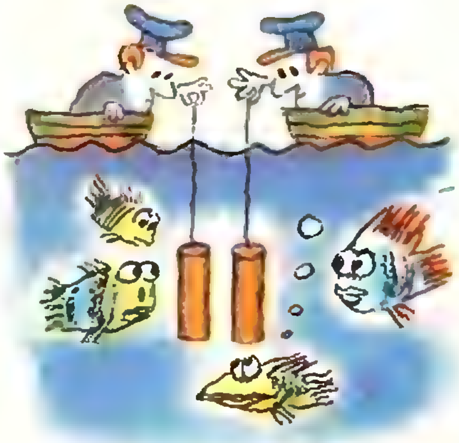
*В. Асланян, А. Кирьянов, Т. Чувунова.*

## «Квант» для младших школьников

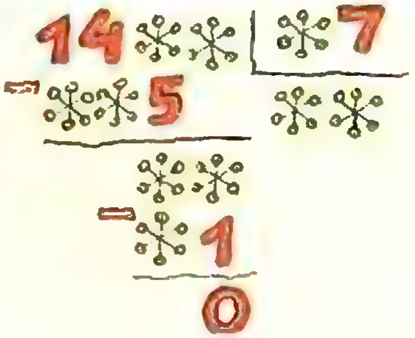
### Задачи

1. В языке племени ододо всего два звука: «Д» и «О». Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого количества следующих операций: пропуска идущих подряд звуков ДО или ООДД и добавления в любое место сочетания ОД. Означают ли слова ОДД и ДОО одно и то же?

2. Две медные трубки опускают в воду на большую глубину. Одна трубка запаяна с обоих концов, а у другой — один конец открыт. Что произойдет с трубками на глубине?



3. Восстановите запись деления, в которой некоторые «сбежавшие» цифры заменены звездочками.



4. Известно, что длина тени, которую отбрасывает предмет, в течение дня меняется. Самая короткая тень — в полдень, к вечеру тень «растет». А есть ли на Земле такое место, где длина тени в течение дня не меняется?

5. В игре «Кто первым назовет число 100» участвуют двое. Один называет любое целое число от 1 до 9 включительно. Второй прибавляет к названному любое целое число от 1 до 9, которое ему понравится, и называет сумму. К этой сумме первый снова добавляет любое целое число от 1 до 9 и называет новую сумму и т. д. Выигрывает тот, кто первым назовет число 100. В этой игре начинающий всегда проигрывает, если только его противник откроет один секрет. В чем же секрет, ключ игры, который обеспечивает второму игроку победу?

*А. Савин*

# Как нарисовать пятиконечную звезду?

Не правда ли, красива правильная пятиконечная звезда. Ее мы видим на гербе и флаге нашей Родины, она сияет на военных фуражках и на шпилях башен Кремля.

Кто в детстве не пытался нарисовать эту звезду? Наверное, всякий. Но получалось нечто кособокое и неуклюжее, что-нибудь вроде рисунка 1.

## Первая попытка

В школе вы познакомились с инструментами для геометрических построений — циркулем и линейкой. Попробуем возобновить попытки нарисовать правильную пятиконечную звезду. Сначала спросим себя, что значит правильную? Наверное, нужно, чтобы пять вершин были соединены отрезками равной длины. Линейка поможет нам сделать стороны звезды прямыми, а при помощи циркуля постараемся сделать их равными.

Приступим. Строим угол с вершиной $A$. На его сторонах откладываем равные отрезки $AB$ и $AC$ (рис. 2). Три вершины есть. Осталось найти еще две, и все в порядке. Одна из них ($D$) должна быть удалена от точки $B$ на такое же расстояние, что и точка $A$. Значит, она должна лежать на окружности с центром в точке $B$ радиуса $AB$. Проведем дугу (*2*) этой окружности. Аналогично проведем дугу (*3*) окружности такого же радиуса с центром в точке $C$. На ней должна лежать вторая из оставшихся вершин ($E$).

Вспомним, что мы хотим: расстояние между вершинами $D$ и $E$ должно быть равно расстоянию между остальными вершинами. Поэтому, не изменяя раствора циркуля, ставим одну из его ножек в какую-нибудь точку $D$ одной дуги (это будет чет-

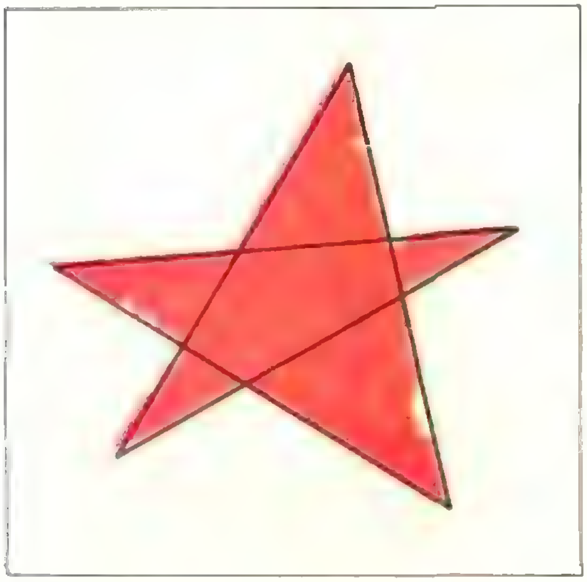


Рис. 1.

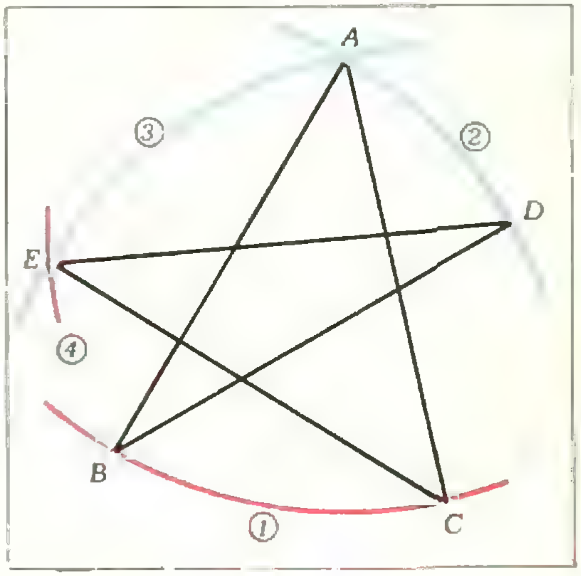


Рис. 2.

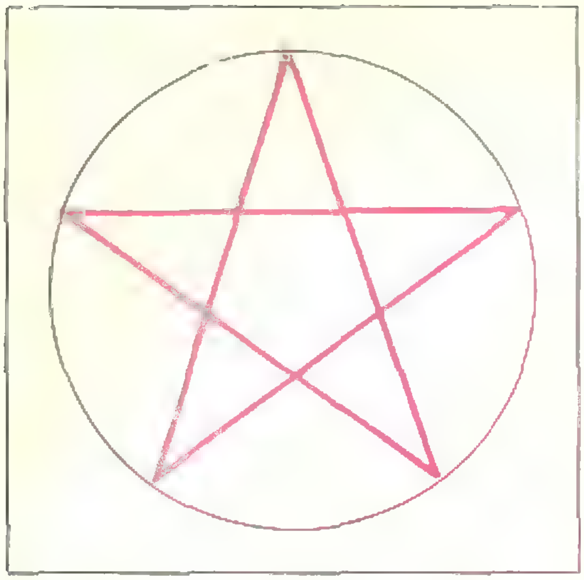


Рис. 3.

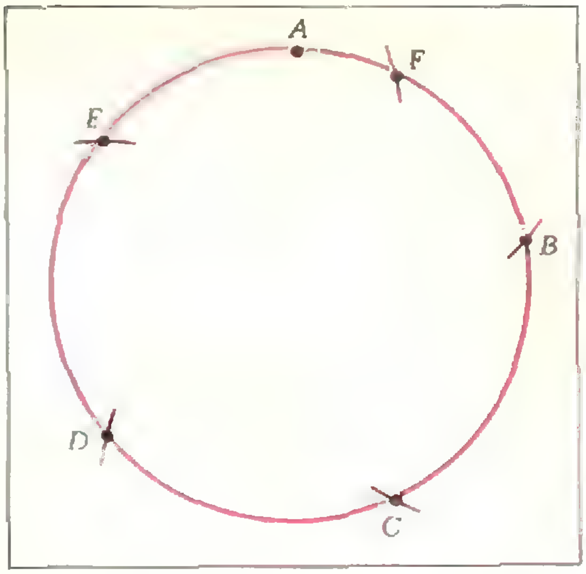


Рис. 4.

вертая вершина звезды) и проводим окружность (*4*), которая пересечется дугой (*3*) в точке *E*. Получили пятую вершину. Соединили отрезками полученные точки. И что же? Длины отрезков равны, а звезда явно неправильная.

### Вторая попытка

Где же ошибка? Она сразу видна. Стороны у звезды равны, а вот углы при вершинах — нет. Как же сделать, чтобы были равны и все стороны, и все углы?

Нарисуем окружность. Разобьем ее на 5 равных дуг, а затем соединим концы дуг через одну (рис. 3). Нет сомнений, что это и есть нужная нам звезда! Только как разделить окружность на 5 равных частей? С помощью транспортира? Во всей окружности 360°, значит, в каждой части по 72°. Берем транспортир... где же он? Опять куда-то исчез. А может быть, сумеем обойтись и без него?

### Приближенный метод

Попробуем «на глазок» отложить на окружности угол в 72°. Так... семьдесят два градуса — это больше 60°, но меньше 90°. Где-то между ними, чуть ближе к 60°, чем к 90°. Дугу в 60° отложить нетрудно, так как длина хорды, стягивающей ее, равна радиусу окружности. Еще легче построить и дугу в 90°. Отметим концы «нужной» дуги (в 72°) — точки *A* и *B* (рис. 4).

Проверим, действительно ли дуга *AB* равна $^1/_5$ дуги окружности. Отложим с помощью циркуля дугу *BC*, равную *AB*, затем дугу *CD*, дальше *DE* и, когда ножку циркуля мы поставим в точку *E*, то вторая его ножка должна попасть в точку *A*. Попала? Нет. Значит, мы все делали зря? Нет!

Отметим точку *F*, в которую попала вторая ножка циркуля. Мы ошиблись на дугу *AF*, значит, каждый раз мы ошибались на $^1/_5$ этой дуги, причем, если точка *F* оказалась правее точки *A*, то мы выбрали дугу больше, чем нужно, а если левее, то меньше требуемой.

Сделаем поправку. «На глазок» отложим на дуге *AF* ее пятую часть — дугу *AG* (рис. 5). Дуга *GB* уже гораздо точнее приближается к $^1/_5$ дуги окружности, чем дуга *AB*. Теперь сделаем еще раз такую же проверку, что и раньше. Если после пяти откладываний ножка циркуля попадет в черное пятнышко, которым мы отметили точку *G*, то построение выполнено с нужной точностью. А если нет, то еще раз таким же способом уточним размер дуги. Двух уточнений практически всегда хватает.

### Точное решение

А нельзя ли сразу получить точное решение? Оказывается, можно.

Вот один из «рецептов» такого построения. Пусть *BC* — диаметр окружности (*1*), *AO* — перпендикулярный ему радиус (рис. 6). Проведем окружность (*2*) радиуса *BO* с центром *B*. Через точки пересечения окружностей (*1*) и (*2*) проведем прямую и обозначим через *D* точку ее пересечения с диаметром. Затем с центром в точке *D* радиусом *DA* проведем еще одну окружность (*3*). Точку ее пересечения с диаметром обозначим через *E*. Проведя окружность (*4*) радиуса *AE* с центром *A*, в пересечении с окружностью (*1*) получим точки *M* и *M'*.

Дуга *AM* равна дуге *AM'* и равна $^1/_5$ дуги первоначальной окружности.

Чтобы обосновать это, нужны знания математики старших классов школы.

Вы сможете сами придумать обоснованный рецепт построения, если прочтете статью А. Д. Бендукидзе «Золотое сечение» («Квант», 1973, № 8). Там рассказывается о замечательных геометрических свойствах правильной пятиконечной звезды.

### Обсудим сказанное

Некоторые читатели возмущенно возропщут: «Зачем же рассказывать о приближенном построении, если есть точное?» А вот зачем.

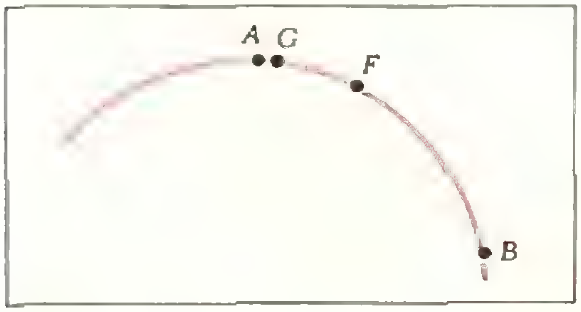


Рис. 5.

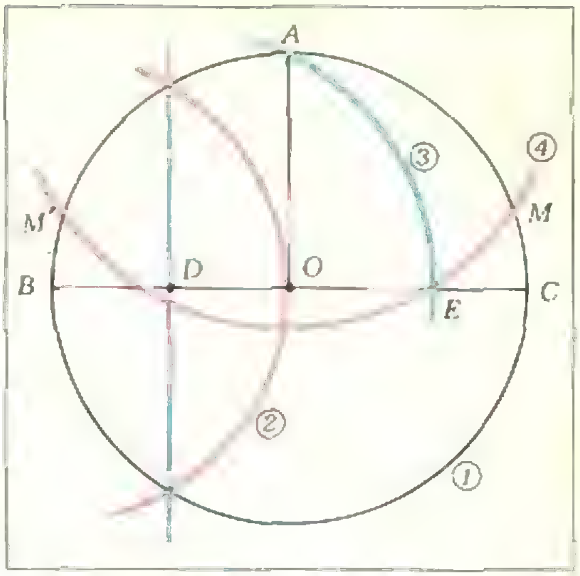


Рис. 6.

Во-первых, что значит — «точное»? Если его провести идеальными инструментами, то оно действительно точно. Но вы же будете чертить реальными карандашом, циркулем и линейкой. Заведомо при этом получится неточный результат.

А, во-вторых, приближенный метод годится для деления окружности на любое число равных частей, следовательно, достаточно для этого запомнить только один метод.

Далее, этот метод проще точного. А простота часто бывает важным аргументом. Так, многие математические вычисления на электронных вычислительных машинах (ЭВМ) проводят приближенными методами (хотя существуют и точные) лишь потому, что их использование гораздо проще, а в ряде случаев возможности машины не позволяют воспользоваться точным, но громоздким методом.

И последнее. Оказывается, нет и не может быть точных методов для деления окружности на 7, 9, 11, 13, 14, 18, 21, 22, 23, 25 и еще много других равных частей. Доказательство этого факта принадлежит замечательному немецкому математику Карлу Фридриху Гауссу.

### К статье «Полуправильные многогранники»

1. Октаэдр. Куб.

2. $V = a^3\sqrt{2\sqrt{3}+2}$.

3. $h = \frac{a\sqrt{6}}{15}$; $\sin\alpha = \frac{5\sqrt{11}}{18}$.

4. $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{20}$.

5. $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{3}$.

6. $V = \frac{8a^3\sqrt{2}}{27}$.

7. $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{2}{3}$.

### К статье «Всплывающий воздушный пузырек и закон Архимеда»

1. Из закона сохранения энергии

$$\frac{m+m_1'}{2}v_1^2 = \frac{m+m_2'}{2}v_2^2,$$

где $m = V\rho_0$ ($V$ — объем стержня),

$m_1' = V\rho\frac{r^2}{R_1^2-r^2}$ ($\rho$ — плотность воды),

$m_2' = V\rho\frac{r^2}{R_2^2-r^2}$, находим

$$v_2 = v_1\sqrt{\frac{\rho_0\left(R_1^2-r^2\right)+\rho r^2}{\rho_0\left(R_2^2-r^2\right)+\rho r^2}}.$$

2. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m+{}^2/_3\pi R^3\rho}{\pi r^2\rho g}}$. (Решение задачи см., например, в «Кванте», 1974, № 6, с. 36. Только нужно $m$ заменить на $m+m' = m+\frac{1}{2}V\rho$.)

3. Запишем второй закон Ньютона для стержня, для массы $m_1 = \pi(R^2-r^2)l\rho$ воды, движущейся между стержнем и стенками трубки, и для остальной, неподвижной воды массы $m_2 = \pi R^2(L-l)\rho$:

$$ma = F_{\text{выт}1} + F_{\text{выт}2} - mg,$$
$$-m_1a_1 = -m_1g - F_{\text{выт}1} - F_1,$$
$$0 = -m_2g - F_{\text{выт}2} + F_1 + F.$$

Здесь $F_{\text{выт}1}$ ($F_{\text{выт}2}$) — сила, с которой движущаяся (неподвижная) вода действует на стержень, $F_1$ — сила взаимодействия подвижной и неподвижной воды, $F$ — сила, с которой на неподвижную воду действует дно трубки. Сложив все три уравнения, исключаем силы $F_{\text{выт}1}$, $F_{\text{выт}2}$ и $F_1$. Заметим, что $\frac{a_1}{a} = \frac{v_1}{v} = \frac{r^2}{R^2-r^2}$. Тогда после несложных преобразований получаем:

$$F = (m+m_1+m_2)g - a(V\rho - m) =$$
$$= \pi(R^2L - r^2l)\rho g + mg - \frac{(V\rho-m)^2}{m+\frac{V\rho r^2}{R^2-r^2}}.$$

Отсюда видно, что сила давления воды на дно (численно равная силе $F$) меньше суммарного веса воды и стержня. Причем это справедливо и когда стержень всплывает ($V\rho > m$), и когда он тонет ($m > V\rho$).

### К статье «Давайте складывать точки»

4. Полюс $O$ нужно выбрать в центре правильного многоугольника; причем это положение полюса условием задачи определяется однозначно.

8. $A_3 = A_2 - A_1$, $A_4 = -A_1$,
$A_5 = -A_2$, $A_6 = A_1 - A_2$.

11. а) Луч $[BA)$; б) луч $[AB)$,
в) отрезок $[AB]$,
г) луч, лежащий на прямой $BA$, с вершиной в точке $B$, не содержащий точку $A$.

15. В отношении $n:(n-1)$, считая от вершины. Точка пересечения отрезков $AE$ и $BK$ лежит на медиане, проведенной из вершины $C$.

16. В отношении $3:3:1$, считая от вершины.

17. В отношении $1:2$.

18. В отношении $1:1:1$.

### К статье «Достраивание тетраэдра»

1. Достройте тетраэдр до параллелепипеда вторым способом и воспользуйтесь для каждой грани параллелепипеда теоремой, связывающей сумму квадратов длин сторон параллелограмма и сумму квадратов длин его диагоналей.

2. Достройте тетраэдр до параллелепипеда вторым способом; для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы соответствующая грань получившегося параллелепипеда была ромбом.

3. а) $\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}\times$
$\times\sqrt{(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}$;

б) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$.

Указание. См. задачи 3, 4 в статье.

4. Достройте тетраэдр до параллелепипеда вторым способом. Учетверенный квадрат длины каждого ребра параллелепипеда выразите по теореме косинусов через длины диагоналей соответствующей грани и угол между ними (по одной грани на ребро). Затем к граням параллелепипеда примените теорему о сумме квадратов длин диагоналей параллелограмма и сумме квадратов длин его сторон. Сложив все полученные равенства, получите требуемый результат.

## К статье «Московский инженерно-физический институт»

### Математика

Вариант I

1. Обозначим скорости трех лыжников буквами $v_k$ ($k=1, 2, 3$) (*м/мин*), а всю дистанцию через $S$ (*м*). Третьему лыжнику после $m$ (*мин*) остается пройти расстояние ($S-mv_3$) (*м*). По условию задачи это расстояние первый лыжник пройдет за $n$ минут, а второй — за $p$ минут.

Учитывая эти условия и соотношения между скоростями, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{S-mv_3}{v_1}=n, \\ \dfrac{S-mv_3}{v_2}=p, \\ v_1+v_2=2v_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Из системы (1) требуется найти отношения $\frac{S}{v_k}$ ($k=1, 2, 3$). Исключив из первых двух уравнений системы $S-mv_3$, получаем систему уравнений для отношений $\frac{v_1}{v_3}$ и $\frac{v_2}{v_3}$:

$$\begin{cases} n\dfrac{v_1}{v_3}-p\dfrac{v_2}{v_3}=0, \\ \dfrac{v_1}{v_3}+\dfrac{v_2}{v_3}=2. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение линейной алгебраической системы линейных уравнений с двумя неизвестными (2) имеет вид

$$\frac{v_1}{v_3}=\frac{2p}{n+p}, \quad \frac{v_2}{v_3}=\frac{2n}{n+p}.$$

Теперь из первых двух уравнений системы (1) получим ответ:

$$S/v_1=\left(n+\frac{1}{2}m+\frac{mn}{2p}\right)(\textit{мин}),$$

$$S/v_2=\left(p+\frac{1}{2}m+\frac{mp}{2n}\right)(\textit{мин}),$$

$$S/v_3=\left(m+\frac{2np}{n+p}\right)(\textit{мин}).$$

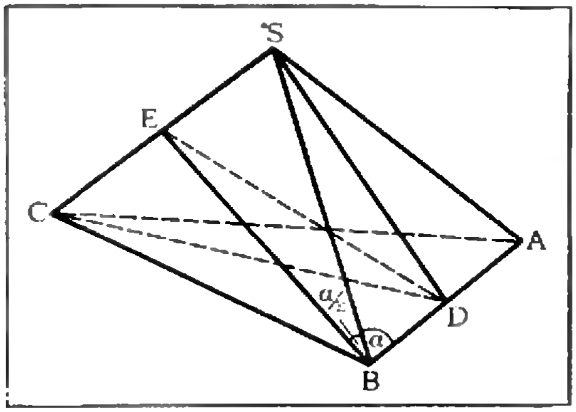


Рис. 1.

2. Из равенства плоских углов при вершинах $A$ и $B$ (см. рис. 1) следует, что треугольники $ACB$ и $ASB$ — равные равнобедренные, поэтому $BC=CA=BS=SA$ и $\alpha<\frac{\pi}{2}$. Соединим середину $D$ отрезка $AB$ с вершинами $C$ и $S$. Плоскость $CDS$ перпендикулярна ребру $AB$, так как медианы $CD$ и $SD$ равнобедренных треугольников $ACB$ и $ASB$ одновременно являются высотами этих треугольников. Объем $V$ пирамиды $SABC$ равен сумме объемов пирамид $BDSC$ и $ADSC$,

$$V=\frac{1}{3}BD\cdot Q+\frac{1}{3}AD\cdot Q=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot Q, \qquad (1)$$

где $Q$ — площадь треугольника $CDS$, $BD=DA=\frac{1}{2}a$ (по построению). Таким образом, для нахождения объема пирамиды достаточно вычислить площадь треугольника $CDS$.

Треугольник $CDS$ — равнобедренный, так как $CD=SD$ (это следует из равенства прямоугольных треугольников $CDB$ и $SDB$, $DB$ — общая сторона, $\angle SBD=\angle CBD=\alpha$). Проведем $DE\perp CS$ ($CE=ES$ по свойству высоты равнобедренного треугольника). Следовательно,

$$Q=\frac{1}{2}CS\cdot DE=CE\cdot DE. \qquad (2)$$

Величины отрезков $CE$ и $DE$ легко находятся из прямоугольных треугольников $BEC$

и $BDE$: $CE=BC\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{AB}{2\cos\alpha}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=$

$$=\frac{a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha};\quad DE=\sqrt{(BE)^2-(BD)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{2\cos\alpha}\times$$

$$\times\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}.$$

Подставляя полученные значения $CE$ и $DE$ в (2), найдем:

$$Q=\left(\frac{a}{2\cos\alpha}\right)^2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}$$

и ответ:

$$V=\frac{a^3}{12}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha}\cdot\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha},$$

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

3. ОДЗ: $a>0$, $a\neq1$, $x>0$. Так как $\log_a^2x+2>0$, то исходное неравенство равносильно следующему:

$$\log_a^2x-3\log_ax-4<0.$$

Обозначив $y=\log_ax$, получим $y^2-3y-4<0$, откуда $-1<y<4$. Возвращаясь к $x$, получим двойное неравенство $-1<\log_ax<4$.

Ответ: $a^4<x<\frac{1}{a}$ при $0<a<1$; $\frac{1}{a}<x<a^4$ при $a>1$.

4. ОДЗ: $\cos x\neq0$. Теперь исходное уравнение равносильно следующему:

$$2\sin^2x+2\sqrt{8}\sin x+3=0.$$

Отсюда находим:

а) $\sin x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

В случае а) решений нет, поскольку $-\frac{3\sqrt{2}}{2}<-1$, а случай б) приводит к ответу $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k$ ($k$ — целое).

Вариант 2

1. 4 км/ч $\leqslant v\leqslant\frac{8+\sqrt{61}}{3}$ км/ч, где $v$ — собственная скорость лодки. 2. $\sqrt{3}\,r^3\operatorname{ctg}^6\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$. 3. $0<x<\frac{1}{2}$, $x>32$.

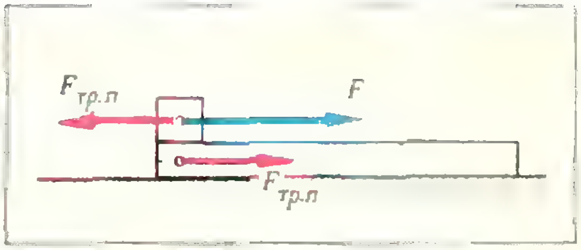


Рис. 2.

4. $-2$; $-\frac{1}{2}$; $1$; $\frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$.

Вариант 3

1. 4 м³/с $\leqslant x\leqslant\frac{8+\sqrt{61}}{3}$ м³/с, где $x$ — пропускная способность большей трубы. 2. $\arccos(\sin\alpha\cdot\sin\beta)$. 3. $0<x\leqslant10$. 4. $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(3-2\sqrt{3-a^2}\right)+\pi k$ при $|a|<\sqrt{2}$; $x=\pi k$ при $a=\pm\sqrt{2}$, решений нет при $|a|>\sqrt{2}$ ($k$ — целое).

**Физика**

Билет 1

3. Прежде всего выясним, скользит ли брусок по доске или система брусок — доска движется как единое целое. Максимальное значение силы трения покоя $F_{\text{тр.п}\,\max}$, по достижении которого брусок мог бы начать скользить по доске, равно силе трения скольжения: $F_{\text{тр.п}\,\max}=kmg\approx3{,}9$ н.

Приложенная к бруску внешняя сила $F=2$ н меньше $F_{\text{тр.п}\,\max}$. Следовательно, скольжения бруска по доске нет, т. е. система движется как единое целое. Произведенная внешней силой работа $A_{\text{вн}}=Fl$ идет на увеличение кинетической энергии системы: $Fl=(M+m)v^2/2$. При этом над доской совершается работа $A$, равная приращению ее кинетической энергии: $A=Mv^2/2$. Исключив из написанных равенств скорость $v$, найдем

$$A=FlM/(M+m)\approx1{,}3\ дж.$$

Задачу можно решить и иначе. Запишем уравнения движения бруска и доски, движущихся с одинаковым ускорением $a$ (см. рис. 2, на котором изображены только горизонтальные силы, действующие на брусок и на доску):

$$ma=F-F_{\text{тр.п}},\quad Ma=F_{\text{тр.п}}.$$

Отсюда найдем силу трения покоя: $F_{\text{тр.п}}=FM/(M+m)$. Эта сила, действующая со стороны бруска на доску, совершит над доской работу

$$A=F_{\text{тр.п}}l=FlM/(M+m).$$

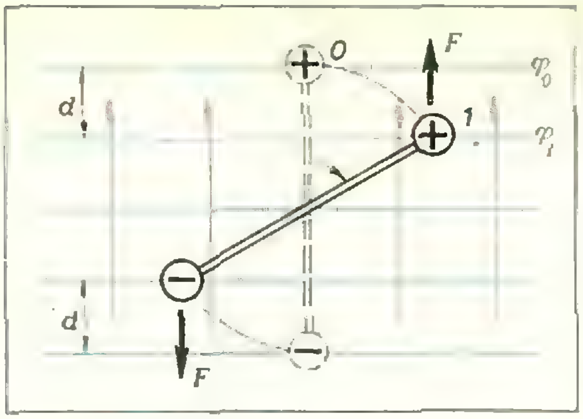


Рис. 3.

### Билет 2

3. Обозначим через $p_1$ и $p_2$ давления воздуха в частях цилиндра с объемами $V_1$ и $V_2$ соответственно. Запишем уравнения движения поршня:

$$m\omega^2 r = p_2 S - p_1 S \qquad (1)$$

($\omega^2 r$ — центростремительное ускорение, $p_2 S$ и $p_1 S$ — силы давления воздуха на поршень). По закону Бойля — Мариотта

$$p_1 V_1 = p_0 V_0 \ \text{ и } \ p_2 V_2 = p_0 V_0. \qquad (2)$$

Из равенств (1), (2) и очевидного соотношения $V_1 + V_2 = 2V_0$ найдем

$$V_1/V_2 = \frac{m\omega^2 r}{p_0 S} + \sqrt{\left(\frac{m\omega^2 r}{p_0 S}\right)^2 + 1} = 1{,}28.$$

### Билет 3

3. Система, выведенная из положения устойчивого равновесия, испытывает тормозящее действие сил электростатического поля. Поэтому она будет поворачиваться до тех пор, пока изменение кинетической энергии системы не станет равным работе электростатических сил:

$$-2\,(mv_0^2/2) = A. \qquad (1)$$

Работа $A_1$, совершаемая полем, например, над положительно заряженным шариком, равна $A_1 = q\,(\varphi_0 - \varphi_1)$, где $\varphi_0$ и $\varphi_1$ — потенциалы поля в начальном и конечном положениях шарика (см. рис. 3, где синими линиями показаны эквипотенциальные поверхности однородного электростатического поля). Для однородного поля $\varphi_0 - \varphi_1 = -Ed = -E\,(l/2)(1-\cos\alpha)$. Тогда $A_1 = -qEl\,(1-\cos\alpha)/2$. Такую же работу поле совершит и над отрицательно заряженным шариком. Следовательно,

$$A = 2A_1 = -qEl\,(1-\cos\alpha). \qquad (2)$$

Из (1) и (2)

$$\cos\alpha = 1 - \frac{mv_0^2}{qEl} = 0{,}5.$$

Отсюда $\alpha = 60°$.

### Билет 4

3. $U = \mathcal{E}_{\text{инд}} = BR^2\omega/2 = 1{,}5$ *в.*

Указание. Подробнее см. решение задачи Ф333 в этом номере журнала.

## К задаче «Пленники царя Дадона»

*(см. с. 18)*

Открытыми окажутся те камеры, ключ в которых повернут нечетное число раз, т. е. те, к которым подходило нечетное число посланцев царя Дадона, или, иначе, номер которых имеет нечетное число делителей.

Нечетное число делителей имеют только точные квадраты: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 (у неквадратов $x$ каждому делителю $a$ соответствует делитель $x/a$), поэтому царь Дадон отпустил на свободу десять пленников.

## К ребусам

*(см. с. 43)*

«Шесть на два». Шесть = 52647, Два = 109.
«Партитура». Doremifasol = 40275683109.
«Простые числа». 325 × 777 = 252525.

*(см. с. 23)*

1. 807 × 807 = 651 249.
2. 459 × 459 = 210 681.
3. 213 × 213 = 45 369
4. 209 × 209 = 43 681.
5. 259 × 259 = 67 081.
6. 157 × 157 = 24 649.

## К заметке «Курьезный рекорд»

*(см. с. 59)*

На двух. Миссис Дрю напечатала 7388894 знаков, в среднем по 3190 на лист.

---

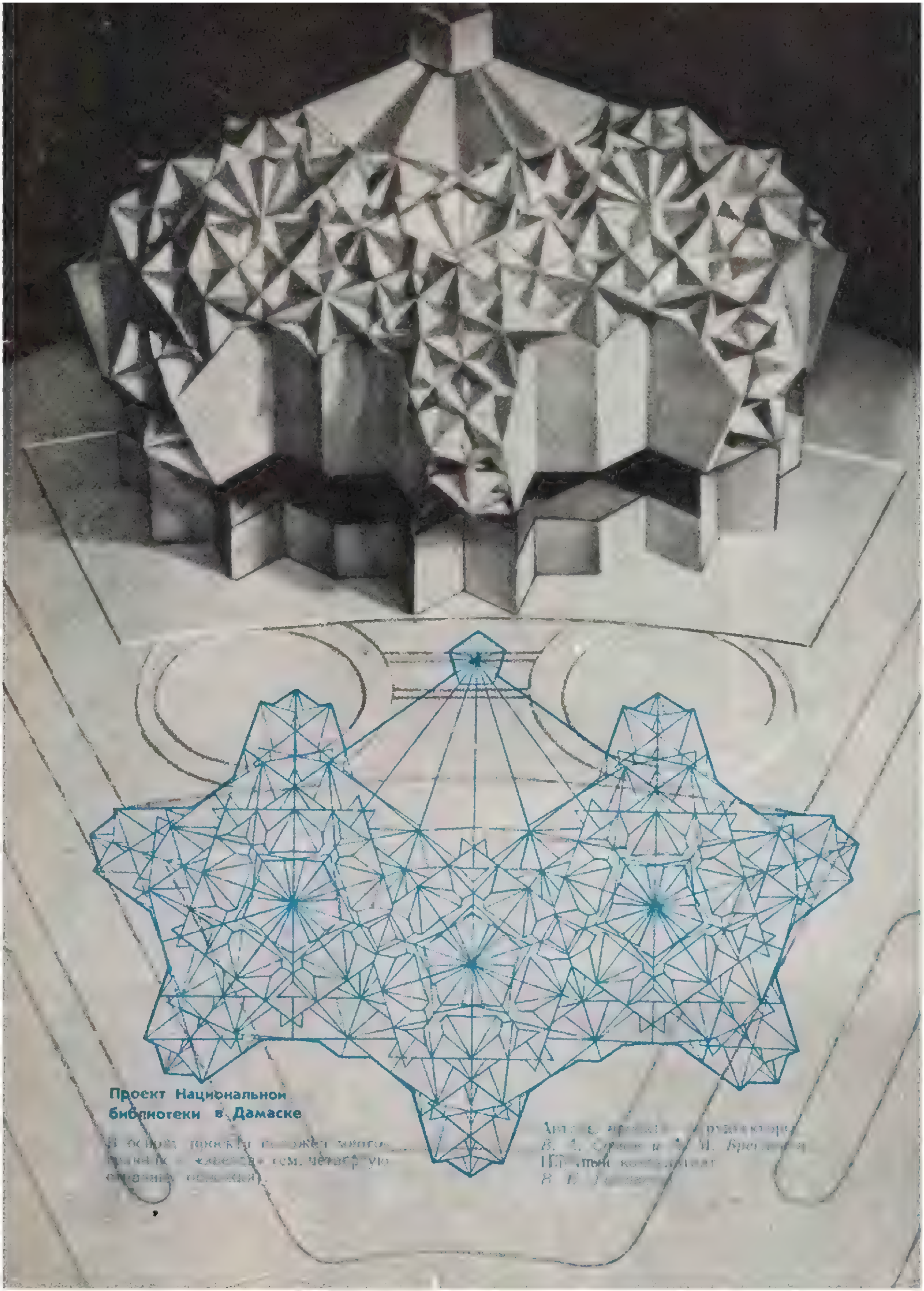
Номер оформили: *Е. Верентинова, М. Златковский, В. Карцев, Г. Красиков, Э. Назаров.*

Корректор *Н. Румянцева*

113035, Москва, Ж-35, ул. Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62. Сдано в набор 17/X-75 г.
Подписано в печать 11/XII-75 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,24 Т-21316
Цена 30 коп. Заказ 2298 Тираж 124 810

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

*Рукописи не возвращаются*



**Проект Национальной библиотеки в Дамаске**

В основу проекта положен много-гранник с [illegible] тем. четвертую [illegible]

Авторы проекта — архитекторы В. А. [illegible] и [illegible] М. [illegible]
Главный конструктор
В. И. [illegible]

# НОМЕР
# 2

# КВАНТ

*Основан в 1970 году*

1976
2

*Научно-популярный*
*физико-математический*
*журнал*
*Академии наук СССР*
*и Академии педагогических*
*наук СССР*

*Издательство «Наука»*
*Главная редакция*
*физико-математической*
*литературы*

Главный редактор
*академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
*академик* А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
*(главный художник)*
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
*(зам. главного редактора)*
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
*(зам. главного редактора)*
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

**Редакция:**
В. Н. Березин
А. Н. Виленкин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова
*(художественный редактор)*
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чернова
*(зав. редакцией)*

## В НОМЕРЕ:

2 Навстречу XXV съезду КПСС

**150 лет геометрии Лобачевского**

5 *П. Александров.* Николай Иванович Лобачевский
16 *А. Норден.* Великое открытие Лобачевского
22 *Я. Смородинский.* Лобачевский и физика

**Лаборатория «Кванта»**

28 *А. Натанзон, М. Плоткин.* Маятник с вибрирующим подвесом

**Математический кружок**

32 *Ю. Ионин, Л. Курляндчик.* Поиск инварианта

**Задачник «Кванта»**

36 Задачи М366—М370; Ф378—Ф382
37 Решения задач М326—М329; Ф339—Ф342

**Практикум абитуриента**

46 *Я. Суконник, П. Горнштейн.* Простой ответ в «сложной» задаче
51 *Г. Мякишев.* Расчет цепей переменного тока с помощью векторных диаграмм
58 *С. Козел, В. Чехлов, А. Шелагин.* Московский физико-технический институт

**«Квант» для младших школьников**

60 Задачи
61 *А. Орлов.* «Все», «некоторые» и отрицание
64 **Ответы, указания, решения**
**Смесь** *(с. 27, 31, 45)*

24 февраля 1826 г. на заседании физико-математического факультета Казанского университета Н. И. Лобачевский сделал доклад, в котором показывалось, что знаменитый пятый постулат Евклида недоказуем. Проблема, две тысячи лет неподдававшаяся усилиям математиков, была решена совершенно неожиданным образом!
О Н. И. Лобачевском, о его замечательных открытиях рассказывается в статьях этого и следующего номеров нашего журнала.
Обложка этого номера (1-я и 4-я страницы) выполнена художником Г. Казаковцевым.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1976 год

# Навстречу XXV съезду КПСС

Февраль 1976 года навсегда войдет в историю нашей страны. В этом месяце состоится XXV съезд Коммунистической партии Советского Союза. Съезд подведет итог грандиозной работы нашего народа по выполнению девятого пятилетнего плана и утвердит основные направления развития народного хозяйства СССР на 1976—1980 годы.

Основная задача десятой пятилетки в области развития народного хозяйства — резкое повышение качества продукции и эффективности производственной деятельности во всех сферах труда. Недаром эту пятилетку называют «пятилеткой качества».

Успешно завершив девятый пятилетний план развития народного хозяйства, советский народ сделал крупный шаг на пути к коммунизму. В этих достижениях важную роль сыграли физика и математика. Роль этих наук в новом пятилетнем плане будет еще более существенной.

Мы живем в эпоху, которую часто называют эпохой научно-технической революции. Наука в наши дни превратилась в непосредственную производительную силу, могущество которой непрерывно растет. На протяжении последних трех десятилетий мы стали свидетелями грандиозных успехов физико-математических наук, в результате которых возникла ядерная энергетика, идущая на смену традиционной химической энергетике. Родилась ракетно-космическая техника. Появились электронные вычислительные машины. Они сделали доступными решения таких проблем, о возможности решения которых предшествующие поколения могли только мечтать. Ширится производство полупроводников, радиоэлектронной аппаратуры, разнообразных средств автоматизации. Одновременно с этим наука готовит глубокие революционные перемены и в давно существующих отраслях производства — металлургии и машиностроении, легкой и пищевой промышленности, строительстве и сельском хозяйстве. Смысл этих перемен — в необычайно быстром повышении производительности труда, эффективности производства и качества продукции.

В недалеком будущем большинство предприятий превратится в комплексно-автоматизированные производства, на которых человек уже не будет привязан к станку или конвейеру. Все производственные операции возьмут на себя машины и контрольно-управляющие механизмы. Человек же будет создавать эти сложные комплексы машин-автоматов, готовить для них программы работы и контролировать их исполнение, непрерывно совершенствовать производство. На таких заводах производительность труда сделает огромный скачок. А ведь именно небывалый рост производительности труда является, по словам В. И. Ленина, решающим фактором в борьбе за коммунизм.

Комплексно-автоматизированное производство ведет нас к изобилию материальных благ. Атомная и термоядерная энергетика открывают человечеству путь к изобилию энергии. Большая химия создает необычайное богатство исходных материалов и сырья для промышленности. Электронные вычислительные машины позволяют своевременно и четко обрабатывать гигантские количества разнообразной информации, перед которыми человек, лишенный этих средств, бессилен. Так, в ходе научно-технической революции поднимается на новую, качественно более высокую ступень производство, энергетика, материаловедение и управление.

Социалистическое общество открывает широкий простор для новых производительных сил, рождающихся в ходе научно-технической революции. Но полное освоение этих замечательных возможностей требует упорной творческой работы всех трудящихся. Задача исторической важности — органически соединить достижения научно-технической революции с преимуществами социалистической системы хозяйства, поставленная генеральным секретарем нашей партии товарищем Л. И. Брежневым в отчетном докладе на XXIV съезде КПСС, по-прежнему остается одной из главных задач, с которыми мы встречаемся на пути к коммунизму.

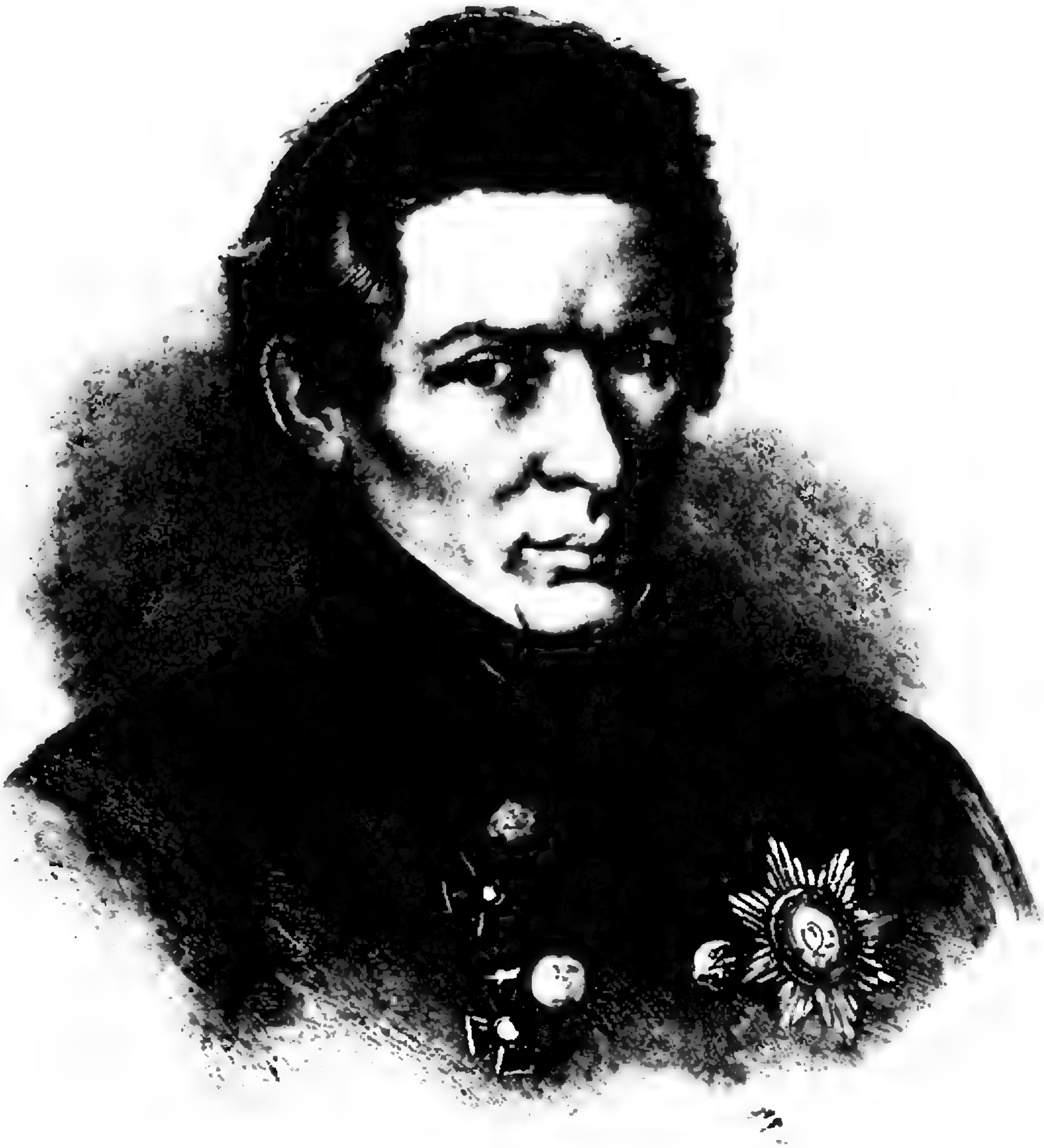
Проблема резкого повышения качества продукции и эффективности труда может быть успешно решена только с помощью современной науки. Большой вклад в ее решение должны внести физико-математические науки. Они и сейчас широко используются при определении качества продукции. В основе современных методов массового контроля качества изделий лежат теория вероятностей и математическая статистика. Достижения оптики, физики рентгеновских лучей, физики ультразвука, магнетизма, ядерной физики являются научной основой разнообразной контрольно-измерительной аппаратуры. Оптический и рентгеновский спектральный анализ, магнитная и ультразвуковая дефектоскопия, гамма-излучения радиоактивных источников давно и успешно используются в производстве для измерения толщины изделий и обнаружения скрытых дефектов.

Современная физика предоставляет промышленности принципиально новые методы воздействия на материалы. Концентрированные пучки быстрых электронов и ионов, луч лазера, мощные потоки нейтронов, создаваемые атомными реакторами, сверхсильные магнитные поля и сверхвысокие давления позволяют воздействовать на всю толщу изделий, упрочняя кристаллическую решетку и придавая изделиям необычайную прочность, износоустойчивость, надежность и долговечность. Физика открывает путь к новым технологическим процессам и способам производства, изменяющим облик промышленности, строительства, транспорта и связи.

Возьмем в качестве примера создание атомных двигателей для морского транспорта — ледоколов, подводных лодок. Советские атомные ледоколы «Ленин» и «Арктика» проводят караваны судов зимой в таких высоких арктических широтах, которые совершенно недоступны для обычных ледоколов в это время года. Советские атомные подводные лодки успешно совершают кругосветные плавания, ни разу не всплывая на поверхность океана на всем протяжении своего пути.

Благодаря выдающимся достижениям радиоэлектроники и ракетной техники открывается возможность создания новой международной системы радиорелейной и телевизионной связи, которая позволит передавать телевизионные программы любого государства во все остальные страны мира. Для ее реализации потребуется запустить в экваториальных широтах несколько синхронных (обращающихся вокруг Земли с такой же скоростью, с какой Земля обращается вокруг своей оси) искусственных спутников Земли, снабженных мощными ретрансляционными устройствами. Так возникнет качественно новая система передачи информации.

Наука раскрывает перед человечеством грандиозные перспективы развития и совершенствования всех видов труда. И наиболее полно эти возможности могут быть реализованы только в условиях социализма.



П. Александров

# Николай Иванович Лобачевский

> *Жить — значит чувствовать, наслаждаться жизнью, чувствовать непременно новое, которое бы напоминало, что мы живем... Будем же дорожить жизнью, пока она не теряет своего достоинства. Пусть примеры в истории, истинное понятие о чести, любовь к отечеству, пробужденная в юных летах, дадут заранее... благородное направление страстям.*
>
> Лобачевский

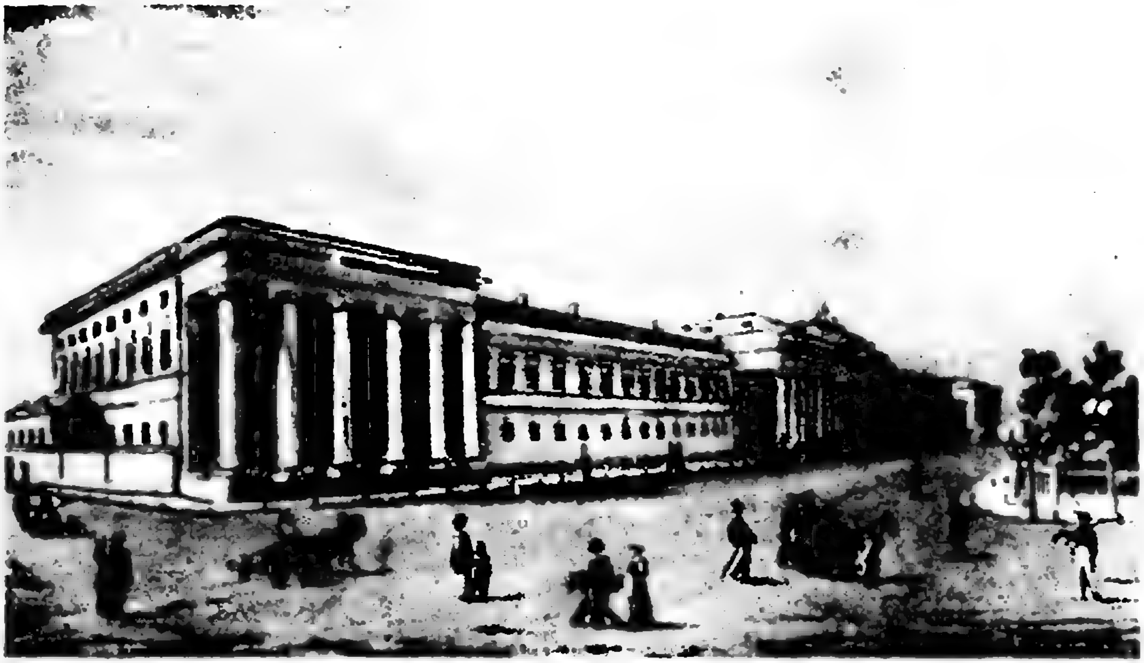
Для многих читателей, незнакомых с обликом Н. И. Лобачевского как ученого, культурного деятеля и просто человека, приведенные только что слова могут показаться неожиданными — настолько они противоречат ходячему представлению о специалисте-математике, все еще неотделимому от представлений об узком, кабинетном ученом. Представление это питается не только традицией, видящей в математике наиболее оторванную от жизни науку, а в ее представителях — сухих людей, живущих вне области действительных интересов и волнений человечества, но и биографиями некоторых даже и очень больших математиков, как бы поддерживающими эту традицию. Лобачевский всей своей личностью, всеми чертами своей деятельности идет вразрез с упомянутой традицией — в истории науки нелегко найти ученого, обладающего такой силой абстрактной мысли, весь жизненный облик которого был бы в то же время наполнен таким широким эмоциональным движением, такой патетикой в лучшем и наиболее подлинном смысле слова, как Лобачевский. И редко у кого личное научное творчество в такой мере, как у Лобачевского, переплеталось с большой общественно-культурной работой, с подлинным служением просвещению родной страны, составлявшим наряду с научным творчеством основное устремление всей жизни и всей личности Лобачевского. Гениальный ученый, принадлежащий — в такой мере, как лишь весьма немногие его сотоварищи по науке — всему человечеству, он в то же время всегда чувствовал себя борцом за русскую национальную культуру, каждодневным строителем ее, живущим ее интересами, болеющим ее нуждами.

## 1.

Николай Иванович Лобачевский родился 1 декабря 1792 года в Нижегородской губернии в бедной семье мелкого чиновника.

Николай Лобачевский поступил в гимназию в 1802 году, в июле 1806 года был, среди учеников, подвергнут испытанию; однако в университет вместе с некоторыми другими принят не был — «дабы могли себя больше усовершенствовать, и особенно в латинском»; к слушанию университетских лекций он был допущен лишь 9 января 1807 года, а в число студентов Казанского Университета был принят 14 февраля того же 1807 года.

Серьезное увлечение студента Лобачевского математикой началось не сразу — имеются сведения, что он вначале готовил себя к занятиям медициной; его выдающиеся способности проявились скоро — уже весною 1809 года он был выбран в так называемые камерные студенты — так назывались студенты-отличники, избиравшиеся своими же товарищами для наблюдений за занятиями и поведе-



Казанский университет в 1840-е годы. С литографии В. Турина.

нием всех вообще студентов. Однако уже первый, вообще очень лестный отзыв, который университетский инспектор дал Лобачевскому при утверждении его в звании камерного студента, дает почувствовать живой, экспансивный и шаловливый характер молодого студента, в сущности, еще мальчика (не забудем, что Лобачевскому весною 1809 года не было еще и 17 лет!).

В июле 1811 года по постановлению Совета Казанского университета Лобачевский, очевидно, за плохое поведение, звания кандидата не удостаивается, но уже на следующем заседании Совета возводится прямо в степень магистра (утвержден был в этой степени 3 августа 1811 года).

К этому времени Лобачевский уже математик — если в июне 1810 года (когда Лобачевскому еще нет полных 17 лет!) Литтров *) начинает заниматься с ним астрономией «для предварительного приготовления к деланию наблюдений», то в октябре 1811 года Бартельс *) уже занимается с Лобачевским у себя на дому математикой по четыре часа в неделю, проходя с ним недавно вышедшие «Арифметику» Гаусса и первый том «Небесной механики» Лапласа — великие произведения математической мысли, с самого своего появления ставшие классическими. Одновременно Бартельс пишет восторженное письмо о Лобачевском попечителю учебного округа Румовскому. Наконец, в это же время Бартельс привлекает Лобачевского к педагогической работе со студентами на правах его, так сказать, приватного ассистента: «...сверх того, г. Лобачевский будет объяснять слушателям его, г. профессора, чего они недоразумевают»...

За частной ассистентурой у Бартельса не замедлило последовать и начало официальной педагогической деятельности Лобачевского: оно относится к 1812 году, и скромно вы-

---

*) Литтров Иосиф Антонович — известный астроном, первый профессор астрономии Казанского университета, затем директор Венской астрономической обсерватории.

*) Бартельс Мартин Федорович — выдающийся математик, доктор философии Иенского университета; с 1805 года — профессор Казанского университета по кафедре чистой математики.

разилось в курсах арифметики и геометрии для готовящихся к экзамену «на чин».

26 марта 1814 года Лобачевский произведен в адъюнкты чистой математики; 1814—1815 учебный год является первым годом университетского преподавания Лобачевского; он читает в университете курс теории чисел по Гауссу и Лежандру. (Теорию чисел «по Гауссу» Лобачевский читает и в 1815—1816 учебном году.) 7-го июля 1816 года Лобачевский был утвержден в звании экстраординарного профессора Казанского университета. В 1816—1817 учебном году он читает в университете курс элементарной алгебры, геометрии и тригонометрии (плоской и сферической) — «по собственным тетрадям», т. е. не опираясь ни на какой определенный литературный источник, в 1817—1818 году читает курс дифференциального и интегрального исчисления по Монжу и Лакруа. Лекции по геометрии, читавшиеся Лобачевским в 1816—1817 учебном году, представляют для нас особый интерес, так как на этих лекциях он, по-видимому, впервые вплотную подошел к тому вопросу, решение которого составило славу всей его жизни,— к вопросу об аксиоме параллельных. Правда, это первое соприкосновение с основным предметом всей его творческой деятельности было еще вполне традиционным — Лобачевский, так же как и многочисленные его предшественники в области неевклидовой геометрии, начал с попыток доказательства знаменитой аксиомы Евклида. Теперь, благодаря дальнейшим работам Лобачевского, мы знаем, что попытки эти не могли привести к удовлетворительному результату. Но такое начало было, конечно, не только естественным, но и единственно возможным как с исторической, так и с психологической точки зрения. Во всяком случае надо считать, что именно в эту пору, когда Лобачевскому было примерно 24 года, возникли первые его геометрические идеи, приведшие его через несколько лет к открытию неевклидовой геометрии.

Юность Лобачевского кончилась. Начался период полного раскрытия богатой и многообразной личности на всех путях взаимодействия с окружавшим ее миром: началось научное творчество, исключительное по его отвлеченной математической силе, началась и быстро развивалась его изумительно многосторонняя, исполненная непреклонной энергии и страстного увлечения работа профессора — вскоре во всех отношениях первого профессора Казанского университета, началось его горячее участие во всех сторонах работы, организации и строительства университета, перешедшее затем в двадцатилетнее полное и единоличное руководство всей университетской жизнью.

## II.

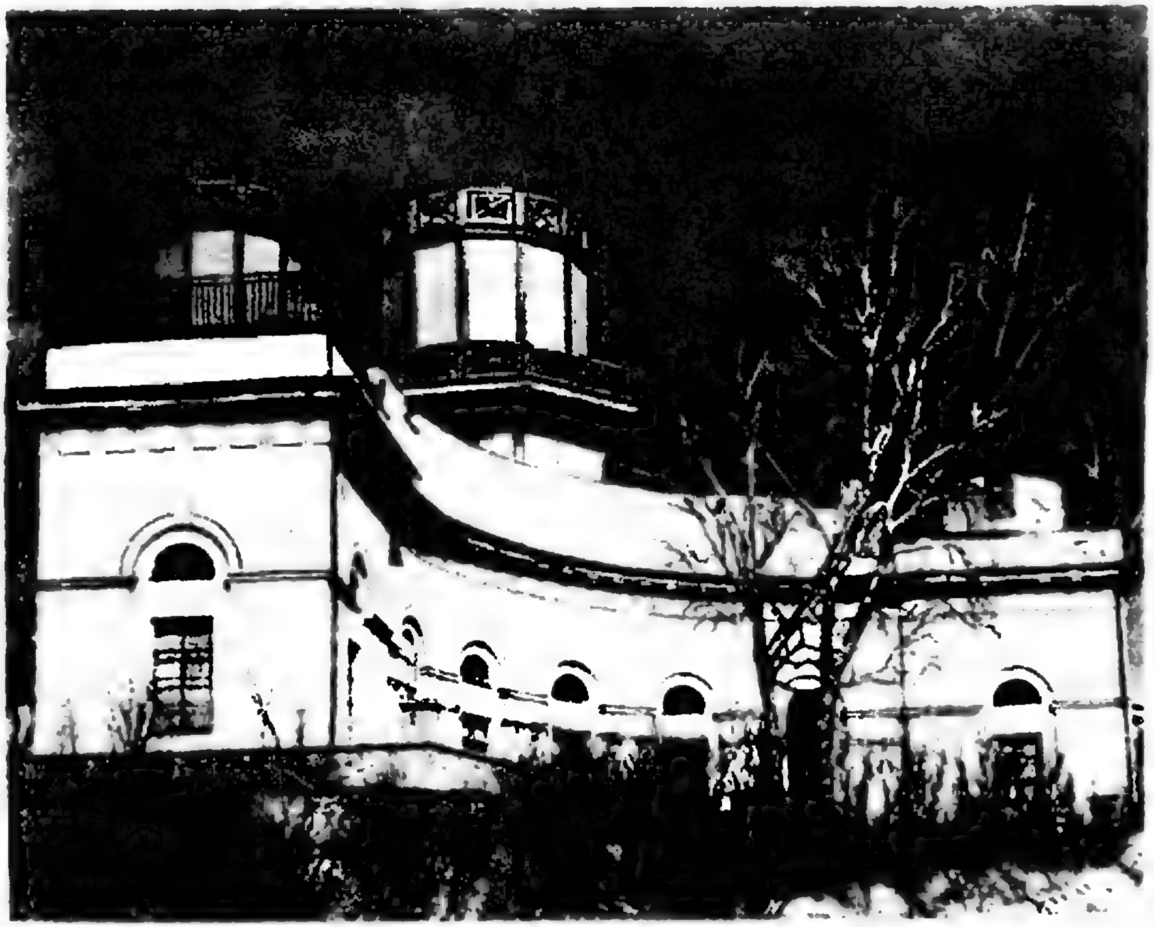
Как уже сказано, Лобачевский с 1816 года — профессор Казанского университета; через два года начинается и его административно-организационная деятельность, различные формы которой сопутствуют ему далее в течение трех десятилетий его жизни: в августе 1818 года Лобачевский назначается членом училищного комитета. В эти годы над Казанским университетом, да и над всем вообще российским просвещением собирались темные тучи; реакционные устремления последнего десятилетия царствования Александра I с каждым годом усиливались, делались все более давящими. Наступавшая эпоха в истории русской культуры известна под названием «эпохи Магницкого», по имени знаменитого своим мракобесием попечителя Казанского учебного округа. Казань делается, таким образом, центром и рассадником самой мрачной реакции, захватывающей все области культурной жизни. Тем бо́льшие трудности выпали на долю Лобачевского, который именно в эту

**Анатомический театр Казанского университета. Арх. М. П. Коринфский, 1834—1842 гг. Снимок 1910-х годов.**

пору должен был делать свои первые шаги на поприще организационной университетской деятельности. Между тем, как мы сейчас увидим, работа его на этом поприще быстрыми шагами развивалась: в декабре 1819 года Лобачевский вместе с профессором Вердерамо получает поручение по приведению в порядок университетской библиотеки, находившейся в крайне запущенном состоянии. Через месяц, в январе 1820 года, с уходом Вердерамо из университета, вся работа по приведению в порядок библиотеки целиком ложится на плечи Лобачевского. Как и ко всякой взятой на себя работе, Лобачевский отнесся к своим тяжелым и утомительным библиотечным обязанностям с самоотверженной добросовестностью, тратя на их исполнение массу времени и сил. Тем не менее обстановка была такова, что в июне 1821 года он, «обманутый надеждой привести библиотеку в новый порядок», просит об освобождении его от работы в библиотеке.

В конце 1820 года на Лобачевского ложатся еще более ответственные обязанности: 19 ноября он избирается деканом физико-математического факультета. Однако и эта его деятельность заканчивается летом 1821 года, приблизительно одновременно с библиотечной деятельностью.

Профессорская деятельность Лобачевского в эти годы получила существенно новое содержание: ему поручаются кафедры физики и астрономии. В связи с этим Лобачевский два учебных года, 1819—1820 и 1820—1821 годы, математического преподавания не ведет, отдавая себя всецело преподаванию физики и аст-



**Астрономическая обсерватория Казанского университета. Арх. М. П. Коринфский. 1834—1842 гг.**

рономии. Между прочим, Лобачевский и в дальнейшем не отказывается от преподавания физики и механики, продолжая интересоваться также астрономией и метеорологией. Преподавание математики было возобновлено Лобачевским в 1821—1822 учебном году.

25 февраля 1822 года Лобачевский избирается профессором, а весною следующего 1823 года на него вторично падают обязанности декана.

Однако, еще годом раньше — весною 1822 года,— Лобачевский оказывается перед лицом новых, сложных и утомительных обязанностей, не имеющих никакого отношения к его научной деятельности: образуется строительный комитет по постройке новых и приведению в порядок старых университетских зданий, членом которого был Лобачевский.

Как всегда, Лобачевский отнесся к своим новым обязанностям не только с добросовестностью и серьезностью, но и с огромным увлечением. Через три года, в 1825 году, Лобачевский уже — председатель строительного комитета. Специально изучив как инженерную технику строительного дела, так и собственно архитектуру, Лобачевский в значительной мере делается руководителем строительных работ и в техническом, и художественном отношении. Многие наиболее удачные в архитектурном отношении здания на территории Казанского университета являются осуществлением строительных замыслов Лобачевского. Таковы — анатомический театр, библиотека, астрономическая обсерватория.

Чуть ли не каждый год приносил Лобачевскому то или иное увеличение объема его организационной деятельности: в 1823 году Лобачевский вторично становится деканом физико-математического факультета; в 1825 году он становится университетским библиотекарем, поставив себе задачу, пусть очень большими трудами, но все же положить конец тому состоянию совершенного хаоса, в котором находилась библиотека Казанского университета. Наконец 30 июля 1827 года Лобачевский назначается ректором университета. На этом посту он пребывает целых девятнадцать лет — до 14 августа 1846 года.

Свои обязанности ректора Лобачевский понимал очень широко — от идейного руководства жизнью и работой университета в целом до личного вхождения в повседневные нужды университета. В качестве примеров энергии и активности, проявленных Лобачевским на благо университету, упомянем об его роли во время двух трагических событий, обрушившихся на население Казани в середине прошлого века. Первым из этих событий была холерная эпидемия 1830 года; эпидемия эта (бывшая частью холерной эпидемии 1829—1832 годов) свирепствовала у нас в особенности в Поволжье и унесла многие тысячи жертв. Когда холера в своем распространении достигла Казани, Лобачевский сразу же принял в отношении университета героические меры: университет был фактически изолирован от всего остального города и превращен как бы в крепость. Было организовано проживание и питание студентов на самой университетской территории, все это при самом деятельном участии ректора Лобачевского

Успех был велик — эпидемия прошла мимо университета, среди студентов и работников университета не было, или почти не было, случаев холерного заболевания. Энергичная и самоотверженная работа Лобачевского по борьбе с холерой произвела на все тогдашнее общественное мнение большое впечатление, и официальные инстанции почли необходимым ее отметить: Лобачевскому было выражено «высочайшее благоволение» «за усердие по предохранению университета и других учебных заведений от холеры».

Другим стихийным бедствием, разразившимся над Казанью в эпоху ректорства Лобачевского, был пожар 1842 года. Во время этого ужасного пожара, уничтожившего часть города, Лобачевский вновь принял чрезвычайно энергичные меры по спасению университетских построек и оборудования. В частности, благодаря его распорядительности были сохранены библиотека и астрономические инструменты.

Интересно отметить, что даже будучи ректором, Лобачевский не считал возможным отказаться от обязанностей библиотекаря в течение целых восьми лет: лишь в 1835 году, когда работа библиотеки могла считаться уже вполне налаженной, Лобачевский оставляет место библиотекаря.

Необходимо указать также на издательскую деятельность Лобачевского (с 1823 года он — член издательского комитета). Лобачевский впервые поставил издательское дело в Казанском университете на должную высоту. Он создал «Ученые записки» Казанского университета, явившиеся на смену реакционному и малосодержательному «Казанскому вестнику», организованному Магницким.

Избрание Лобачевского на пост ректора университета было лишь несколькими месяцами отделено от смены попечителя учебного округа: 6 мая 1826 года Магницкого отстранили от должности попечителя за денежные растраты. Отстранение Магницкого, да еще с такой скандальной мотивировкой, не могло не разрядить атмосферу и в округе, и в университете, и это облегчило положение Лобачевского, тем более, что новый попечитель, Мусин-Пушкин, очень уважал Лобачевского и в высшей степени считался с ним. Таким образом, становятся понятными те возможности, которые получил Лобачевский для своей организационной деятельности.

## III.

*Для них и Солнце, знать не дышит,*
*И жизни нет в морских волнах,*
*Лучи к ним в душу не сходили,*
*Весна в груди их не цвела,*
*При них леса не говорили*
*И ночь в звездах нема была.*

Тютчев

*...но вы, которых существование несправедливый случай обратил в тяжелый налог другим, вы, которых ум отупел и чувство заглохло, вы не наслаждаетесь жизнью! Для вас мертва природа, чужды красоты поэзии, лишена прелести и великолепия архитектура, незанимательна история веков. Я утешаюсь мыслью, что из нашего университета не выйдут подобные произведения растительной природы; даже не войдут сюда, если, к несчастью, родились с таким назначением. Не войдут, повторяю, потому, что здесь продолжается любовь славы, чувство чести и внутреннего достоинства.*

Лобачевский

Приведенные слова Лобачевского, как и те, которые взяты эпиграфом к этой статье,— из его знаменитой речи «О важнейших предметах воспитания», произнесенной 5 июля 1828 года, и являющейся программной для всей деятельности Лобачевского как воспитателя юношества. Несомненно, что именно воспитателем юношества в первую очередь чувствовал себя Лобачевский в многообразии своих ректорских обязанностей. Все остальные стороны его организационной деятельности составляли только рамку для двух основных устремлений его жизни: творческой научной деятельности и воспитательной. Эта последняя воспринималась им с исключительной широтой и охватывала все стороны формирующейся личности молодого человека, начиная с физического развития и кончая специальным научным образованием. Проблемы воспитания интересовали Лобачевского во всем их объеме и самым горячим образом. Еще с 1818 года он состоял членом Училищного комитета, ведавшего средними и низшими школами, и с тех пор не терял из виду наряду с вопросами университетского образования и всех сторон собственно школьного преподавания. В частности, постоянно председательствуя в комиссии по приемным экзаменам в университет, Лобачевский прекрасно знал, с какими знаниями школьник того времени приходил в высшее учебное заведение.

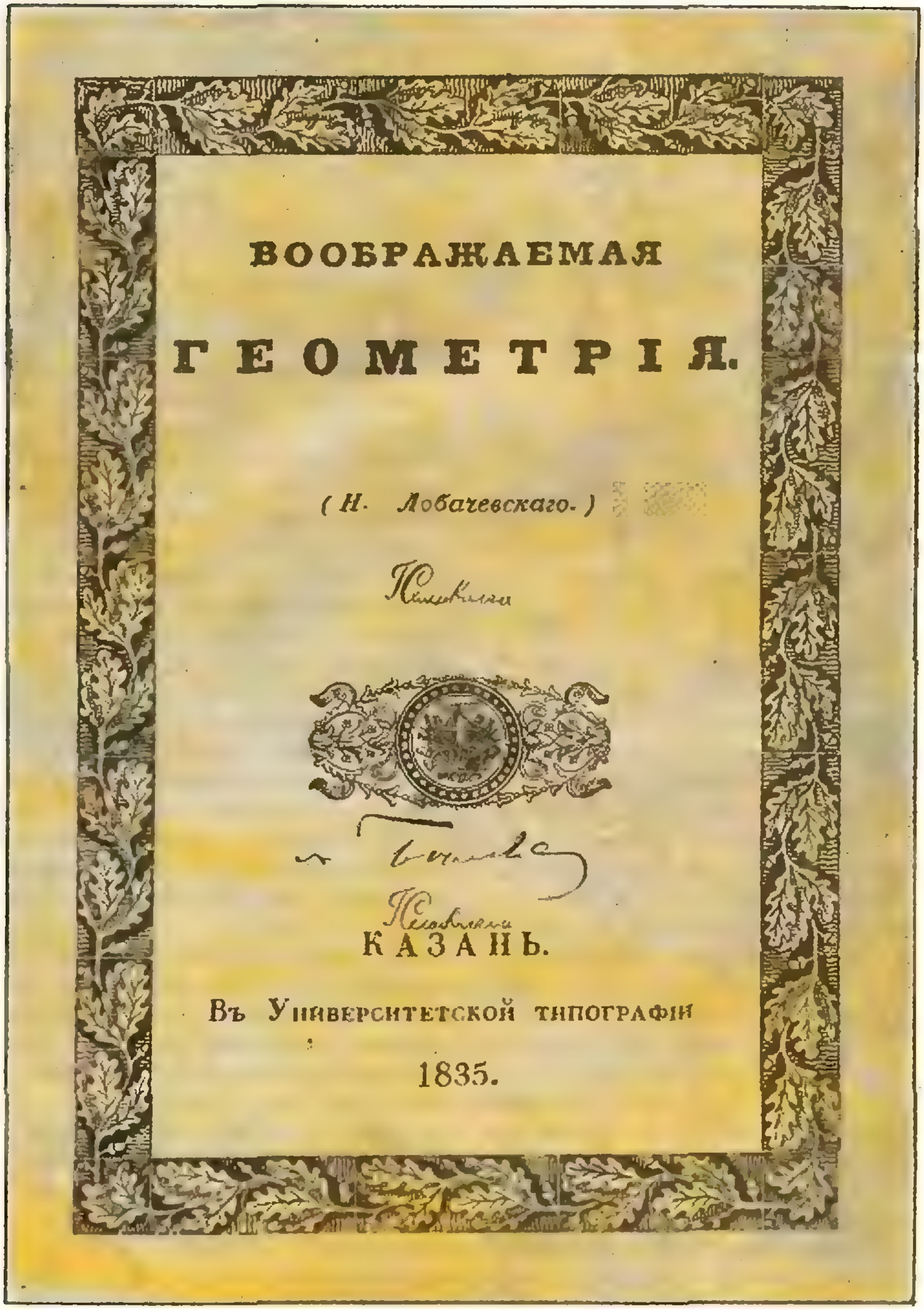
Сам Лобачевский обладал в полной мере разнообразием и широтой жизненных интересов, входящих в его идеал гармонически развитой человеческой личности. И он много требовал от молодого человека, пришедшего в университет учиться: он прежде всего требовал от него, чтобы он был гражданином, который «высокими познаниями составляет честь и славу своего отечества». Он подчеркивает, что «одно образование умственное не довершает еще воспитания».

Заметим, между прочим, что Лобачевский уделял внимание и физическому развитию юношества, в частности, содействовал введению занятий гимнастикой в средней школе.

Лобачевский может служить примером, вероятно, самого крупного человека, выдвинутого нашей почти двухсотлетней университетской жизнью. И даже если бы он не написал ни одной строчки самостоятельных научных исследований, мы должны были бы вспомнить о нем как о значительнейшем нашем университетском деятеле. Но в том-то и дело, что Лобачевский, кроме того, был еще и гениальным ученым.

## IV.

Размещение научных открытий в жизни сделавшего их ученого не у всех ученых одинаково: у одних оно более или менее равномерно и распределяется если не на всю жизнь, то во всяком случае на значительную часть ее.



ВООБРАЖАЕМАЯ

ГЕОМЕТРІЯ.

*( Н. Лобачевскаго. )*

КАЗАНЬ.

Въ Университетской типографіи

1835.

Титульный лист книги Н. И. Лобачевского «Воображаемая геометрия».

У других, наоборот, основные идеи рождаются как бы одним сгустком, в течение более или менее короткого периода, а дальнейшая научная деятельность заключается в развитии, обработке и изложении как самих этих идей, так и всего того, что на их почве удается сделать.

Классическим примером ученого, у которого все основное в его научном творчестве осуществилось как бы одним кратковременным взрывом, был Ньютон — все его великие открытия в основном вмещаются в одно пятилетие (1662—1667 годы), между 20 и 25 годами его жизни.

Лобачевский, по-видимому, принадлежит к тому же типу ученого. В 1815—1817 годах он еще пытается доказать пятый постулат (аксиому параллельных) Евклида, а в 1826 году он делает на факультетском заседании свой знаменитый доклад, содержащий уже все основы главного создания всей его жизни — неевклидовой геометрии. Конечно, еще многое Лобачевскому остается сделать: его основные работы по неевклидовой геометрии опубликованы лишь в тридцатых годах, а последняя из его работ, «Пангеометрия», писалась в последний год его жизни; тем не менее можно смело утверждать, что все эти работы являются закономерным развитием идей, которыми он полностью владел уже в 1826 году.

Как ученый Лобачевский является в полном смысле слова революционером в науке: до его открытий никому не приходило в голову сомневаться в том, что евклидова геометрия представляет собой единственную мыслимую систему геометрического познания, единственую мыслимую совокупность предложений о пространственных формах. Лобачевский предположил, что основные пространственные элементы геометрии — точки, прямые, плоскости — удовлетворяют всем основным требованиям евклидовой геометрии, кроме одного: требования, чтобы к данной прямой в данной содержащей ее плоскости можно было провести лишь одну параллельную (Евклидова аксиома параллельных или пятый постулат Евклида). Отвергнув эту аксиому, т. е. предположив, что возможно через данную точку к данной прямой провести по крайней мере две параллельные, Лобачевский из этого предположения и остальных аксиом Евклида вывел стройную цепь теорем, не содержащих никакого противоречия и составляющих особую «геометрию», сильно отличавшуюся от обычной, но столь же безупречную с чисто логической точки зрения. Таким образом, он пришел к следующим заключениям:

1. *Евклидова аксиома параллельных недоказуема, т. е. не может быть выведена из других аксиом Евклида.*

2. *Наряду с обычной евклидовой геометрией можно, не впадая ни в какое противоречие, построить совершенно другую геометрию, причем вопрос о том, какая из двух геометрий фактически осуществляется в физическом мире, есть вопрос не математики, а физики: никаким математическим рассуждением этот вопрос решен быть не может, ответ может быть получен лишь проверкой на опыте.*

Эти выводы Лобачевского современная наука полностью принимает с одной-единственной поправкой: мы считаем в настоящее время, что нельзя ставить столь просто и без дальнейших пояснений вопрос о том, какая именно абстрактно-геометрическая система осуществляется в физическом мире: основные геометрические понятия — точки, прямые и т. п., конечно, взяты из опыта, но не непосредственно, а получаются из опытных данных путем абстракции. Поэтому бессмысленно спрашивать, можно ли «на самом деле» через данную точку к данной прямой провести одну или две параллельные, так как «на самом деле», т. е. в области непосредственных опытных данных, не обработанных математической абстракцией, не существует точек и прямых в том идеализированном смысле, в каком их понимает геометрия, а существуют лишь предметы, более или менее напоминающие точки и прямые. Тем более бессмысленно спрашивать о том, пересекутся или нет две данные «физические прямые» (например, два световых луча), так как никогда и ни в каком физическом опыте эти «прямые» не даны во всей их бесконечной протяженности, а даны лишь большие или меньшие их отрезки. Поэтому единственно, что мы можем утверждать, оставаясь на почве опыта, это что евклидова геометрия является адэкватной идеализацией пространственных представлений, полученных в условиях наблюдения явлений, происходящих на земной поверхности, или, скажем, в масштабе Солнечной системы, но не выходящих из этих масштабов слишком далеко ни в ту, ни в другую сторону, т. е., с одной стороны, не ставящих вопрос о геометрии «мира как целого», а с другой,— не идущих в «микромир», скажем, в пределы атомного ядра.

Геометрия «мировых областей» средней величины есть, конечно, евклидова геометрия — в том смысле, что евклидова геометрия с вполне достаточной точностью описывает все то, что мы в этих областях действительно наблюдаем. Если же выйти за их пределы, то, как обнаруживается в современной физике, могут понадобиться системы, гораздо более сложные, чем даже и неевклидова геометрия, в том смысле, как ее понимал Лобачевский. Тем более нельзя говорить о «единой», неподвижной геометрии, раз навсегда охватывающей все разнообразие пространственных соотношений, которые могут быть отвлечены нашим познанием от окружающего нас материального мира. Бессмертной заслугой Лобачевского является то, что он впервые пробил брешь в восприятии геометрии как единственной мыслимой логической системы.

Вполне понятно, что придя к столь смелым выводам, Лобачевский не мог рассчитывать не только на признание, но даже на простое понимание своих идей — потребовалось полвека для того, чтобы эти идеи вошли в математическую науку и сделались неотъемлемой ее составной частью. Поэтому при своей жизни Лобачевский попал в тяжелое положение «непризнанного ученого». В такое же положение попал и его современник, венгерский ученый Янош Бойяи, который пришел к неевклидовой геометрии независимо от Лобачевского, хотя и опубликовавший свои результаты несколько позднее его. Но какая разница между двумя этими учеными! Если Бойяи был, если так можно выразиться, придавлен непризнанием своих идей и так и не нашел никакого выхода из создавшегося для него в силу этого непризнания действительно глубоко драматического положения, то Лобачевский нашел этот выход в разнообразной, кипучей деятельности. Сила личности Лобачевского восторжествовала не только над всеми трудностями времени, в которое он жил, восторжествовала она и над тем, что для ученого, может быть, труднее всего пережить: над идейной изоляцией, над полным и всесторонним непониманием того, что ему было дороже и нужнее всего — его научных открытий и идей. Не обнаружив никакого противоречия в созданной им геометрической системе и получив полную уверенность в том, что никакого противоречия в ней нет и не может быть, Лобачевский доказательства непротиворечивости не дал и этим открыл возможности для различных субъективных оценок произведенного им переворота в геометрии. Он умер, не дождавшись того, чтобы основное дело всей его жизни было понято и оценено.

Из иностранных математиков только Гаусс понял и оценил Лобачевского вполне. Гауссу же принадлежит и инициатива единственной научной почести, которая выпала на долю Лобачевского: по представлению Гаусса Лобачевский был избран в 1842 году членом-корреспондентом Геттингенского королевского общества наук.

Право на бессмертие в истории науки Лобачевский, несомненно, завоевал своими геометрическими работами; но не следует все же забывать, что и в других областях математики он стоял на уровне современного ему знания и опубликовал ряд работ по математическому анализу, алгебре и теории вероятностей, а также по механике, физике и астрономии.

## V.

Если двадцатые и тридцатые годы XIX века были периодом высшего расцвета как творческой, так и научно-педагогической и организационной деятельности Лобачевского, то с середины сороковых годов, и притом совершенно внезапно, для Лобачевского наступил период бездействия. Событием, принесшим с собой этот трагический перелом всей его жизни, было увольнение 14 августа 1846 года с должности ректора. Это произошло вопреки желанию как самого Лобачевского, так и Совета университета. Одновременно произошло и увольнение Лобачевского с должности профессора по кафедре чистой математики. Последнему акту сам Лобачевский, быть может, дал некоторый повод, так как, исполняя с весны 1845 года обязанности попечителя округа вместо переведенного в Петербург Мусина-Пушкина, он, препровождая в министерство постановление Совета университета об избрании его на новое пятилетие на кафедру математики, присовокупил, что «готов отказаться от должности в пользу достойного молодого человека, каков доктор математики Попов».

Увольнение Лобачевского имело все черты грубой служебной дисквалификации, граничившей с прямым оскорблением. Такова была официальная благодарность правительства императора Николая I не только величайшему русскому ученому девятнадцатого века, но и крупнейшему нашему университетскому деятелю.

Вполне понятно, что Лобачевский, для которого его деятельность на поприще университетского образования, да и вообще народного просвещения, была большой и незаменимой частью всей его жизни, воспринял свою отставку как тяжелый, непоправимый удар. Особенно тяжел был этот удар, конечно, потому, что он разразился в ту эпоху жизни Лобачевского, когда его научная работа в основном была уже закончена и, следовательно, университетская деятельность естественно становилась основным содержанием его жизни. Если к этому прибавить исключительно деятельный характер Лобачевского и иметь в виду его привычку, созданную десятилетиями, быть в организационных делах именно руководителем, а не рядовым участником (привычка, на которую Лобачевский воистину имел право!), то размеры разразившейся над ним катастрофы станут вполне ясными. Лобачевский от этой катастрофы оправиться не смог. С весны 1847 года он фактически совершенно отстранился от участия в делах как учебного округа, так и университета. Началась старость — преждевременная, но тем более гнетущая, с прогрессировавшими признаками парадоксально раннего одряхления. Его здоровье быстро шло на убыль. Он стал слепнуть, и к концу своей жизни ослеп совершенно. Его последнее научное произведение — «Пангеометрия» — писалось уже под диктовку. Ко всему этому присоединилась еще смерть сына. Разбитый жизнью, больной, слепой старик, Лобачевский умер 12 февраля 1856 года.

А. Норден

# Великое открытие Лобачевского

> *Легче остановить Солнце, легче двинуть Землю, чем уменьшить сумму углов в треугольнике, свести параллели к схождению, и раздвинуть перпендикуляры к прямой на расстояние.*
>
> В. Ф. Каган

История великих открытий всегда поучительна. Но как часто остаются неизвестными обстоятельства, при которых они сделаны, и ход мысли, приведший к ним ученого! Вместо этого создаются легенды: об Архимеде, открывшем свой закон в ванне, или о яблоке Ньютона. Известно, однако, что на вопрос о том, как он пришел к своему открытию, Ньютон отвечал: «Постоянно о нем думая»,— но он нигде не описал своих мыслей, пока не привел их к полной ясности.

В этом году отмечается стопятидесятилетие открытия Николаем Ивановичем Лобачевским неевклидовой геометрии. Датой этого открытия условно считается день 24-го февраля 1826 года, когда молодой профессор представил свой доклад физико-математическому факультету Казанского университета. Текст доклада не сохранился, но, по словам автора, его содержание было опубликовано в 1829 году в статье под заголовком «О началах геометрии».

Открытие Лобачевского позволило уже во второй половине прошлого века называть его «Коперником геометрии», но только теперь становится ясным все его значение для математики в целом и для физики. Постараемся вкратце описать идеи великого геометра и осветить ход мыслей, который привел к ним.

История вопроса, разрешенного Лобачевским, занимает два тысячелетия. В третьем веке до нашей эры, в Александрии появилась рукопись «Начал» Евклида, в которой геометрия излагалась в строго систематическом виде, мало отличающемся от того, который до самого последнего времени был принят в учебниках геометрии. В основу построения Евклида положен ряд первоначальных утверждений (*аксиом*), которые не доказываются. Все остальные утверждения (*теоремы*) выводятся из аксиом логически. Среди всех аксиом Евклида выделяется *«аксиома о параллельных»: Две прямые $a$ и $b$, пересеченные третьей, пересекаются между собой с той стороны, где сумма внутренних односторонних углов $\alpha$ и $\beta$ меньше суммы двух прямых углов* (рис. 1).

Это положение привлекло внимание продолжателей и комментаторов Евклида по разным причинам Во-первых, оно было сложнее всех остальных аксиом — например, таких, как «Через две точки проходит прямая» или «Все прямые углы равны». Во-вторых, обратное утверждение *«Сумма двух углов треугольника меньше двух прямых»*, легко доказыва-

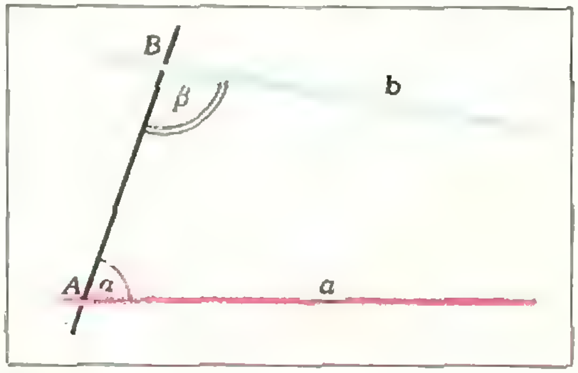


Рис. 1.

лось. И вот создалось мнение, что евклидова «аксиома о параллельных» доказуема, но это доказательство еще нужно найти.

Такое убеждение стало всеобщим, и поиски доказательства аксиомы Евклида продолжались в течение двух тысячелетий в Греции и Византии, на Востоке и в Западной Европе. Все эти поиски не привели ни к чему. «Начала» по-прежнему считались образцом научного изложения, и только теория параллельных казалась требующей улучшения.

К концу XVIII века интерес к этой теории возрос. Во Франции, по почину Даламбера, одного из авторов знаменитой «Энциклопедии», были сделаны первые попытки улучшить изложение Евклида в методическом отношении. Этому требованию отвечал учебник геометрии Лежандра, и в каждом из десяти его изданий приводились все новые и новые «доказательства» аксиомы Евклида, пока в последнем издании автор не признал все эти доказательства ошибочными.

В Германии интерес к аксиоме Евклида получил философскую окраску. Как утверждал выдающийся философ-идеалист И. Кант (1724—1804), неизменность арифметики и геометрии в течение тысячелетий свидетельствует о том, что они не основаны на опыте, а являются учениями о времени и пространстве, которые, по Канту, не существуют во внешнем мире, а лишь соответствуют особенностям человеческого познания. Поэтому аксиомы вполне обоснованы, если они «самоочевидны»; поскольку аксиома Евклида лишена этой самоочевидности, она должна быть доказана.

Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) подошел к теории параллельных иначе, чем его предшественники. Геометрию он начал преподавать сразу после окончания Казанского университета. Записки его лекций 1816—17 годов, дошедшие до нас, еще содержат остроумную попытку доказательства аксиомы Евклида*), но уже в 1823 году он пишет в своем учебнике геометрии: «Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать». Где же искать обоснование теории параллельных, если аксиому Евклида никак не удается логически вывести из других аксиом геометрии? В ответе на этот вопрос Лобачевскому помогает его последовательная материалистическая установка. «Оставьте,— пишет он,— трудиться напрасно, стараясь извлечь из одного разума всю мудрость; спрашивайте природу, она хранит все истины и на все вопросы ваши будет отвечать вам непременно и удовлетворительно» **). В другом месте он пишет, четко отвергая идеалистическую априорную концепцию Канта: «Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения. Такие понятия приобретаются чувствами, врожденным — не должно верить» ***).

Итак, аксиомы, как и все результаты познания, имеют опытное происхождение. Но если другие аксиомы геометрии опираются на простое повседневное наблюдение, то аксиома о параллельных носит более сложный характер. Для ее обоснования требуется эксперимент и теория этого эксперимента. Этой теорией, однако, не может быть геометрия Евклида, поскольку именно ее мы и хотим обосновать. Она должна быть более общей и глубокой.

---

*) Они включены в выходящую в этом году книгу: Н. И. Лобачевский, «Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма», М., «Наука».

**) Н. И. Лобачевский, Речь «О важнейших предметах воспитания».

***) Н. И. Лобачевский. «О началах геометрии».

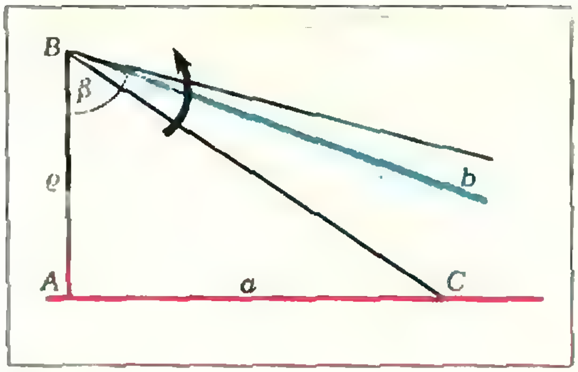


Рис. 2.

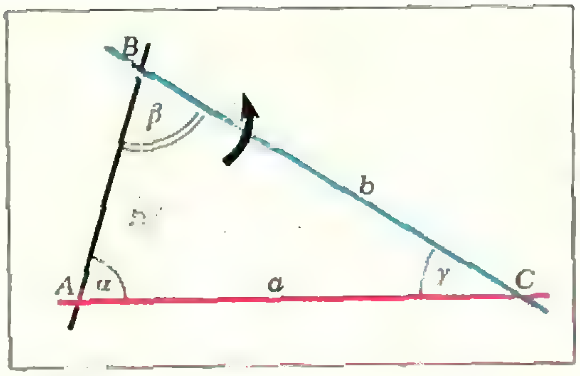


Рис. 3.

Такую теорию и создает Лобачевский. Он называет ее сначала осторожно *«воображаемой» геометрией*, а потом, в конце жизни, *«Пангеометрией»*, то есть геометрией всеобщей.

Вернемся к рисунку 1, предположив для простоты, что угол $\alpha$ прямой (рис. 2). Через точку $B$ можно провести в правой полуплоскости различные лучи, пересекающие прямую $a$. При вращении против часовой стрелки мы, наконец, встретим первый из непересекающихся лучей; он называется *параллельным* прямой $a$; угол, который этот луч образует с лучом $BA$, называется *углом параллелизма*. Прямая $b$, содержащая такой луч, тоже называется *параллельной* $a$.

Все сказанное справедливо независимо от аксиомы Евклида, которая утверждает, что угол параллелизма — прямой, так что при $\beta < d$ *) луч $b$ пересекает прямую $a$. Если мы не примем этой аксиомы, то нам придется ограничиться более общим и менее определенным утверждением, что *угол параллелизма* $\Pi$ *не превосходит* $d$. На этом предположении и основывает Лобачевский свои дальнейшие рассуждения.

Если $\Pi = d$, то аксиома Евклида соблюдается, и из нее вытекают все предложения обычной геометрии — *евклидовой*, или, как ее называет Лобачевский, — *«употребительной»*. Если же $\Pi < d$, то из этого допущения вытекают совершенно иные следствия, которые составляют содержание новой геометрии — ее Лобачевский и называет *«воображаемой»*, а мы теперь называем *геометрией Лобачевского*.

Многие теоремы «воображаемой» геометрии, к которым при этом приходит Лобачевский, явно противоречат нашим привычным представлениям, и нужна была большая сила мысли, чтобы не принять эти противоречия за логические. Лобачевский владел этой силой и развил свою геометрию с большой полнотой, завершив ее построением своеобразной тригонометрии (которую принято теперь называть *гиперболической*).

Важным разделом геометрии Лобачевского является учение о сумме углов треугольника. Рассмотрим треугольник $ABC$ (рис. 3), и будем вращать прямую $BC$ ($b$) против часовой стрелки вокруг точки $B$. Если мы не принимаем аксиомы Евклида, то должны предположить, что прямая $b$ «оторвется» от прямой $a$ и станет параллельной ей еще прежде, чем сумма углов $\alpha + \beta$ станет равной $2d$. С другой стороны, легко показать, что при вращении прямой $b$ величина угла $\gamma$ при точке $C$ стремится к нулю. Отсюда следует, что при некотором положении прямой $b$ сумма углов $\alpha + \beta + \gamma$ будет меньше $2d$. Можно показать также, что неравенство $\alpha + \beta + \gamma < 2d$ справедливо для любого треугольника, так что *в геометрии Лобачевского сумма внутренних углов треугольника меньше двух прямых.*

---

*) $d$ — принятое обозначение величины прямого угла.

Рассматривая число

$$\delta = 2d - (\alpha + \beta + \gamma),$$

которое называется *дефектом треугольника*, Лобачевский выводит следующую замечательную формулу:

$$\delta = \frac{S}{R^2}, \qquad (1)$$

где $S$ — площадь треугольника, а $R$ — число, одинаковое для всех треугольников. Величину $R$, имеющую размерность длины, называют *радиусом кривизны пространства Лобачевского*, а отрицательную величину $K = -\frac{1}{R^2}$ — *кривизной* этого пространства. В пространстве Евклида $\delta = 0$, и его кривизна считается равной нулю.

Радиус кривизны участвует во всех формулах гиперболической тригонометрии; так, например, имеет место формула

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi}{2} = e^{-\frac{\rho}{R^2}}, \qquad (2)$$

в которой $\Pi$ — угол параллелизма (рис. 2), $\rho$ — «стрелка», — длина перпендикуляра $AB$.

Стоит теперь предположить, что $R = \infty$, т. е. что кривизна равна нулю, и мы получим

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi}{2} = 1,$$

а это значит, что угол параллелизма — прямой,— утверждение, равносильное аксиоме Евклида. Вот почему Лобачевский считал, что евклидова геометрия является частным (а лучше сказать, «предельным») случаем его «воображаемой» геометрии.

Формулы (1) и (2) показывают, что различия между евклидовой и неевклидовой геометрией тем меньше, чем больше радиус кривизны пространства. С другой стороны, эти различия будут прежде всего сказываться на фигурах больших размеров: так, для треугольника эти различия увеличиваются вместе с его площадью, а для параллельных прямых — вместе с ростом «стрелки» (Отсюда следует, что в геометрии Лобачевского не существует подобных фигур. Два треугольника, например, с соответственно конгруэнтными углами конгруэнтны между собой.)

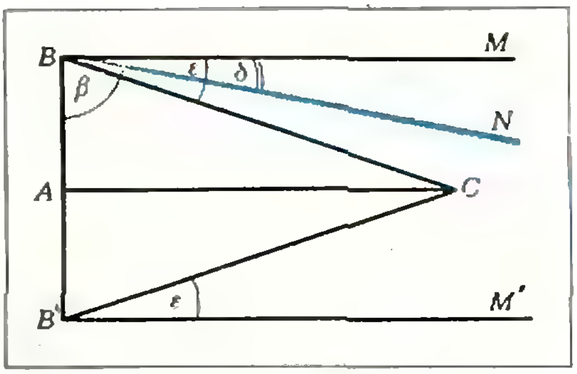


Рис. 4.

Все это было ясно Лобачевскому, когда он поставил вопрос об опытной проверке теории параллельных. Вот что он писал по этому поводу: «Напрасные старания со времен Евклида, в продолжении двух тысяч лет, заставили меня подозревать, что в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать, и которую проверить могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения» *).

Почему же именно астрономические наблюдения? Да потому, что астрономия наблюдает наибольшие из доступных нам фигур.

Рассмотрим же одну из них. Пусть $B$ — точка, в которой находится Земля, а $B'$ — другая точка, в которую она приходит через полгода, так что $|BB'| = 2|AB|$ — диаметр земной орбиты, $A$ — центр орбиты, а $|AB|$ — радиус (рис. 4). Предположим, что в точке $C$ находится неподвижная звезда, и допустим для простоты, что прямая $CA$ перпендикулярна к плоскости земной орбиты (эклиптики). Если $(BM)$ тоже перпендикулярна этой плоскости, то угол $\varepsilon = \widehat{CBM}$ называется *годичным па-*

---

*) Н. И. Лобачевский, «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных».

*раллаксом* звезды $C$ — иными словами, параллаксом называют половину угла $2\varepsilon$, на который отклоняется за полгода луч зрения, идущий от земного наблюдателя к неподвижной звезде. (В учебниках астрономии параллаксом называется угол, под которым был бы виден со звезды радиус земной орбиты; но доступен наблюдению только угол $\varepsilon$, и такое определение предполагает заранее, что пространство евклидово.)

Построим луч $BN$, параллельный лучу $AC$, и назовем *дефектом параллелизма* угол $\delta = d - \Pi$, дополняющий угол параллелизма $\Pi$ до прямого. Дефект параллелизма обращается в нуль, если пространство евклидово, и во всяком случае удовлетворяет неравенству

$$\delta < \varepsilon. \qquad (3)$$

Таким образом, *дефект параллелизма, соответствующий стрелке $\rho$, равной радиусу земной орбиты, меньше любого годичного параллакса.*

Астрономы используют параллаксы при определении расстояний до неподвижных звезд. Параллаксы измерены в большом количестве и с хорошей точностью; наименьшие из них имеют порядок 0,05″ (одна двадцатая угловой секунды). Учитывая это и неравенство (3), можно получить из формулы (2), что с помощью прямых астрономических наблюдений нельзя обнаружить различие между евклидовой и неевклидовой геометриями, если радиус кривизны последней больше шестидесяти световых лет *). С другой стороны, оказывается, что если геометрия космического пространства и отличается от евклидовой, то это отличие незначительно.

Основываясь на подобных рассуждениях, говорит Лобачевский, «наша теория параллельных оправдывает точность всех вычислений обыкновенной геометрии и дозволяет принятые начала этой последней рассматривать как бы строго доказанными» *).

Это высказывание, так же как и другие из первых сочинений Лобачевского, показывает, что первоначально он смотрел на свою «воображаемую» геометрию только как на средство для обоснования евклидовой теории параллельных. Однако в середине 30-х годов, к моменту издания его «Новых начал геометрии с полной теорией параллельных», у него появляется иная точка зрения. «В природе, — говорит Лобачевский, — мы познаем собственно только движение, без которого чувственные впечатления невозможны. Итак, все прочие понятия, например, геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения, а потому пространство само собой, отдельно, для нас не существует. После чего в нашем уме уже не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей, особой геометрии» **).

Идеи Лобачевского не встретили понимания среди его современников. Только великий немецкий математик **Гаусс** («король математиков») оценил их по достоинству, но он писал об этом своим друзьям в частных письмах, которые были опубликованы после смерти Лобачевского. В России сочинения Лобачевского встречали только грубые отрицательные отзывы и даже оскорбительные насмешки. Лишь один математик, младший товарищ Лобачевского по кафедре, казанский профессор П. И. **Котельников** решился в публичной речи произнести пророческие слова: «Труд Лобачевского рано или поздно найдет своих ценителей».

Однако Лобачевский не сдавался, публикуя работы, содержащие различные подходы к новой геометрии и ее приложения к вычислению интегралов. В последней из работ — «Пангеометрии», — которую он, уже слепой, диктовал незадолго до смерти, обсуждается вопрос об осуществимости «воображаемой» геометрии в космическом пространстве.

---

*) Заметим, что во времена Лобачевского астрономических наблюдений было уже достаточно, чтобы убедиться, что «Радиус Вселенной» больше 60 световых лет.

*) Н. И. Лобачевский, «О началах геометрии».

**) Н. И. Лобачевский, «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных».

Идеи великого русского геометра получили всемирное признание только после его смерти. Чтобы понять, как это произошло, нужно вернуться назад. В 1828 году вышла книга Гаусса «Исследования о кривых поверхностях», в которой строится «геометрия на поверхности» или ее *внутренняя геометрия*. Гаусс дал формулы, позволяющие вычислять длины дуг кривых линий на поверхности, определять углы между кривыми или площади ограниченных ими областей, находить *геодезические* (т. е. кратчайшие) линии на поверхности и определять так называемую *гауссову кривизну* — величину, характеризующую отклонение внутренней геометрии поверхности от геометрии плоскости.

Ученик Гаусса, Ф. Миндинг (1806—1885), работавший в Дерпте (ныне город Тарту), изучая так называемую *псевдосферу*, т. е. поверхность постоянной гауссовой кривизны, получил еще в 30-х годах прошлого века некоторые формулы тригонометрии геодезических треугольников на этой поверхности. В 1868 году итальянский геометр Э. Бельтрами обратил внимание на то, что формулы Миндинга совпадают с формулами гиперболической геометрии Лобачевского. Отсюда следовало, что внутренняя геометрия псевдосферы является геометрией Лобачевского.

Таким образом, оказалось, что в евклидовом пространстве можно построить *модель* *) плоскости Лобачевского; этот-то факт и рассеял сомнения в непротиворечивости неевклидовой геометрии и быстро привел ее к всеобщему признанию.

Интерес, вызванный знакомством с идеями Лобачевского, имел важные последствия. С 70-х годов прошлого века начали интенсивно разрабатываться проблемы оснований геометрии. К началу нашего столетия были построены вполне строгие изложения этой науки (Д. Гильберт, В. Ф. Каган), и началась работа по обоснованию арифметики, теории множеств, теории вероятностей и логики, которая продолжается и в настоящее время. В последние десятилетия эта работа стала весьма актуальной, получив приложения к теории математических машин.

Настоящий краткий очерк не дает, конечно, полного представления о геометрии Лобачевского. Желающим более обстоятельно ознакомиться с «воображаемой» геометрией и ее применениями можно рекомендовать в первую очередь книги:

1. П. А. Широков. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, Гостехиздат, М., 1955. Содержит наиболее доступное изложение геометрии Лобачевского.

2. В. Ф. Каган, «Лобачевский и его геометрия». Общедоступные очерки. Гостехиздат, М., 1955.

3. А. П. Норден, Элементарное введение в геометрию Лобачевского. Гостехиздат, М., 1953.

4. А. П. Норден, Вопросы обоснования геометрии в работах Лобачевского. Историко-математические исследования. Выпуск XI, Физматгиз, М., 1958.

---

*) О моделях и их применении для доказательства непротиворечивости аксиом мы расскажем в следующем номере журнала.

*Я. Смородинский*

# Лобачевский и физика

Математика всегда служила физикам орудием исследования. Кеплер не смог бы сформулировать свои законы, если бы не знал теорию конических сечений. Ньютону для того, чтобы решать задачи механики, пришлось создавать новый раздел математики: дифференциальное и интегральное исчисление. Но и на фоне этих великих открытий открытие неевклидовой геометрии выделяется по тому влиянию, какое оно оказало на наши представления о физической картине мира.

В те годы, когда работал Николай Лобачевский, никто не сомневался в правильности механики Ньютона, а вопросы о природе пространства и времени хотя и интересовали ученых, но казались совсем абстрактными, не имеющими практического значения.

Лобачевского сравнивают с Коперником. Лишив Землю положения центра мира, Коперник открыл Вселенную для исследования. Лобачевский, показав, что евклидова геометрия не единственна, заставил естествоиспытателей задуматься о том, что пространство, в котором развивается Вселенная, также должно быть предметом изучения. Геометрия после Лобачевского лишилась своей абсолютной непогрешимости и обратилась к опыту за подтверждением или отрицанием своих законов.

Лобачевский понимал, что возможность изменения законов геометрии может повлечь за собой и возможность изменения законов механики. «...некоторые силы в природе,— писал он,— следуют одной, другие своей особой геометрии... силы всё производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы».

Физики очень долго не обращали внимания на эти предостережения. Только после открытия специальной (СТО) и общей теории относительности (ОТО) стало ясно, какой глубокий смысл содержится в этих словах Лобачевского. Физики должны считать Лобачевского одним из великих творцов своей науки. История неевклидовой геометрии до сих пор служит ярким примером того, как самые абстрактные теории могут привести к полному пересмотру взглядов на наш реальный мир.

Приведем несколько примеров, которые покажут, как идеи геометрии Лобачевского нашли свое отражение в теории относительности. Начнем со специальной теории.

## СТО: сложение скоростей

Решая задачи по кинематике, мы пользуемся правилами сложения векторов, предписываемыми геометрией Евклида. При этом и векторы перемещений, и векторы скоростей мы складываем одним и тем же способом.

С открытием специальной теории относительности стало ясно, что сложение скоростей по правилам геометрии Евклида дает практически правильный ответ лишь при условии, что скорости, встречающиеся в задаче, малы по сравнению со скоростью света $c$. Когда же скорости сравнимы со скоростью света, для получения верного результата необходимо пользоваться иными правилами.

Рассмотрим такой пример. Предположим, что мы наблюдаем с маяка за кораблем, который удаляется с по-

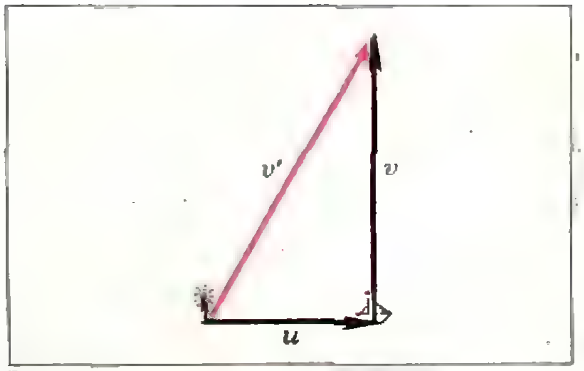


Рис. 1.

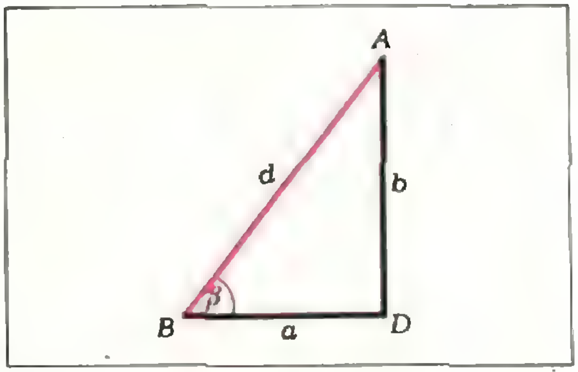


Рис. 2.

стоянной скоростью $\mathbf{u}$. С корабля вертикально вверх выпускают ракеты с разными скоростями $\mathbf{v}_i$ относительно корабля ($i=1, 2, 3, \ldots$). Как найти скорости ракет по отношению к маяку (то есть скорости $\mathbf{v}'_i$ ракет в системе отсчета, связанной с маяком)?

С точки зрения механики Ньютона

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{u} + \mathbf{v}_i \qquad (*)$$

— суммарный вектор $\mathbf{v}'_i$ может быть найден по правилу треугольника (рис. 1).

*Решение этой задачи в специальной* теории относительности содержит математические трудности, преодолеть которые большинство наших читателей не сможет. Поэтому мы приведем только ответ:

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{u} + \mathbf{v}_i \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}^{\,*)} \qquad (**)$$

В тех случаях, когда скорости $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ много меньше скорости света $c$, формула (**) практически переходит в формулу (*).

Но когда $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}_i$ становятся сравнимы со скоростью света, точное значение скорости $\mathbf{v}'_i$ может быть найдено только по формуле (**)— именно кинематика СТО описывает движение тел с большими скоростями.

Очевидно, что при сложении векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}_i$ по евклидову правилу треугольника ответ (**) не может быть получен.

Обратим еще раз внимание на тот факт, что мы пользуемся геометрическими терминами и правилами, но применяем их не к обычному пространству, а к набору скоростей, о котором говорят, что он образует пространство скоростей. Пользуясь этой терминологией, из всего сказанного можно сделать вывод: пока мы остаемся в рамках классической механики, пространство скоростей совпадает с евклидовым пространством; в механике СТО для описания пространства скоростей геометрия Евклида неприемлема.

Какой геометрический образ можно сопоставить пространству скоростей в релятивистской механике? Оказывается, этим геометрическим образом может служить пространство Лобачевского. Но переход от физических величин к их геометрическим образам в релятивистском *случае не* так прост, как в классическом. Изображая на евклидовой плоскости (на листе бумаги) скорости, мы рисуем отрезки, длины которых (в определенном линейном масштабе) равны значениям скоростей. Для того чтобы *представить себе, как перейти* от скоростей к отрезкам на плоскости Лобачевского, вернемся вновь к задаче о маяке, корабле и ракете.

Итак, для скорости $\mathbf{v}'$ ракеты в системе отсчета, связанной с маяком, специальная теория относительности дает ответ (**). Оказывается, на плоскости Лобачевского скоростям $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ соответствует прямоугольный треугольник, длины сторон которого равны значениям некоторой нелинейной функции $f$ от величин скоростей $u$,

---

*) Напомним, что скорости $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}_i$ взаимноперпендикулярны. Решение (**) записано именно для такого случая.

$v$, $v'$. Будем считать, что треугольник $BAD$ (рис. 2) нарисован на плоскости Лобачевского,

$$|a| = f(|\mathbf{u}|), \quad |b| = f(|\mathbf{v}|), \quad |d| = f(|\mathbf{v}'|) \text{ *)}$$

Нахождение скорости $\mathbf{v}'$ сводится к нахождению по правилам геометрии Лобачевского стороны $d$ треугольника $BAD$ по двум известным сторонам $a$ и $b$ и прямому углу между ними *). Угол $\beta$ треугольника $BAD$ — это угол, который составляет скорость $\mathbf{v}'$ с горизонтом. Правило, по которому строится сторона $d$, — это привычное для нас правило треугольника. Однако формулы, позволяющие определить длину стороны $d$, в геометрии Лобачевского иные, чем в геометрии Евклида (например, в рассматриваемой нами задаче теорема Пифагора неприменима). Но в том случае, когда скорости $u$ и $v$ много меньше $c$, эти формулы практически совпадают с формулами геометрии Евклида. Можно сказать, что СТО находится в таком же отношении к классической механике Ньютона, как геометрия Лобачевского к геометрии Евклида.

В рассмотренной нами задаче можно дать «физическое» представление геометрического понятия параллельности. Чем больше скорость ракеты $\mathbf{v}_i$, тем больше угол $\alpha$, который составляет скорость $\mathbf{v}'_i$ с горизонтом. В классической механике скорость $\mathbf{v}_i$ может быть как угодно велика.

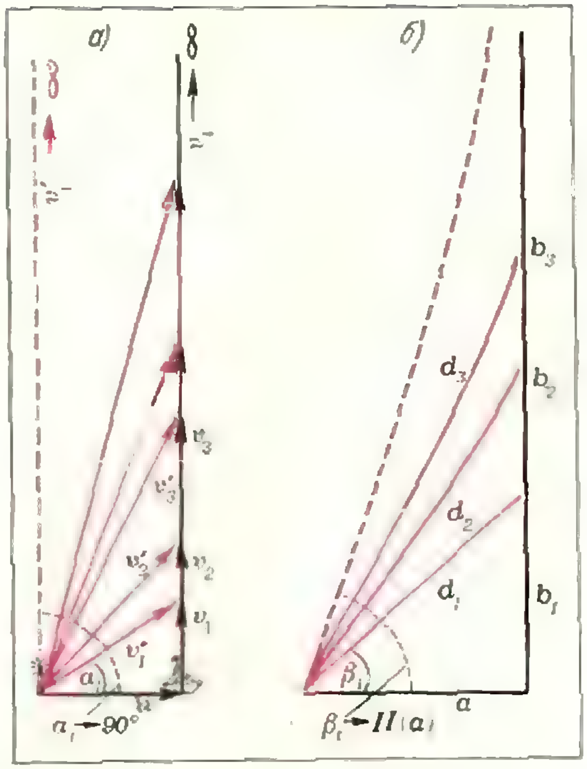


**Рис. 3.**

При $\mathbf{v}_i \to \infty$ $\alpha \to 90°$. То есть в этом предельном случае направления $\mathbf{v}_i$ и $\mathbf{v}'_i$ становятся практически параллельными. Таким образом, параллельные прямые евклидовой геометрии с точки зрения физики — это векторы скоростей бесконечно быстрой ракеты, рассматриваемой из разных систем отсчета, движущихся друг относительно друга равномерно с конечными скоростями (рис. 3, *а*).

Согласно СТО скорость ракеты $\mathbf{v}_i$ не может быть больше скорости света $c$. В том случае, когда $|\mathbf{v}_i| = c$ — с корабля выпускают квант света (фотон),— величина скорости $\mathbf{v}'_i$ также равна $c$. Действительно (см. (**)),

$$|v'_i|^2 = u^2 + v_i^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right).$$

Подставив в это выражение $v_i = c$, получим $v'_i = c$.

На плоскости Лобачевского в этом случае стороны $b$ и $d$ (соответствующие скоростям $v_i$ и $v'_i$) становятся бесконечно длинными (см. рис. 3, *б*). Но угол $\beta$, который составляет сторона $d$ со стороной $a$ (соответствующей скорости $u$), при этом остается

---

*) Для тех, кто знаком с натуральными логарифмами, приведем вид функции $f$:

$$f(|\mathbf{v}'|) = \frac{1}{2} \ln \frac{c + v'}{c - v'} = d.$$

Чтобы от стороны $d$ перейти к значению скорости $\mathbf{v}'$, надо совершить обратный переход:

$$|\mathbf{v}'| = g(d) = c\,\frac{e^d - e^{-d}}{e^d + e^{-d}}.$$

**) В общем случае, когда скорости $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ составляют друг с другом не прямой угол, на плоскости Лобачевского в соответствующем треугольнике угол между сторонами $a$ и $b$ равен углу между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

меньше 90°. В геометрии Лобачевского этот угол называется углом параллельности и обозначается $\Pi(a)$. Но $\beta$ — это тот угол, который в системе отсчета, связанной с маяком, составляет скорость $v'$ с горизонтом. Величина этого угла определяется условием $\cos\beta = \frac{u}{v'} = \frac{u}{c}$. Это предельный, максимальный угол, под которым наблюдатель в этой системе может «увидеть» скорость фотона. Поэтому естественно возникает «физический» образ параллельных прямых геометрии Лобачевского: это скорости фотона, наблюдаемые из разных равномерно движущихся систем отсчета.

Ко всему, что мы рассказали, можно добавить, что специальная теория относительности развивалась независимо от геометрии Лобачевского. Все ее формулы были получены Эйнштейном методами механики. Только в 1909 году немецкий физик Зоммерфельд обнаружил тождественность всего математического аппарата СТО с геометрией Лобачевского.

Развитие современной физики, таких ее областей как ядерная физика, физика элементарных частиц, невозможно без теории относительности. Если читать учебник по неевклидовой геометрии, то каждой теореме, каждой задаче можно сопоставить задачу из физики элементарных частиц. И при расчете путей частиц в ускорителях, процессов столкновения элементарных частиц формулы геометрии Лобачевского оказываются очень полезными — вычисления становятся короче и проще.

## ОТО: кривизна пространства

Вероятно, каждый может себе представить, как выглядит поверхность шара с точки зрения двумерного жука, который по ней ползает. Очевидно, что его восприятие не совпадает с нашим. Мы можем посмотреть на шар «со стороны», из трехмерного пространства, и увидеть, что поверхность его — сфера. А для двумерного жука, который этого сделать не может,— для него нет третьего измерения,— поверхность сферы представляется плоскостью. И если размеры жука много меньше радиуса сферы, то он заключит, что эта плоскость — евклидова. Но если жук «грамотный», то, проведя некоторые измерения, он может убедиться, что геометрия на его плоскости отличается от евклидовой. Например, измерив сумму углов очень большого треугольника, он обнаружит, что она отличается от 180°.

Живя в трехмерном пространстве, мы в какой-то степени находимся в положении жука. Геометрию этого пространства мы моделируем на основе повседневного опыта. И до тех пор, пока мы имеем дело с обычными для нас земными расстояниями, опыт говорит, что окружающее нас пространство — евклидово. А что можно сказать о геометрии пространства в масштабах нашей галактики, всей Вселенной? Этот вопрос, по существу, был впервые поставлен Лобачевским. Справедливы ли законы геометрии Евклида при громадных (с точки зрения Земли) расстояниях? Действительно ли, например, сумма углов очень большого треугольника равна 180°? Основываясь на данных, полученных из астрономических наблюдений, Лобачевский пытался найти ответ на этот вопрос. Вывод его был таким: «... в треугольнике, которого бока равняются почти с расстоянием Земли до Солнца, сумма углов не может разниться с двумя прямыми более 0,0003 секунды градуса».

Хотя Лобачевский и не обнаружил отклонений от законов Евклида, но сама мысль о том, что мир, в котором мы живем, может не быть евклидовым, была поистине революционной.

За 150 лет, прошедших со времени создания Лобачевским его геометрии, наука сделала огромный шаг на пути познания реального мира. И самым важным этапом на этом пути явилось создание Эйнштейном общей теории относительности. Она установила связь между силой всемирного тя-

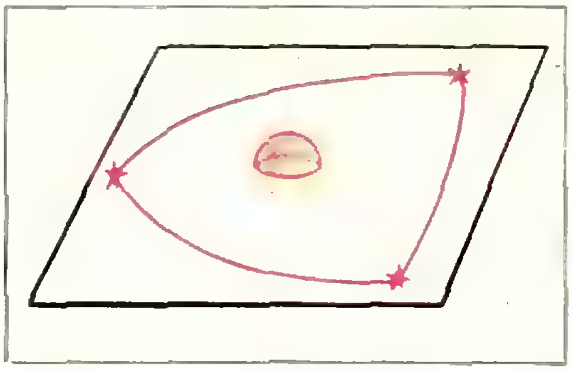


**Рис. 4.** В плоскости, проходящей через Солнце, сумма углов большого треугольника, вершины которого — звезды, больше 180°.

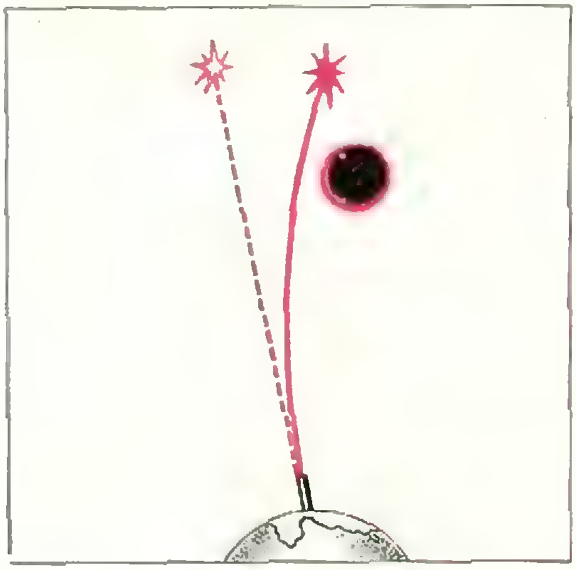


**Рис. 5.** Этот опыт проводился во время полного солнечного затмения. По расчетам звезда в это время находилась за краем Солнца. Однако вследствие искривления световых лучей, идущих от звезды, в поле тяготения Солнца звезда наблюдалась на некотором расстоянии от солнечного диска (во время затмения солнечный свет «загораживается» Луной, и звезды, расположенные вблизи Солнца, становятся видимыми).
Согласно ОТО угловое смещение звезд непосредственно у края Солнца должно составлять ≈1″,75 (1″ — это угол, под которым спичечная коробка видна с расстояния ~10 *км*). Опыты, проводимые во время солнечных затмений, дают несколько большие значения. Однако, эти результаты, несомненно, являются подтверждением кривизны пространства.

готения и свойствами пространства. Основной вывод, который следует из ОТО, заключается в том, что пространство, в котором мы живем, искривлено. Вблизи тяжелых тел, например, вблизи Солнца, механика становится не ньютоновой, а геометрия пространства — неевклидовой (см. рис. 4).

Свет, проходя мимо Солнца, движется по кривой, похожей на параболу. Поскольку прямая — это, по определению, луч света, распространяющегося в однородной среде, то в пространстве вблизи Солнца прямая — это искривленный световой луч. Степень искривленности пространства характеризуется кривизной луча. Радиус кривизны*) светового луча в точке, находящейся на расстоянии $r$ от Солнца, называют радиусом кривизны пространства в этой точке. ОТО дает для него следующую формулу:

$$R=(r^3/2R_{\text{гр}})^{1/2}.$$

Здесь $r$ — расстояние до Солнца, а $R_{\text{гр}}$ — так называемый гравитационный радиус Солнца, величина которого характеризует степень влияния Солнца на геометрию окружающего его пространства:

$$R_{\text{гр}}=\frac{2\gamma M}{c^2}\approx 3\ \textit{км},$$

где $M \sim 10^{33}$ *г* — масса Солнца, $c=3{,}00\cdot 10^8$ *м/сек* — скорость света, $\gamma=6{,}67\cdot 10^{-11}$ *н·м²/кг²* — гравитационная постоянная.

В 1919 году во время солнечного затмения были произведены астрономические наблюдения, результаты которых подтвердили выводы ОТО (рис. 5).

---

*) Радиусом кривизны кривой в точке *А* называется радиус окружности, дуга которой в окрестности точки *А* точнее дуг всех других окружностей «совпадает» с дугой кривой.

Теория относительности является незаменимым аппаратом в изучении свойств Вселенной. В настоящее время существует много моделей Вселенной. О справедливости их, о том, какая из них в действительности описывает свойства Вселенной, можно будет судить по результатам экспериментов. Но эти эксперименты чрезвычайно сложны, многие из них пока лишь «мысленные», для их осуществления современная наука не обладает возможностями. Но среди этих моделей есть такие, согласно которым геометрия пространства — это геометрия Лобачевского.

Геометрические свойства Вселенной изменяются со временем; астрономы видят, как разбегаются галактики и квазары; совсем недавно в созвездии Лебедь была открыта первая «черная дыра»— точка, где плотности обращаются в бесконечность, а длины в нуль. И наука может объяснить эти явления только потому, что 150 лет назад на берегу Волги молодой казанский математик Николай Лобачевский спросил: а так ли очевидно, что через точку вне прямой можно провести только одну прямую, не пересекающую данную? Кто мог подумать тогда, что это был один из самых каверзных вопросов, который когда-либо задал человек природе.

---

**Физики шутят**

# Чему равен один год?

Недавно замечательный американский физик Р. Фейнман высказал важную космологическую гипотезу:

$$1\ \textit{год} = \pi \cdot 10^7\ \textit{сек}. \qquad (1)$$

где $\pi$ — число Архимеда.

Докажем справедливость этой интересной гипотезы.

Известно, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите, радиус которой равен $R \doteq 150$ *млн. км*. Орбитальная скорость Земли равна $v = 30$ *км/сек*.

Если бы с такой постоянной скоростью Земля двигалась не по самой орбите, а по ее диаметру, то она прошла бы от одного «края» орбиты до другого за время

$$t = \frac{2R}{v} = \frac{2 \cdot 150 \cdot 10^6}{30} = 10^7\ \textit{сек}. \qquad (2)$$

По определению один год есть время обращения Земли по ее орбите вокруг Солнца. Понятно, что это время относится к найденному выше времени $t$, как длина окружности орбиты к ее диаметру. Последнее отношение для всякой окружности, согласно Архимеду, есть $\pi$. Отсюда следует, что $1\ \textit{год} = \pi \cdot t$. Подставляя сюда значение $t$ из (2), приходим к формуле (1).

Итак, мы доказали справедливость гипотезы Фейнмана. Более того, мы выяснили физический смысл константы $10^7$, входящей в формулу (1).

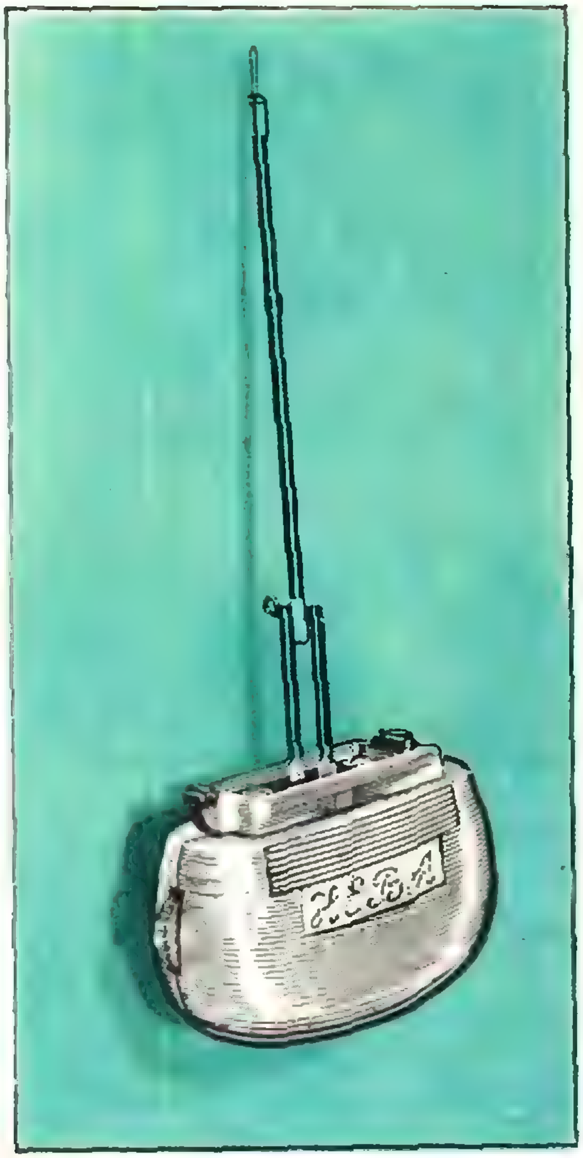
Для проверки справедливости гипотезы Фейнмана был поставлен следующий эксперимент: с помощью настенных часов «Маяк» мы определили продолжительность 1975 года. Она оказалась равной $3{,}15 \cdot 10^7$ *сек*. Формула (1) дает $3{,}14 \times 10^7$ *сек*. Мы склонны думать, что полученное расхождение теоретических и наблюдаемых данных есть результат одного из двух следующих эффектов: а) орбита Земли отличается от круговой, б) пространство — время искривлено.

Замечательно, что наше решение позволяет обобщить гипотезу Фейнмана и для других планет.

*1976 год, январь,*
*Бюраканская обсерватория*

*А. Натанзон, М. Плоткин*

# Маятник с вибрирующим подвесом



Как известно, неподвижное тело находится в состоянии устойчивого равновесия, когда его потенциальная энергия минимальна. В частности, для математического (или физического) маятника потенциальная энергия минимальна, когда его центр тяжести находится под точкой подвеса. Конечно, у такого маятника есть положение равновесия и в перевернутом состоянии, когда центр тяжести расположен выше точки подвеса, но это положение неустойчиво. Договоримся, что мы будем рассматривать такой математический маятник, у которого нерастяжимая невесомая нить заменена жестким невесомым стержнем. Однако не всегда положение центра тяжести тела над точкой опоры исключает устойчивое равновесие. Например, детская игрушка юла не падает, пока вращается достаточно быстро. И не только вращение может повысить устойчивость тела.

Оказывается, при быстрых вертикальных колебаниях подвеса маятника (т. е. точки закрепления) перевернутое положение маятника становится устойчивым. В этих условиях он способен стоять в вертикальном положении или плавно качаться около него (рис. 1). Количественное исследование этого явления связано со значительными математическими трудностями. В 1951 году академику П. Л. Капице удалось приближенно описать поведение маятника с вибрирующим подвесом для случая, когда длина маятника $L$ много больше амплитуды вибраций подвеса $x_0$ и частота вибраций намного превосходит собственную частоту колебаний маятника. Мы же ограничимся лишь качественными рассуждениями.

Если при наблюдении не обращать внимания на мелкое дрожание маятника, связанное с вибрацией подвеса, то его плавное движение будет таким, как если бы на маятник действовал момент сил, стремящийся приблизить

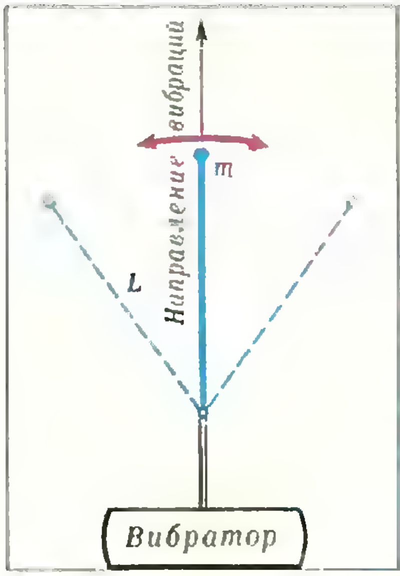


**Рис. 1.**

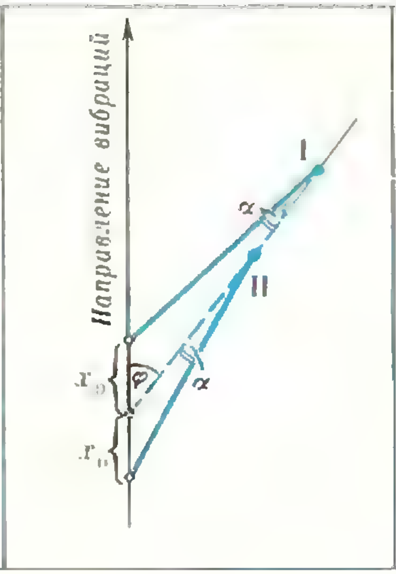


**Рис. 2.**

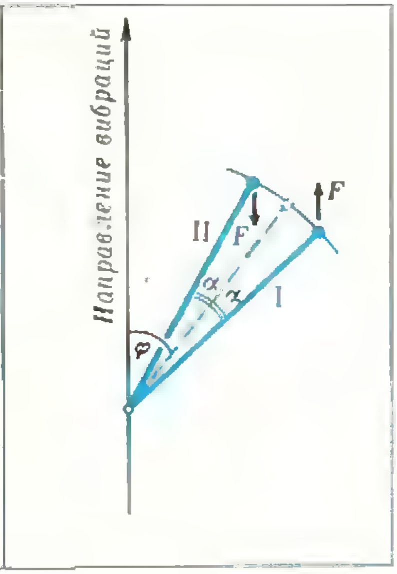


**Рис. 3.**

его к направлению вибраций. Этот фиктивный момент сил П. Л. Капица назвал «вибрационным».

Попробуем понять причину возникновения вибрационного момента. Предположим сначала, что силы тяжести отсутствуют. Пусть подвес маятника колеблется вдоль направления вибраций с амплитудой $x_0$ и частотой $\omega$ по гармоническому закону $x = -x_0 \cos \omega t$. Допустим, что маятник составляет с направлением вибраций угол $\varphi$ (рис. 2). Перемещение подвеса можно разложить на два перемещения: вдоль маятника и перпендикулярно к нему. Первое лишь смещает груз вдоль линии стержня, а второе поворачивает стержень, не смещая груза (углы поворота предполагаются малыми). Поэтому при наибольших отклонениях маятник займет положения I и II (см. рис. 2).

Удобнее рассматривать поведение маятника в системе отсчета, связанной с подвесом. Положения маятника I и II в этой системе показаны на рисунке 3. Выбранная система отсчета является неинерциальной *), поэтому в ней на маятник (т. е. на массу, сосредоточенную на его конце) будет действовать сила инерции, равная $\mathbf{F} = -m\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — ускорение подвеса в данный момент времени.

Так как подвес колеблется по гармоническому закону, то проекция его ускорения изменяется тоже по гармоническому закону: $a = -\omega^2 x = -\omega^2 x_0 \cos \omega t$. В крайних положениях I и II ускорение соответственно равно $-\omega^2 x_0$ и $+\omega^2 x_0$. Поэтому сила $\mathbf{F}$, проекция которой равна в этих положениях $F = \pm m\omega^2 x_0$, направлена, как показано на рисунке 3. Очевидно, что момент силы $\mathbf{F}$ относительно точки подвеса в положении I больше, чем в положении II, а так как время действия ее «вверх» равно времени действия «вниз» (по половине периода вибрации, то в итоге маятник должен смещаться вверх, т. е. по кратчайшему пути к направлению вибраций.

Вибрационный момент $M_в$, под действием которого происходит это смещение, пропорционален разности моментов силы $\mathbf{F}$ в положениях I и II. Найдем эту разность.

Пусть маятник отклонен на угол $\varphi$ от направления вибраций подвеса. Как видно из рисунка 2, угловая амплитуда мелких вибраций маятника $\alpha \approx \frac{x_0 \sin\varphi}{L}$, где $L$ — длина маятника. Эта же амплитуда изображена и на рисунке 3. Тогда

---

*) См., например, статью Я. А. Смородинского «О силах инерции», «Квант», 1974, № 8.

$$M_{I} - M_{II} = FL[\sin(\varphi+\alpha) - \sin(\varphi-\alpha)] = 2FL\sin\alpha\cos\varphi.$$

Так как $\frac{x_0}{L} \ll 1$, то

$$\sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{x_0 \sin\varphi}{L}.$$

Значит,

$$M_{в} \sim M_{I} - M_{II} \approx m\omega^2 x_0^2 \sin 2\varphi.$$

Такое качественное рассмотрение позволяет понять причины появления вибрационного момента и установить правильную зависимость этого момента от амплитуды вибраций подвеса, частоты вибраций, массы маятника и угла отклонения $\varphi$, но не позволяет найти значения коэффициента пропорциональности. Более строгое рассмотрение, проведенное П. Л. Капицей, приводит к соотношению

$$M_{в} = \frac{m\omega^2 x_0^2}{4}\sin 2\varphi. \qquad (1)$$

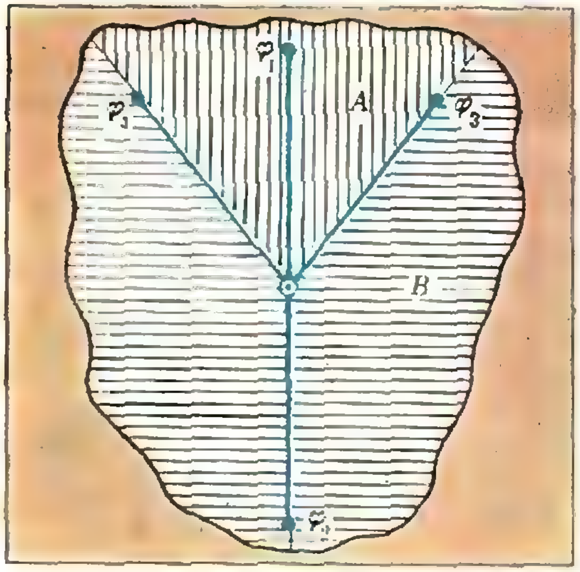


Рис. 4.

Пользуясь понятием вибрационного момента, напишем теперь условие равновесия маятника в поле силы тяжести. Будем считать, что вибрации подвеса происходят в вертикальном направлении. Кроме вибрационного момента $M_{в}$ на маятник действует еще момент силы тяжести $M_{т} = mgL\sin\varphi$. В положении равновесия эти моменты равны:

$$mgL\sin\varphi = \frac{m\omega^2 x_0^2}{4}\sin 2\varphi,$$

или

$$\sin\varphi\left(\frac{2gL}{\omega^2 x_0^2} - \cos\varphi\right) = 0. \qquad (2)$$

Удовлетворяющие этому уравнению значения $\varphi$ являются положениями равновесия. Они таковы:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0, \\ \varphi_2 &= 180^\circ, \\ \varphi_{3,4} &= \pm\arccos\frac{2gL}{\omega^2 x_0^2}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь $\varphi_1 = 0$ — верхнее положение грузика, $\varphi_2 = 180^\circ$ — нижнее положение грузика.

Рассмотрев соотношение величин вибрационного момента и момента силы тяжести около положений равновесия, можно убедиться, что $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — устойчивые положения, а $\varphi_3$ и $\varphi_4$ — неустойчивые. Таким образом, если маятник находится в области $A$ (рис. 4), то он будет колебаться около положения $\varphi_1$, а если в области $B$, — около положения $\varphi_2$. Из (3) видно, что если $\frac{2gL}{\omega^2 x_0^2} = 1$, то $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_4$ и положение $\varphi_1$ станет неустойчивым. Значит, для существования устойчивого равновесия перевернутого маятника необходимо, чтобы $\frac{2gL}{\omega^2 x_0^2} < 1$.

Несколько более сложен для анализа случай, когда направление вибраций составляет некоторый угол с вертикалью. Но, оказывается, что устойчивое положение перевернутого маятника возможно при любом направлении вибраций. Правда, параметры маятника не могут быть при этом произвольными. Расчет дает, что если $\frac{2gL}{\omega^2 x_0^2} < 0{,}5$, то положение устойчивого равновесия перевернутого маятника всегда найдется.

В заключение предлагаем вам провести самостоятельно экспериментальные исследования поведения маятника с вибрирующим подвесом.

В лабораторных условиях обычно для этой цели используют кривошипно-шатунный механизм, насаженный на вал мотора. В качестве маятника удобно использовать легкий металлический стержень или кусок толстой проволоки длиной 15—20 *см*. При скорости вращения 3 000 *об/мин* достаточно амплитуды вибраций подвеса 5—6 *мм*.

Следует обратить внимание на то, что для стержня, являющегося физическим, а не математическим маятником, во всех формулах выражение $\frac{2gL}{\omega^2 x_0^2}$ необходимо заменить на $\frac{4gL}{3\omega^2 x_0^2}$.

«Необычное» поведение маятника с вибрирующим подвесом легко можно наблюдать и в домашних условиях. Нужно только иметь электробритву типа «Нева», «Москва» или «Эра» и два пустых стержня от шариковой ручки. Сняв ножи с электробритвы, надо надеть на ножки вибратора бритвы по отрезку стержня длиной 3—3,5 *см* и проткнуть их концы проволочкой или булавкой (см. заставку к статье). (Такая длина отрезков обеспечивает их резонанс при колебаниях, что увеличивает амплитуду вибраций до нескольких миллиметров.) Эта же проволочка пронизывает конец целого стержня, который и является маятником.

Заметим, что этот опыт совершенно безопасен для электробритвы.

## Задачи наших читателей

1. Докажите, что в квадрате чисел

$$\begin{array}{ccccc} \ast & \times & \ast & = & b \\ : & & \times & & - \\ \ast & : & \ast & = & \ast \\ \ast & \div & \ast & = & \ast \end{array}$$

в котором $\ast$ заменяет некоторые натуральные числа, число $b$ всегда равно шести. Сколькими разными способами можно расшифровать эту запись?

*У. Шулте (г. Сигулда)*

2. Ни одно из трех целых чисел $a$, $b$, $c$ не делится на три. Докажите, что тогда делится на три

а) $a^2+b^2+c^2$;

б) $a^{2k}+b^{2n}+c^{2m}$.

3. Докажите, что если существуют такие натуральные числа $m$ и $k$, что

$A=12^{4k+3}-11^m<200$,

то число $A$ — простое.

*С. Охитин (г. Оренбург)*

4. Известно, что для данного $n$ любой набор из $k$ натуральных различных чисел, ни одно из которых не больше $n$, содержит хотя бы три таких элемента, что существует треугольник со сторонами, длины которых выражаются этими числами.

Какое наименьшее значение может принять $k$ как функция от $n$?

*О. Беридзе (г. Батуми)*

5. На сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ взяты соответственно точки $M$, $N$ и $T$ такие, что

$$\frac{|AM|}{|MB|}=m, \quad \frac{|BN|}{|NC|}=n,$$

$$\frac{|CT|}{|TA|}=t.$$

Известно, что прямые $MN$ и $BT$ пересекаются в точке $O$. Найти отношение $|BO|:|OT|$.

*Г. Сверчков (г. Москва)*

*Ю. Ионин, Л. Курляндчик*

# Поиск инварианта

**В этой статье рассматриваются задачи, сходные по формулировке. В каждой из них идет речь о некоторой совокупности чисел или знаков, и указаны операции, которые можно над ними производить. Читатель, внимательно проработавший статью, обнаружит не только внешнее сходство встречающихся в ней задач и упражнений, но и общую идею, на которой основано их решение.**

Задача 1. *На доске написано десять плюсов и пятнадцать минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус в противном случае. Какой знак останется на доске после выполнения двадцати четырех таких операций?*

Решение. Заменим каждый плюс числом 1, а каждый минус числом —1. Разрешенная операция описывается тогда так: стираются любые два числа и записывается их произведение. Поэтому произведение всех написанных на доске чисел остается неизменным. Так как вначале это произведение равнялось —1, то и в конце останется число —1, то есть знак минус.

Это рассуждение можно было провести иначе. Заменим все плюсы нулями, а минусы — единицами, и заметим, что сумма двух стираемых чисел имеет ту же четность, что и число, записываемое вместо них. Так как сначала сумма всех чисел была нечетной (она равнялась 15), то и последнее оставшееся на доске число будет нечетным, то есть единицей, и, значит, на доске останется минус.

Наконец, третье решение задачи можно получить, заметив, что в результате каждой операции число минусов либо не изменяется, либо уменьшается на два. Поскольку сначала число минусов было нечетным, то и в конце останется один минус.

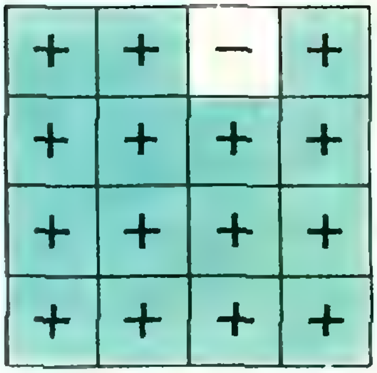
Проанализируем все три решения.

Первое решение основывалось на неизменяемости произведения написанных чисел, второе—на неизменяемости четности их суммы и третье — на неизменяемости четности числа минусов. В математике вместо слова *«неизменяемость»* употребляют термин *«инвариантность»*. Можно сказать, что в каждом решении нам удалось найти *инвариант*: произведение написанных чисел, четность суммы, четность числа минусов. Решение последующих задач и упражнений также основывается на удачном подборе инварианта.

Упражнение 1. На доске написано несколько плюсов и минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс, если они различны, и минус в противном случае. Докажите, что последний оставшийся на доске знак не зависит от порядка, в котором производились стирания.

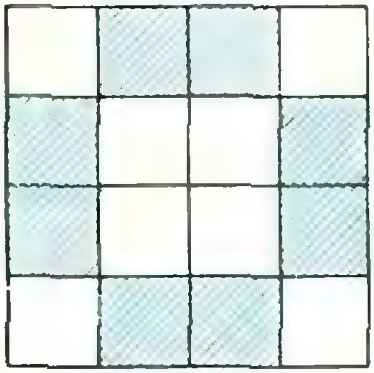
Задача 2. *В таблице* 4×4 *знаки* «+» *и* «—» *расставлены так, как показано на рисунке* 1. *Разрешается изменить знак на противоположный одновременно во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или вдоль прямой, параллельной какой-нибудь из диагоналей (в частности, в любой угловой клетке). Можно ли с помощью этих операций получить таблицу, не содержащую ни одного минуса?*

Решение. Заменим плюсы и минусы числами 1 и —1. В качестве инварианта можно взять произведение чисел, находящихся в клетках, кото-



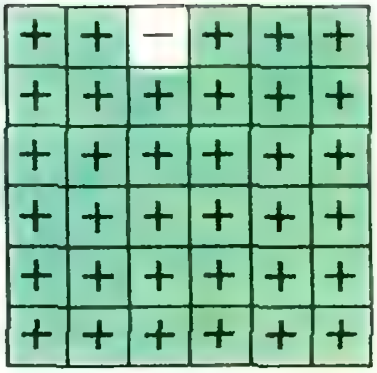
| | | | |
|---|---|---|---|
| + | + | − | + |
| + | + | + | + |
| + | + | + | + |
| + | + | + | + |

Рис. 1.



| | | | |
|---|---|---|---|
| | ▨ | ▨ | |
| ▨ | | | ▨ |
| ▨ | | | ▨ |
| | ▨ | ▨ | |

Рис. 2.



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| + | + | − | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |

Рис. 3.

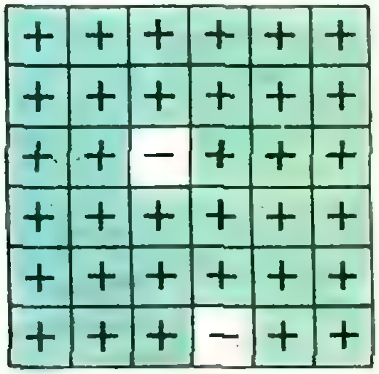
рые заштрихованы на рисунке 2, поскольку оно в результате разрешенной операции все время сохраняет первоначальное значение, равное —1. Но, значит, среди заштрихованных чисел всегда будет оставаться — 1, следовательно, получить таблицу, не содержащую ни одного минуса, нельзя.

Упражнение 2. Решите задачу 2 для таблиц, изображенных на рисунках 3 —5.

Задача 3*). *На доске написано несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две неравные цифры и вместо них написать одну цифру, отличную от стертых (2 вместо* 0 *и* 1, 1 *вместо* 0 *и* 2, 0 *вместо* 1 *и* 2). *Докажите, что если в результате нескольких таких операций на доске останется одна-единственная цифра, то она не зависит от порядка, в котором производились стирания.*

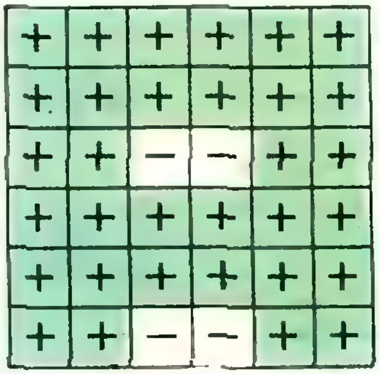
Решение. Обозначим через $x_0$, $x_1$, $x_2$ число нулей, единиц и двоек соответственно. Выполнив один раз разрешенную операцию, мы изменим каждое из этих чисел на 1 и, следовательно, изменим четность всех трех чисел. Когда на доске остается одна цифра, два из чисел $x_0$, $x_1$, $x_2$ становятся равными нулю, а третье — единице. Значит, с самого начала два из этих чисел имеют одну четность, а третье — другую. Поэтому независимо от того, в каком порядке производятся стирания, в конце единице может равняться лишь одно из чисел $x_0$, $x_1$, $x_2$, которое с самого начала имело не ту четность, что два других.

Из приведенного решения видно, что если числа $x_0$, $x_1$, $x_2$ имеют одну и ту же четность, то мы не сможем добиться, чтобы на доске осталась одна-единственная цифра. Докажите, что если среди чисел $x_0$, $x_1$, $x_2$ есть как четные, так и нечетные, и, кроме того, хотя бы два из них отличны от нуля, то существует такой порядок



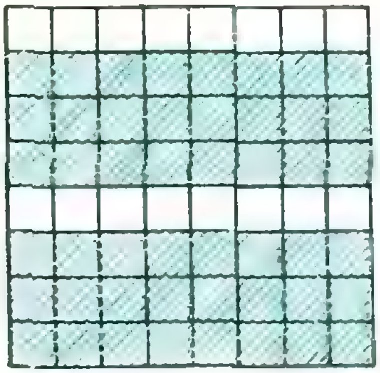
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | − | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | − | + | + |

Рис. 4.



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | − | − | + | + |
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | + | + | + | + |
| + | + | − | − | + | + |

Рис. 5.



| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ |
| ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ |
| ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ |
| | | | | | | | |
| ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ |
| ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ |
| ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ | ▨ |

Рис. 6.

---

*) Это — задача М338 из «Задачника «Кванта», см. «Квант», 1975, № 8.

стираний, что в результате на доске останется одна цифра.

Изменим условие задачи 3: потребуем, чтобы одни и те же две неравные цифры стирались два раза, а вместо них записывалась одна цифра, отличная от стертых. Предположим, что снова после некоторого числа операций на доске осталась одна-единственная цифра. Можно ли заранее, по числу нулей, единиц и двоек, предвидеть, какая это цифра?

Рассуждение с четностью здесь не помогает, ибо в результате выполнения каждой операции одно из чисел $x_0$, $x_1$, $x_2$ меняет свою четность, а два других сохраняют четность, так что числа, имевшие разную четность, могут теперь получить одну и ту же четность. Однако можно заметить, что остатки от деления чисел $x_0$, $x_1$, $x_2$ на 3 изменяются каждый раз таким образом, что равные остатки остаются равными, а неравные остаются неравными. Дальнейшие рассуждения повторяют решение задачи 3.

Задача 4. *В каждой клетке таблицы 8×8 написано некоторое целое число. Разрешается выбирать в таблице любой квадрат размерами 3×3 или 4×4 и увеличивать на единицу все стоящие в клетках выбранного квадрата числа. Всегда ли можно с помощью таких операций преобразовать исходную таблицу в таблицу, у которой все числа делятся на 3?*

Решение. Нет, не всегда. Найдем сумму чисел, написанных в заштрихованных на рисунке 6 клетках. Поскольку любой квадрат размерами 4×4 содержит 12 заштрихованных клеток, а квадрат размерами 3×3 — 6 или 9 таких клеток, то в результате описанной операции остаток от деления на 3 этой суммы (чисел, стоящих в заштрихованных клетках) не будет меняться. Поэтому, если с самого начала найденная сумма не делится на 3, то среди заштрихованных клеток все время будут сохраняться клетки, в которых написанные числа не кратны трем.

Упражнение 3. Из всякой ли таблицы можно в условиях задачи 4 получить таблицу, не содержащую четных чисел?

Задача 5. *Числа 1, 2, 3, ..., n расположены в некотором порядке. Разрешается менять местами любые два рядом стоящих числа. Докажите, что если проделать нечетное число таких операций, то наверняка получится отличное от первоначального расположение чисел 1, 2, 3, ..., n.*

Решение. Пусть $a_1$, $a_2$, ... ... $a_n$ — произвольная *перестановка* из чисел 1, 2, 3, ..., $n$. Будем говорить, что числа $a_i$ и $a_j$ образуют в этой перестановке *инверсию*, если $i<j$, но $a_i>a_j$, то есть большее из этих чисел предшествует меньшему. Поменяв местами два соседних числа в перестановке, мы увеличим или уменьшим число инверсий на 1. Проделав же нечетное число таких операций, мы изменим четность числа инверсий, а значит, изменим и перестановку.

Упражнение 4. Докажите, что утверждение задачи 5 останется справедливым, если разрешить менять местами любые два числа в перестановке.

Указание. Докажите, что любые два числа можно поменять местами, проделав нечетное число раз операцию, описанную в задаче 5.

Переход от одной перестановки чисел 1, 2, 3, ..., $n$ к другой перестановке этих чисел, при котором какие-нибудь два числа меняются местами, а остальные остаются на месте, называется *транспозицией*. Результат упражнения 4 можно сформулировать так: *выполнив нечетное число транспозиций, мы изменим перестановку.*

Задача 6. *В различных пунктах кольцевого автодрома в одно и то же время в одном направлении стартовали 25 автомобилей. По правилам гонки автомобили могут обгонять друг друга, но при этом запрещен двойной обгон. Автомобили финишировали одновременно в тех же пунктах, что и стартовали. Докажите, что во время гонки было четное число обгонов.*

Решение. Окрасим один из автомобилей в желтый цвет, а остальным автомобилям присвоим номера

1, 2, 3, ..., 24 в том порядке, в каком они располагаются на старте за желтым автомобилем. В центре автодрома установим световое табло, на котором после каждого обгона будем указывать номера автомобилей в том порядке, в каком они следуют за желтым автомобилем. Тогда обгон, в котором не участвует желтый автомобиль, приводит к тому, что на световом табло меняются местами два соседних числа.

Посмотрим, что произойдет, если какой-нибудь автомобиль обгонит желтый. Если перед этим обгоном числа на табло образовывали перестановку $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{24}$, то после обгона они образуют перестановку $a_2, a_3, \ldots, a_{24}, a_1$. Заметим, что к такой же перестановке можно прийти, выполнив последовательно 23 транспозиции:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{24} \to a_2, a_1, a_3, \ldots, a_{24} \to a_2, a_3, a_1, \ldots, a_{24} \to \ldots \to a_2, a_3, \ldots, a_1, a_{24} \to a_2, a_3, \ldots, a_{24}, a_1.$$

Если же желтый автомобиль совершил обгон, то из перестановки $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{24}$ мы получим перестановку $a_{24}, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{23}$. Этот переход также можно заменить двадцатью тремя транспозициями.

Таким образом, любой обгон сводится к нечетному числу транспозиций. Если бы общее число обгонов было нечетным, то нечетным оказалось бы и общее число транспозиций. Остается воспользоваться результатом упражнения 4.

### Упражнения

5. По окружности выписаны в произвольном порядке четыре единицы и пять нулей. В промежуток между двумя одинаковыми цифрами вписывается 1, а между разными 0, после чего все первоначальные цифры стираются. Можно ли, повторив несколько раз эту операцию, получить набор из девяти нулей?

6. Петя разорвал листок бумаги на десять кусков, некоторые из этих кусков он снова разорвал на десять частей, и т. д. Мог ли Петя получить таким путем 1975 кусочков бумаги?

7. На доске написаны числа 1, 2, 3, . . ., 1975. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо стертых чисел остаток от деления суммы этих чисел на 13. После некоторого числа таких операций на доске осталось одно число. Каким оно может быть?

8. Каждое число от 1 до 1 000 000 заменяют числом, равным сумме его цифр. С получившимися числами проделывают ту же операцию, и так делают до тех пор, пока все числа не станут однозначными. Каких чисел в результате получится больше: единиц или двоек?

9. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С получившимся числом проделали то же самое, и так далее — сто раз. Какое в результате получится число?

10. Круг разбит на 10 секторов, в каждом из которых стоит по одной фишке. Одним ходом разрешается любые две фишки передвинуть в соседние секторы, но так, чтобы фишки двигались при этом в противоположных направлениях. Можно ли собрать все фишки в одном секторе?

11а). В вершине $A_{12}$ правильного 12-угольника $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$ поставлен минус, а в остальных вершинах — плюсы. Разрешается выбрать любые три вершины, образующие непрямоугольный равнобедренный треугольник, и изменить знаки, написанные в этих вершинах, на противоположные. Можно ли с помощью таких операций добиться, чтобы в вершине $A_1$ оказался минус, а в остальных вершинах — плюсы?

б). Сохранится ли результат упражнения а), если допустить перемену знака в вершинах любого равнобедренного треугольника, в том числе и прямоугольного? *).

12. В каждой клетке таблицы 4×4 написан плюс или минус. Разрешается одновременно менять знак на противоположный во всех клетках одной строки или одного столбца. Наименьшее число минусов, к которому можно прийти, начав с данной таблицы, называется *характеристикой* этой таблицы. Какие значения может принимать характеристика?

13. По кругу стоят 30 фишек — 10 белых и 20 черных. Разрешается менять местами любые две фишки, между которыми стоят еще три фишки. Два расположения фишек называются *эквивалентными*, если одно из них можно получить из другого, применив несколько раз указанную операцию. Сколько существует неэквивалентных расположений фишек?

14. Числа 1,2,3, . . . , 1975 записаны по порядку. Разрешается выбрать любые четыре числа и расставить их на тех местах, которые они занимали, но в обратном порядке. Можно ли с помощью таких операций прийти к расположению 1975, 1974, . . . , 3, 2, 1?

---

*) Эту задачу прислал в «Квант» ученик 10 класса школы № 3 г. Нахичевани *Вилаят Гусейнов*.

# задачник кванта

## Задачи

### М366—М370; Ф378—Ф382

**Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 апреля 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М366, М367» или «... Ф378». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.**

**М366**. Можно ли расположить на плоскости несколько треугольников так, чтобы две вершины каждого из них лежали на сторонах (но не в вершинах) других треугольников?

*В. Колосов*

**М367**. Может ли произведение а) трех; б) четырех последовательных натуральных чисел равняться некоторой степени некоторого натурального числа (квадрату, кубу, и т. д.)?

*Д. Флейшман, уч 10 класса*

**М368**. Докажите, что пересечение трех прямых круговых цилиндров радиуса 1, оси которых попарно взаимно перпендикулярны (но не обязательно пересекаются), содержатся в некотором шаре радиуса $\sqrt{3/2}$.

*С. Фомин*

**М369***. Дан остроугольный треугольник $ABC$. $H$ — точка пересечения его высот, $\gamma$ — окружность с центром $H$, лежащая внутри этого треугольника. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, описанный около окружности $\gamma$ и вписанный в треугольник $ABC$ (так, что

$$A_1 \in [BC], \quad B_1 \in [AC], \quad C_1 \in [AB]).$$

*Д. Изаак*

**М370***. Пусть $a$, $b$, $c$ — тройка положительных чисел. Образуем из нее новую тройку:

$$|a-b|, \ |b-c|, \ |c-a|,$$

затем из этой тройки по тому же правилу — следующую и т. д. Обязательно ли среди полученных таким образом чисел встретится 0, если исходные числа а) целые; б) действительные?

**Ф378**. Пассажиры самолета не испытывают неприятных ощущений, если только их вес в полете не увеличивается более чем вдвое. Какое максимальное ускорение в горизонтальном полете допускает это условие?

*В. Смирнитский*

**Ф379**. Внешний диаметр стеклянной капиллярной трубки существенно больше диаметра канала. По-

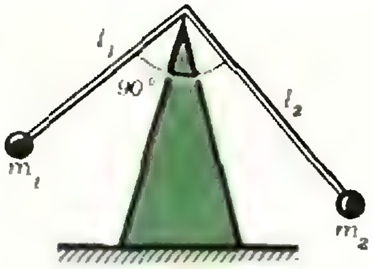


Рис. 1

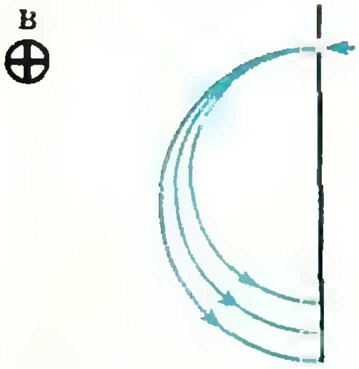


Рис. 2.

казатель преломления стекла $n={}^4/_3$. Видимый через боковую поверхность трубки диаметр канала $d=2{,}66$ *мм*. Определить истинный диаметр канала.

*Е. Кузнецов*

**Ф380**. Найти период малых колебаний системы, изображенной на рисунке 1. Стержни считать невесомыми, их длины $l_1$ и $l_2$, массы шаров $m_1$ и $m_2$.

**Ф381**. В устройстве для определения изотопного состава (масс-спектрографе) однозарядные ионы калия с атомными весами $A_1=39$ и $A_2=41$ сначала ускоряются в электрическом поле, а затем попадают в однородное магнитное поле, перпендикулярное к направлению их движения (рис. 2). В процессе опыта из-за несовершенства аппаратуры ускоряющий потенциал меняется около среднего значения $u_0$ на величину $\pm\Delta u$. С какой относительной точностью $\frac{\Delta u}{u_0}$ нужно поддерживать значение ускоряющего потенциала, чтобы пучки изотопов калия не перекрывались?

*С. Козел*

**Ф382**. Найти радиус наибольшей капли воды, которая может испариться, не поглотив тепла извне.

## Решения задач

### М326—М329; Ф339—Ф342

**М326**. *Хорда окружности удалена от центра на расстояние h. В каждый из сегментов, стягиваемых хордой, вписан квадрат так, что две соседние вершины квадрата лежат на дуге, две другие — на хорде. Чему равняется разность длин сторон этих квадратов?*

Введем следующие обозначения (рис. 1): $O$ — центр окружности, $|AB|=a$ — длина стороны большего квадрата, $|A'B'|=a'$ — длина стороны меньшего квадрата, $(OH)\perp(BB')$. Точки $A$, $H$ и $A'$ лежат на одной прямой. Опустим из точки $O$ перпендикуляр на $AA'$: $(OK)\perp(AA')$. Пусть

$$k=\frac{a}{|AH|}=\frac{a'}{|A'H|}=\frac{|KH|}{h}.$$

Тогда

$$a-a'=k(|AH|-|A'H|)=2k|KH|=2k^2h.$$

Из $\triangle ABH$:

$$|AB|^2+|BH|^2=|AH|^2,$$

т. е.

$$|AB|^2+\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2=|AH|^2,$$

или

$$k^2+\left(\frac{k}{2}\right)^2=1,$$

откуда

$$k^2=\frac{4}{5},$$

и, значит, $a-a'=\frac{8}{5}h$.

*Н. Васильев*

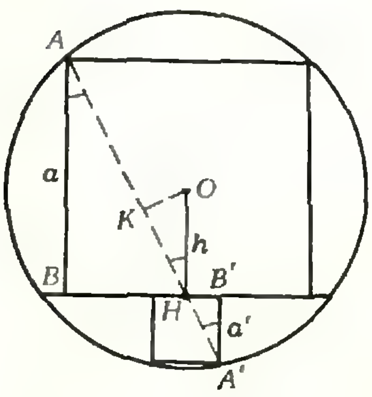


Рис. 1.

**М327.** *В компании $N$ человек. Каждому из них нравится ровно $k$ людей из этой компании. При каком наименьшем $k$ можно утверждать, что обязательно найдутся два человека из этой компании, которые нравятся друг другу?*

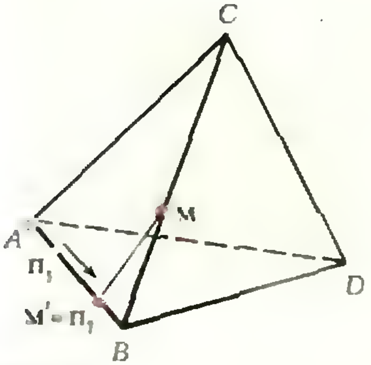


Рис. 2.

**М328.** *По правильному тетраэдру ползают муха и два паука. Муха ползает только по ребрам, а пауки — по всей поверхности. Максимальная скорость мухи в 2 раза больше максимальной скорости пауков.*

*а) Докажите, что при любом начальном расположении пауки могут поймать муху.*

*б) Верно ли это, если максимальная скорость мухи больше чем в 2 раза превосходит максимальную скорость пауков?*

*в) Как изменится ответ, если разрешить паукам ползать только по ребрам тетраэдра? по всему объему тетраэдра? (Муха по-прежнему движется только по ребрам.)*

Обозначим членов компании точками на плоскости (никакие три из которых не лежат на одной прямой). Тот факт, что $A$ нравится $B$, будем обозначать отрезком со стрелкой, направленным от точки $A$ к точке $B$. Тогда из каждой точки будет выходить ровно $k$ стрелок, а всего $kn$ стрелок. Нам нужно найти число $k_0$ — наименьшее значение $k$, при котором обязательно хоть на одном отрезке будут поставлены стрелки в обе стороны.

Всего существует $\frac{n(n-1)}{2}$ отрезков без стрелок, соединяющих $n$ точек. Если на каждом отрезке не более одной стрелки, то стрелок не больше, чем $\frac{n(n-1)}{2}$. Значит, если $kn > \frac{n(n-1)}{2}$, то $k \geqslant k_0$. Отсюда

$$k_0 \leqslant \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{если } n \text{ четное,} \\[2mm] \dfrac{n+1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases} \qquad (1)$$

Докажем, что неравенство (1) можно заменить на равенство. Поставим в формуле (1) знак равенства и покажем, что $n$ точек при любом $n$ можно так соединить отрезками со стрелками, что из каждой выходит ровно $k_0 - 1$ стрелок, и ни на одном отрезке нет двух стрелок. Вот один из способов сделать это. Надо $n$ точек расположить в вершинах правильного $n$-угольника и из каждой точки направить стрелки в $k_0 - 1$ вершин, следующих за ней по часовой стрелке. Поскольку $k_0 - 1 < \frac{n}{2}$ при всех $n$, то никакие две стрелки не окажутся на одном отрезке.

*А. Колодин, А. Тоом*

◆

Обозначим максимальную скорость пауков и мухи соответственно через $v_{\text{П}_{\max}}$ и $v_{\text{М}_{\max}}$. Докажем, что, независимо от того, как разрешено двигаться паукам (по ребрам, граням, или же по всему объему тетраэдра), верны следующие два утверждения.

1°. Если $v_{\text{М}_{\max}} \leqslant 2v_{\text{П}_{\max}}$, то пауки могут поймать муху при любом начальном расположении.

2°. Если $v_{\text{М}_{\max}} > 2v_{\text{П}_{\max}}$, то при некоторых начальных расположениях пауки не смогут поймать муху.

Ясно, что утверждение 1° достаточно доказать в самом «плохом» для пауков случае — когда им разрешено двигаться лишь по ребрам тетраэдра; а утверждение 2°, наоборот, в самом «лучшем» для пауков случае, когда они ползают по всему объему тетраэдра.

Обозначим вершины тетраэдра буквами $A$, $B$, $C$, $D$, точки, где находятся муха и пауки — М, П$_1$ и П$_2$ соответственно. Будем считать, что длина ребра тетраэдра равна 1, и что $v_{\text{М}_{\max}} = 1$.

Докажем утверждение 1°, считая, что паукам разрешено двигаться только по ребрам тетраэдра.

Обозначим проекцию точки М на ребро $AB$ через М′ (если М находится на ребре, перпендикулярном ребру $AB$, то М′ совпадает с серединой ребра $AB$).

Стратегия пауков, обеспечивающая поимку мухи, может быть следующей.

Паук П$_1$ занимает вершину $A$ и движется по ребру $AB$, пока не достигнет точки М′ (это обязательно когда-нибудь

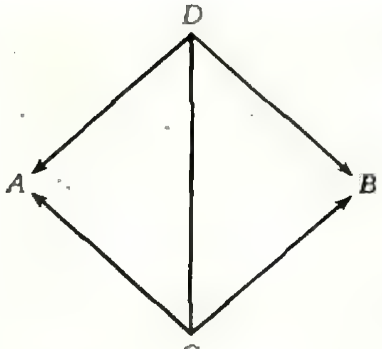


Рис. 3,а.

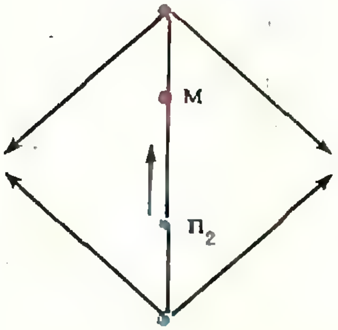


Рис. 3,б.

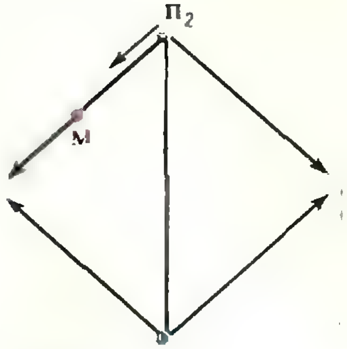


Рис. 3,в.

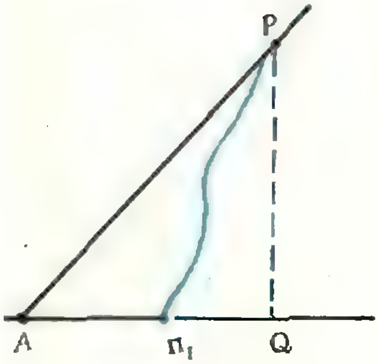


Рис. 4.

произойдет, так как $M'$ не может выйти за точку $B$ — см. рисунок 2). Затем $\Pi_1$ движется по ребру $AB$ так, чтобы все время оставаться в точке $M'$: он может это сделать, если муха не на ребре $AB$, поскольку $v_{M'} = v_M \cdot \cos\alpha$, где $\alpha$ — угол между ребром $AB$ и ребром, по которому движется муха, а для любого из ребер, кроме ребра $AB$, $\cos\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ (точнее, $\cos\alpha$ равен либо $^1/_2$, либо нулю). Но на ребро $AB$ муха попасть не сможет, так как для этого ей придется пройти либо через вершину $A$, либо через вершину $B$, где она будет поймана пауком $\Pi_1$ ввиду условия $\Pi_1 = M'$.

Итак, муха не может пройти через точки $A$ и $B$: доступная ей область изображена на рисунке 3, а.

Как видно из рисунков 3, б и в, паук $\Pi_2$ теперь легко может поймать муху, двигаясь все время к ней и сужая доступную ей область. Утверждение 1° доказано.

Перейдем к утверждению 2° (теперь мы считаем, что паукам разрешено двигаться по всему объему тетраэдра). Оно непосредственно следует из следующей леммы:

*Если в момент времени $t$ муха не поймана и находится в вершине тетраэдра, то за время 1 она может переползти в другую вершину тетраэдра* (т. е. в интервале времени от $t$ до $t+1$ пауки не смогут поймать муху).

Докажем эту лемму. Пусть муха находится в вершине $A$. Соединим точки $\Pi_1$ и $\Pi_2$, в которых сидят пауки, с этой вершиной; получим отрезки $\Pi_1A$ и $\Pi_2A$. Докажем, что найдется ребро тетраэдра, исходящее из точки $A$, которое образует с каждым из отрезков $\Pi_1A$ и $\Pi_2A$ углы, не меньшие 30°. В самом деле, если бы такого ребра не оказалось, то один из отрезков, например, отрезок $\Pi_1A$, образовывал бы угол меньше 30° по крайней мере с двумя ребрами, исходящими из $A$, например, с $AB$ и с $AC$. Но тогда для плоских углов трехгранного угла $ABC\Pi_1$ было бы $\widehat{BAC} = 60°$, $\widehat{BA\Pi_1} < 30°$, $\widehat{CA\Pi_1} < 30°$, что невозможно (должно быть $\widehat{BA\Pi_1} + \widehat{CA\Pi_1} \geqslant \widehat{BAC}$).

Чтобы не быть пойманной, муха должна с максимальной скоростью двигаться по ребру, образующему с отрезками $\Pi_1A$ и $\Pi_2A$ углы, не меньшие 30°. Через единицу времени она доползет до другого конца этого ребра. Докажем, что на выбранном ребре пауки не смогут поймать муху. Действительно, пусть какой-нибудь паук, например $\Pi_1$, поймал муху в момент времени $t + \Delta t$ в точке $P$ (принадлежащей выбранному ребру; см. рисунок 4), тогда

$$|AP| = \Delta t \cdot v_{M_{\max}} = \Delta t$$

$$(v_{M_{\max}} = 1),$$

$$|\Pi_1P| \leqslant \Delta t \cdot v_{\Pi_{\max}} < {}^1/_2\Delta t = {}^1/_2\,|AP|$$

$$(v_{\Pi_{\max}} < {}^1/_2\, v_{M_{\max}}).$$

Опустим перпендикуляр $PQ$ на $\Pi_1A$; получим

$$|\Pi_1P| \geqslant |PQ| = |AP| \cdot \sin(\widehat{\Pi_1AP}) \geqslant \frac{1}{2}|AP|,$$

поскольку $\widehat{\Pi_1AP} \geqslant 30°$ в силу выбора ребра.

Итак, с одной стороны $|\Pi_1P| \geqslant \frac{1}{2}|AP|$, а с другой $|\Pi_1P| < \frac{1}{2}|AP|$ — противоречие; следовательно, пауки не смогут поймать муху в интервале времени от $t$ до $t+1$, и она доползет до другой вершины тетраэдра. Лемма, а значит, и утверждение 2° доказаны.

*А. Ходулев*

**М329.** *Выпуклый $n$-угольник помещен в квадрат со стороной 1. Докажите, что найдется три вершины $A$, $B$, $C$ этого $n$-угольника такие, что площадь треугольника $ABC$ меньше $8/n^2$.*

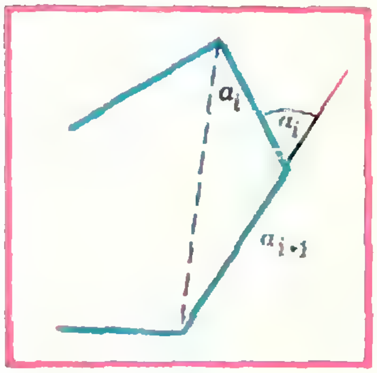


**Рис. 5.**

Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ длины сторон нашего $n$-угольника, через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — величины его внешних углов. Пусть $S_i$ — площадь $i$-ого треугольника (со сторонами $a_i$ и $a_{i+1}$ — см. рисунок 5, $i = 1, 2, \ldots, n-1$), $S_n$ — площадь треугольника со сторонами $a_n$, $a_1$. Имеем: $2S_i = a_i a_{i+1} \sin\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $2S_n = a_n a_1 \sin\alpha_n$. Пусть $S$ — наименьшая из площадей этих треугольников. Тогда

$$2S \leqslant a_i a_{i+1} \sin\alpha_i,$$

откуда

$$(2S)^n \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_i^2 \prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i < \prod_{i=1}^{n} a_i^{2\,*)},$$

то есть

$$2S < \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{2/n}.$$

Но

$$\left(\prod_i a_i\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}^{**)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n},$$

поэтому

$$2S < \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^2.$$

Пусть $p_i$ и $q_i$ — длины проекций $i$-й стороны $n$-угольника на вертикальную и горизонтальную стороны квадрата. Тогда $a_i \leqslant p_i + q_i$, то есть $\sum_i a_i \leqslant \sum_i p_i + \sum_i q_i \leqslant 4$.

Поэтому

$$2S < \left(\frac{4}{n}\right)^2,$$

откуда

$$S < \frac{8}{n^2}.$$

Получившаяся оценка довольно груба — мы с самого начала отбросили $\prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i$, оценив это произведение единицей. Уточним эту оценку. Имеем:

$$(2S)^n \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i,$$

то есть

$$2S \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{2/n} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \sin\alpha_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{16}{n^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i}{n}.$$

---

*) Здесь $\prod_i$ — знак произведения: $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$.

**) Мы воспользовались неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

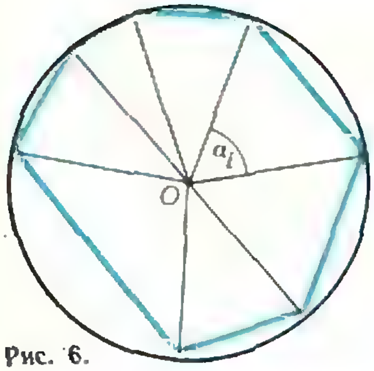


Рис. 6.

Так как $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 2\pi$ (как сумма внешних углов $n$-угольника), то мы можем интерпретировать $\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i$ как удвоенную площадь вписанного в единичную окружность $n$-угольника с углами $\alpha_i$ при вершине $O$ — центре окружности (рис. 6). Поэтому $\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i < 2\pi$, и, значит,

$$S \leqslant \frac{16\pi}{n^3}.$$

*А. Клячко*

◆

**Ф339.** *Теннисный мяч попадает на тяжелую ракетку и упруго отражается от нее. Масса мяча много меньше ракетки, а скорость мяча до столкновения с ракеткой равна* **v** *и составляет угол $\alpha = 60°$ с перпендикуляром к ракетке. С какой постоянной скоростью должна поступательно двигаться ракетка для того, чтобы мяч отразился от нее под прямым углом к направлению первоначального движения? Как до, так и после столкновения с ракеткой мяч не вращается.*

При упругом столкновении мяча с неподвижной ракеткой скорость мяча не меняется по абсолютной величине, но меняет направление. При этом составляющая скорости $\mathbf{v}_y$ (рис. 7, *а*) остается постоянной ($\mathbf{v}'_y = \mathbf{v}_y$), а составляющая $\mathbf{v}_x$ меняет направление на противоположное ($\mathbf{v}'_x = -\mathbf{v}_x$).

По условию задачи скорость ракетки должна быть такой, чтобы мяч отражался под углом $\beta = 30°$ (для неподвижного наблюдателя), т. е. должно выполняться условие (см. рис. 7, *б*).

$$\frac{|\mathbf{v}'_y|}{|\mathbf{v}'_x|} = \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad (*)$$

Посмотрим, как меняется скорость мяча при столкновении с движущейся ракеткой. Для этого рассмотрим движение в системе координат, связанной с ракеткой, движущейся относительно неподвижной системы координат с постоянной скоростью **w** (так как масса ракетки много больше массы мяча, скорость ракетки после столкновения практически не меняется). Поскольку эта система инерциальная, отражение происходит по закону «угол падения равен углу отражения». Скорость мяча в этой системе до столкновения равна $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ (см. рис. 7, *в*). Составляющие скорости $\mathbf{u}_x$ и $\mathbf{u}_y$ равны соответственно $\mathbf{u}_x = \mathbf{v}_x - \mathbf{w}$, $\mathbf{u}_y = \mathbf{v}_y$. При столкновении составляющая $\mathbf{u}_y$ остается постоянной ($\mathbf{u}'_y = \mathbf{u}_y = \mathbf{v}_y$), а составляющая $\mathbf{u}_x$ меняет направление на противоположное: $\mathbf{u}'_x = -\mathbf{u}_x = -\mathbf{v}_x - \mathbf{w}$.

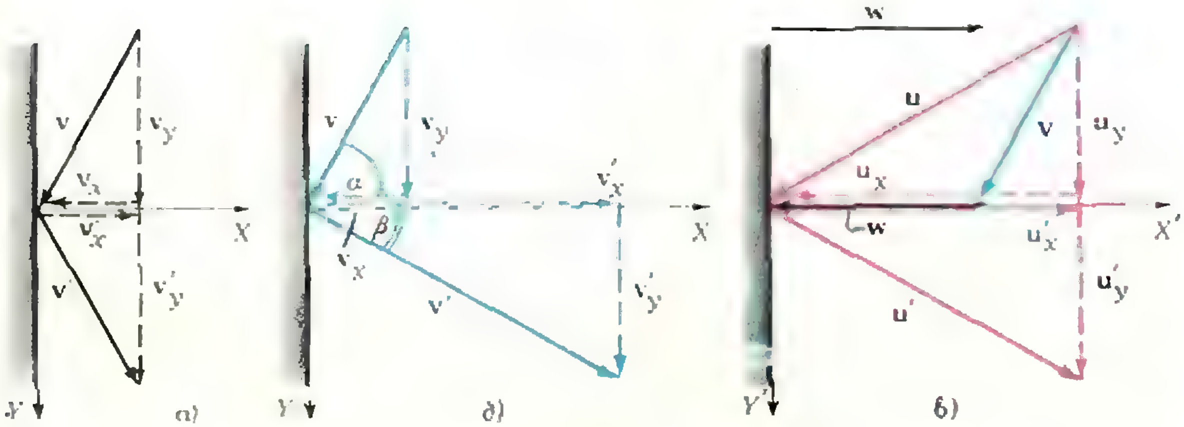


Рис. 7.

В неподвижной системе координат скорость мяча после столкновения равна $\mathbf{v}' = \mathbf{u}' + \mathbf{w}$, причем составляющие $\mathbf{v}'_y$ и $\mathbf{v}'_x$ равны $\mathbf{v}'_y = \mathbf{v}_y$, $\mathbf{v}'_x = \mathbf{u}'_x + \mathbf{w} = -\mathbf{v}_x + 2\mathbf{w}$.

Учитывая, что $|\mathbf{v}_y| = |\mathbf{v}| \sin\alpha$, $|\mathbf{v}_x| = |\mathbf{v}| \cos\alpha$, из условия (*)

$$\frac{v\sin\alpha}{v\cos\alpha + 2w} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

найдем $\mathbf{w}$:

$$w = \frac{\sqrt{3}\,v\sin\alpha - v\cos\alpha}{2} = \frac{v}{2}, \quad \mathbf{w} = -\frac{\mathbf{v}}{2}.$$

*И. Слободецкий*

◆

**Ф340.** *Спутник Земли массой $m = 10$ кг, движущийся по круговой орбите в высоких слоях атмосферы, испытывает сопротивление разреженного воздуха. Сила сопротивления $F = 5\cdot10^{-4}$ н. Определить, на сколько изменится скорость спутника за один оборот вокруг Земли. Высоту полета спутника над поверхностью Земли считать малой по сравнению с радиусом Земли.*

Полная энергия $E$ спутника массой $m$, движущегося по орбите радиуса $R$, складывается из его кинетической энергии $K = \frac{mv^2}{2} = \gamma\frac{mM}{2R}$ (скорость спутника на круговой околоземной орбите равна $\sqrt{\gamma\frac{M}{R}}$, где $R$ — радиус Земли) и потенциальной энергии $\Pi = -\gamma\frac{mM}{R}$ (знак «минус» обусловлен характером сил притяжения между спутником и Землей: по мере сближения тел потенциальная энергия уменьшается). Таким образом,

$$E = K + \Pi = -\gamma\frac{mM}{2R}.$$

В результате действия силы сопротивления энергия спутника меняется, следовательно, меняется радиус орбиты. Подсчитаем изменение радиуса за один оборот.

Энергия спутника за один оборот изменяется на величину $\Delta E$, численно равную работе силы сопротивления на пути $2\pi R$, то есть $\Delta E = -2\pi RF$. Таким образом,

$$\Delta E = -\gamma\frac{mM}{2(R+\Delta R)} + \gamma\frac{mM}{2R} = \gamma\frac{mM}{2}\,\frac{\Delta R}{(R+\Delta R)R}.$$

Предполагая, что $|\Delta R| \ll R$, можем записать

$$\gamma\frac{mM}{2}\,\frac{\Delta R}{R^2} = -2\pi RF.$$

Учитывая, что $\gamma\frac{M}{R^2} = g$, окончательно получим

$$\Delta R = -\frac{4\pi RF}{gm} \approx -4\cdot10^2 \text{ м}$$

$$(g = 9{,}8 \text{ м/сек}^2, \quad R \approx 6{,}4\cdot10^6 \text{ м}).$$

Видно, что сделанное нами предположение $|\Delta R| \ll R$ справедливо.

Итак, в результате действия силы сопротивления радиус орбиты спутника уменьшился. Следовательно, скорость спутника увеличилась. Найдем изменение скорости.

Кинетическая энергия спутника на орбите радиуса $R + \Delta R$ равна

$$K_{R+\Delta R} = \frac{m(v+\Delta v)^2}{2} = \gamma\frac{mM}{2(R+\Delta R)}.$$

Изменение кинетической энергии

$$\Delta K = \frac{m}{2}[(v+\Delta v)^2 - v^2] =$$

$$= \frac{m}{2}[2v\,\Delta v + (\Delta v)^2] = -\gamma\frac{mM}{2}\frac{\Delta R}{(R+\Delta R)R}.$$

Предположив, что $\Delta v \ll v$ и учитывая, что $|\Delta R| \ll R$, можем записать:

$$2v\,\Delta v \approx -\gamma M\frac{\Delta R}{R^2},$$

откуда

$$\Delta v = -\gamma\frac{M}{2vR}\frac{\Delta R}{R}.$$

Учитывая, что $v = \sqrt{\gamma\frac{M}{R}} \approx 8\cdot 10^3$ *м/сек* (первая космическая скорость), окончательно получим

$$\Delta v = -\frac{v}{2}\frac{\Delta R}{R} \approx 0{,}25 \text{ м/сек}.$$

◆

**Ф341.** *В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин $S$ и расстоянием между ними $d$ помещен в поток проводящей жидкости с удельной проводимостью $\sigma$. Жидкость движется с постоянной скоростью $v$ параллельно пластинам. Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией $B$, направленной перпендикулярно к скорости жидкости и параллельно плоскости пластин. Какая мощность выделяется во внешней цепи, имеющей сопротивление $R$?*

Находящийся в магнитном поле конденсатор, заполненный проводящей жидкостью, представляет собой источник тока. Найдем э. д. с. и внутреннее сопротивление этого источника.

На свободные заряды проводящей жидкости, движущиеся со скоростью $v$, в магнитном поле действует сила Лоренца $F_{\text{Л}} = qvB$, искривляющая траектории зарядов. В результате заряды оседают на пластинах конденсатора. Если конденсатор не замкнут на внешнее сопротивление, процесс зарядки продолжается до тех пор, пока сила, действующая на заряды со стороны возникающего электрического поля, не уравновесит силу Лоренца. Из этого условия найдем напряженность электрического поля в конденсаторе не замкнутом на внешнее сопротивление:

$$F_{\text{эл}} = F_{\text{Л}}, \text{ или } Eq = qvB \longrightarrow E = vB.$$

Следовательно, разность потенциалов между пластинами не замкнутого конденсатора, (э. д. с.) равна $\mathscr{E} = vBd$.

Внутреннее сопротивление конденсатора равно сопротивлению проводящей жидкости между обкладками: $r = \frac{1}{\sigma}\,\frac{d}{S}$.

При подключении к конденсатору внешнего сопротивления $R$ по цепи идет ток $I = \frac{\mathscr{E}}{R+r}$. При этом на сопротивлении $R$ выделяется мощность

$$N = I^2R = \frac{(vBd)^2R}{\left(R + \frac{1}{\sigma}\,\frac{d}{S}\right)^2}.$$

Обратим внимание на парадоксальность полученного результата. Джоулево тепло в цепи выделяется за счет работы сторонних сил, то есть за счет работы силы Лоренца. Но ведь сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости заряда, следовательно, работы совершать не может. Как разрешить этот парадокс? За счет какого источника энергии выделяется джоулево тепло? Пожалуй, разбор этого вопроса интереснее и полезнее, чем решение первоначальной задачи.

Парадокс этот легко разрешить, если принять во внимание, что при замыкании цепи у свободных зарядов проводящей жидкости появляется составляющая скорости, направленная перпендикулярно пластинам. Следовательно, появляется составляющая силы Лоренца, направленная против скорости **v**. Так что полная работа силы Лоренца складывается из работ двух ее составляющих. И эта суммарная работа равна нулю. Убедимся в этом.

Перемещение заряда внутри конденсатора от одной пластины к другой происходит за счет действия составляющей силы Лоренца, перпендикулярной пластинам. Значение этой составляющей

$$F_1 = qvB.$$

Работа, совершаемая силой $F_1$ за единицу времени (т. е. мощность), равна

$$N_1 = F_1 v_1 = qvBv_1,$$

где $v_1$ — составляющая скорости заряда, направленная перпендикулярно пластинам.

Составляющая силы Лоренца, направленная против скорости **v**, равна по величине

$$F_2 = qv_1B.$$

Работа, совершаемая этой силой за единицу времени,

$$N_2 = -F_2 v_1 = -qv_1Bv$$

(сила $F_2$ действует как тормозящая сила, и потому совершаемая ею работа отрицательна).

Таким образом, работа силы Лоренца (если учесть все составляющие силы) действительно оказывается равной нулю:

$$N_1 + N_2 = 0.$$

Источником энергии в данной схеме, очевидно, является насос, прогоняющий жидкость через конденсатор. Этот насос должен постоянно совершать работу, так как на жидкость действует сила сопротивления, и вся эта работа в конечном счете переходит в тепло, выделяющееся в цепи.

*С. Козел*

◆

**Ф342.** *Найти заряд конденсатора 2 (рис. 8), если $C_1 = C_2 = C_3 = C$, э. д. с. источника $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление источника $r$.*

По замкнутой цепи, состоящей из последовательно включенных сопротивлений $R$ и $2R$ и источника с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением $r$, идет ток $I = \dfrac{\mathscr{E}}{3R + r}$.

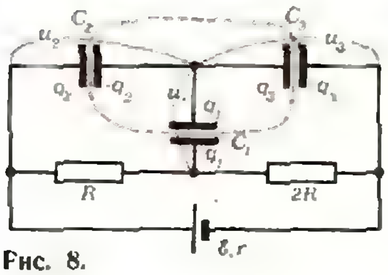


Рис. 8.

Пусть падение напряжения на конденсаторах $U_1$, $U_2$, $U_3$, и их заряды соответственно $q_1$, $q_2$, $q_3$ (см. рис. 8). Сумма падений напряжения на конденсаторах $C_1$ и $C_2$ равна падению напряжения на сопротивлении $R$, т. е.

$$U_1 + U_2 = IR. \qquad (1)$$

Сумма падений напряжения на конденсаторах $C_2$ и $C_3$ равна сумме падений напряжения на сопротивлениях $R$ и $2R$:

$$U_2 + U_3 = 3IR. \qquad (2)$$

Суммарный заряд выделенной на рисунке части схемы равен нулю, т. е. $q_1 - q_2 + q_3 = 0$, или

$$CU_1 - CU_2 + CU_3 = 0. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) — (3), найдем

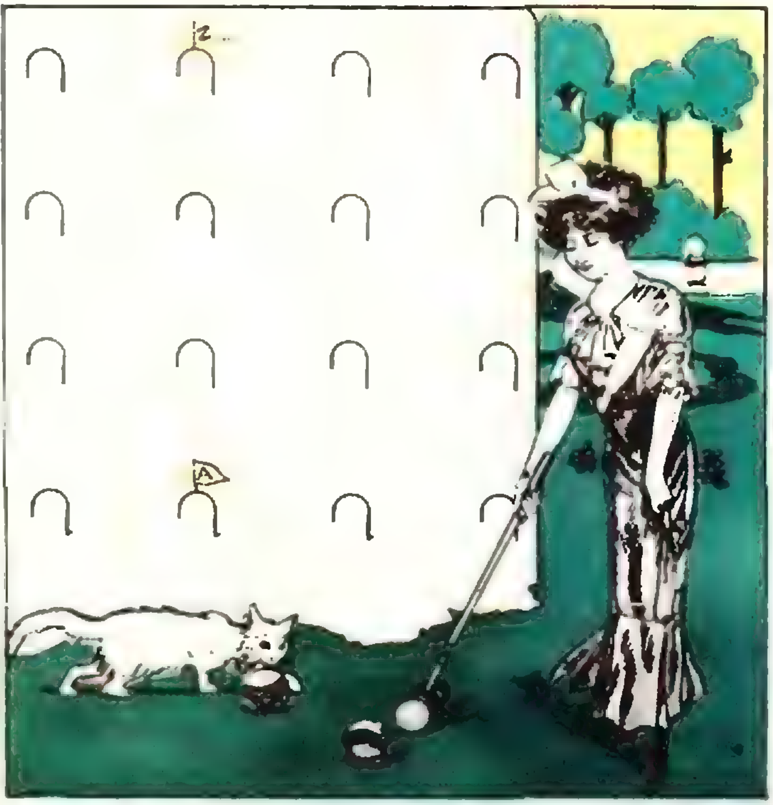
$$U_2 = \frac{4}{3} IR = \frac{4}{3} \frac{\mathscr{E}R}{3R + r}.$$

Следовательно, заряд конденсатора 2 равен

$$q_2 = C_2U_2 = \frac{4}{3} \frac{C\mathscr{E}R}{3R + r}.$$

*И. Слободецкий*

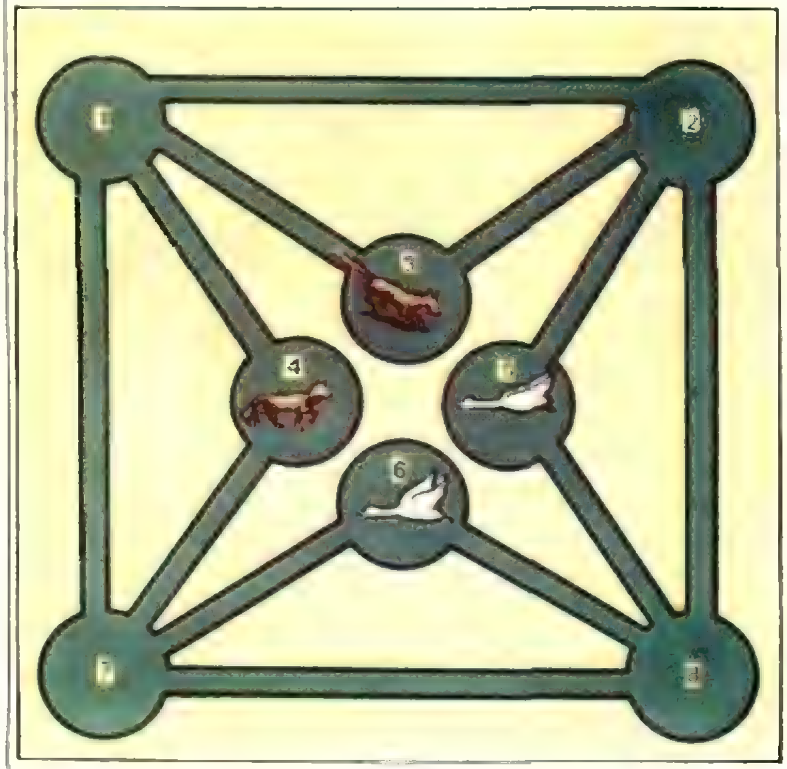
# Головоломки Сэма Лойда



## «Крокет»

Юная леди, которую вы здесь видите, задумалась, как наименьшим числом прямых ударов провести шар через все ворота, начиная с *A* и кончая *Z*.

Подскажите, как ей поступить.



## «Лиса и гусь»

За сколько ходов вы сможете поменять местами гусей и лисиц? В конечной позиции гуси должны находиться на полях 3 и 4, а лисы — на полях 5 и 6.

Передвигать фигурки начинайте с лисицы. Каждая фигурка за один ход передвигается на соседнее поле (кружок).

*Я. Суконник, П. Горнштейн*

# Простой ответ в «сложной» задаче

**В этой статье вновь поднимается вопрос о том, как следует решать планиметрические задачи — «алгебраически» или же «чисто геометрически»?*) Конечно же, было бы неразумно противопоставлять эти два метода, главная задача при подготовке к вступительным экзаменам — научиться их сочетать. Поиски «чисто геометрического» решения целесообразны далеко не всегда — только если оно приходит в голову достаточно быстро. Мы лишь хотим предостеречь будущего абитуриента от головоломных вычислений в сравнительно простой геометрической задаче, легко решающейся с помощью «чисто геометрической» идеи. Задачи, рассматриваемые в этой заметке, допускают разные, иногда очень громоздкие решения, хотя ответы всегда получаются простые. На их примерах можно легко убедиться, насколько важно уметь «геометрически» мыслить и применять в общем-то хорошо всем известные теоремы планиметрии. Конечно, чтобы найти простое геометрическое решение, нужно проявить изобретательность. Умение «решить задачу красиво» — это искусство, овладеть которым можно, лишь постоянно развивая свое геометрическое мышление и интуицию. А для этого — решайте как можно больше задач, и помните, что поиск решения — процесс творческий.**

Начнем с таких двух задач.

Задача 1 (МАИ, 1973). *В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен α. На отрезках гипотенузы, образуемых основанием опущенной на нее высоты, как на диаметрах, построены полуокружности, расположенные от гипотенузы по одну сторону с данным треугольником. Найти отношение длин отрезков катетов, заключенных внутри этих полуокружностей.*

Первое решение. Пусть $CAB$ — данный треугольник (угол $A$ — прямой), $AD$ — его высота, точки $E$ и $F$ — точки пересечения полуокружностей с катетами $AC$ и $AB$ (см. рис. 1). Очевидно, что $(DE)\perp(AC)$ и $(DF)\perp(AB)$. Поэтому

$$\begin{cases} |DF|^2=|AF|\cdot|FB|, \\ |DE|^2=|AE|\cdot|EC|. \end{cases}$$

Введем неизвестные: $x=|DF|=|AE|$ и $y=|AF|=|DE|$. Тогда, обозначив $|AC|=b$ и $|AB|=c$, получим систему:

$$\begin{cases} x^2=y(c-y) \\ y^2=x(b-x), \end{cases}$$

откуда

$$x=\frac{bc^2}{b^2+c^2}, \quad y=\frac{b^2c}{b^2+c^2}.$$

Но

$$|FB|=c-y=\frac{c^3}{b^2+c^2},$$

$$|EC|=b-x=\frac{b^3}{b^2+c^2}.$$

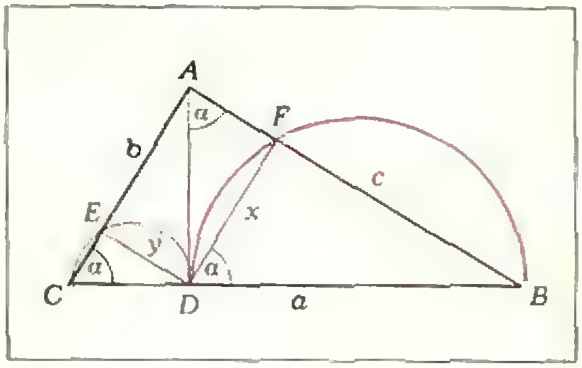


Рис. 1.

---

*) См. также статью С. В. Романова и И. Ф. Шарыгина «Алгебраический метод решения геометрических задач», «Квант», 1975, № 11.

Следовательно,

$$\frac{|FB|}{|EC|} = \frac{c^3}{b^3}.$$

Но $\frac{c}{b} = \operatorname{tg}\alpha$, значит, $\frac{|FB|}{|EC|} = \operatorname{tg}^3\alpha$.

Второе решение. Заметим, что

$$\widehat{DCE} = \widehat{DAF} = \widehat{BDF} = x.$$

Поэтому

$$\frac{|FB|}{|EC|} = \frac{|DF|\cdot\operatorname{tg}\alpha}{|EC|} = \frac{(|AF|\cdot\operatorname{tg}\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha}{|EC|} = \frac{|DE|\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}{|EC|} = \operatorname{tg}^3\alpha.$$

Мы видим, что для получения ответа вовсе не нужно вводить никаких неизвестных и составлять алгебраические системы, — достаточно лишь заметить, что перечисленные три угла конгруэнтны.

Задача 2. *Дан треугольник ABC. Проведена окружность, касающаяся стороны BC в основании проведенной к ней высоты AD длины h и проходящая через середину стороны AC длины b. Найти диаметр этой окружности.*

Первое решение. На рисунке 2 показано одно из возможных расположений: диаметр $DF$ окружности меньше высоты, окружность пересекает сторону $AC$ в двух точках $K$ и $E$, из которых верхняя точка $E$ является серединой, и не пересекает второй стороны треугольника.

Обозначим диаметр искомой окружности через $x$: $|DF| = x$, а длину хорды $KE$ — через $y$: $|KE| = y$.

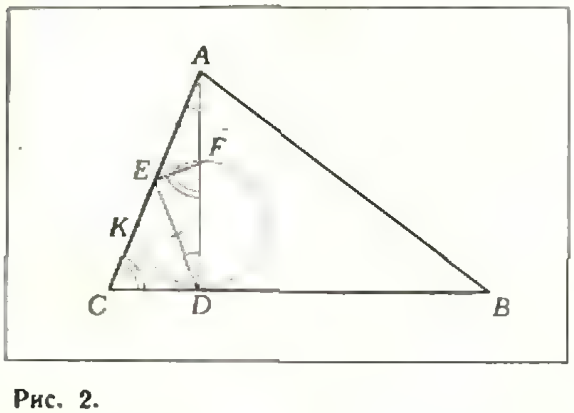


Рис. 2.

Применяя теоремы о касательной и секущей, а также о двух секущих, проведенных к окружности из одной точки ($C$ и $A$ соответственно), получаем

$$|CD|^2 = |CK|\cdot|CE|,$$
$$|AF|\cdot|AD| = |AE|\cdot|AK|.$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} b^2 - h^2 = \frac{b}{2}\left(\frac{b}{2} - y\right), \\ h(h-x) = \frac{b}{2}\left(\frac{b}{2} + y\right). \end{cases}$$

Решая эту систему относительно $x$, находим $|DF| = x = \frac{b^2}{2h}$.

Однако это решение нельзя считать исчерпывающим — ведь остались неразобранными другие возможные положения окружности (например, когда $|DF| > |AD|$, и вторая точка пересечения находится на продолжении стороны $AC$). Разбор каждого из этих случаев приводит к разным системам и, более того, требует использования разных теорем (в случае $|DF| > |AD|$ понадобится теорема о двух пересекающихся хордах).

Сейчас мы приведем другое, геометрическое решение этой задачи; убедитесь сами, что оно уже не зависит от того, как окружность пересекает стороны данного треугольника.

Второе решение. Соединим точку $E$ с точками $D$ и $F$. Поскольку $DE$ — медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника $CAD$, имеем: $|DE| = |AE| = \frac{b}{2}$, и $\widehat{EDF} = \widehat{EAD}$ (углы при основании равнобедренного треугольника). Следовательно, прямоугольные треугольники $DEF$ и $ADC$ подобны. Отсюда

$$\frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|AD|},$$

или

$$|DF| = \frac{|AC|\cdot|DE|}{|AD|},$$

то есть

$$|DF| = \frac{b^2}{2h}.$$

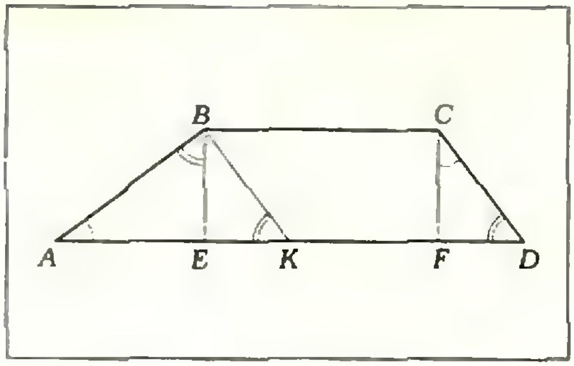


Рис. 3.

Часто решение геометрических задач алгебраическим методом приводит к сложным иррациональным уравнениям. Иногда благодаря дополнительным соображениям этого удается избежать. Вот две типичные задачи.

Задача 3 (ЛГУ, 1973). *Определить высоту трапеции, если длины ее оснований равны 6 и 11, длина одной из боковых сторон равна 4, а сумма углов при нижнем основании равна* $\frac{\pi}{2}$.

Первое решение. Проведем в трапеции $ABCD$ высоты $BE$ и $CF$ (рис. 3) и положим $|BE| = |CF| = x$. Будем считать, что $|AB| = 4$. Из прямоугольного треугольника $AEB$ находим $|AE| = \sqrt{16-x^2}$. Поэтому

$$|FD| = |AD| - (|AE| + |EF|) = (|AD| - |BC|) - |AE| = 5 - \sqrt{16-x^2}.$$

Поскольку сумма углов при основании $AD$ равна $\frac{\pi}{2}$, прямоугольные треугольники $AEB$ и $CFD$ подобны; следовательно,

$$\frac{|BE|}{|FD|} = \frac{|AE|}{|CF|}.$$

Получаем иррациональное уравнение

$$\frac{x}{5-\sqrt{16-x^2}} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x},$$

из которого находим высоту трапеции:

$$x = |BE| = 2{,}4.$$

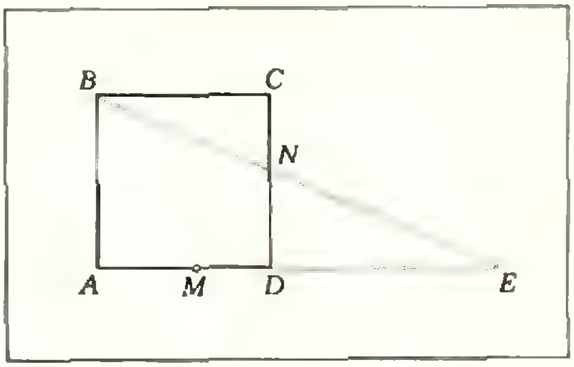


Рис. 4.

Второе решение. Сделаем дополнительное построение: проведем $(BK)$ параллельно $(CD)$. Получим (см. рис. 3 и условие задачи) прямоугольный треугольник $ABK$, из которого легко находится высота трапеции:

$$|BE| = \frac{|AB|\cdot|BK|}{|AK|} = \frac{|AB|\cdot\sqrt{|AK|^2-|AB|^2}}{|AK|} = \frac{|AB|\cdot\sqrt{(|AD|-|BC|)^2-|AB|^2}}{|AD|-|BC|} = \frac{4\cdot\sqrt{(11-6)^2-16}}{11-6} = 2{,}4.$$

Задача 4. *На сторонах $AD$ и $CD$ квадрата $ABCD$ со стороной 3 взяты две точки $M$ и $N$ так, что длина ломаной $MDN$ равна стороне квадрата. Прямые $AM$ и $BN$ пересекаются в точке $E$. Найти длину отрезка $ME$, если $|NE| = 4$.*

Первое решение. Обозначим длину отрезка $DN$ (рис. 4) через $x$. Тогда $|DE| = \sqrt{16-x^2}$. Из подобия треугольников $NDE$ и $BAE$ имеем

$$\frac{|DN|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|AE|},$$

то есть

$$\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{16-x^2}}{3+\sqrt{16-x^2}}.$$

Это иррациональное уравнение сводится к такому уравнению четвертой степени

$$x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 96x - 144 = 0.$$

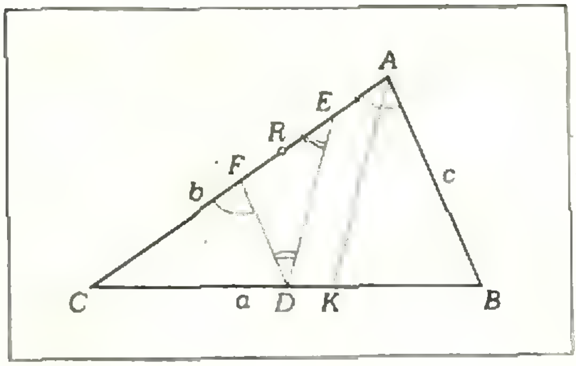


Рис. 5.

Многочлен, получившийся в левой части, раскладывается в произведение двух квадратных трехчленов: $x^2+2x-6$ и $x^2-8x+24$. Поэтому

$$(x^2+2x-6)(x^2-8x+24)=0.$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень:

$$x=|DN|=\sqrt{7}-1.$$

Теперь мы легко находим

$$|ME|=|MD|+|DE|=$$
$$=3-|DN|+\sqrt{16-|DN|^2}=$$
$$=3-\sqrt{7}+1+\sqrt{16-(\sqrt{7}-1)^2}=$$
$$=4-\sqrt{7}+\sqrt{(\sqrt{7}+1)^2}=5.$$

Простой ответ наводит на мысль, что существует другое, менее сложное решение. Вот оно.

Второе решение. Поскольку треугольники $BCN$ и $NDE$ подобны, то

$$\frac{|BC|}{|CN|}=\frac{|DE|}{|DN|},$$

или

$$\frac{3}{3-|DN|}=\frac{|DE|}{|DN|},$$

то есть

$$3(|DE|-|DN|)-|DN|\cdot|DE|=0.$$

Приняв во внимание, что $|MD|=3-|DN|$, и $|DN|^2+|DE|^2=16$, получим

$$|ME|=|MD|+|DE|=$$
$$=(3-|DN|)+|DE|=$$
$$=\sqrt{(3-|DN|+|DE|)^2}=$$
$$=\sqrt{9+16+2\cdot 0}=5.$$

Проявив изобретательность, мы смогли обойтись без иррационального уравнения, решать которое, согласитесь, было не так-то уж и приятно!

Одним из самых распространенных среди абитуриентов методов решения планиметрических задач является применение тригонометрии. Безусловно, это очень важный и полезный метод, — порой введение тригонометрических функций является естественным и оправданным путем к решению. Однако в каждом конкретном случае следует подумать, нет ли более простого, геометрического решения. Вот показательный пример.

Задача 5 (МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, 1971). *В треугольнике $ABC$ сторона $AC$ больше стороны $AB$, а угол при вершине $A$ равен $\alpha$. На стороне $AC$ взята точка $R$, так что $|AB|=|RC|$. Пусть $E$ — середина отрезка $AR$, $D$ — середина стороны $BC$. Найти угол $CED$.*

Первое решение (тригонометрическое). Обозначим длины сторон треугольника $ABC$ буквами $a$, $b$, $c$, величины его углов — буквами $A$, $B$, $C$ соответственно, а величину искомого угла $CED$ — буквой $x$.

Тогда (см. рис. 5):

$$\widehat{CDE}=180^\circ-(C+x),$$

$$|CD|=\frac{a}{2},$$

$$|CE|=|CR|+|RE|=$$
$$=c+\frac{b-c}{2}=\frac{b+c}{2}.$$

По теореме синусов находим из треугольника $CDE$:

$$\frac{|CE|}{\sin\widehat{CDE}}=\frac{|CD|}{\sin\widehat{CED}},$$

то есть

$$\frac{b+c}{\sin(C+x)}=\frac{a}{\sin x}; \tag{1}$$

из треугольника $ABC$:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

то есть

$$\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}. \qquad (2)$$

Деля соотношение (1) на соотношение (2), получаем

$$\frac{\sin B+\sin C}{\sin (C+x)}=\frac{\sin A}{\sin x},$$

или, поскольку $B=180^\circ-(A+C)$,

$$\frac{\sin (A+C)+\sin C}{\sin A}=\frac{\sin (C+x)}{\sin x},$$

то есть

$$\frac{2\sin\left(\frac{A}{2}+C\right)\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin (C+x)}{\sin x},$$

откуда

$$x=\frac{A}{2}=\frac{\alpha}{2}.$$

Второе решение (геометрическое). Мы сейчас приведем даже два геометрических решения.

1°. Проведем в треугольнике $ABC$ среднюю линию $DF$. Имеем

$$|FE|=|CE|-|CF|=\frac{b+c}{2}-\frac{b}{2}=\frac{c}{2}=|DF|,$$

то есть треугольник $DFE$ — равнобедренный. Поэтому

$$\widehat{CED}=\frac{1}{2}\widehat{CFD}=\frac{1}{2}\widehat{CAB}=\frac{\alpha}{2}.$$

2. Проведем биссектрису $AK$ угла $A$ треугольника $ABC$. Тогда $\frac{|CK|}{|CA|}=\frac{a}{b+c}$. Но и $\frac{|CD|}{|CE|}=\frac{a}{b+c}$, значит, треугольники $CDE$ и $CKA$ подобны, и отрезок $DE$ параллелен $AK$.

Следовательно, $\widehat{CED}=\widehat{CAK}=\frac{\alpha}{2}$.

Не правда ли, «тригонометрическое» решение этой задачи нельзя назвать удачным? — оба геометрических решения, безусловно, более изящны. Но в некотором смысле они и более трудны — ведь нужно было догадаться сделать дополнительные построения — провести среднюю линию $DF$ в первом случае и биссектрису $AK$ — во втором.

Упражнения

**1** (ЛГУ, 1973). В прямоугольнике $ABCD$ дано: $|AB|=a$, $|AD|=b$ $(a>b)$. Найти на стороне $AB$ точку $E$, для которой $\angle CED\cong\angle AED$.

**2** (НГУ, 1967). В плоском выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки $E$, $F$, $K$, $L$ являются серединами сторон $AB$, $BC$, $CD$, $DA$. Отрезками $EK$ и $FL$ данный четырехугольник разделен на четыре меньших четырехугольника. Доказать, что сумма площадей тех из этих четырехугольников, которые имеют вершины в точках $A$ и $C$, равна сумме площадей двух других четырехугольников.

**3** (НГУ, 1974). В трапеции $ABCD$ боковая сторона $CD$ перпендикулярна к основанию $AD$, $|BC|=a$, $|AD|=b$, $a<b$. На основании $AD$ существует такая точка $M$, что $(MB)$ перпендикулярна к $(AC)$, а $(MC)$ перпендикулярна к $(BD)$. Найти высоту трапеции.

**4** (МФТИ, 1970). Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $|AB|=a$, $|CD|=b$ $(a<b)$. Окружность, проходящая через вершины $A$, $B$ и $C$, касается $[AD]$. Найти длину диагонали $AC$.

**5** (МФТИ, 1973). Две окружности радиусов $R$ и $r$ $(R>r)$ имеют внешнее касание в точке $A$. Через точку $B$, взятую на большей окружности, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке $C$. Найти длину отрезка $BC$, если длина хорды $AB$ равна $a$.

**6** (МФТИ, 1973). В равнобочной трапеции $ABCD$ угол при основании $AD$ равен $\arcsin\frac{24}{25}$. Окружность радиуса $R$ касается основания $AD$, боковой стороны $AB$ и проходит через вершину $C$; она отсекает на сторонах $BC$ и $CD$ конгруэнтные отрезки $MC$ и $NC$ соответственно. Найти длину отрезка $BM$.

**7** (МГУ, биофак, 1973). В круге проведены два диаметра $AB$ и $CD$, $M$ — некоторая точка. Известно, что $|AM|=15$, $|BM|=20$ и $|CM|=24$. Чему равно $|DM|$?

**8** (МГУ, геолог. фак., 1974). Дан прямоугольный треугольник $ABC$ с прямым углом при вершине $C$. Угол $CAB$ равен $\alpha$. Биссектриса угла $ABC$ пересекает катет $AC$ в точке $K$. На стороне $BC$ как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу $AB$ в точке $M$. Найти угол $AMK$.

*Г. Мякишев*

# Расчет цепей переменного тока с помощью векторных диаграмм

Расчет цепей переменного тока значительно сложнее, чем цепей постоянного тока. Однако в случае, если напряжение и сила тока изменяются по гармоническому закону, существует довольно простой и наглядный метод расчета цепей — метод векторных диаграмм. С ним мы и хотим познакомить читателей в этой статье.

## Уравнение, описывающее вынужденные колебания в колебательном контуре

Промышленный переменный ток — это вынужденные электромагнитные колебания. Если напряжение $u = u(t)$ на концах цепи меняется по гармоническому закону

$$u = U_0 \cos \omega t, \qquad (1)$$

то сила тока $i$ также меняется гармонически с той же частотой $\omega$, но в общем случае ток сдвинут по фазе относительно напряжения на постоянную величину $\varphi$:

$$i = I_0 \cos (\omega t + \varphi). \qquad (2)$$

Впрочем, в первый момент после замыкания цепи колебания тока имеют гораздо более сложную форму. При замыкании электрическая цепь как бы получает «толчок», и если она обладает собственной частотой колебаний $\omega_0$, то в ней возникают свободные электромагнитные колебания. Эти колебания накладываются на вынужденные колебания частоты $\omega$, но постепенно затухают из-за наличия в цепи активного сопротивления $R$ (на котором происходит выделение энергии в виде тепла). Лишь после того как свободные колебания затухнут, вынужденные колебания можно считать установившимися. Амплитуда силы тока $I_0$ в формуле (2) — это амплитуда установившихся колебаний. Все происходит точно так же, как и в случае вынужденных механических колебаний (более подробно об этом см., например, в статье Г. Я. Мякишева «Вынужденные механические колебания», «Квант», 1974, № 11).

Довольно простой, но очень важный частный случай представляют собой вынужденные колебания в цепи, состоящей из последовательно соединенных проводника с активным сопротивлением $R$, катушки индуктивности $L$ и конденсатора емкости $C$ (рис. 1). Такую цепь называют последовательным колебательным контуром. Пусть напряжение $u$ на концах цепи меняется по закону, описываемому уравнением (1); тогда сила тока $i$ в цепи меняется в соответствии с выражением (2). Чему равна амплитуда тока $I_0$ и сдвиг фаз $\varphi$?

Как известно, уравнение, описывающее вынужденные колебания тока в этом контуре, имеет следующий вид:

$$L\frac{\Delta i}{\Delta t} + Ri + \frac{q}{C} = U_0 \cos \omega t. \qquad (3)$$

Здесь $q$ — заряд конденсатора. (Это

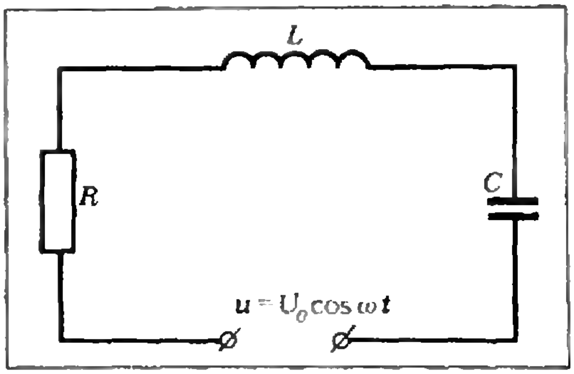


Рис. 1.

уравнение аналогично уравнению, описывающему вынужденные механические колебания, например, колебания груза на пружине.)

Уравнение (3) можно истолковать следующим образом. В любой момент времени полное напряжение ($u = U_0 \cos \omega t$) на концах цепи равно сумме напряжений на активном сопротивлении ($u_R = Ri$), на катушке индуктивности $\left(u_L = L\frac{\Delta i}{\Delta t}\right)$ и на конденсаторе $\left(u_C = \frac{q}{C}\right)$:

$$u_L + u_R + u_C = u. \qquad (4)$$

Колебания всех трех напряжений происходят с одной и той же частотой, но имеют различные амплитуды и сдвинуты по фазе друг относительно друга.

Чтобы найти амплитуду колебаний силы тока и сдвиг фаз между током и напряжением, нужно уметь складывать гармонические колебания, сдвинутые по фазе. Для этого надо знать амплитуды напряжений $u_R$, $u_L$ и $u_C$, а также сдвиги фаз этих напряжений относительно силы тока. Об этом и пойдет речь в следующих трех параграфах.

### Напряжение на активном сопротивлении

Наиболее простой случай электрической цепи — это цепь, содержащая только активное сопротивление $R$. Для такой цепи основное уравнение (3) будет иметь следующий вид:

$$Ri = U_0 \cos \omega t. \qquad (5)$$

Отсюда

$$i = \frac{U_0}{R} \cos \omega t = I_0 \cos \omega t. \qquad (6)$$

Амплитуда напряжения связана с амплитудой силы тока соотношением

$$U_0 = I_0 R. \qquad (7)$$

*Колебания силы тока и напряжения на активном сопротивлении совпадают по фазе.* Заметим, что равенство (7) ничем не отличается от закона Ома для постоянного тока.

### Напряжение на индуктивном сопротивлении

Пусть цепь состоит из катушки с индуктивностью $L$. Активным сопротивлением катушки пренебрежем. Вместо уравнения (3) будем иметь в этом случае более простое уравнение

$$L\frac{\Delta i}{\Delta t} = U_0 \cos \omega t,$$

или

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{U_0}{L} \cos \omega t. \qquad (8)$$

Теперь скорость изменения силы тока $\left(\frac{\Delta i}{\Delta t}\right)$ совершает гармонические колебания, совпадающие по фазе с колебаниями напряжения. Амплитуда этих колебаний равна $\frac{U_0}{L}$.

Для того чтобы найти выражение для силы тока, воспользуемся аналогией между электромагнитными колебаниями в контуре и механическими колебаниями груза на пружине. Как известно, сила тока $i$ соответствует скорости колебаний груза $v$, а скорость изменения силы тока $\frac{\Delta i}{\Delta t}$ соответствует ускорению груза $a$. Но колебания скорости отстают от колебаний ускорения на $\pi/2$, и амплитуда скорости $v_0$ связана с амплитудой ускорения $a_0$ соотношением $v_0 = a_0/\omega$. Это справедливо для гармонических колебаний любой природы. Поэтому если скорость изменения силы тока удовлетворяет уравнению (8), то сила тока изменяется со временем по закону

$$i = \frac{U_0}{L\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad (9)$$

Амплитуда напряжения связана с амплитудой силы тока соотношением

$$U_0 = I_0 L\omega = I_0 R_L. \qquad (10)$$

Величину $R_L = L\omega$ называют индуктивным сопротивлением.

*Итак, согласно выражениям (1) и (9) сила тока на индуктивном сопротивлении отстает по фазе от напряжения на $\pi/2$.*

### Напряжение на конденсаторе

Рассмотрим цепь, состоящую из конденсатора емкости $C$. Активным сопротивлением и индуктивностью цепи пренебрежем. Вынужденные колебания в этой цепи будут описываться уравнением

$$\frac{q}{C} = U_0 \cos \omega t. \qquad (11)$$

Заряд конденсатора колеблется в фазе с напряжением, и амплитуда этих колебаний равна $U_0C$:

$$q = U_0C \cos \omega t. \qquad (12)$$

В случае электромагнитных колебаний заряд соответствует координате тела, совершающего механические колебания, а сила тока, представляющая собой скорость изменения заряда $\left(i = \frac{\Delta q}{\Delta t}\right)$, аналогична скорости этого тела. Так как при любых гармонических колебаниях амплитуда скорости величины в $\omega$ раз больше амплитуды самой величины и скорость опережает величину по фазе на $\pi/2$, то в нашем случае

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = U_0 C\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (13)$$

*Следовательно, сила тока опережает напряжение на конденсаторе на $\pi/2$, или, что то же самое, напряжение отстает от силы тока на $\pi/2$.*

Амплитуда напряжения равна

$$U_0 = \frac{I_0}{C\omega} = I_0 R_C, \qquad (14)$$

где $R_C = \frac{1}{C\omega}$ — сопротивление конденсатора, называемое емкостным сопротивлением.

### Сложение гармонических колебаний с помощью векторных диаграмм

Складывать гармонические колебания можно по-разному (аналитически, графически и т. д.). Однако в частном случае, когда частоты колебаний одинаковы, удобнее всего воспользоваться методом векторных диаграмм. В чем же состоит этот метод?

Из курса физики для 10-го класса известно, что проекция на любое направление вектора, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega$, совершает гармоническое колебание. Если модуль вектора $\mathbf{x}_0$ равен $x_0$, то его проекция на ось $OX$ равна $x = x_0 \cos \varphi$ (рис. 2). При равномерном вращении вектора $\mathbf{x}_0$ угол $\varphi$ меняется со временем по закону

$$\varphi = \omega t + \varphi_0,$$

где $\varphi_0$ — значение угла $\varphi$ в начальный момент времени $t = 0$. Следовательно, проекция вращающегося вектора колеблется по закону

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (15)$$

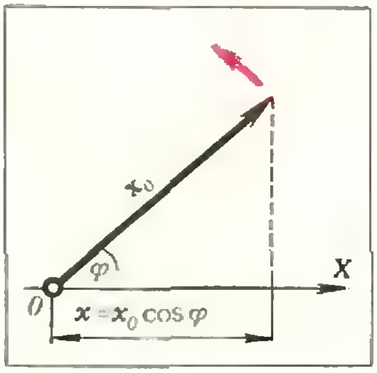


Рис. 2.

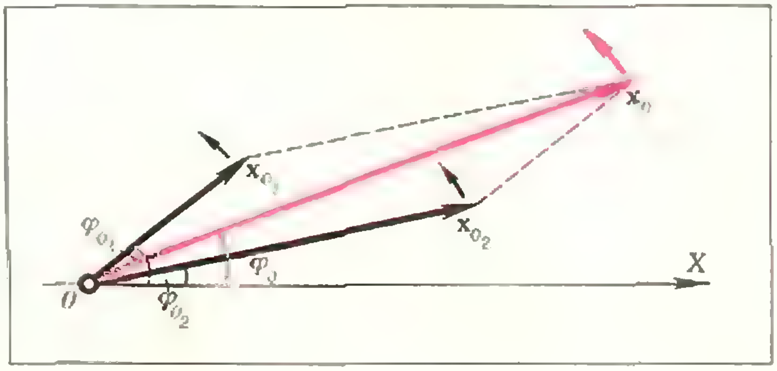


Рис. 3.

Рассмотрим теперь сложение двух гармонических колебаний, происходящих с одинаковыми частотами ω, но с различными амплитудами $x_{0_1}$ и $x_{0_2}$ и различными начальными фазами $\varphi_{0_1}$ и $\varphi_{0_2}$:

$$x_1=x_{0_1}\cos(\omega t+\varphi_{0_1}),$$
$$x_2=x_{0_2}\cos(\omega t+\varphi_{0_2}).$$

Складываемые колебания в любой момент времени имеют разность фаз $\varphi=\varphi_{0_1}-\varphi_{0_2}$. Эти колебания можно представить как колебания проекций векторов $\mathbf{x}_{0_1}$ и $\mathbf{x}_{0_2}$, повернутых друг относительно друга на угол φ и вращающихся с угловой скоростью ω (рис. 3).

Сложив векторы $\mathbf{x}_{0_1}$ и $\mathbf{x}_{0_2}$, получим суммарный вектор $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}_{0_1}+\mathbf{x}_{0_2}$. Проекция $x$ этого вектора на направление $OX$ тоже совершает гармоническое колебание. *Но проекция суммарного вектора равна сумме проекций складываемых векторов.* Следовательно,

$$x=x_1+x_2=x_0\cos(\omega t+\varphi_0), \quad (16)$$

где $x_0$ — амплитуда, а $\varphi_0$ — начальная фаза результирующего колебания. Величины $x_0$ и $\varphi_0$ можно найти, зная $x_{0_1}$, $x_{0_2}$, $\varphi_{0_1}$ и $\varphi_{0_2}$. Нетрудно показать (см. рис. 3), что

$$x_0^2=x_{0_1}^2+x_{0_2}^2+2x_{0_1}x_{0_2}\cos(\varphi_{0_1}-\varphi_{0_2}),$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{x_{0_1}\sin\varphi_{0_1}+x_{0_2}\sin\varphi_{0_2}}{x_{0_1}\cos\varphi_{0_1}+x_{0_2}\cos\varphi_{0_2}}.$$

Итак, каждое гармоническое колебание можно представить с помощью вектора, вращающегося с постоянной угловой скоростью, а сумму гармонических колебаний — с помощью результирующего (суммарного) вектора, вращающегося с той же скоростью. *Графическое изображение с помощью векторов значений гармонически изменяющихся величин и соотношений между ними и называют векторной диаграммой.*

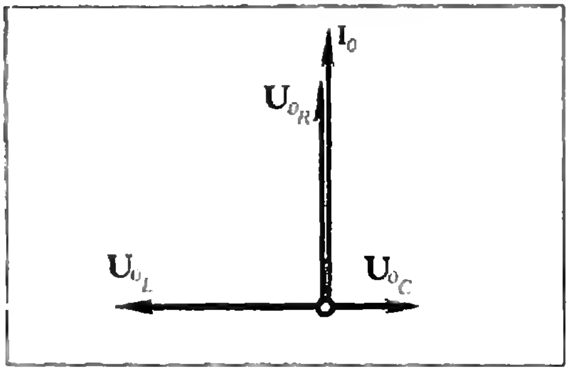


**Рис. 4.**

## Векторная диаграмма последовательного колебательного контура

Вернемся снова к цепи, изображенной на рисунке 1, и построим для нее векторную диаграмму токов и напряжений. Это позволит нам определить амплитуду силы тока в цепи и сдвиг фаз между силой тока и приложенным напряжением.

Сила тока в данный момент времени одинакова во всех участках цепи*). Поэтому удобно построение векторной диаграммы начать с вектора $\mathbf{I}_0$, соответствующего силе тока. Его можно ориентировать произвольно. Для определенности изобразим вектор $\mathbf{I}_0$ вертикальной стрелкой (рис. 4).

Напряжение на активном сопротивлении совпадает по фазе с силой тока. Поэтому вектор $\mathbf{U}_{0_R}$, изображающий это напряжение, совпадает по направлению с вектором $\mathbf{I}_0$. Его модуль $U_{0_R}=I_0R$. Колебания напряжения на индуктивном сопротивлении опережают колебания силы тока на π/2, и соответствующий вектор $\mathbf{U}_{0_L}$ должен быть повернут относительно вектора $\mathbf{I}_0$ на π/2**). Его модуль $U_{0_L}=I_0L\omega$. И наконец, вектор $\mathbf{U}_{0_C}$, соответствующий напряжению на конденсаторе,

---

*) Ток, удовлетворяющий данному условию, называют квазистационарным. При частоте промышленного тока 50 *гц* его практически всегда можно считать квазистационарным.

**) Положительному сдвигу фаз на рис. 4 соответствует поворот вектора против часовой стрелки. Можно было бы, конечно, отсчитывать угол φ в противоположном направлении.

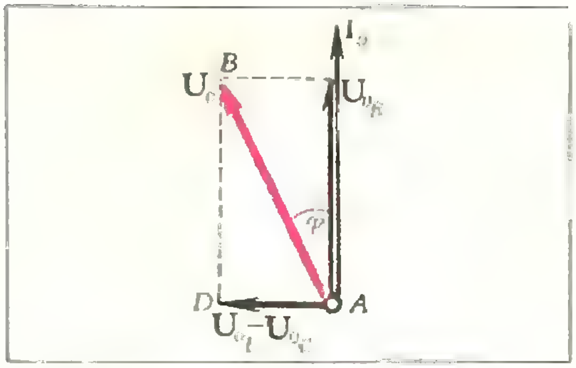


**Рис.** 5.

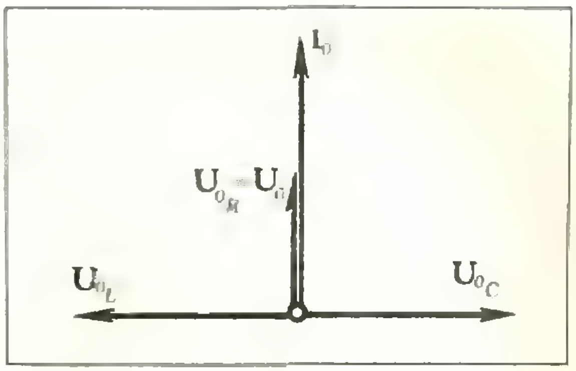


**Рис.** 6.

отстает по фазе от вектора $\mathbf{I}_0$ на $\pi/2$ (см. рис. 4). Его модуль $U_{0_C}=I_0/C\omega$.

Для того чтобы найти суммарное напряжение (см. уравнение (4)), нужно сложить три вектора: $\mathbf{U}_{0_R}$, $\mathbf{U}_{0_L}$ и $\mathbf{U}_{0_C}$. Вначале удобно сложить векторы $\mathbf{U}_{0_L}$ и $\mathbf{U}_{0_C}$ (рис. 5). Модуль этой суммы $|\mathbf{U}_{0_L}+\mathbf{U}_{0_C}|=I_0\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)$, если $L\omega>\frac{1}{C\omega}$. Именно такой случай изображен на рис. 5. После этого, сложив вектор $\mathbf{U}_{0_L}+\mathbf{U}_{0_C}$ с вектором $\mathbf{U}_{0_R}$, получим вектор $\mathbf{U}_0$, изображающий колебания напряжения на концах цепи.

Треугольник $ABD$ прямоугольный. По теореме Пифагора

$$U_0^2=U_{0_R}^2+(U_{0_L}-U_{0_C})^2=$$
$$=I_0^2R^2+I_0^2\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2.$$

Отсюда амплитуда силы тока

$$I_0=\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}=\frac{U_0}{Z}, \quad (17)$$

где $Z=\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}$ — полное сопротивление цепи. Сдвиг фаз между силой тока и напряжением равен углу $\varphi$ между векторами $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{I}_0$. Из треугольника $ABD$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}. \quad (18)$$

На рисунке 5 изображен случай, когда сила тока отстает по фазе от напряжения (при $L\omega<\frac{1}{C\omega}$ сила тока опережала бы напряжение по фазе).

Формулы (17) и (18) полностью описывают вынужденные колебания в последовательном колебательном контуре. Рассмотрим для примера один частный случай.

Сила тока в колебательном контуре достигает максимального значения $I_0=\frac{U_0}{R}$ при $L\omega=\frac{1}{C\omega}$, т. е. когда частота приложенного к контуру напряжения равна собственной частоте колебаний контура $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Наступает, как говорят, резонанс. При резонансе напряжения $u_L$ и $u_C$ одинаковы по амплитуде, но колеблются в противофазах, поэтому в любой момент времени они компенсируют друг друга. Векторная диаграмма для случая резонанса изображена на рисунке 6. Сдвиг фаз между током и приложенным напряжением становится равным нулю. Напряжение на активном сопротивлении оказывается равным напряжению на концах цепи: $u_R=iR=U_0\cos\omega t$. Резонанс в последовательном колебательном контуре называют обычно резонансом напряжений. Дело в том, что в реальном контуре индуктивное и емкостное сопротивления всегда гораздо больше активного сопротивления, и при резонансе амплитуды напряжений $U_{0_L}$ и $U_{0_C}$ оказываются больше амплитуды приложенного напряжения $U_0$.

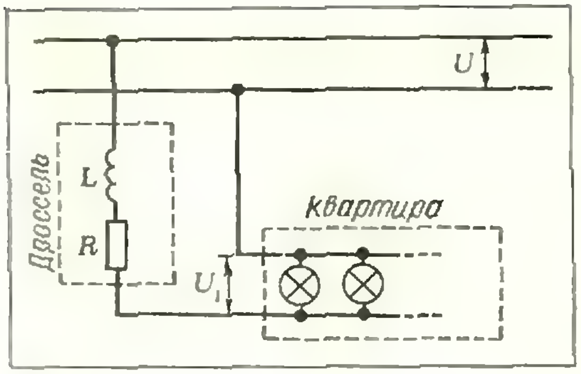


Рис. 7.

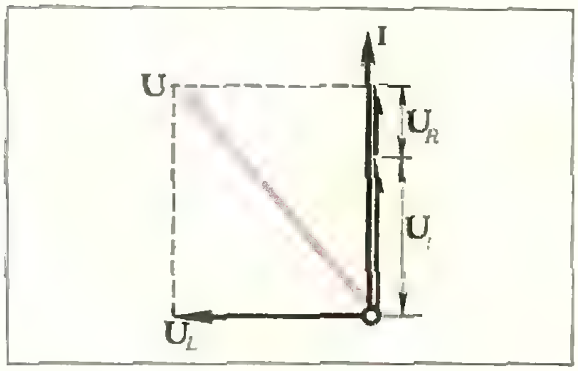


Рис. 8.

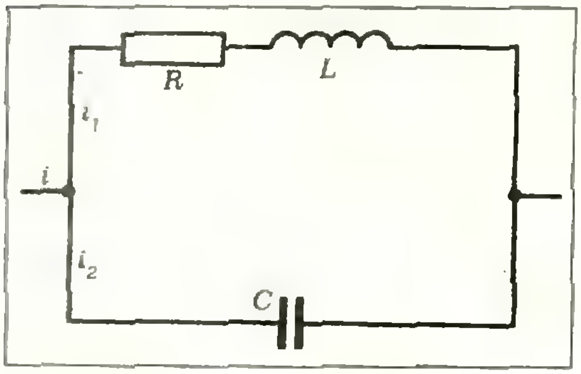


Рис. 9.

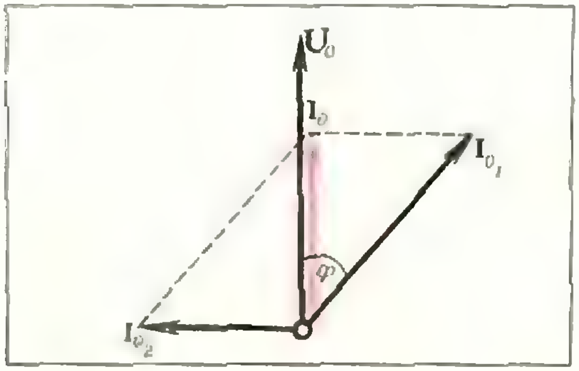


Рис. 10.

## Энергия, потребляемая колебательным контуром

С помощью векторной диаграммы можно легко показать, что потребляемая контуром энергия выделяется только на активном сопротивлении $R$.

Мощность в цепи переменного тока определяется формулой

$$P = \frac{I_0 U_0}{2}\cos\varphi. \qquad (19)$$

Из треугольника $ABD$ на рисунке 5

$$U_{0_R} = I_0 R = U_0 \cos\varphi. \qquad (20)$$

Подставляя в выражение (19) вместо $U_0\cos\varphi$ его значение из равенства (20), получим

$$P = \frac{I_0^2 R}{2} = I^2 R, \qquad (21)$$

где $I$ — действующее значение силы тока.

Заметим, что при резонансе, когда амплитуда силы тока достигает максимума, колебательный контур потребляет извне наибольшее количество энергии. Создаются оптимальные условия для передачи энергии от источника к колебательной системе.

## Примеры расчета цепей переменного тока с помощью векторных диаграмм

Рассмотрим две конкретные задачи.

Задача 1. *К магистрали переменного тока с напряжением $U = 120$ в ($U$ — действующее значение напряжения) через дроссель с индуктивностью $L = 0,05$ гн и активным сопротивлением $R = 1$ ом подключена осветительная сеть квартиры (рис. 7). Каково напряжение $U_1$ на входе в квартиру, если потребляемый ток $I = 2a$? Напряжение меняется с частотой $\nu = 50$ гц. Индуктивностью и емкостью электрической цепи квартиры можно пренебречь.*

Дроссель и осветительная сеть квартиры подключены к магистрали последовательно, поэтому ток одинаков на всех участках цепи. Напряжение $U_1$ и напряжение $U_R$ на активном сопротивлении дросселя совпадают по фазе с силой тока $I$. Напряжение $U_L$ на индуктивном сопротивлении дросселя опережает ток на $\pi/2$. Следовательно, векторная диаграмма цепи имеет вид, изображенный на рисунке 8. По теореме Пифагора

$$U^2=U_L^2+(U_R+U_1)^2=$$

$$=I^2\omega^2L^2+(IR+U_1)^2.$$

Отсюда

$$U_1=-IR\pm\sqrt{U^2-I^2L^2\omega^2},$$

где $\omega=2\pi\nu$. Так как действующее значение напряжения всегда положительно, т. е. $U_1>0$, то

$$U_1=-IR+\sqrt{U^2-I^2L^24\pi^2\nu^2}\approx 114\ \textit{в}.$$

Задача 2. *При какой частоте $\omega$ отсутствует сдвиг фаз между силой тока $i$ и напряжением $u$ в цепи, изображенной на рисунке* 9?

В этой задаче рассматривается электрическая цепь, состоящая из двух ветвей, соединенных параллельно. Одна ветвь содержит активное и индуктивное сопротивления, другая — емкостное сопротивление. Данную цепь называют параллельным колебательным контуром.

Построение векторной диаграммы начнем с вектора, соответствующего приложенному напряжению, поскольку именно напряжение одинаково для обеих ветвей цепи. Направим вектор $\mathbf{U}_0$ вертикально вверх (рис. 10). Ток $i$ является суммой токов $i_1$ и $i_2$ (см. рис. 9). Колебания тока $i_1$ отстают по фазе от колебаний напряжения, так как верхний участок цепи содержит индуктивное сопротивление. Вектор $\mathbf{I}_{01}$ повернут относительно вектора $\mathbf{U}_0$ на угол $\varphi$ в отрицательную сторону. Согласно формулам (17) и (18)

$$I_{0_1}=\frac{U_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\quad \text{и}\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{L\omega}{R}.$$

Ток $i_2$, текущий через конденсатор, опережает по фазе напряжение на $\pi/2$. Соответствующий вектор $\mathbf{I}_{02}$ повернут на угол $\pi/2$ в положительную сторону. Его модуль $I_{02}=U_0C\omega$. По условию задачи ток $i$ совпадает по фазе с приложенным напряжением, следовательно, вектор $\mathbf{I}_0$ направлен так же, как вектор $\mathbf{U}_0$. Окончательная векторная диаграмма представлена на рисунке 10. Из этой диаграммы следует, что амплитуды токов в ветвях связаны соотношением

$$I_{02}=I_{01}\sin\varphi. \tag{22}$$

Подставляя значения $I_{01}$, $I_{02}$ и $\sin\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$ в равенство (22), получим

$$U_0C\omega=\frac{U_0}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\,\frac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}.$$

Отсюда

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}.$$

При такой частоте ток $i$ и напряжение $u$ колеблются в фазе.

Если активное сопротивление $R$ мало́, так что

$$\frac{R^2}{L^2}\ll\frac{1}{LC}$$

(в реальном колебательном контуре это практически всегда так), то

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

— то есть частота переменного напряжения совпадает с частотой собственных колебаний контура.

# Московский физико-технический институт

Подробно о Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте было рассказано в «Кванте» № 10 за 1973 год. Ниже приводятся некоторые билеты вступительных письменных экзаменов в МФТИ по математике и физике в 1975 году.

## Математика

### Билет 1

1. Сумма $S$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии на 2 больше суммы первых трех членов этой прогрессии. Сумма первых шести членов равна 3. Найти $S$.

2. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 32 \cdot \cos^3 2x.$$

3. Катеты $AB$ и $AC$ прямоугольного треугольника расположены соответственно в гранях $P$ и $Q$ острого двугранного угла величины $\varphi$. Катет $AB$ образует с ребром двугранного угла острый угол $\alpha$. Определить угол между этим ребром и катетом $AC$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log^2_{\frac{2}{3}} x + \log^2_{\frac{2}{3}} y - \log^2_{\frac{2}{3}} (x + y) = 1, \\ \log_{\frac{3}{2}} x \cdot \log_{\frac{3}{2}} y + \log_{\frac{3}{2}} (x + y) = 0. \end{cases}$$

5. Площадь трапеции $ABCD$ равна $S$, отношение оснований $AD : BC = 3$. На прямой, пересекающей продолжение основания $AD$ за точку $D$ в некоторой точке $M$, расположен отрезок $EF$ так, что $AE \parallel DF$, $BE \parallel CF$ и $AE : DF = CF : BE = 2$.

Определить площадь треугольника $EFD$ (найти все решения).

### Билет 2

1. Решить уравнение

$$\cos 3x \cdot \operatorname{tg} 5x = \sin 7x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\log_3 (3^x - 1)}{x - 1} \geqslant 1.$$

3. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $M$, угол между ними равен $\alpha$. Пусть $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников $ABM$, $BCM$, $CDM$, $DAM$. Определить отношение площадей четырехугольников $ABCD$ и $O_1O_2O_3O_4$.

4. Два пешехода вышли одновременно: первый — из $A$ в $B$, второй — из $B$ в $A$. Когда расстояние между ними сократилось в шесть раз, из $B$ в $A$ выехал велосипедист. Первый пешеход встретился с ним в тот момент, когда второй прошел $\frac{4}{9}$ расстояния между $B$ и $A$. Велосипедист в пункт $A$ и первый пешеход в пункт $B$ прибыли одновременно. Определить отношение скоростей пешеходов к скорости велосипедиста, считая эти скорости постоянными.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ угол между боковым ребром $SA$ и плоскостью основания $ABCD$ равен углу между ребром $SA$ и плоскостью грани $SBC$. Определить этот угол.

## Физика

### Билет 1

1. На какое максимальное расстояние от Солнца удаляется комета Галилея? Период обращения ее вокруг Солнца равен 76 годам; минимальное расстояние, на котором она проходит от Солнца, равно $1{,}8 \cdot 10^8$ *км*. Радиус орбиты Земли равен $1{,}5 \cdot 10^8$ *км*.

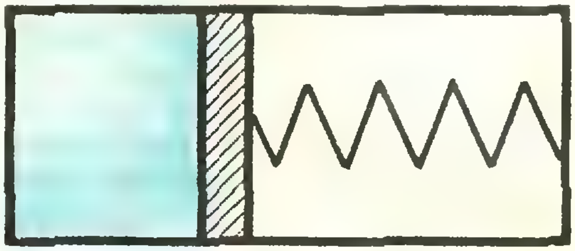


**Рис. 1.**

2. В расположенном горизонтально теплоизолированном цилиндре может перемещаться поршень, слева от которого находится идеальный газ, а справа — вакуум (рис. 1). Между поршнем и дном цилиндра расположена пружина. В начальный момент поршень закреплен, а пружина находится в недеформированном состоянии. Затем поршень освобождают. После установления равновесия объем, занимаемый газом, оказался в два раза больше начального, а температура — равной (10/11) от начальной. Определить молярную теплоемкость газа при постоянном объеме $C_V$. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ *дж/(моль·град)*.

3. В одно из плеч моста Уитстона (рис. 2) включено нелинейное сопротивление, для

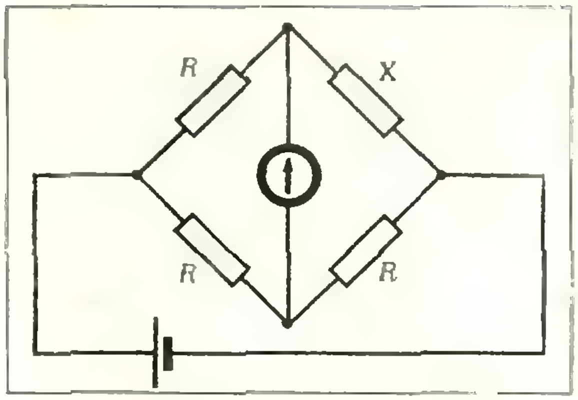


**Рис. 2.**

которого закон Ома не справедлив и зависимость тока $I$ (в амперах) от приложенного напряжения $U$ (в вольтах) имеет вид $I = 0{,}01\,U^3$. В остальные плечи моста включены одинаковые сопротивления $R = 4$ *ом*. При каком токе внешней батареи мост окажется сбалансированным?

4. С помощью положительной линзы с фокусным расстоянием $F$ получено объемное действительное изображение прозрачного кубика со стороной $l$. Изображение ближней к линзе грани кубика находится на расстоянии $2F$ от линзы. Найти объем полученного изображения.

## Билет 2

1. На высоте $h = 2$ *м* над широким сосудом открывают на $t_0 = 2$ *сек* кран, из которого вниз бьет струя воды с расходом $q = 200$ *г/сек*. Площадь отверстия крана $S = 1$ *см*$^2$. Найти изменение силы давления сосуда на подставку и нарисовать график этой силы как функцию времени. Вода из сосуда не вытекает.

2. Газовый термометр представляет собой измерительный баллон объемом $V_1 = 100$ *см*$^3$, соединенный тонкой трубкой с манометром, объем рабочего пространства которого $V_2 = 10$ *см*$^3$. Термометр заполнен изотопом гелия $He^3$. При температуре $t_0 = 27$ °С манометр показывает давление $p_0 = 300$ *мм рт. ст.* Измерительный объем погружают в жидкий гелий. Найти температуру жидкого гелия, если манометр показывает давление $p = 3{,}3$ *мм рт. ст.* Манометр остается при комнатной температуре.

3. Сферический конденсатор имеет емкость $C = 10^{-10}$ *ф*. Конденсатор заполняется слабопроводящей жидкостью с удельным сопротивлением $\rho = 10^4$ *ом·м*. Найти электрическое сопротивление между обкладками конденсатора. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ (единиц СИ).

4. Плоско-выпуклая толстая линза (рис. 3) с радиусом кривизны выпуклой части $R = 2{,}5$ *см* изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$. Где находится фокус такой линзы? Углы преломления считать малыми, так что их тангенсы можно приближенно заменить синусами.

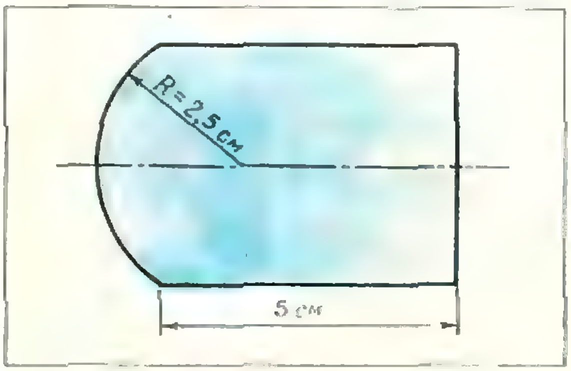


**Рис. 3.**

## Билет 3

1. Третья ступень ракеты состоит из ракеты-носителя массой $M = 50$ *кг* и головного защитного конуса массой $m = 10$ *кг*. Конус сбрасывается вперед сжатой пружиной. При испытаниях на Земле с закрепленной ракетой пружина сообщала конусу скорость $v_0 = 5{,}1$ *м/сек*. Какова будет относительная скорость конуса и ракеты, если их разделение произойдет на орбите?

2. Воздушный резиновый шарик надувают в комнате ртом при температуре 22° С. На сколько изменится объем шарика, если вынести его на улицу, где температура 1° С? Считать, что водяной пар в воздушном шарике находится в насыщенном состоянии. Давление насыщенного пара при температуре 22° С — 20 *мм рт. ст.*, при температуре 1° С — 5 *мм рт. ст.* Внешнее давление 760 *мм рт. ст.* Давлением резиновых стенок шарика пренебречь.

3. Пробой в воздухе наступает в электрическом поле с напряженностью $E_{\max} = 3\cdot 10^4$ *в/см*. Имеется сферический конденсатор с воздушным зазором, наружная оболочка которого имеет радиус $R = 4$ *см*, а радиус внутренней оболочки подбирается таким, чтобы конденсатор не пробивался при возможно большем значении разности потенциалов. Определить эту максимальную разность потенциалов.

4. Две тонкие плоско-выпуклые стеклянные линзы, будучи сложены плоскими сторонами, образуют линзу с фокусным расстоянием $F_1$. Найти фокусное расстояние $F_2$ линзы, которая получится, если сложить эти линзы выпуклыми сторонами, а пространство между ними заполнить водой. Показатель преломления стекла $n = 1{,}66$, воды — $n_в = 1{,}33$.

*С. Козел, В. Чехлов, А. Шелагин*

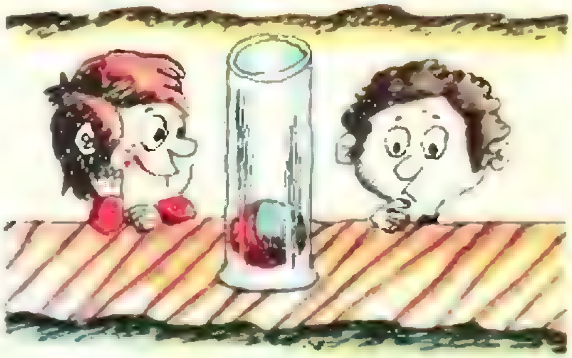
# «Квант» для младших школьников

## Задачи

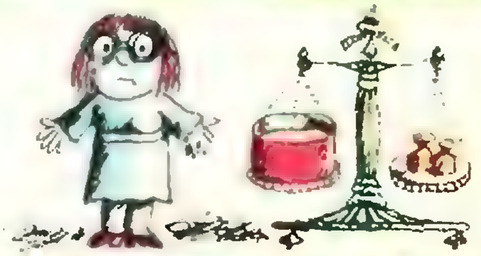
1. И сказал Кащей Ивану-Царевичу: «Жить тебе до завтрашнего утра. Утром явишься пред мои очи, задумаю три цифры — $a$, $b$, $c$. Назовешь ты мне три числа — $x$, $y$, $z$. Выслушаю я тебя и скажу, чему равно $ax+by+cz$. Тогда отгадай, какие $a$, $b$, $c$ я задумал. Не отгадаешь — голову с плеч долой».

Запечалился Иван-Царевич, пошел думу думать. Надо бы ему помочь.

2. В высокий цилиндрический сосуд диаметром 5 *см* упал мяч диаметром 4 *см*. Сможете ли вы достать мяч, не переворачивая сосуда?



3. Лаборантка утром взвесила на особо точных весах открытый сосуд с только что вскипевшим маслом. К концу дня, когда масло остыло, она взвесила сосуд еще раз. Результат взвешивания оказался иным. Почему?



4. Люся переехала в новый восьмиэтажный дом. В нем два подъезда, на каждом этаже четыре квартиры. Когда во дворе ребята спросили Люсю, в какой квартире она живет, она сказала: «А вы отгадайте. Но на все вопросы я буду отвечать «да» или «нет».

Один мальчишка сказал: «Я буду спрашивать, верно ли, что ты живешь в 1-й квартире, во 2-й, ..., в 63-й? Мне понадобится самое большее шестьдесят три вопроса».

«А мне хватит четырнадцати! — закричал самый маленький. — Этаж я узнаю за семь вопросов, а квартиру — еще за семь».

А за сколько вопросов вы смогли бы узнать номер Люсиной квартиры?

*А. Орлов*

# «Все», «некоторые» и отрицание

Был у меня недавно интересный разговор с шестиклассником Аликом, центральным нападающим футбольной команды нашего двора.

— Что, Алик, бежишь на тренировку? Зимой, небось, сменишь свой футбол на хоккей?

— Ни за что на свете!— воскликнул Алик обиженно.— Зимой надо заниматься, а не бегать за шайбой. Все хоккеисты плохо учатся,— футболисты учатся гораздо лучше!

— Почему ты так решил?

— А что? Все так считают в нашей команде, не я один.

— А не кажется ли тебе, что ты рассуждаешь сейчас, как печально известные обезьяны из книги Киплинга «Маугли»? Помнишь, они кричали на весь лес: «Мы велики! Мы свободны! Мы достойны восхищения! Мы все так говорим, значит, это правда!...»

— Это кто же обезьяна?!— возмутился Алик.

— Я не хотел обидеть тебя, Алик, но ссылкой на мнение многих нельзя ничего доказать. Земля круглая, а в древности почти все думали, что она плоская. Индейцы племени сиу, как пишет их вождь Мато Нажин, считали даже, что Земля четырехугольная, а было это уже в XIX веке... Так почему же все хоккеисты плохо учатся?

— Ну-у, вот Сережа Кукушкин. Он все время играет в хоккей и все время получает двойки.

— Ты рассуждаешь, как один француз, который говорил: «Все англичане низенькие, толстенькие и чернявые»,— только потому, что так выглядел единственный англичанин, с которым он встречался. И ты, и этот француз нарушаете *законы логики*.

Алик задумался, а я решил помочь ему. Для начала рассказал такую историю.

— В одном городе я видел на доме табличку: *«В нашем доме нет двоечников»*. На соседнем доме такой таблички не было. Как по-твоему, Алик, значит ли это, что в соседнем доме все были двоечники?

— Н-нет,— пробормотал Алик неуверенно. Не обязательно. Это значит только, что там есть двоечники... Хотя бы один двоечник... А может быть, и все там учатся на двойки. Нет, не знаю, я ведь не был там!

— А что же означает такая фраза: *«Неверно, что среди ребят есть двоечники»*?

— Это как в первом доме — все учатся без двоек.

— Значит, одно из двух,— сказал я удовлетворенно.— Либо все учатся без двоек, либо в доме есть хотя бы один двоечник. А что можно сказать о любителях шайбы?

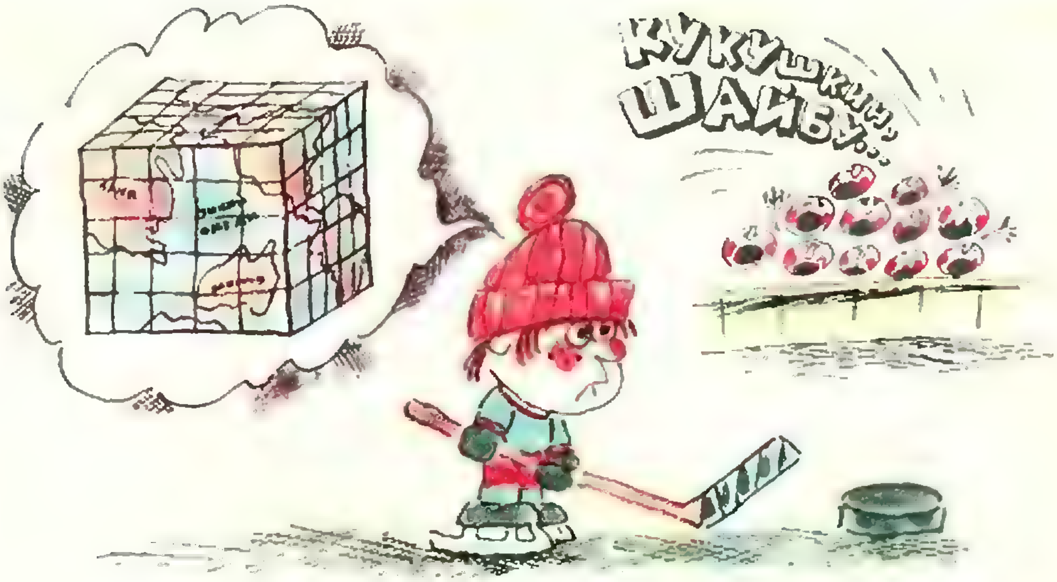
И тут выяснилось, что Алик может, подумавши, рассуждать правильно.

— Верно одно из двух: либо все хоккеисты плохо учатся, либо не все,— есть хоккеисты, которые учатся хорошо.

— Но даже в твоем классе, Алик, я знаю троих отличников, которые любят гонять шайбу. Значит, верно второе: бывают хоккеисты, которые хорошо учатся.

— Ну, конечно!

— А что же тогда означает твой пример с Сережей Кукушкиным?


КУКУшкин, ШАЙБУ...

Алик задумывается.

— Что не все хоккеисты хорошо учатся...

Итак, попробовав рассуждать логично, Алик сам пришел к правильному выводу.

С двоечниками и хоккеистами мы разобрались сравнительно быстро. Попробуем понять, как следует рассуждать в более сложных случаях. Первый пример — с разноцветными шарами. Представим себе, что в урне (небольшом ящике) могут лежать, скажем, белые и красные шары. Все шары одинакового размера и неразличимы на ощупь. Кто-то опускает руку в урну и вынимает шар. Шар оказывается, к примеру, красным. Что можно сказать о цвете остальных шаров, лежащих в урне?

Некоторые скажут: «Все шары красные». На самом деле это не верно: можно лишь утверждать, что некоторые (не обязательно все) шары красные. Могут быть и белые шары. Может быть и так, что вынутый шар — единственный красный среди белых.

Был вынут красный шар. Значит, неверно утверждение: «Все шары белые». А что верно?—«Некоторые (по крайней мере один) шары красные». Давайте потренируемся. Пусть каждое из следующих утверждений неверно.

1. *Все шары в урне красные.*
2. *Некоторые шары в урне красные.*
3. *Некоторые шары в урне белые.*
4. *Все равнобедренные треугольники являются прямоугольными.*
5. *Все ученики класса были на собрании.*
6. *Некоторые девочки были на собрании.*

Сформулируйте верные утверждения.

А теперь общая схема решения всех подобных задач — наше «волшебное средство». Пусть у нас есть множество $M$ каких-то объектов (это может быть несколько шаров, или несколько книг, или все ученики какого-то класса). Каждый из элементов этого множества может обладать, а может и не обладать некоторым свойством $A$. Например, шар может быть красным, а может и не быть; хоккеист — быть или не быть двоечником.

Закон такой: *верно может быть либо утверждение, либо его отрицание.* Одно и только одно из двух! (В логике этот закон называется *законом исключенного третьего.*) То есть, *каждое утверждение, которое мы ис-*

*пользуем, либо верно, либо неверно.*

Либо верно утверждение $B$, либо его отрицание (то есть утверждение: «Утверждение $B$ не верно»). Либо все хоккеисты плохо учатся (*обладают свойством* $A$). Если же это неверно, то хотя бы один хоккеист учится хорошо (*не обладает свойством* $A$).

Итак, вот наша схема:

Утверждение

**1.** Все предметы из $M$ обладают свойством $A$.

**2.** Некоторые предметы из $M$ обладают свойством $A$.

Его отрицание

**1.** Хотя бы один предмет из $M$ не обладает свойством $A$.

**2.** Все предметы из $M$ не обладают свойством $A$.

Обратите внимание на то, что утверждения «*некоторые предметы обладают свойством* $A$» и «*хотя бы один предмет* (а может быть, и все) *обладают свойством* $A$» означают в нашей схеме одно и то же.

А теперь — задачи.

Постройте отрицания следующих утверждений:

**7.** Все углы данного шестиугольника тупые.

**8.** Для любого $x$ из множества $A$ выполнено неравенство: $x^2 > 4$.

**9.** Некоторые люди — дети.

**10.** По крайней мере для одного $x$ из множества $A$ будет $x^2 - 2x + 1 = 0$.

**11.** Все мужчины выше 2-х метров.

**12.** Все простые числа — нечетные.

**13.** Для любого простого $p$ число $2^p - 1$ тоже простое.

Вернемся к урне, в которой лежат шары, неразличимые на ощупь. Шары могут быть белого, красного, синего, черного цветов.

**14.** Известно, что не все шары в урне белые. Верно ли, что там есть красный шар?

**15.** Известно, что не все шары одного цвета. Верно ли, что в урне есть хотя бы один не белый шар?

**16.** В урне 10 белых, 8 красных, 11 черных шаров. Сколько из них надо вынуть, чтобы наверняка попался белый шар? Чтобы попались шары всех трех цветов?

И еще две задачи — чуть посложнее.

**17.** В классе 5 отличников, 20 «хорошистов» и 10 троечников. Отличник может получить за ответ только 5, «хорошист» — 4 или 5, троечник — 3, 4 или 5. В класс пришел новый учитель, он не знает никого из учеников. Сколько человек ему достаточно вызвать к доске, чтобы наверняка была поставлена хотя бы одна пятерка?

**18.** Найдите все натуральные числа $n$, для которых справедливы неравенства: $486 < n \leqslant 501$ — и, кроме того, верно одно и только одно из следующих условий:

а) число $n$ — четное;
б) $n$ делится на 3;
в) $n$ делится на 2 или на 3;
г) $n$ не делится на 3, но делится на 4;
д) $n$ не делится ни на 3, ни на 4;
е) $n$ делится на 3, но не делится на 6;
ж) $n$ делится на 8 или на 9;
з) $n$ делится и на 3, и на 4;
и) $n$ делится на 11

Иначе говоря, для каждого числа $n$ из искомого множества должно быть верно только одно из этих девяти условий.

### К статье «Простой ответ в «сложной» задаче»

1. Точка $E$ такова, что $|BE| = \sqrt{a^2-b^2}$. Указание. Рассмотрите равнобедренный треугольник $DCE$ и затем прямоугольный треугольник $CBE$.

2. Указание. Соедините точку пересечения отрезков $EK$ и $FL$ с вершинами $A, B, C, D$; рассмотрите площади образовавшихся восьми треугольников.

3. $h = a\cdot\sqrt{\dfrac{b}{a+b}}$ Указание. Сделайте параллельный перенос диагоналей $AC$ и $BD$ так, чтобы точка $C$ диагонали $AC$ совпала с точкой $B$, а точка $B$ диагонали $BD$ совпала с точкой $C$. В образовавшихся прямоугольных треугольниках $EBM$ и $MCF$ выразите сумму длин проекций катетов $BM$ и $CM$ на гипотенузы $EM$ и $MF$ через искомую высоту $h$ и стороны $a$ и $b$.

4. $|AC| = \sqrt{ab}$. Указание. Воспользуйтесь подобием треугольников $ABC$ и $ADC$, из которого $\dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{|CD|}{|AC|}$.

5. $|BC| = a\sqrt{1+\dfrac{r}{R}}$. Указание. Продлите хорду $BA$ большей окружности $O$ до пересечения с меньшей окружностью $O_1$ в точке $D$, рассмотрите подобные треугольники $AOB$ и $AO_1D$ и найдите длину хорды $AD$. Затем в окружности $O_1$ используйте соотношение между касательной $BC$ и секущей $BD$.

6. $$|BM| = R\cdot\operatorname{cosec}\left(\arcsin\frac{24}{25}\right)\times$$
$$\times\left[1-\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}\right)\right] = \frac{5}{24}R.$$

Указание. Постройте прямоугольный треугольник $EFK$, где $E$ — точка касания данной окружности со стороной $AB$, $EF$ лежит на радиусе $EO$ этой окружности и является высотой параллелограмма $ABML$; $EK$ — сторона параллелограмма $EBMK$. Покажите, что в этом треугольнике острый угол $\widehat{EKF} = \arcsin\dfrac{24}{25}$, катет $EF$ равен $R - R\cos\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{24}{25}\right) = \dfrac{R}{5}$, предварительно доказав, что $\widehat{MOE} = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{24}{25}$.

7. $|DM| = \sqrt{|AM|^2+|BM|^2-|CM|^2} = 7$. Указание. Постройте окружность, концентрическую данной, проходящую через точку $M$. Взяв точку $N$, диаметрально противоположную точке $M$ на этой окружности, рассмотрите параллелограммы $AMBN$ и $CMDN$.

8. $\widehat{AMK} = \operatorname{arcctg}(\cos\alpha)$. Указание. Проведите хорду $CM$, опустите перпендикуляры $KD$ на $AM$ и $KE$ на $CM$ и рассмотрите прямоугольные треугольники $KDM$ и $KEC$ с двумя конгруэнтными сторонами: $|MD| = |KE|$ и $|KD| = |KC|$.

### К задачам «Квант» для младших школьников»

*(см. «Квант» № 1)*

1. Нет. Указание. Изменения в словах не меняют разности между числом букв *О* и числом букв *Д*.

2. На большой глубине трубка с запаянными концами будет сплющена силами давления воды. Открытая трубка деформироваться не будет.

3. 1431 : 27 = 53.

4. На полюсе в течение суток высота Солнца над горизонтом почти не меняется. Поэтому тень от какого-нибудь предмета в течение суток «ходит по кругу», оставаясь все время одной длины.

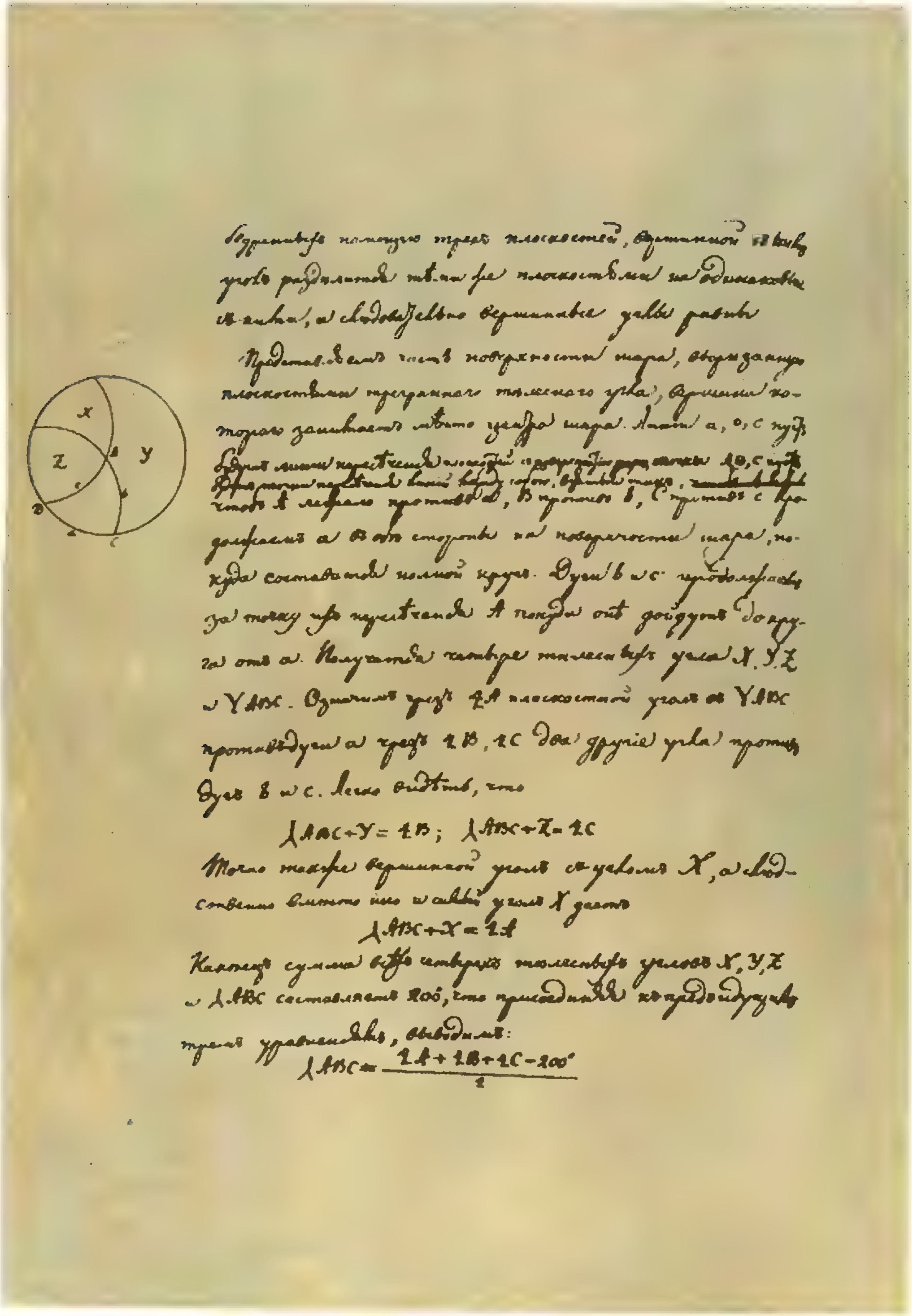
5. Второй игрок должен называть число, дополняющее до 10 число, названное первым игроком ($1+9=10$, $2+8=10$, ..., $9+1=10$).

Номер оформили:
Е. Верентинова, С. Верховский, Г. Козаковцев,
В. Карцев, Г. Красиков, Э. Назаров

Корректор *М. Л. Медведская*

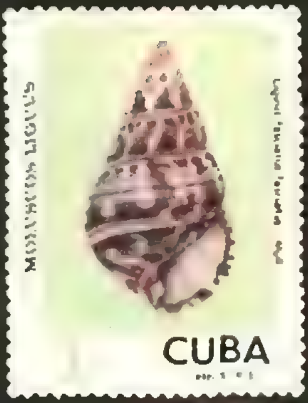
113035, Москва Ж-35, Б. Ордынка, 21/16
«Квант», тел. 231-83-62. Сдано в набор 22/XI-75 г.
Подписано в печать 30/XII-75 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,65. Т-21836.
Цена 30 коп. Заказ 2564. Тираж 325 340
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

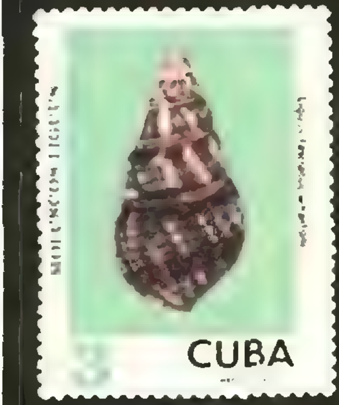
*Рукописи не возвращаются*

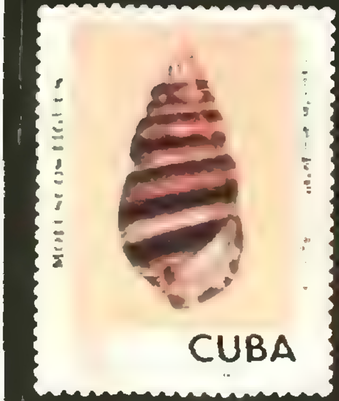


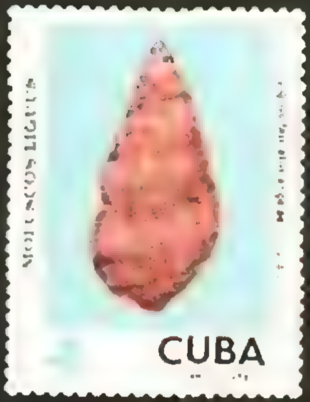
Страница из единственной дошедшей до нас полностью геометрической рукописи Н. И. Лобачевского. Это рукопись его учебника «Геометрия» (1823 год).

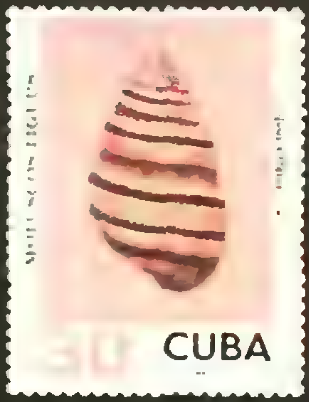
# Ракушки и... нейтрино











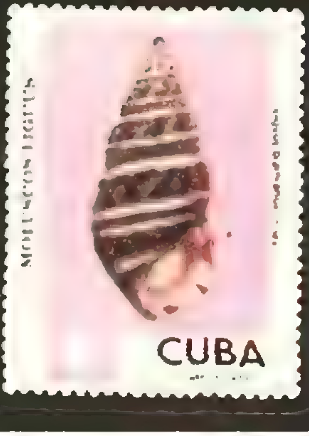
Серия кубинских почтовых марок с изображением моллюсков не только красива. Она дает повод для забавного текста. Посмотрите на семь ракушек, изображенных на этих марках. Сколько из них «правых», а сколько «левых»? «Правые» и «левые» ракушки — это ракушки, закрученные как правый или как левый винт, соответственно. Не забывайте, что правый винт остается правым, даже если его перевернуть «вверх ногами». Сколько же здесь «правых» и сколько «левых» ракушек?

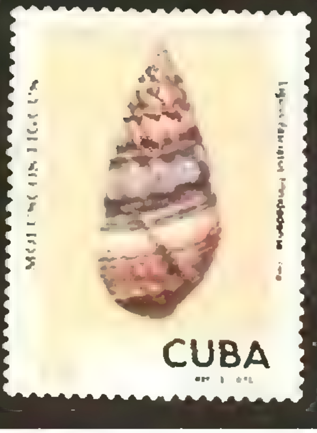
Асимметрия правого и левого в природе — очень интересное и очень странное явление. Ракушки закручены большей частью в одну сторону, хотя есть виды ракушек, у которых оба типа спирали встречаются поровну. Но и в этом случае правые особи живут в одних районах, а левые — в других. В природе асимметрия левого и правого резко выражена. Это видно и в мире животных, и в мире растений, и даже у микробов. Знаменитая дезоксирибонуклеиновая кислота (ДНК), передающая наследственные признаки организма, имеет симметрию правой спирали.

Среди элементарных частиц тоже имеются «левые» и «правые». «Право» и «лево» определяется тем, как частицы крутятся в полете. Оба сорта нейтрино (мюонное и электронное) оказались «левшами», а оба сорта антинейтрино — «правшами». Нейтрино как будто «ввинчиваются» в пространство как левый винт, а антинейтрино — как правый. Кванты света — фотоны тоже бывают «правые» и «левые».

Так, несколько неожиданно, ракушки обретают нечто общее с нейтрино и квантами.

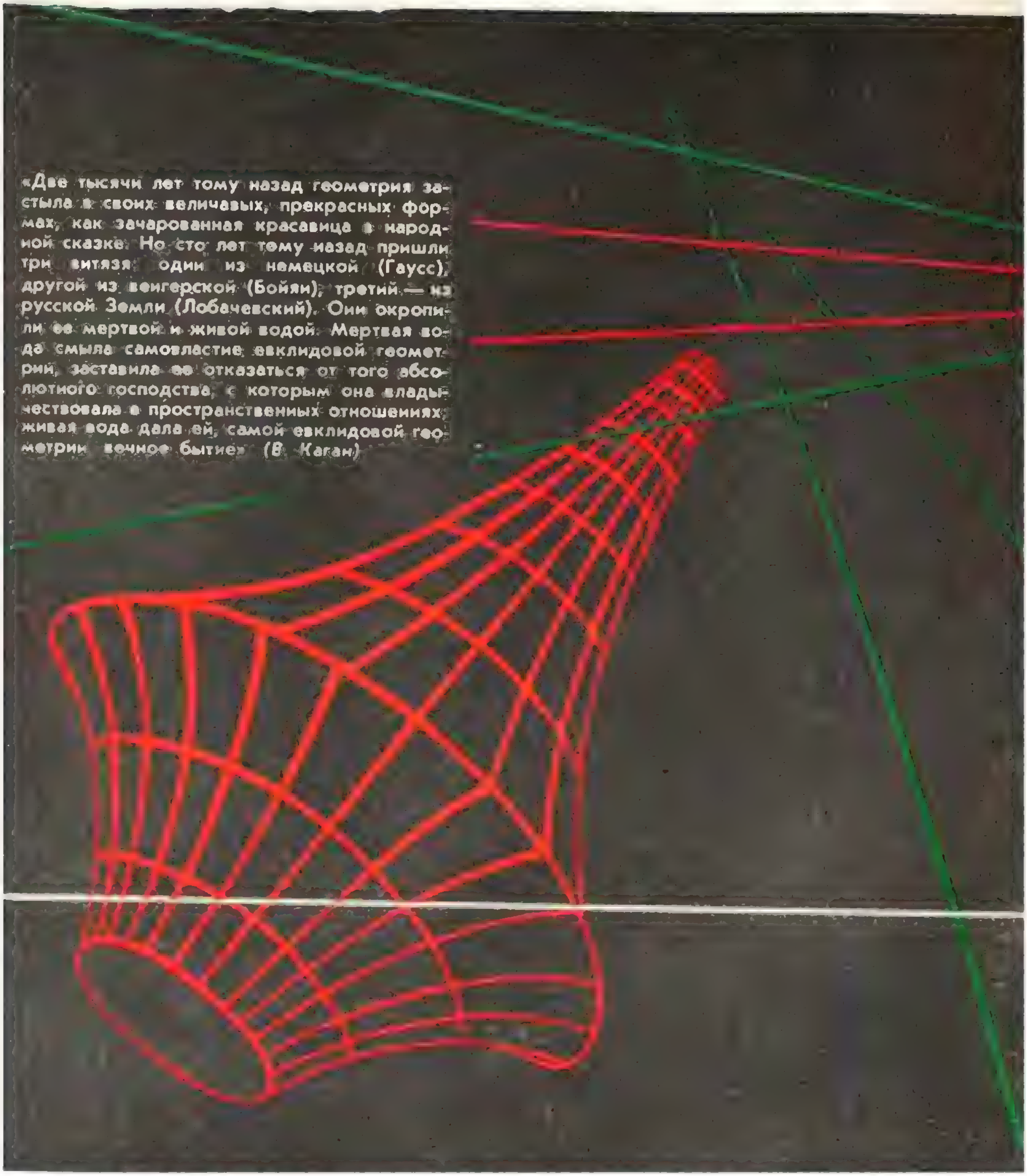
Я. С., В. Л.





Цена 30 коп.

Индекс 70465



«Две тысячи лет тому назад геометрия застыла в своих величавых, прекрасных формах, как зачарованная красавица в народной сказке. Но сто лет тому назад пришли три витязя: один из немецкой (Гаусс), другой из венгерской (Бойяи), третий — из русской Земли (Лобачевский). Они окропили ее мертвой и живой водой. Мертвая вода смыла самовластие евклидовой геометрии, заставила ее отказаться от того абсолютного господства, с которым она владычествовала в пространственных отношениях; живая вода дала ей, самой евклидовой геометрии, вечное бытие» (В. Каган)

# НОМЕР
# 3

Основан в 1970 году

# Квант

1976
3

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
*академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
*академик* А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
*(главный художник)*
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
*(зам. главного редактора)*
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
*(зам. главного редактора)*
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

**Редакция:**
В. Н. Березин
А. Н. Виленкин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова
*(художественный редактор)*
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чернова
*(зав. редакцией)*

## В НОМЕРЕ:

2 *В. Болтянский.* Загадка «аксиомы параллельных»
9 *С. Гиндикин.* Волшебный мир Анри Пуанкаре
18 *А. Ширшов.* Модель Кэли—Клейна геометрии Лобачевского
26 *М. Волькенштейн.* Квантование и стоячие волны

**Лаборатория «Кванта»**

34 *В. Майер.* Опыты по полному внутреннему отражению

**Задачник «Кванта»**

36 Победители конкурса «Кванта»
38 Задачи М371 — М375; Ф383 — Ф387
39 Решения задач М331—М335; Ф343—Ф347

**Практикум абитуриента**

51 *В. Ляховский.* Логарифмические и показательные ...
58 *А. Диденко, Г. Дубровский.* Применение диаграмм тепловых процессов
63 *Ю. Нестеренко, М. Потапов, А. Склянкин, Н. Тяпунина.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

**«Квант» для младших школьников**

68 Задачи
69 *Е. Семенов.* Ошибки Степы Мошкина

74 **Ответы, указания, решения**

**Смесь** (*с. 25, 50, 67*)

---

На обложке изображена «модулярная фигура», играющая важную роль в теории функций и теории чисел. Впервые она появилась у Гаусса. С точки зрения модели Пуанкаре плоскости Лобачевского (см. статью «Волшебный мир Анри Пуанкаре») — это покрытие двух плоскостей Лобачевского конгруэнтными «равнобедренными» треугольниками, у которых боковые стороны параллельны, а углы при основании равны 60°. На евклидовой плоскости таких треугольников, конечно, нет. Треугольники, все время уменьшаясь в своих «евклидовских» размерах (но не с точки зрения геометрии Лобачевского), «прижимаются» к линии, разделяющей плоскости

---

*© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1976 год*

*В. Болтянский*

# Загадка «аксиомы параллельных»

СЕКУЩАЯ ПЛОСКОСТЬ
ПРЕДЕЛЬНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ЛОБАЧЕВСКОГО

## Необычная ассоциация

В одном городе учредили ассоциацию коллекционеров, объединившую филателистов, нумизматов, собирателей игольных ушков и т. п. Решили, что правление ассоциации должно состоять *из нечетного числа персон* (это удобно при голосовании). Решили также, что правление разместится в одном здании, причем у каждой персоны (т. е. члена правления) будет свой телефонный аппарат внутренней связи. А чтобы не усложнять устройство внутренней связи, решили коммутатор не устанавливать, а прямо соединить каждую персону *телефонными линиями с какими-либо тремя* персонами.

— Ну, что же, — сказал один из учредителей ассоциации, — я думаю, такая организация работы правления достаточно удобна.

— Особенно мне нравится, — сказал второй (известный Собиратель математических диковинок), — что работу правления можно описать *абстрактной аксиоматической схемой*. Судите сами, у нас есть три первоначальных понятия: «персона», «линия», «соединяет», и мы хотим, чтобы выполнялись следующие *аксиомы*:

1) *число персон нечетно*;

2) *каждая линия соединяет ровно две персоны*;

3) *каждая персона соединена линиями ровно с тремя другими персонами*.

— Ну, и какой смысл в этой аксиоматике? Можно ли из нее вывести какие-либо теоремы, чтобы получилась «теория», отражающая работу нашего правления?

— Отчего же, извольте! Во-первых, аксиома 1 показывает, что хотя бы одна персона существует (ведь нуль — четное число!). Далее, аксиома 3 убеждает нас, что поскольку есть хотя бы одна персона, то найдутся еще три другие, так что общее число персон не меньше четырех. Наконец, еще раз применяя аксиому 1, находим, что *общее число персон* *не меньше пяти*. Такова первая теорема этой «теории».

— Что же, это утверждение, и самом деле, можно считать теоремой, поскольку вы его доказали, то есть, логически вывели из аксиом.

— Или вот еще пример очень простой теоремы: *среди любых пяти персон обязательно найдутся две, которые не соединены линией.*

— Ну, это понятно: иначе к каждому из этих пяти было бы подведено не менее четырех линий.

— Совершенно верно! Кстати, вы сказали: линия «подведена» к персоне. Этому можно дать четкое определение в рамках нашей аксиоматики. Именно, если $A$ — некоторая персона и $l$ — линия, соединяющая ее с некоторой другой персоной, то пару $(A, l)$ будем называть *вводом*.

— И теперь можно сказать, что каждая персона $A$ участвует ровно в трех вводах $(A, l_1)$, $(A, l_2)$, $(A, l_3)$. Это и будет означать, что к $A$ «подведены» три линии $l_1$, $l_2$, $l_3$ (аксиома 3).

— Прекрасно! — заулыбался Собиратель математических диковинок. — Продолжая ваше рассуждение, можно сформулировать следующую теорему: *число всех вводов нечетно*. Ведь персон — нечетное число (аксиома 1), и каждая участвует ровно в трех вводах.

Внезапно лицо Собирателя омрачилось. Голос его стал унылым.

— К сожалению, можно доказать также и то, что *число вводов четно*. Ведь каждая линия $l$ (соединяющая, скажем, персоны $A$ и $B$) участвует в двух вводах: $(A, l)$ и $(B, l)$, так что число всех вводов вдвое больше числа всех линий.

— Да, но это же противоречит предыдущей теореме?

— В том-то и беда. Выходит, наша аксиоматика *противоречива*, раз из нее можно вывести две теоремы, противоречащие друг другу. Так что лопнула наша теория: систему связи, описываемую аксиомами 1, 2 и 3, просто невозможно осуществить.

## Другая аксиоматика

— Что же нам делать? Пойти на то, чтобы число членов правления было четным? Но ведь нам так хотелось этого избежать!

— Почему же, есть и другой выход, — ответил Собиратель математических диковинок. — Оставим аксиомы 1 и 2 прежними, а третью аксиому заменим следующей:

3') *каждая персона соединена линиями ровно с четырьмя другими персонами.*

Правда, придется проложить большее число линий, но зато аксиоматика станет непротиворечивой, да и теоремы сохранятся. По-прежнему, общее число персон не менее пяти; из любых шести персон найдутся две, которые не соединены линией; общее число вводов будет четным (и здесь уже нет никакого противоречия). Можно будет доказать и дальнейшие теоремы.

— Позвольте, но почему вы так уверены в отсутствии противоречий? Да, с числом вводов теперь все в порядке; но, возможно, доказывая все новые и новые теоремы, мы все же натолкнемся когда-нибудь на противоречие. Ведь не будете же вы утверждать, что заранее знаете *все* теоремы, которые можно доказать в теории, основанной на этой новой аксиоматике! А если так, то кто же может гарантировать отсутствие противоречий?

— О, здесь я вполне уверен! Сейчас я объясню вам причину такой уверенности. Вы ведь, надеюсь, не сомневаетесь в «правильности» арифметики?

— Нисколько не сомневаюсь; но арифметика-то тут причем?

— А вот причем. Я сейчас из «материала» арифметики построю, как говорят математики, *модель* для рассматриваемой аксиоматики. Кстати, сколько персон (ориентировочно) будет в правлении?

— Думаю, не меньше 30 человек.

— Прекрасно! Условимся считать

«персонами» числа 1,2,…, 36,37.

Удобно расположить их на окружности (рис. 1), чтобы за 37 «следующим» было число 1. Теперь «линиями» будем называть пары чисел, причем лишь такие пары, в которых числа стоят либо рядом, либо через одно на этой окружности. Например, «линиями» будут пары (1; 3), (4; 5), (37; 2); а вот пара (3; 6) «линией» не будет — числа стоят слишком далеко друг от друга.

— Кажется, я понял, что вы хотите. В этой, как вы сказали, модели, есть 37 «персон», т. е. нечетное число (аксиома 1). Каждая линия соединяет ровно две персоны (аксиома 2), так как пара состоит из двух чисел.

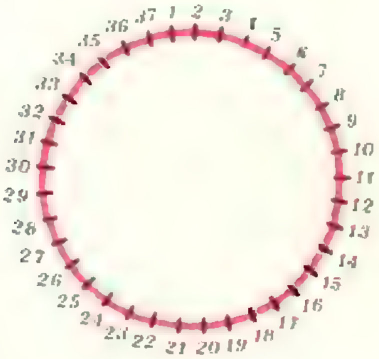


**Рис. 1.**

Кроме того, ясно, что в каждой «персоне» проведены ровно четыре линии (аксиома 3); это можно пояснить схемой, показанной на рисунке 2. Значит, в этой модели выполняются все аксиомы 1, 2, 3. Однако почему же это гарантирует непротиворечивость рассматриваемой аксиоматики?

— Так ведь модель-то эта «сделана» из чисел! Если бы из аксиом 1, 2 и 3 можно было вывести две противоречащие друг другу теоремы, то это противоречие обнаружилось бы и в этой модели. Выходит, что, рассуждая о числах, мы могли бы получить противоречие. Но, кажется, в непогрешимости арифметики вы не сомневаетесь?

— Ну, что же, я понял ваши доводы. И, позвольте, повторю их, так сказать, в общем виде. Вы рассматриваете две теории, $P$ и $Q$. Теория $P$ (в качестве нее была взята арифметика) не вызывает сомнений, рассматривается, как незыблемая и непогрешимая. Теория же $Q$ — это новая теория, определяемая списком аксиом. Нам нужно получить гарантии непротиворечивости теории $Q$. Для этой цели применяется такой прием: из понятий теории $P$, как из «строительного материала», пытаются построить модель теории $Q$, то есть такую схему, в которой все аксиомы теории $Q$ выполняются; если это удается сделать, то тем самым непротиворечивость теории $Q$ доказана.

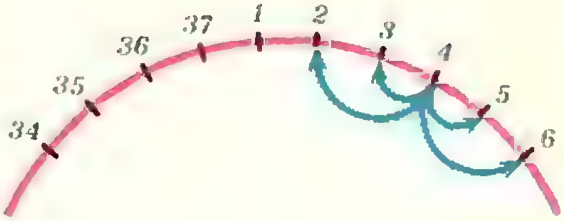


**Рис. 2.**

## Странная геометрия

— Мы несколько отошли от обсуждения вопросов, связанных с ассоциацией коллекционеров. Но поскольку я коллекционирую математические диковинки, я хочу сейчас предложить вам одну из них: довольно необычную модель геометрии.

— С удовольствием «взгляну» на эту диковинку.

— Представьте, что из плоскости

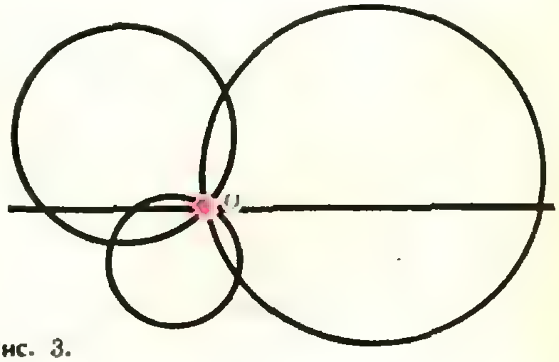


**Рис. 3.**

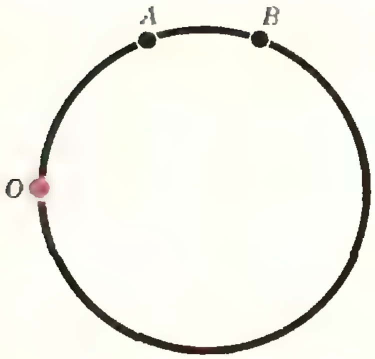


Рис. 4.

удалена (или, как говорят математики, *выколота*) одна точка $O$ (она, конечно, есть, но мы как бы не считаем ее «точкой»). Все же остальные точки (отличные от $O$) по-прежнему будем считать точками.

— В этом весь фокус?

— Минуточку терпения. Каждую окружность, проходящую через эту выколотую точку $O$, будем теперь называть *«прямой»* (сюда же отнесем и *«окружности бесконечного радиуса»*, то есть прямые, проходящие через $O$). На рисунке 3 изображено несколько «прямых».

— Это уже необычно. Берем заведомо искривленные линии и объявляем их «прямыми». Только зачем это?

— Давайте, для примера, проведем «прямую» через две точки $A$ и $B$. Как это сделать?

— Вы хотите, чтобы «прямая» проходила через точки $A$ и $B$. Кроме того, раз это «прямая», то она должна проходить и через точку $O$. Значит, надо провести окружность через три точки $A$, $B$, $O$ (рис. 4). Это сможет сделать каждый школьник.

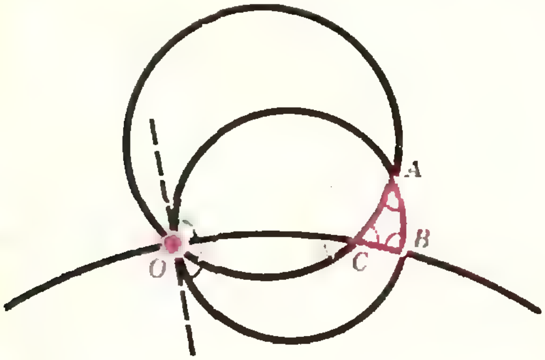


Рис. 5.

— Но такая «прямая» *существует* и притом *только одна*. Вы согласны?

— Да, поскольку три точки однозначно определяют окружность.

— Значит, в этой модели выполняется аксиома: *через две разные точки проходит прямая и притом только одна*.

— Кажется, меня начинает интересовать ваша диковинка.

— А теперь посмотрите на рисунок 5. На нем изображен треугольник $ABC$. Чтобы найти сумму углов этого треугольника, можно взять сумму отмеченных углов при точке $O$. А углы эти составляют вместе развернутый угол. Значит, в этой модели *сумма углов треугольника равна* $2d$.

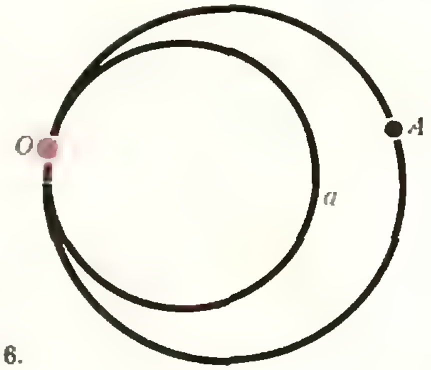


Рис. 6.

— Потрясающе!

— Заметьте еще, что в этой модели через точку, лежащую вне данной «прямой», проходит единственная «прямая», не пересекающая данной. Это будет окружность, касающаяся данной «прямой» в точке $O$ (рис. 6): ведь точка $O$ считается выколотой, так что две изображенные «прямые» не имеют общих точек.

— Выходит, что в этой модели выполняется и «аксиома параллельных»?

— Совершенно верно. И вообще, в этой модели выполняются все аксиомы (а значит, и теоремы) той геометрии, которая изучается в школе (ее называют *геометрией Евклида*, по имени ученого, который свыше

2000 лет назад дал систематическое ее изложение). Правда, я описал модель не до конца. Не было сказано, как измерять длины, какие треугольники следует считать равнобедренными, и т. д. Кроме того, надо добавить еще точку ∞*) для полноты этой модели. Но сущность дела ясна: мы построили модель обычной (евклидовой) геометрии.

— Что же получается? Исходная теория *P* — это геометрия, и из «материала» этой теории построена модель той же самой теории?

— Совершенно справедливо! Привел же эту модель я лишь для того, чтобы показать, что не так уж странно считать кривые линии «прямыми» в некоторой модели **).

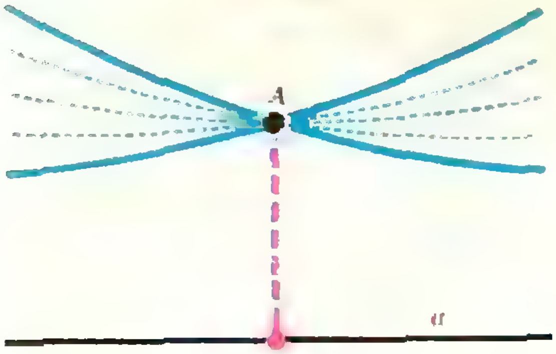


Рис. 7.

## Трагедия Лобачевского

— А теперь — еще один экспонат из коллекции математических диковинок. Речь идет о геометрии, открытой великим русским математиком Н. И. Лобачевским.

— Насколько я знаю, он построил геометрию, в которой через точку можно провести более одной параллельной к данной прямой (рис. 7).

— Верно. И хотя все рассуждения Лобачевского были логически безупречны, он при жизни так и не добился признания своих идей. Слишком уж необычны были выводы.

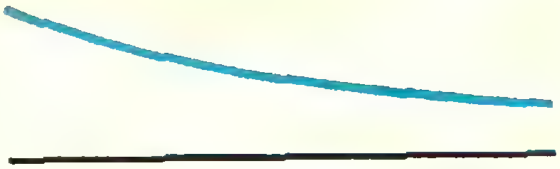


Рис. 8.

— Например?

— Ну, например, параллельные прямые сближаются (рис. 8). Можно даже построить «бесконечный треугольник», стороны которого попарно параллельны (рис. 9). И хотя на рисунке *9* изображены кривые линии, в геометрии Лобачевского существуют прямые, которые именно так расположены. Далее, сумма углов треугольника всегда меньше 2 *d* и т. д., и т. п.

— Но ведь это же все не так на самом деле!!!

— Вот, вот! То же говорили и современники Лобачевского. А он понимал, что дело-то здесь в том, противоречива или же нет та геометрия, которая получается из положенных в ее основу аксиом; кроме того, разговоры: «в действительности все не так», — основаны лишь на том, что нашим наблюдениям доступна небольшая часть пространства, где различия между евклидовой геометрией и его геометрией незаметны (лежат за пределами точности измерений). И, кстати, современная физика все более подтверждает это.

— Удивительно. Но вы, насколько я понял, хотели говорить о чисто

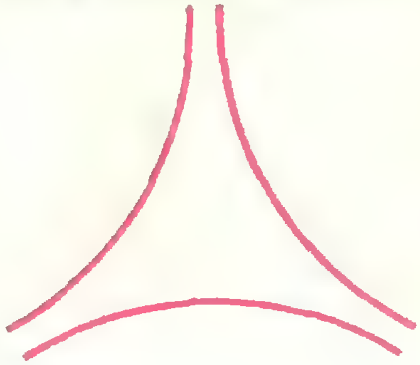


Рис. 9.

---

*) ∞ — это «бесконечно удаленная точка».

**) Читателю мы советуем понять, «что» в этой модели «к чему»; для этого полезно воспользоваться циркулем.

математическом подтверждении правильности геометрии Лабачевского?

— Точнее, о ее *непротиворечивости*.

— Ах, понимаю! Видимо, вы хотите сказать, что из «материала» какой-то теории $P$, в правильности которой мы не сомневаемся, можно построить *модель геометрии Лобачевского*?

— Совершенно верно! И этой теорией $P$ является евклидова геометрия! Оказывается, из «материала» геометрии Евклида можно построить модель геометрии Лобачевского.

— И что же, Лобачевский знал об этом?

— Нет; но он построил другую замечательную модель. Ему удалось из «материала» своей геометрии построить модель евклидовой геометрии.

— Значит, если бы все были уверены в непогрешимости геометрии Лобачевского и сомневались в правильности геометрии Евклида, то этой моделью можно было бы убедить всех, что геометрия Евклида тоже непротиворечива! А ведь желательно, чтобы все было наоборот.

### Запоздалая справедливость

— Вы теперь видите, что Лобачевский хорошо понимал, что такое модель, и как можно было бы доказать непротиворечивость его геометрии. Надо было, приняв евклидову геометрию за исходную теорию $P$, построить из ее «материала» модель теории $Q$ — геометрии Лобачевского. Но Лобачевскому не удалось сделать это. Такие модели были найдены лишь после смерти ученого.

— Кто же сделал это?

— Бельтрами, Кэли, Клейн, Пуанкаре и другие ученые *).

— И что же, эти модели очень сложны?

— Нет. Вот как, например, строится модель, найденная выдающимся французским математиком Анри Пуанкаре *). В этой модели рассматриваются только точки, лежащие внутри некоторого круга $K$. «Прямые» же определяются так: берется окружность (или прямая), пересекающая под прямым углом окружность круга $K$, и часть этой окружности, лежащая внутри $K$, объявляется «прямой». На рисунке 10 показано несколько «прямых» в этой модели.

— Эта модель немного напоминает модель геометрии Евклида, о которой мы говорили раньше. Там тоже в качестве «прямых» были взяты окружности.

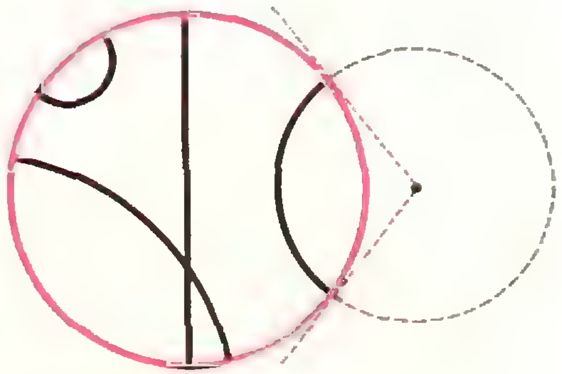


Рис. 10.

— И, обратите внимание, в этой модели тоже можно доказать, что через две точки проходит единственная «прямая». Можно и этой модели рассматривать треугольники (рис. 11). А рисунок 12 показывает, что через точку вне «прямой» и можно провести *бесконечно много* «прямых», не пересекающихся с «прямой» $a$. Две из них (те, которые касаются прямой $a$ на границе круга $K$, то

---

*) См., например, статью С. Гиндикина «Феликс Клейн», «Квант», 1975, № 12.

*) В статье С. Гиндикина «Волшебный мир Анри Пуанкаре» (с. 9), рассказывается о модели, в которой «точками» служат точки верхней полуплоскости, а прямыми — вертикальные лучи и ортогональные к граничной прямой верхние полуокружности. Подумайте, почему это — одинаковые модели (вспомните об инверсии).

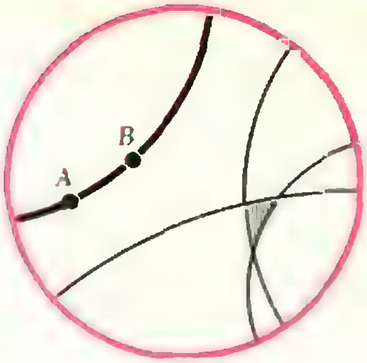


Рис. 11.

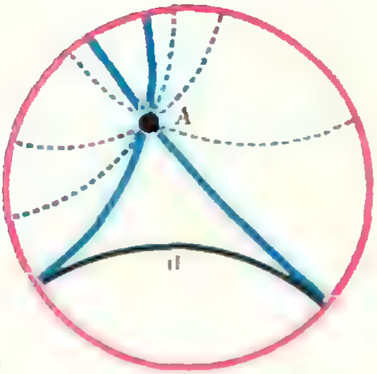


Рис. 12.

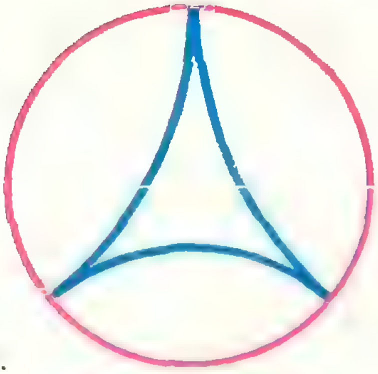


Рис. 13.

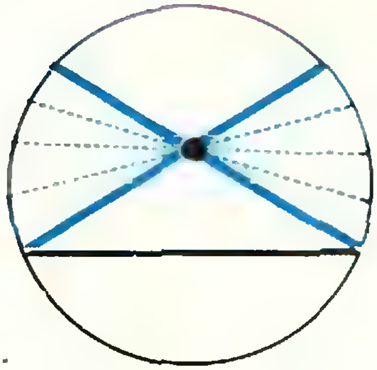


Рис. 14.

есть как бы в «бесконечно удаленных точках») параллельны прямой *a*. Ну, а на рисунке 13 изображен «бесконечный треугольник», стороны которого попарно параллельны. Короче, это есть модель именно геометрии Лобачевского. Конечно, я описал эту модель далеко не полностью: надо указать, как измеряются длины, определить, какие фигуры считаются равными (конгруэнтными) и т. д. Но в общих чертах модель строится именно так.

— А другие ученые, имена которых вы назвали, построили такую же модель?

— О нет! Сейчас известно много разных моделей геометрии Лобачевского. Например, в работах Клейна и Кэли построена модель, в которой тоже рассматриваются только точки, лежащие внутри некоторого круга *K*, но «прямыми» у них считаются *хорды* этого круга (без концов). На этой модели еще проще увидеть, что через точку вне «прямой» *a* проходит бесконечно много «прямых», не пересекающихся с *a* (рис. 14). Однако углы, например, в этой модели измеряются сложнее, чем в модели Пуанкаре.

— Да, ваши «математические диковинки» очень интересны. Теперь понятно значение открытия Н. И. Лобачевского, который не только построил совершенно необычную геометрию, но и положил начало для нахождения все новых и новых «геометрий». Я слышал, что математика сейчас рассматривает много разных пространств и геометрий, причем они применяются в физике и других областях. Наверно, и в вашей коллекции есть немало удивительных пространств, геометрий, математических «миров»?

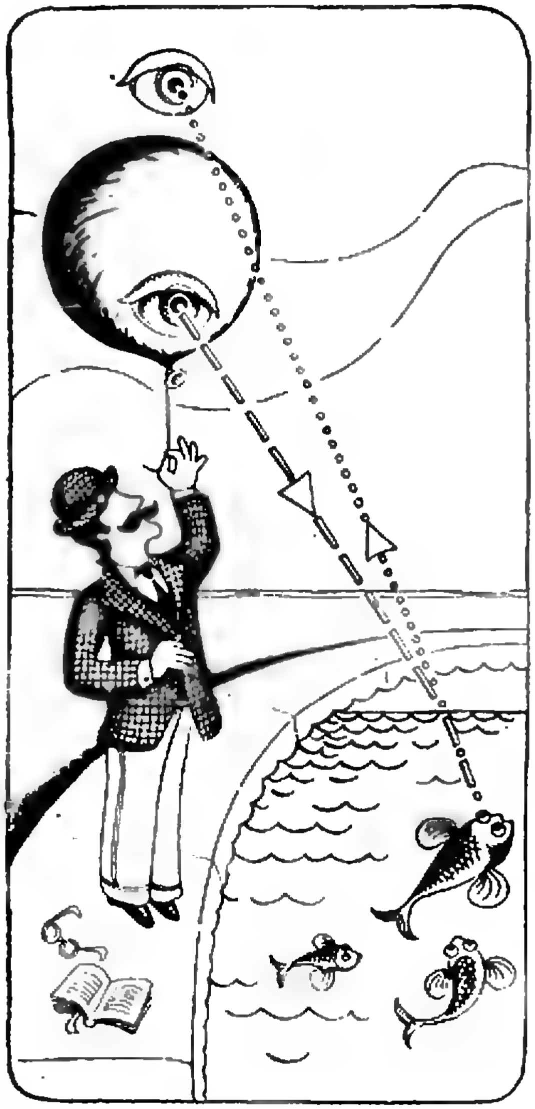
— Есть, конечно. Но об этом поговорим как-нибудь в другой раз.

С. Гиндикин

# Волшебный мир Анри Пуанкаре

*Я описал воображаемый мир, обитатели которого неминуемо должны были бы прийти к созданию геометрии Лобачевского.*

А. Пуанкаре



Когда сегодня рассказывают историю геометрии Лобачевского, может сложиться впечатление, что докажи создатели неевклидовой геометрии ее непротиворечивость — и она была бы благосклонно принята. Однако прежде всего критиков смущало не отсутствие этого доказательства. Люди привыкли, что геометрия имеет дело с нашим реальным пространством и что это пространство описывается евклидовой геометрией. Характерно, что Гаусс выделял геометрию среди остальных разделов математики, считая ее подобно механике экспериментальной наукой. Но при этом Гаусс, так же как и Лобачевский и Бойяи, понимал, что, во-первых, возможны логически стройные геометрические построения, за которыми не стоит физическая реальность — «воображаемые» геометрии, и, во-вторых, не столь бесспорно, что в астрономических масштабах в нашем мире царит геометрия Евклида. Однако то, что понимали лишь немногие математики, было абсолютно недоступно непрофессионалам. Утверждения геометрии Лобачевского они мерили на евклидов аршин своей геометрической интуиции — и получали неисчерпаемый источник для остроумия. Н. Г. Чернышевский писал сыновьям из ссылки, что над Лобачевским смеялась вся Казань: «Что такое «кривизна луча» или «кривое пространство»? Что такое геометрия без аксиомы параллельных линий»? Он сравнивает это с «возведением сапог в квадраты» и «извлечением корней из голенищ», и говорит, что это столь же нелепо, как «писать по-русски без глаголов» (здесь достается Фету: «шелест, робкое дыханье, трели соловья», над которым, оказывается, тоже «хохотали до боли в боках»).

Новый этап в развитии неевклидовой геометрии наступил, когда появились первые ее модели *). Сейчас мы воспринимаем эти модели как средство для доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского; но они были замечательны не только этим. Даже при благожелательном взгляде геометрия Лобачевского казалась чересчур изощренной, не связанной с остальной математикой, а модель Кэли — Клейна показала, что она естественным образом возникает на столбовой дороге проективной геометрии, очень популярной в то время! С другой стороны, рассмотрение модели, основные понятия которой конструируются из образов привычной нам евклидовой геометрии, давало возможность заменить формальное аксиоматическое изложение неевклидовой геометрии более наглядным.

Еще одну модель придумал Анри Пуанкаре, занимаясь чисто аналитическими вопросами теории функций комплексного переменного. Он неожиданно обнаружил, что появляющиеся у него преобразования можно интерпретировать как *перемещения* в плоскости Лобачевского. Это открытие произвело на него настолько сильное впечатление, что много лет спустя он вспоминал, как оно пришло ему в голову: «без всяких, казалось бы, предшествовавших раздумий», когда он поднимался на подножку омнибуса во время экскурсии в Кутанс. Через десять лет Пуанкаре сделал замечательное дополнение к своей модели — подвел под нее «физическое» основание. Рассказу о модели Пуанкаре и посвящена эта статья.

## Экскурсия в физику

Наши геометрические представления имеют физические предпосылки. Например, как прямые мы воспринимаем световые лучи. Идущий к нам световой луч продолжает казаться прямым, даже если он преломился по дороге (например, войдя из воздуха в воду). Чтобы рассеять эту иллюзию, нужно поставить эксперимент, или посмотреть на происходящее со стороны.

Пусть у нас есть оптически неоднородная среда на верхней полуплоскости ($y>0$), в которой величина скорости света меняется по закону $c(x, y) = y$ (независимо от направления луча). Из принципа Ферма следует, что путь распространения света между двумя точками есть такой путь, для прохождения которого свету требуется наименьшее возможное время. В нашей среде (где $c(x, y) = y$) свет между двумя точками будет распространяться по таким кривым $L$ (рис. 1), для которых

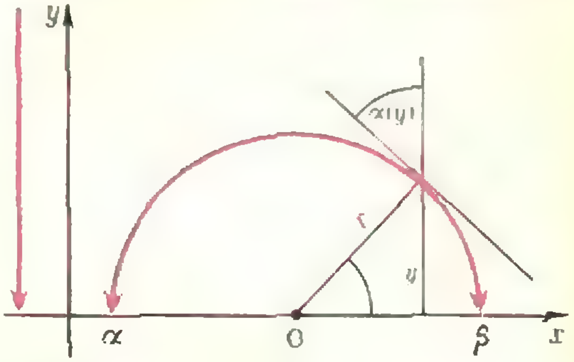


Рис. 1.

$$\frac{\sin\alpha(y)}{y} = k, \qquad (1)$$

где $\alpha(y)$ — угол, который касательная, проведенная к $L$ в точке с ординатой $y$, образует с вертикалью *); $k$ — фиксированное для всех точек кривой $L$ число. Ясно, что условию (1) удовлетворяют все окружности с центрами на оси $x$-ов (то есть, перпендикулярные этой оси): для каждой такой окружности $k = \frac{1}{r}$, где

---

*) О моделях см. статьи В. Болтянского «Загадка аксиомы параллельных» (с. 2) и А. Ширшова «Модель Кэли — Клейна геометрии Лобачевского» (с. 18), а также статью С. Гиндикина «Феликс Клейн», опубликованную в «Кванте» № 12 за 1975 год.

*) См. статью С. Верова «Брахистохрона, или еще одна тайна циклоиды», «Квант», 1975, № 12.

$r$ — ее радиус. При $k=0$ мы получаем вертикальные прямые. Можно показать, что других кривых, удовлетворяющих условию (1), нет; этому есть и физическое объяснение (например, такое: свет распространяется из заданной точки в заданном направлении по единственному пути).

Окружности, перпендикулярные к оси $x$-ов, и вертикальные прямые (вернее, их части, расположенные в верхней полуплоскости) и будут играть главную роль в нашем рассказе.

## «Пуанкария» и ее геометрия

Мир Пуанкаре (назовем его в честь создателя *Пуанкарией*) представляет собой верхнюю полуплоскость $\{(x, y), y>0\}$ без границы $\{y=0\}$ (это важно!) *). Существа, населяющие Пуанкарию (*пуанкаряне*), воспринимают как «прямые» верхние полуокружности с центрами на оси $x$-ов (без концов!) и вертикальные лучи (рис. 2). Будем называть эти прямые п-прямыми. П-прямые кажутся пуанкарянам бесконечными (свет распространяется по ним неограниченно долго), а концы п-прямых, — как и вся ось $x$-ов, — невидимыми. Итак, пуанкаряне считают, что их Пуанкария неограниченна во все стороны. Назовем невидимые точки п-прямой ее *бесконечно удаленными точками*; для луча одной из его бесконечно удаленных точек будем считать точку ∞ (бесконечность). П-прямые однозначно определяются парой своих бесконечно удаленных точек (почему?); так мы их и будем различать и обозначать через $L(\alpha, \beta)$, где $\alpha$, $\beta$ — вещественные числа (одно из них может быть ∞) — координаты бесконечно удаленных точек на оси $x$-ов.

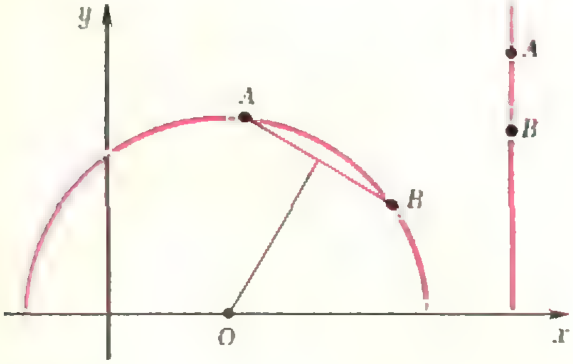


Рис. 2.

Попробуем вместе с пуанкарянами построить геометрию их пространства. Как и нам, — при жизни в евклидовом пространстве, — некоторые утверждения кажутся пуанкарянам очевидными, они принимают их без доказательства (аксиомы) и выводят из них более сложные утверждения (теоремы). Для нас, смотрящих на Пуанкарию со стороны, все эти утверждения будут выглядеть иначе, чем для пуанкарян (например, п-прямые для нас полуокружности или лучи!), поэтому мы будем «переводить» формулировки пуанкарян на свой «прозаический» евклидов язык и доказывать по-своему.

Например, пуанкаряне знают, что через две различные точки проходит п-прямая и притом единственная. Для нас же это означает, что через две различные точки полуплоскости проходит единственная полуокружность, перпендикулярная к оси $x$-ов, или вертикальный луч (докажите!); см. рисунок 2. Заметим, что физическое объяснение этого утверждения, состоящее в том, что свет между двумя точками распространяется по единственному пути — одно и то же и для пуанкарян, и для нас (впрочем, для геометрии это объяснение доказательной силы не имеет). Нетрудно убедиться, что в Пуанкарии справедливы все аксиомы евклидовой геометрии, касающиеся взаимного расположения точек и прямых и порядка точек на прямой. (Чтобы привыкнуть к Пуанкарии, разберитесь с п-отрезками, п-полуплоскостями, на которые п-прямая делит Пуанкарию так, что п-отрезки, соединяющие точки в одной п-полуплоскости, не пересекают граничную п-прямую, а п-отрезки, соединяющие точки в разных п-полуплоскостях — ее пересекают; нарисуйте п-треугольники, п-многоугольники; подумайте о п-выпуклости, если вы знаете об «обычной» выпуклости. Вам помогут рисунки 3а и 3б.)

---

*) Можно было бы рассмотреть и «трехмерный» мир, но на плоскости проще рисовать картинки, и ради этого мы будем иметь дело с «плоскими» существами.

Отличие геометрии Пуанкарии от евклидовой проявляется при рассмотрении взаимного расположения пары п-прямых. Мы уже знаем, что две различные п-прямые могут пересекаться не более чем в одной точке. Если же они не пересекаются, то они имеют общую бесконечно удаленную точку (невидимую!) или не имеют общих точек даже на невидимой границе. В первом случае мы будем называть такие п-прямые *параллелями*, а во втором — *сверхпараллелями*. Если имеется п-прямая $l$ (α, β), то через точку вне ее проходят только две параллельные $l$ (α, β) п-прямые (отвечающие бесконечно удаленным точкам α и β соответственно; рис. 4) и бесчисленное множество сверхпараллельных, лежащих между параллелями. Таким образом, в Пуанкарии несправедлива аксиома параллельных (нас, наблюдателей, впрочем, это не очень удивляет — ведь пуанкаряне не знают, что их «прямые» — «не настоящие»!); это позволяет нам надеяться на то, что геометрия Пуанкарии и окажется геометрией Лобачевского.

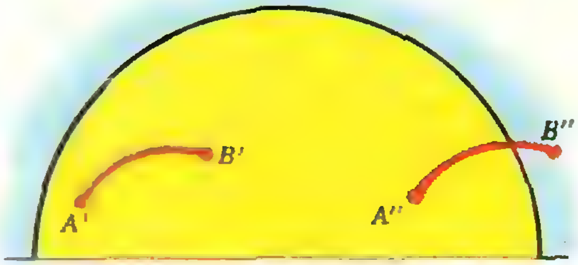


**Рис. 3а.**

Главное, что теперь нам нужно сделать, — определить в Пуанкарии *расстояния* и *перемещения*.

### Расстояния и перемещения

С точки зрения оптики естественнее всего в качестве расстояния между двумя точками $A$ и $B$ взять в Пуанкарии время, за которое свет доходит из точки $A$ в точку $B$; тогда п-прямые будут кратчайшими линиями между лежащими на них точками. Из физических соображений следует, что определенное таким образом расстояние $\rho(A, B)$ обладает обычными свойствами евклидова расстояния:

1) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$;

2) если $A$, $B$, $C$ лежат на одной п-прямой и $B \in [AC]$, то $\rho(A,B) + \rho(B,C) = \rho(A,C)$ (свет распространяется из $A$ в $C$ по п-прямой и пройдет через точку $B$);

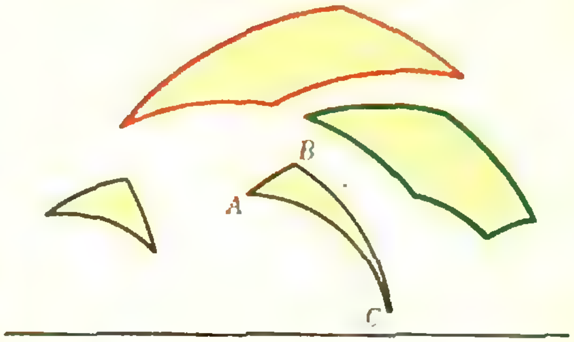


**Рис. 3б.**

3) для любых точек $A$, $B$, $C$: $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$ — *неравенство треугольника*, причем равенство имеет место лишь тогда, когда $B \in [AC]$ (если бы это неравенство не выполнялось, то свету на путь по п-ломаной $ABC$ понадобилось бы меньше времени, чем на путь по п-прямой $AC$ — наибыстрейшему пути, чего не может быть).

Для пуанкарян введенное расстояние $\rho$ первично (заметим, что относительно этого расстояния свет распространяется с единичной скоростью), и у них нет причин выражать ρ через что-то еще; нам же естественно выразить ρ через наше евклидово расстояние. Это не просто: приходится иметь дело с неравномерным движением света, и для вычисления времени, затраченного им, нужно считать интегралы. Поэтому приведем лишь окончательный ответ:

$$\rho(A, B) = \ln \frac{r' + r}{r' - r}, \qquad (2)$$

где $r$ — евклидово расстояние между точками $A$ и $B$, $r'$ — евклидово расстояние между точкой $A$ и точкой $B'$, симметричной точке $B$ относительно оси $x$-ов; логарифм берется по основанию $e$ (при другом основании логарифма мы получим ρ с точностью до постоянного множителя). Евклидово расстояние замечательно тем, что имеется много преобразований плоскости, его сохраняющих; такие преобразования и называются *перемещениями*. Посмотрим, как выглядят перемещения в Пуанкарии (п-*перемещения*) — преобразования, сохраняющие ρ, а значит, переводящие п-прямые в п-прямые.

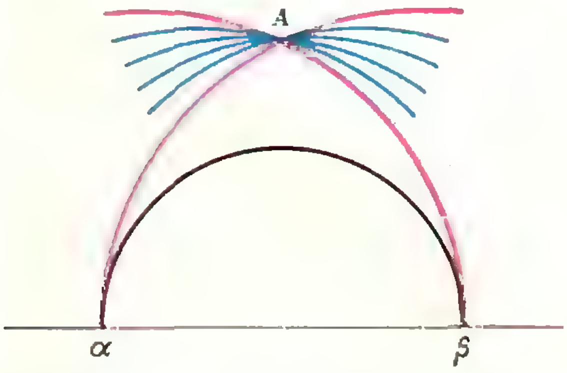


**Рис. 4.**

Начнем с преобразований, не оставляющих ни одной точки на месте. Это прежде всего — обычные *параллельные переносы* вдоль оси $x$-ов: $T_a(x, y) = (x + a, y)$. Эти параллельные переносы сохраняют и евклидово расстояние, и скорость света $c(x, y) = y$, а потому и время, которое требуется свету на путь между двумя точками $A$ и $B$, то есть п-расстояние ρ $(A, B)$, и, конечно, п-прямые переводят в п-прямые. С другой стороны, *гомотетия* $F_b(x, y) = (bx, by)$, $b>0$, пропорционально изменяя и евклидово расстояние, и величину скорости света $c(x, y)$, также не меняет времени, затраченного светом, то есть, п-расстояния ρ $(A, B)$. Итак, то, что нам представляется гомотетией (с центром на оси $x$-ов), пуанкарянам кажется перемещением. С помощью указанных п-перемещений можно любую точку перевести в любую. Например, точка $(x_0; y_0)$ переходит в точку $(0; 1)$ при п-перемещении $\left(\frac{x - x_0}{y_0}, \frac{y}{y_0}\right)$. Относительно введенных п-перемещений — назовем их п-*сдвигами* — п-прямые распадаются на два класса: отдельно можно перевести друг в друга полуокружности, а отдельно — лучи (почему?).

Поясним сейчас, как, используя п-сдвиги и свойства введенного п-расстояния ρ, можно просто получить формулу (2), выражающую ρ через евклидовы расстояния, в том частном случае, когда обе точки $A$ и $B$ находятся на оси $y$-ов: $A = (0; y_1)$, $B = (0; y_2)$. Положим $\rho(A, B) = \varphi(y_1, y_2)$, и найдем вид функции φ. Поскольку ρ сохраняется при евклидовых гомотетиях с центром в точке $O$, то

$$\varphi(by_1, by_2) = \varphi(y_1, y_2). \qquad (*)$$

Кроме того, если $C = (0; y_3)$ — третья точка на оси $y$-ов, то в силу сказанного выше

$$\varphi(y_1, y_2) + \varphi(y_2, y_3) = \varphi(y_1, y_3). \quad (**)$$

Согласно (*)

$$\varphi(y_1, y_2) = \psi(y_1/y_2) = \psi(z_1),$$
$$\varphi(y_2, y_3) = \psi(y_2/y_3) = \psi(z_2),$$
$$\varphi(y_1, y_3) = \psi(y_1/y_3) = \psi(z_3).$$

Учитывая соотношение (**) и последние три равенства, получим

$$\psi(z_1 \cdot z_2) = \psi(z_1) + \psi(z_2),$$

откуда, в предположении, что функция ψ — достаточно «хорошая» (см. статью А. Лопшица «Функциональные уравнения», «Квант», 1975, № 1), $\psi(z) = k \cdot \ln z$, где $k$ — постоянный множитель, который вычисляется непосредственно.

Найденных п-перемещений еще недостаточно: у нас нет преобразований, с помощью которых мы могли бы п-прямые одного типа (полуокружности) перевести в п-прямые другого типа (лучи). Добавим для этого

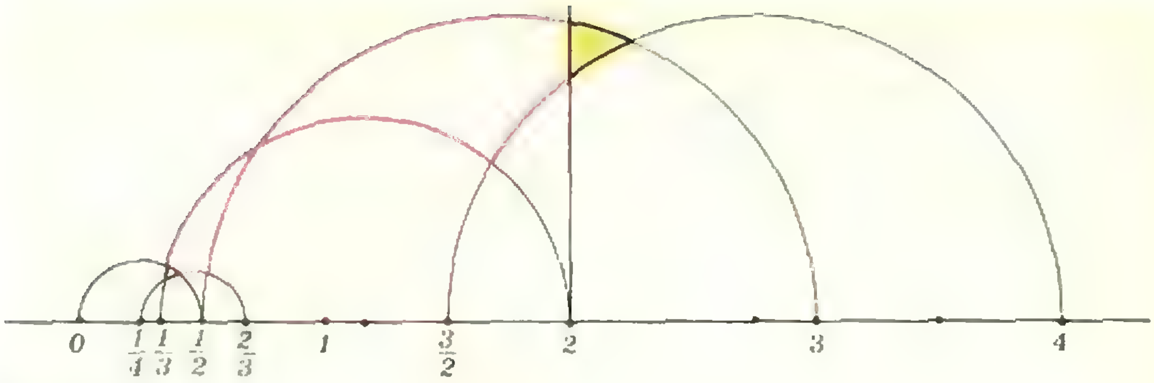


Рис. 5.

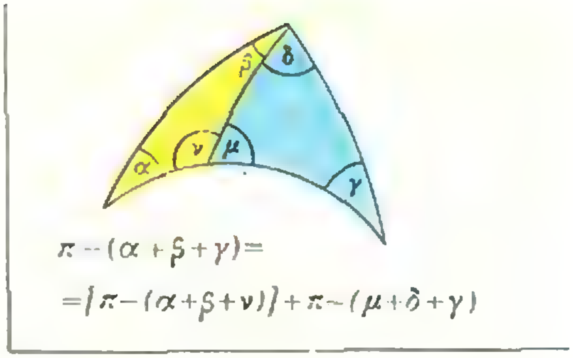
п-*симметрии* относительно п-прямых. Для лучей — это обычная *осевая симметрия*, а для полуокружностей — инверсия *). (Например, п-симметрия относительно п-прямой $L(-1,1)$ — это инверсия относительно окружности с центром $O=(0;0)$ радиуса 1; она переводит точку $A$, отличную от центра $O$, в точку $A'$, лежащую на луче $OA$, такую, что $|OA|\cdot|OA'|=1$). Мы знаем, что при инверсии окружности и прямые переходят в окружности или прямые, причем величины углов сохраняются. На языке Пуанкарии это значит, что, например, при п-симметрии относительно п-прямой $L(-1,1)$ п-прямая $L(\alpha,\beta)$ переходит в п-прямую $L\left(\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}\right)$. В частности, п-прямые $L(\alpha,0)$, являющиеся при $\alpha\neq\infty$ полуокружностями, переходят в п-прямые $L\left(\frac{1}{\alpha},\infty\right)$, являющиеся лучами. Итак, п-симметрии переводят Пуанкарию в себя, причем п-прямые переходят в п-прямые. Отдельно проверяется (мы эту проверку опускаем), что п-симметрии не меняют п-расстояния $\rho$. (Впрочем, в Пуанкарии всякое преобразование, переводящее п-прямые в п-прямые, сохраняет $\rho$ (здесь нет гомотетий): в этом — важнейшее отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида.)

П-перемещений, которые можно получить, комбинируя п-сдвиги с п-симметриями, уже хватает для того, чтобы любую п-прямую перевести в любую п-прямую; более того, при этом любую заданную точку первой п-прямой можно совместить с заданной точкой второй, и любой п-луч с другим п-лучом (докажите!). Значит, этими п-перемещениями можно совместить любые п-отрезки равной п-длины, и мы получаем, что такие отрезки п-конгруэнтны. Можно показать, что все п-перемещения сводятся к описанным.

При п-перемещениях угол переходит в угол, равный ему в евклидовом смысле (поскольку это так для параллельных переносов, гомотетий, осевых симметрий и инверсий). Поэтому понятие конгруэнтности углов в Пуанкарии не отличается от евклидова. С учетом этого обстоятельства пуанкаряне, точно так же как и мы, докажут два признака конгруэнтности треугольников: по двум сторонам и углу между ними и по стороне и двум прилежащим к ней углам. Сложнее обстоит дело с доказательством третьего признака конгруэнтности треугольников — по трем сторонам: ведь наше доказательство этого признака использует тот факт, что окружности пересекаются не более, чем в двух точках. К счастью, оказывается, что п-окружности совпадают с евклидовыми (целиком лежащими в верхней полуплоскости), только п-центр у них не совпадает с обычным (это — довольно непростой факт), а потому и с признаком конгруэнтности по трем сторонам в Пуанкарии все в порядке. Однако в Пуанкарии есть еще один признак конгруэнтности треугольников: *конгруэнтны треугольники с попарно конгруэнтными углами!* (Переведите это утверждение на язык евклидовой геометрии и попытайтесь доказать его; см. рисунок 5 и задачу 4.) Значит, площадь треугольника в Пуанкарии (как и сам треугольник) определяется величинами его углов $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше $\pi$. Величина $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ называется *дефектом треугольника.* Можно заметить, что дефект треугольника ведет себя так же, как площадь; точнее: если данный треугольник разрезать прямой, проходящей через его вершину, то площадь его будет равна сумме площадей получившихся треугольников; то же будет справедливо и для дефекта всякого треугольника: он равен сумме дефектов образовавшихся треугольничков (рис. 6). Отсюда можно вывести, что величина площади треугольника в геометрии Лобачевского пропорциональна дефекту $\pi-\alpha-\beta-\gamma$.

---

*) См. статью А. Савина «Инверсия и окружность Аполлония», «Квант», 1971, № 8, или решение задачи М305, «Квант», 1975, № 9.



$$\pi-(\alpha+\beta+\gamma)=$$
$$=[\pi-(\alpha+\beta+\nu)]+\pi-(\mu+\delta+\gamma)$$

**Рис. 6.**

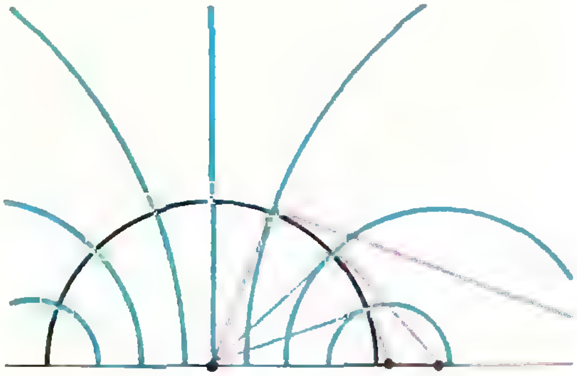


**Рис. 7.**

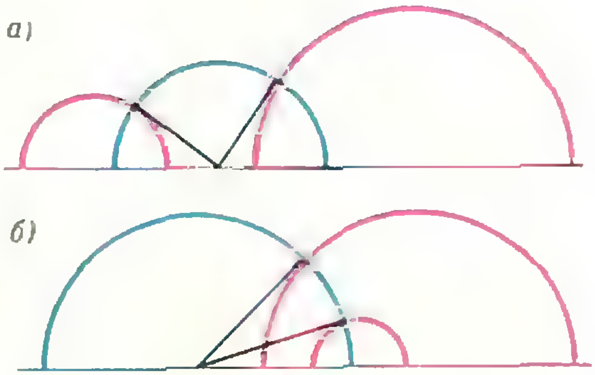


**Рис. 8.**

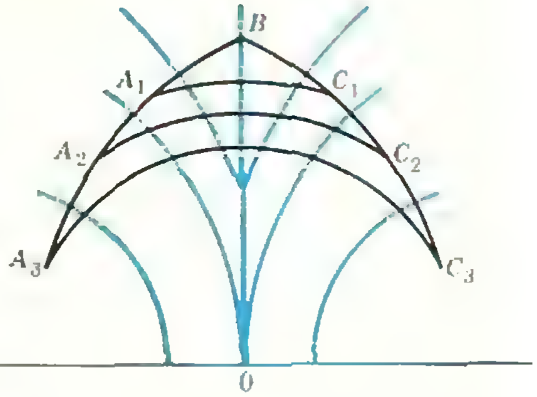


**Рис. 9.**

## Несколько задач

1. а) Убедитесь, что все п-прямые, перпендикулярные к фиксированной п-прямой, сверхпараллельны (рис. 7). б) Покажите, что для пары сверхпараллелей существует единственный общий п-перпендикуляр (рисунки 8, *а* и *б*).

2. Проверьте, что п-биссектрисы п-треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанной п-окружности. Подумайте, что можно сказать об описанной п-окружности — всегда ли она существует (см. рисунок 9: на этом рисунке п-треугольники $A_iBC_i$ — равнобедренные, с осью симметрии $L$ $(0, \infty)$; $i = 1, 2, 3$; синим цветом изображены перпендикуляры к п-серединам сторон этих треугольников)?

3. Убедитесь, что у тупоугольного (но не остроугольного) п-треугольника высоты могут быть сверхпараллельны (на рис. 10: стороны треугольника показаны синим цветом, а его высоты — красным). Что можно сказать о медианах?

4. Покажите, что у равнобедренного п-треугольника углы при основании равны,

а биссектриса угла при вершине является медианой и высотой. Докажите для этого случая четвертый признак п-конгруэнтности треугольников.

5. Пусть $L(\alpha, \beta)$, $L(\alpha, \beta_1)$, $L(\alpha, \beta_2)$ — три параллельные п-прямые (рис. 11). Докажите, что существует п-перемещение, переводящее $L(\alpha, \beta)$ в себя, и $L(\alpha, \beta_1)$ — в $L(\alpha, \beta_2)$.

Отсюда следует, что в геометрии Лобачевского нельзя определить расстояние между параллелями.

**6.** Если п-прямая $L_1$ пересекает п-прямую $L_0$ или сверхпараллельна ей, то она проектируется на $L_0$ в виде конечного п-интервала; если же $L_1$ параллельна $L_0$, то проекцией является п-луч.

7. Пусть п-прямая $L_0$ перпендикулярна к $L_1$ и пусть $A$ — точка на $L_0$, отстоящая от $L_1$ на расстояние $x$ (рис. 12). Проведем через точку $A$ п-прямую $M_x$, параллельную $L_1$, и обозначим через $\varphi(x)$ величину угла, который п-прямая $M(_x)$ образует с $L_0$. Найдите $\varphi(x)$ и покажите, что $\varphi(x) \to \frac{\pi}{2}$ при $x \to 0$ и $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

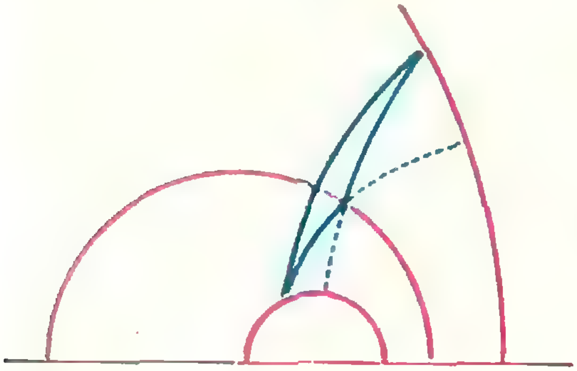


**Рис. 10.**

Функция $\varphi(x)$ называется *функцией Лобачевского*; эта функция связывает величины углов и длины, и поскольку для углов существует абсолютная единица измерения — полный угол, то в геометрии Лобачевского есть такая абсолютная единица измерения и для длин (она с помощью функции $\varphi$ переносится с углов). В геометрии Евклида $\varphi(x) \equiv \frac{\pi}{2}$, а потому аналогичной абсолютной единицы измерения длины нет.

## Твердые тела в Пуанкарии

Пока во всех наших геометрических рассмотрениях мы руководствовались только оптическими предпосылками. Здесь нужно подчеркнуть, что геометрия Пуанкаре получилась неевклидовой не из-за того, что в Пуанкарии иные законы оптики, чем наши: мы строим (*моделируем*) Пуанкарию в нашем собственном мире и законов физики не меняем! Оптические же иллюзии пуанкарян объясняются оптической неоднородностью их мира.

Хотя, безусловно, самой яркой реализацией прямой линии является световой луч, мы все же не измеряем длин при помощи времени распространения света — для этих целей у нас есть линейка. Вероятно, стоит обзавестись линейкой и пуанкарянам. Конечно же, пуанкаряне изготовят линейку «*п-прямой*»; но если пуанкарянин перенесет такую линейку из одного места в другое, то она «прямой» (п-прямой) ему уже не покажется. С точки зрения пуанкарянина при движении твердого тела меняется его форма. Как же пуанкарянин должен реагировать на это? Ясно, что нужно как-то увязать понятие твердого тела с геометрией Пуанкарии, иначе пуанкарянам придется поверить в существование сверхъестественных сил. Анри Пуанкаре придумал остроумный выход из этого, казалось бы, безнадежного положения: *он воспользовался явлением теплового расширения тел.*

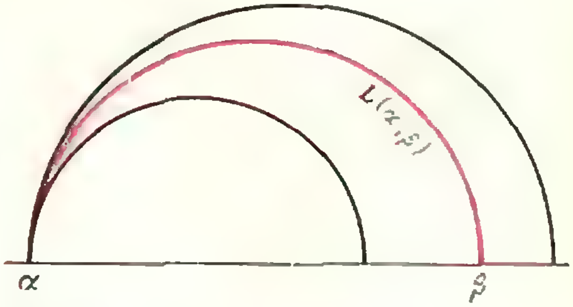


**Рис. 11.**

Пусть в Пуанкарии у всех тел одинаковый коэффициент теплового расширения и нулевая теплопроводность, а размеры тел пропорциональны абсолютной температуре $T$. (Заметим, что в этих условиях при помощи обычного термометра пуанкаряне не могут измерить температуру, поскольку такое измерение предполагает сравнение расширения тел с разными коэффициентами теплового расширения.) Твердое тело характеризуется тем, что при движении в среде с постоянной температурой расстояние $r$ $(A, B)$ (евклидово) между любыми двумя его точками $A$ и $B$ сохраняется. Но если тело переместится из области с температурой $T_1$ в область с температурой $T_2$, то расстояние между его точками умножится на $T_2/T_1$, другими словами, останется прежним отношение $r(A,B)/T$. А что будет, если тело сразу окажется в области с разными температурами?

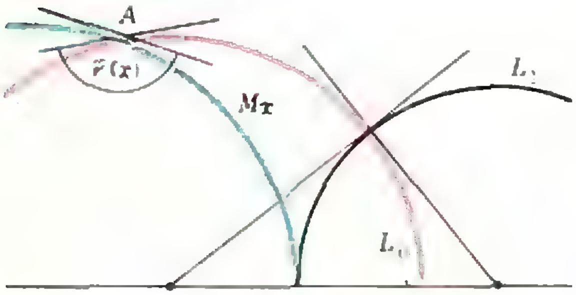


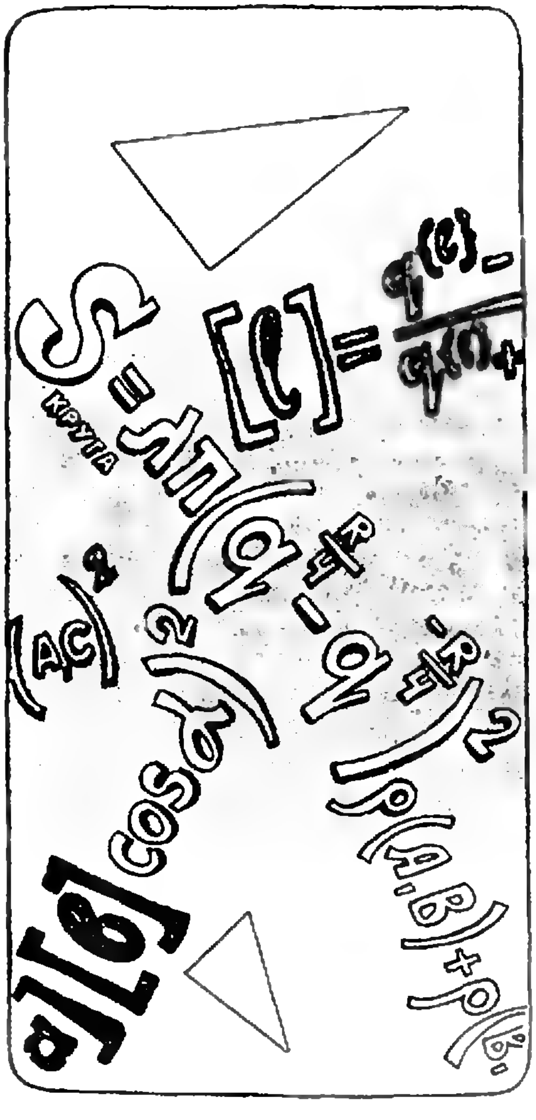
**Рис. 12.**

Какая величина будет сохраняться в этих условиях? Пусть, например, достаточно большое твердое тело перемещается в среде, где по одну сторону от некоторой прямой $m$ температура $T_1$, а по другую — $T_2$; пусть $A$ — точка тела, находящаяся в области с температурой $T_1$, а $B$ — точка тела, находящаяся в области с температурой $T_2$. Возьмем ломаную с концами в точках $A$ и $B$ и вершиной $C$ на прямой $m$. Обозначим $|AC|=r_1$, $|CB|=r_2$ и рассмотрим величину $r_1/T_1+r_2/T_2$. Оказывается, что при движении в такой температурной среде сохраняется наименьшее значение величины $r_1/T_1+r_2/T_2$, взятое по всем ломаным с вершинами на прямой $m$ и с концами в двух данных точках $A$ и $B$! Далее можно в точности повторить те же рассуждения, что и при применении принципа Ферма́, например, к выводу закона преломления Снеллиуса, и мы получим, что искомое наименьшее значение будет отвечать ломаной, для которой $\frac{\sin\alpha_1}{T_1}=\frac{\sin\alpha_2}{T_2}$, где $\alpha_i$ — угол соответствующего звена ломаной с нормалью к прямой $m$.

Пусть теперь в Пуанкарии в точке $(x;\ y)$ постоянно поддерживается абсолютная температура $T\ (x,\ y)=y$. Тогда за счет выбранного температурного режима при движении твердых (в нашем смысле!) тел будут сохраняться уже не евклидовы расстояния, а п-расстояния, и с точки зрения пуанкарян (ведь они не чувствуют разницы температур!) размер тела, движущегося в такой среде, сохраняется, то есть оно — п-твердое. Осталось позаботиться лишь о том, чтобы все предметы имели малые теплоемкости и перемещались настолько медленно, чтобы находиться в тепловом равновесии, и чтобы изменение температуры было для пуанкарян незаметно. В результате пуанкаряне не только не увидят границы мира, но и не смогут никогда добраться до нее: при приближении к границе температура стремится к абсолютному нулю, а потому будут стремиться к нулю и размеры предметов, без изменения пропорций между предметами. Анри Пуанкаре старался исключить для пуанкарян все возможности узнать, что их неевклидов мир всего лишь сконструирован в нашем евклидовом. Но все ли он предусмотрел? Если вы обнаружите какие-либо неучтенные возможности пуанкарян, напишите нам об этом.

*А. Ширшов*

# Модель Кэли-Клейна геометрии Лобачевского



**В этой статье рассматривается модель плоскости Лобачевского, отличная от модели Анри Пуанкаре, о которой рассказано в статье С. Гиндикина «Волшебный мир Анри Пуанкаре».**

## Определение «плоскости»

В геометрии Евклида мы имеем дело с точками и прямыми обычной плоскости, и с помощью всем известных перемещений (параллельных переносов, осевых и центральных симметрий и поворотов) можем любую точку плоскости перевести в любую другую, любые две точки, лежащие на заданном расстоянии, перевести в другие две точки, лежащие на таком же расстоянии, и любые две прямые перевести в две прямые, образующие такой же угол. Сейчас же мы рассмотрим геометрию, *точками* которой будут внутренние точки некоторого круга (без точек ограничивающей его окружности), а *прямыми* — всевозможные хорды этого круга (без концов); опишем все *перемещения* такой «плоскости», и затем введем *расстояния* между «точками» и *углы* между «прямыми» так, чтобы они сохранялись при указанных перемещениях.

Можно проверить, что геометрия, которую мы построим, «ничем не хуже» евклидовой: в ней будут выполнены все аксиомы, кроме «аксиомы параллельных»: легко видеть, что теперь через «точку» вне «прямой» можно провести более одной, ее «не пересекающей». На рисунке 1 через точку $A$, не лежащую на хорде $L$, проведены две хорды — $L_1$ и $L_2$, имеющие с $L$ по общему концу; эти хорды $L_1$ и $L_2$ называются *параллельными* $L$, поскольку мы рассматриваем как прямые хорды без концов, и с нашей новой точки зрения прямая $L$ не пересекается ни с $L_1$, ни с $L_2$. (Отметим также, что прямые, «не пересекающиеся» с $L$, расположены в области, ограниченной прямыми $L_1$ и $L_2$, закрашенной синим, а прямые, пересекающиеся с $L$ — в незакрашенной области.) Значит, «новая» геометрия будет ничем иным, как *геометрией Лобачевского*. Эта модель геометрии Лобачевского называется *моделью Кэли — Клейна*; о ней уже упоминалось в статьях С. Гиндикина «Волшебный мир Анри Пуанкаре» (см. с. 9) и «Феликс Клейн» (см. «Квант» № 12 за 1975 год).

## Определение перемещений

Нам понадобится результат задачи М305а), решение которой было опубликовано в «Кванте» № 9 за 1975 год (с. 35).

Пусть хорды $AA'$ и $BB'$ нашего круга пересекаются в точке $P$, не лежащей на окружности (рис. 2). Рассмотрим хорды $AB$ и $A'B'$ и проведем через точку $P$ прямую, пересекающую эти хорды в точках $C$ и $C'$ соответственно. Пусть, далее, $|AP|\cdot|A'P| = t$, $|AC|\cdot|CB| = s$, $|CP| = q$, $|C'P| = q'$. Тогда, как это следует из решения задачи М305а), $q' = \frac{qt}{s-q^2}$. Если теперь через точку $C$ провести произвольную хорду $A_1B_1$ и построить проходящие через точку $P$ хорды $A_1A_1'$, $B_1B_1'$, то хорда $A_1'B_1'$ пройдет через точку $C'$, ибо величины $q$, $t$, $s$ не изменятся.

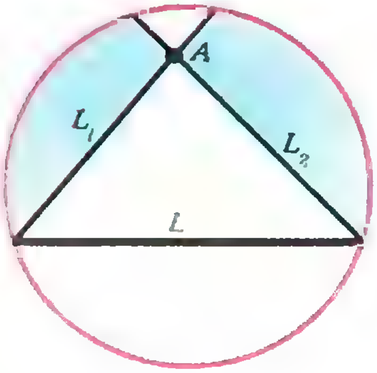


Рис. 1.

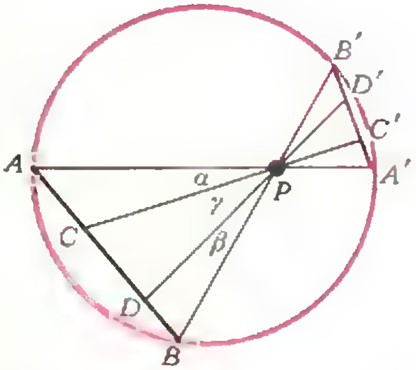


Рис. 2.

Итак, с любой точкой $P$, не лежащей на окружности, мы можем связать некоторое *отображение* $\varphi_P$ нашего круга на себя: нужно через точку $C$ круга провести произвольную хорду $AB$, построить хорду $A'B'$, соответствующую хорде $AB$ относительно выбранной точки $P$, и *образом* точки $C$ считать точку $C'$ пересечения прямой $CP$ с хордой $A'B'$ (образом точки $C$ мы называем точку $C'$, в которую переходит точка $C$ при отображении $\varphi_P$: $C' = \varphi_P(C)$; отображение $\varphi_P$ можно корректно доопределить для точек, лежащих на окружности; подумайте, как).

Из сказанного следует, что положение точки $C'$ не зависит от выбора хорды $AB$. Назовем отображение $\varphi_P$ *элементарным перемещением* первого или второго рода, в зависимости от того, внутри или вне круга находится точка $P$.

Причислим к элементарным перемещениям второго рода также отображения, являющиеся осевыми симметриями относительно любого диаметра $d$ нашего круга: обозначим эти отображения через $\varphi_d$.

Замечание. Элементарное перемещение $\varphi_P$ первого рода оставляет неподвижной единственную точку $P$, а элементарное перемещение второго рода оставляет неподвижными все точки хорды, соединяющей точки касания двух касательных к окружности, проведенных из точки $P$.

*Будем теперь считать перемещением любое отображение, получающееся в результате последовательного выполнения нескольких элементарных перемещений.*

Элементарные перемещения, а значит, и перемещения, все точки какой-либо хорды переводят в точки некоторой хорды, и образ пересечения двух хорд при каком-либо перемещении совпадает с пересечением образов этих хорд.

Наши перемещения переводят прямые в прямые, причем любая точка первой прямой может быть переведена в любую точку второй (проверьте это).

Задача 1. В окружность вписана равнобочная трапеция, боковые стороны которой пересекаются в точке $P$, а диагонали — в точке $Q$; $d$ — диаметр, лежащий на прямой $PQ$. Докажите, что $\varphi_d=\varphi_P\varphi_Q=\varphi_Q\varphi_P$ ($\varphi_M\ \varphi_N$ означает последовательное выполнение перемещений $\varphi_M$ и $\varphi_N$).

Теперь нужно определить «расстояния» между точками нашего круга и «углы» между прямыми так, чтобы они сохранялись при описанных перемещениях.

## Расстояния и углы

Пусть $C$ и $D$ — две точки нашего круга. Проведем через них «прямую» — хорду $AB$, соединим точки $A$, $C$, $D$ и $B$ с некоторой точкой $P$, не лежащей на окружности, и обозначим углы, образовавшиеся при точке $P$, через $\alpha$, $\gamma$ и $\beta$ (см. рис. 2). Рассмотрим отношение $\frac{|AD|\cdot|BC|}{|AC|\cdot|BD|}$. Имеем:

$$\frac{|AD|\cdot|BC|}{|AC|\cdot|BD|}=\frac{S_{APD}\cdot S_{PBC}}{S_{PAC}\cdot S_{DPB}}=\frac{|AP|\cdot|PD|\sin(\alpha+\gamma)\cdot|PC|\cdot|PB|\cdot\sin(\beta+\gamma)}{|AP|\cdot|PC|\cdot\sin\alpha\cdot|PD|\cdot|PB|\cdot\sin\beta}=$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}. \quad (1)$$

(Здесь $S_{XYZ}$ — обычная площадь треугольника $XYZ$.)

Понятно, что если $C'$ и $D'$ — образы точек $C$ и $D$ при элементарных перемещениях $\varphi_P$ (или $\varphi_d$), то

$$\frac{|A'D'|\cdot|B'C'|}{|A'C'|\cdot|B'D'|}=\frac{|AD|\cdot|BC|}{|AC|\cdot|BD|}$$

(поскольку углы $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ не меняют своей величины), и, следовательно, элементарные перемещения, а значит, и перемещения вообще, сохраняют это отношение.

Определим «расстояние» между любыми двумя точками $C$ и $D$ так:

$$\rho(C, D)=\log_q\frac{|AD|\cdot|BC|}{|AC|\cdot|BD|},$$

где $q>1$ — некоторое фиксированное число.

Важное замечание. При определении расстояния существен порядок точек на прямой $AB$, именно: если мы ищем расстояние $\rho(C, D)$, то точка $A$ — соседняя с $C$ точка, а точка $B$ — соседняя с $D$ точка; если же мы ищем $\rho(D, C)$, то $A$ — соседняя с $D$ точка (соответственно $B$ — соседняя с $C$ точка).

Для обычного расстояния между точками $C$ и $D$ мы сохраним обозначение $|CD|$. Из формулы (1) следует, что $\rho(C, D)\geqslant 0$, причем $\rho(C, D)=0$ лишь в том случае, когда точки $C$ и $D$ совпадают (то есть $\gamma=0$). Кроме того, $\rho(C, D)=\rho(D, C)$. Если же есть три точки, $C$, $D$ и $E$, лежащие на одной прямой, причем точка $D$ находится между точками $C$ и $E$, то

$$\rho(C, D)+\rho(D, E)=\rho(C, E)$$

(проверьте оба утверждения).

Задача 2. Докажите, что для произвольных трех точек $A$, $B$ и $C$ выполняется *«неравенство треугольника»*:

$$\rho(A, C) + \rho(B, C) \geqslant \rho(A, B).$$

Таким образом, расстояние $\rho$ ведет себя как и обычное.

Задача 3. Докажите, что для любой прямой $AB$, любой точки $C$ на ней и любого положительного числа $l$ можно указать ровно две такие различные точки $D$ и $D_1$ на прямой $AB$, что $\rho(C,D) = \rho(C, D_1) = l$. Другими словами, докажите, что от точки можно отложить отрезок любой длины.

Две фигуры (например, треугольники, отрезки, углы) мы будем называть *конгруэнтными*, если найдется перемещение, переводящее одну из них в другую.

Из того, что при перемещениях сохраняется расстояние, следует, что конгруэнтные отрезки имеют равную длину.

Задача 4. Докажите существование и единственность середины отрезка.

Задача 5. Докажите, что отрезки, имеющие одинаковую длину, конгруэнтны.

Осталось ввести величину угла.

Пусть есть некоторый угол с вершиной в точке $C$, — угол $C$. Возьмем любое перемещение, переводящее точку $C$ в центр данного круга, и положим величину угла $C$ равной евклидовой величине угла (с вершиной в центре круга), в который угол $C$ переходит при этом перемещении. Из дальнейшего будет следовать, что эта величина не зависит от выбора перемещения. (Попытайтесь получить это самостоятельно, доказав, что *повороты вокруг центра* нашего круга являются перемещениями и в геометрии Лобачевского.)

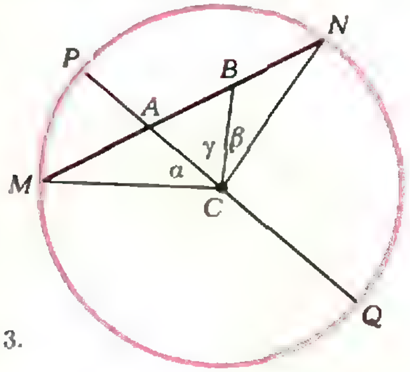


Рис. 3.

### Теорема косинусов

Введем такие обозначения: если $l$ — некоторый отрезок, то $|l|$ — его обычная (евклидова) длина, $\{l\}$ — его длина в новом смысле, а $[l] = \dfrac{q^{\{l\}} - 1}{q^{\{l\}} + 1}$ ($q > 1$ — основание логарифма в определении расстояния $\rho$). Заметим, что величина $[l]$ всегда меньше единицы (но больше нуля).

Рассмотрим треугольник $ABC$, у которого вершина $C$ совпадает с центром круга. Пусть $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, и $r$ — радиус круга. Продолжим сторону $AB$ до пересечения с окружностью в точках $M$ и $N$, соединим точки $M$ и $N$ с вершиной $C$ (рис. 3) и обозначим образовавшиеся углы через $\alpha$, $\gamma$ и $\beta$ ($\gamma$ — угол при вершине $C$ треугольника $ABC$).

Тогда $M\widehat{N}C = N\widehat{M}C = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$, и по обычной теореме синусов находим:

$$\frac{|a|}{r} = \frac{\cos\dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2}}{\cos\dfrac{\alpha - \beta + \gamma}{2}}, \tag{2}$$

$$\frac{|b|}{r} = \frac{\cos\dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2}}{\cos\dfrac{-\alpha + \beta + \gamma}{2}}. \tag{3}$$

Далее:

$$\{a\} = \log_q \frac{r\cdot(r+|a|)}{r\cdot(r-|a|)} = \log_q \frac{r+|a|}{r-|a|},$$

и поэтому

$$[a] = \frac{|a|}{r}. \qquad (4)$$

Аналогично,

$$[b] = \frac{|b|}{r}. \qquad (5)$$

В силу формулы (1)

$$\{c\} = \log_q \frac{\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta},$$

значит,

$$[c] = \frac{\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\beta+\gamma) - \sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\gamma)\cdot\sin(\beta+\gamma) + \sin\alpha\cdot\sin\beta}. \qquad (6)$$

Из соотношений (4) — (6), с учетом (2) и (3), несложными, но довольно громоздкими вычислениями получаем, что

$$\frac{(1-[a]^2)(1-[b]^2)}{1-[c]^2} = (1-[a]\cdot[b]\cdot\cos\gamma)^2. \qquad (7)$$

Соотношение (7) является аналогом теоремы косинусов обычной геометрии. Так как при перемещениях величины $\{a\}$, $\{b\}$ и $\{c\}$, а следовательно, и $[a]$, $[b]$, $[c]$, не меняются, то этим соотношением оправдывается определение величины угла, данное в предыдущем пункте.

Докажем теперь два замечательных утверждения геометрии Лобачевского.

## Две теоремы

Теорема 1. *Сумма углов любого треугольника меньше π.*

Доказательство. Рассмотрим вначале прямоугольный треугольник $ABC$, с прямым углом при вершине $C$: $\hat{C} = \frac{\pi}{2}$ (рис. 4). Из теоремы косинусов следует, что

$$(1-[a]^2)(1-[b]^2) = 1-[c]^2, \qquad (8)$$

или

$$[c]^2 = [a]^2 + [b]^2 - [a]^2\cdot[b]^2.$$

Далее, из этой же теоремы (см. рис. 4)

$$\frac{(1-[a]^2)(1-[c]^2)}{1-[b]^2} = (1-[a]\cdot[c]\cos\beta)^2;$$

подставив сюда выражение (8) для $1-[c]^2$, получим

$$\frac{(1-[a]^2)^2(1-[b]^2)}{1-[b]^2} = (1-[a]\cdot[c]\cos\beta)^2,$$

откуда

$$1-[a]^2 = 1-[a]\cdot[c]\cdot\cos\beta,$$

и

$$\cos\beta = \frac{[a]}{[c]}, \quad \text{то есть} \quad \beta = \arccos\frac{[a]}{[c]}.$$

Аналогично, $\alpha = \arccos \frac{[b]}{[c]}$, и мы получаем, что

$$\alpha + \beta = \arccos \frac{[a]}{[c]} + \arccos \frac{[b]}{[c]} = \arccos \frac{[a]\cdot[b] - \sqrt{([c]^2 - [a]^2)([c]^2 - [b]^2)}}{[c]^3}.$$

Поскольку $[c]^2 = [a]^2 + [b]^2 - [a]^2 \cdot [b]^2$, то выражение, стоящее под знаком последнего арккосинуса, можно преобразовать в такое:

$$\frac{[a]\cdot[b] - \sqrt{([a]^2 - [a]^2\cdot[b]^2)([b]^2 - [a]^2[b]^2)}}{[c]^2} = \frac{[a]\cdot[b]}{[c]^2}\left(1 - \sqrt{(1-[a]^2)(1-[b]^2)}\right),$$

и так как $0 < [a] < 1$ и $0 < [b] < 1$ (см. ранее сделанное замечание), то последнее выражение положительно; значит арккосинус от него строго меньше $\frac{\pi}{2}$, и мы получаем, что $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, то есть

$$\alpha + \beta + \hat{C} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Случай прямоугольного треугольника разобран.

Рассмотрим теперь произвольный треугольник $ABC$ и предположим, что $[c]$ — самая длинная его сторона. Опустим из точки $C$ на сторону $AB$ перпендикуляр $CD$. Он разбивает наш треугольник $ABC$ на два прямоугольных: треугольник $ACD$ с «острыми» углами $\alpha$ и $\gamma$ и треугольник $BCD$ — с углами $\delta$ и $\beta$ (рис. 5). По доказанному, $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ и $\beta + \delta < \frac{\pi}{2}$, откуда сумма углов треугольника $ABC$: $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ — меньше $\pi$.

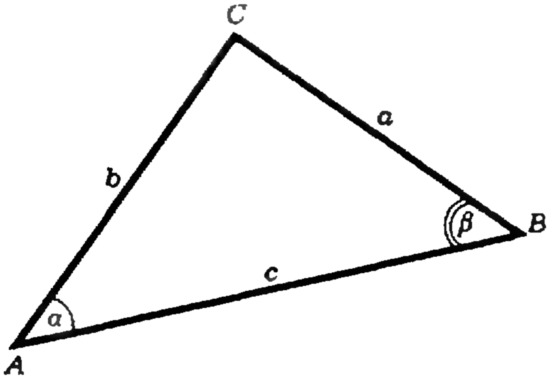


**Рис. 4.**

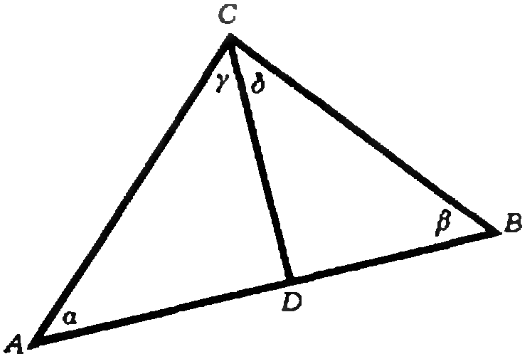


**Рис. 5.**

Пусть читателя не смущает выражение «опустим перпендикуляр». Легко проверить, что факты, использованные нами при доказательстве теоремы 1, не опираются на аксиому параллельности, и при желании их все можно доказать, как и в обычной геометрии.

Теорема 2. **Четвертый признак конгруэнтности треугольников.** *Если углы одного треугольника соответственно конгруэнтны углам другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.*

Доказательство. Обозначим величины $[a]$, $[b]$ и $[c]$ для треугольника $ABC$ через $x$, $y$ и $z$; косинусы углов, соответственно лежащих против сторон $a$, $b$ и $c$, — через $m$, $n$ и $p$. Получим, используя теорему косинусов (7), систему трех уравнений с тремя неизвестными $x$, $y$ и $z$:

$$\begin{cases} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-myz)=(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}; \\ (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}(1-nxz)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}; \\ (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}(1-pxy)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}; \end{cases}$$

(значения $m$, $n$ и $p$ нам заданы, так как величины углов известны).

Эта система имеет единственное положительное решение:

$$x = \frac{D}{np+m}, \quad y = \frac{D}{mp+n}, \quad z = \frac{D}{mn+p},$$

где

$$D^2 = m^2+n^2+p^2+2mnp-1 \text{ (проверьте!).}$$

Следовательно, задание углов однозначно определяет стороны треугольника, и теорема 2 доказана.

### Площади. Приложения

Мы не имеем возможности подробно говорить о теории площадей в геометрии Лобачевского. Поэтому ограничимся лишь краткими замечаниями. Допустим, что каждому многоугольнику $T$, не обязательно выпуклому (но без самопересечения), поставлено в соответствие некоторое положительное число $S(T)$, причем:

1) если многоугольник $T$ разбит на некоторые многоугольники $T_1, T_2, \dots, T_k$, то $S(T) = S(T_1) + S(T_2) + \dots + S(T_k)$;

2) если многоугольники $T_1$ и $T_2$ конгруэнтны, то $S(T_1) = S(T_2)$. Тогда будем говорить, что $S(T)$ — площадь многоугольника $T$.

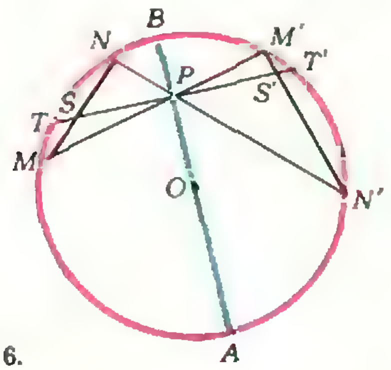


**Рис. 6.**

Предоставляем читателям доказать или убедиться на простых примерах, что в плоскости Лобачевского в качестве площади $n$-угольника $T$ может быть взята величина

$$S(T) = \lambda\,|(n-2)\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)|,$$

где $\lambda$ — произвольное фиксированное положительное число (коэффициент пропорциональности), $n$ — число сторон, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — внутренние углы многоугольника.

Указание. Заметьте, что величина $(n-2)\pi$ — это сумма внутренних углов $n$-угольника $T$ в геометрии Евклида, то есть, что величина $S(T)$ пропорциональна отличию сумм углов многоугольника в евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского; попробуйте доказать сформулированное утверждение для треугольников. Вам поможет статья «Волшебный мир Анри Пуанкаре».

Площади криволинейных фигур (например, площадь круга) вычисляются, как и обычно, с помощью предельного перехода. Докажите, например, что площадь круга радиуса $R$ равна

$$\lambda\pi\left(q^{\frac{R}{4}}-q^{-\frac{R}{4}}\right)^2.$$

И в заключение отметим следующее обстоятельство. Все выше изложенные результаты могут служить источником многих задач обычной геометрии, а также использоваться при решении задач.

Поясним это на примере.

*Через точку $P$, лежащую на диаметре $AB$* (рис. 6), *проведены хорды $MM'$ и $NN'$. Нужно доказать, что хорда $TT'$, перпендикулярная к диаметру и проходящая через точку $P$, пересекается хордами $MN$ и $M'N'$ в точках $S$ и $S'$, равноудаленных от точки $P$.*

Решение. Перемещение $\varphi_P$ переводит хорду $MN$ в хорду $M'N'$, а хорду $TT'$ переводит в себя. Поэтому точка $S$ переходит в точку $S'$ и $\rho(P, S) = \rho(P, S')$, то есть

$$\frac{|TP|\cdot|T'S|}{|TS|\cdot|T'P|} = \frac{|T'P|\cdot|TS'|}{|TP|\cdot|T'S'|}, \quad \text{и } |TP| = |T'P|;$$

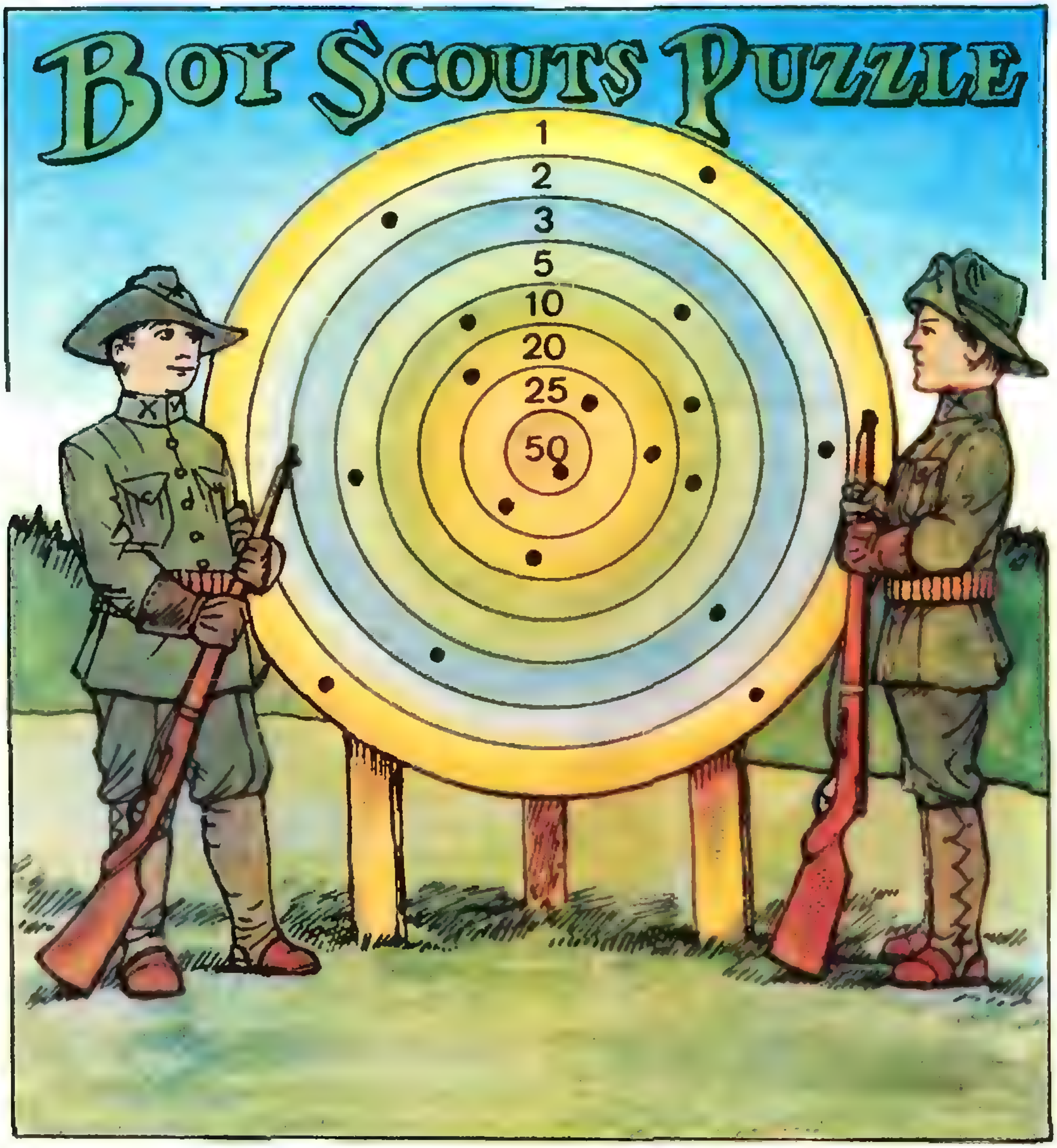
из этого следует, что $|SP| = |S'P|$.

Задача 6. Докажите аналогичное утверждение для случая, когда точка $P$ лежит на продолжении диаметра $AB$.

# Головоломка Сэма Лойда

Сэм Лойд (1841—1911) — на редкость изобретательный американский конструктор головоломок.

Многие его головоломки, если их несколько иначе сформулировать, превращаются в проблемные математические задачи, допускают обобщение, наталкивают на новые задачи. Но у Лойда задачи даются в занимательной игровой форме. Лойд опубликовал тысячи занимательных задач (не только математических, но также лингвистических и шахматных). Он сам делал рисунки к задачам, более того, иногда сам набирал и печатал свои произведения. Головоломка, которую мы здесь помещаем, публиковалась в книге «Sam Loyd's Puzzles», вышедшей в Филадельфии, в 1912 году.



При осмотре этой мишени спор разгорелся лишь о том, кто из стрелявших поразил центр: было известно, что все трое произвели по шесть выстрелов и набрали по 71 очку. Сможете ли вы указать три набора из шести чисел, содержащих по 71 очку?

*М. Волькенштейн*

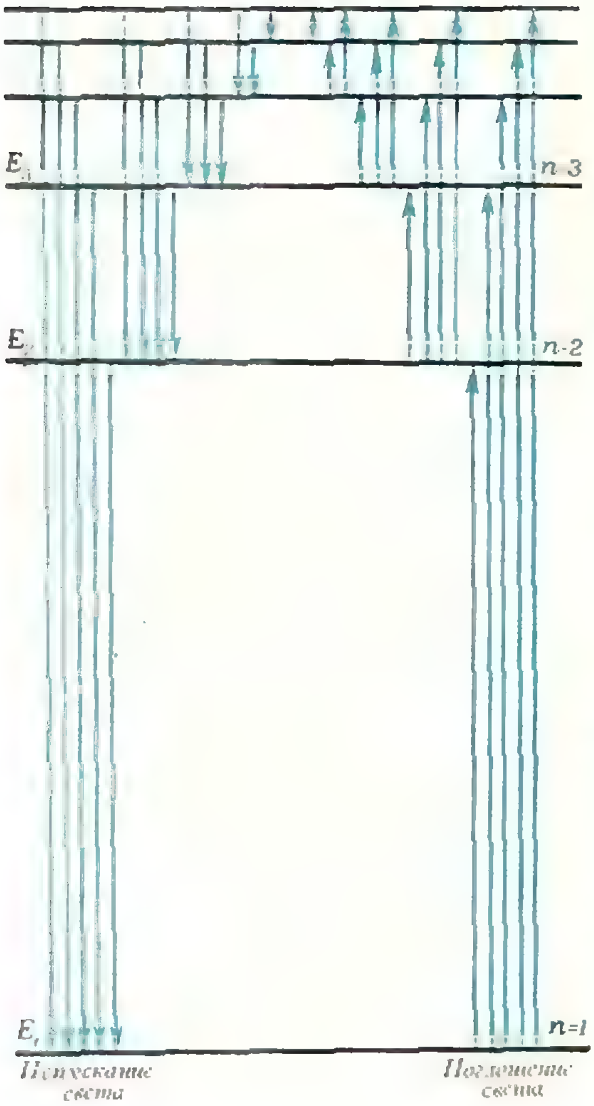
# Квантование и стоячие волны

Квантовая механика — это наука о законах движения микрочастиц (атомов, электронов, нейтронов и т. п.). Это — физика микромира. Она объясняет множество важнейших явлений — и радиоактивный распад, и электропроводность металлов, и природу химической связи. Но прежде всего квантовая механика объяснила линейчатые спектры атомов — ответила на вопрос о том, почему атомы способны испускать или поглощать свет лишь со строго определенными частотами колебаний световой волны. Квантовая механика показала, что электроны в атомах могут обладать только фиксированными, прерывными значениями энергии. Физики обычно говорят, что электроны располагаются на дискретных уровнях энергии $E_1$, $E_2$, … — энергия электрона в атоме квантована. Поглощение или испускание света атомом происходит при переходе электрона с одного уровня энергии на другой. В первом случае электрон переходит с уровня с меньшей энергией на уровень с большей энергией, во втором случае — наоборот. Частота испускаемой (или поглощаемой) световой волны определяется условием частот Бора.

$$\nu_{nn'} = \frac{E_n - E_{n'}}{h}. \qquad (1)$$

где $E_n$, $E_{n'}$ — уровни энергии, $n$, $n'$ — значения квантового числа, характеризующего эти уровни.

Одна из главных задач квантовой механики состоит в нахождении квантованных значений энергии для данной системы частиц, в частности, для атома. Согласно уравнению (1) решение такой задачи означает одновременно и расчет спектра системы, то есть определение набора частот света, испускаемого этой системой. Строгое решение этой задачи сводится к решению основного уравнения квантовой механики, так называемого уравнения Шредингера. Это—дифференциальное уравнение в частных про-



изводных второго порядка, и школьник, разумеется, не может его решить. Однако ряд интересных результатов, относящихся к квантованию энергии, можно получить, не решая уравнения Шредингера, исходя из довольно простых соображений.

События, происходящие в микромире, стали объяснимыми лишь после того, как появилась идея о волновой природе микрочастиц. Эту идею впервые высказал де Бройль. Он предположил, что наряду с корпускулярными свойствами материальные частицы обладают волновыми свойствами и между ними существует однозначная связь. Частице, движущейся со скоростью $v$ и обладающей импульсом $p = mv$, соответствует волновой процесс, который характеризуется длиной волны, равной

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \qquad (2)$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ *дж/сек* — постоянная Планка. Многочисленные эксперименты подтверждали справедливость гипотезы де Бройля, и их *результаты прекрасно совпадали* с теоретическими данными, полученными с использованием формулы (2).

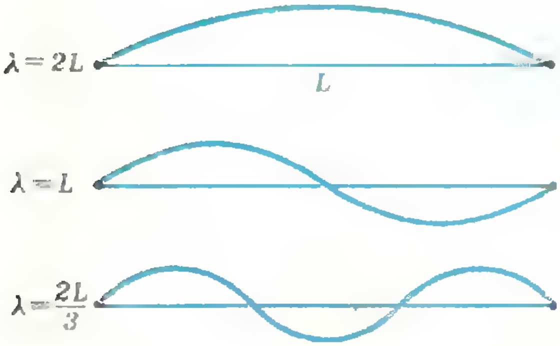


Рис. 1.

Именно волновые свойства электронов приводят к дискретным значениям энергии атомов. Для того чтобы пояснить, как это происходит, воспользуемся механической аналогией — колебаниями струны с закрепленными концами.

При возбуждении струны с закрепленными концами на ней устанавливаются стоячие волны. При этом между концами струны может уложиться лишь целое число полуволн. Если длина струны $L$, то возможные длины стоячих волн находятся из условия

$$n\frac{\lambda}{2} = L,$$

или

$$\lambda_n = \frac{2L}{n},$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ (рис. 1).

Попытаемся при помощи модели стоячих волн на струне найти условия квантования для нескольких задач квантовой механики.

## Электрон «в потенциальном ящике»

Допустим, что электрон может свободно двигаться вдоль отрезка длиной $L$ без действия каких-либо сил. Иными словами, потенциальная энергия электрона в этом интервале равна нулю. А на границах отрезка потенциальная энергия электрона возрастает до бесконечности. Электрон ведет себя так, как вело бы себя тяжелое тело, имеющее возможность свободно двигаться по дну ящика с бесконечно высокими вертикальными стенками, упруго отражаясь от его стенок. Спрашивается, каковы возможные значения энергии электрона?

Если у струны закреплены концы, то на них обязательно располагаются узлы стоячей волны, которая не распространяется за пределы струны. Подобно этому тяжелое тело в ящике не *может выйти за его пределы,* так как это требует бесконечно большой энергии. Электрону, движущемуся в «ящике» со скоростью $v$, соответствует волна де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv}$. Поскольку электрон не может выйти за пределы отрезка $L$ (он упруго отражается от стенок «ящика»), то и волна де Бройля должна отражаться от стенок ящика. Поэтому волновую картину, соответствующую движению электрона, можно представить как установившиеся стоячие волны де Бройля. Узлы должны располагаться на концах отрезка $L$, а на самом отрезке должно укладываться целое число полуволн (рис. 2), то есть должно выполняться условие

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3\ldots).$$

Отсюда следует, что скорость электрона внутри ящика квантована:

$$v_n = \frac{h}{m\lambda_n} = \frac{nh}{2mL} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \quad (3)$$

Соответственно квантована и его кинетическая энергия. Внутри ящика потенциальная энергия электрона равна нулю и, значит, полная

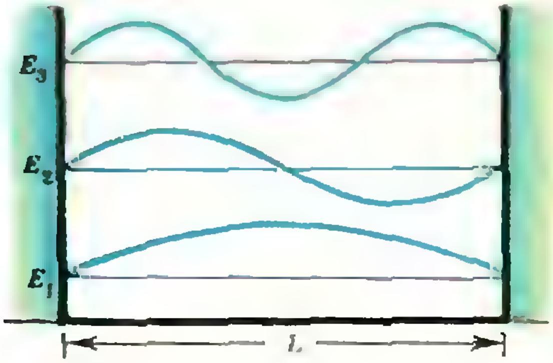


Рис. 2.

энергия совпадает с кинетической:

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

Подставляя сюда возможные значения скорости (3), находим

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2} \quad (4)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

На первый взгляд этот результат кажется неожиданным. Он означает, что и энергия тяжелого тела, движущегося в ящике с бесконечно высокими стенками, должна быть квантована. Однако даже для очень малой частицы квантование становится заметным лишь в том случае, когда «ящик» имеет размеры порядка атомных. Действительно, для электрона, масса которого $m=9{,}8\cdot 10^{-28}$ *г*, помещенного в ящик длиной $L=1$ *см*, возможны значения энергии

$$E_n = n^2\,\frac{(6{,}62\cdot 10^{-34})^2}{8\cdot 9{,}8\cdot 10^{-31}\cdot 10^{-4}} \approx$$

$$\approx n^2\cdot 5{,}6\cdot 10^{-34}\,\textit{дж} = n^2\cdot 3{,}5\cdot 10^{-15}\,\textit{эв},$$

и «расстояние» между соседними уровнями

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n =$$

$$= (2n+1)\cdot 3{,}5\cdot 10^{-15}\ \textit{эв}.$$

Это «расстояние» столь мало́, что практически спектр электрона сплошной. Если же ящик имеет размеры атомного порядка, например, $L = 1\,\text{Å} = 10^{-8}$ *см*, то $E_n = n^2\cdot 5{,}6\times\times 10^{-18}$ *дж* $= n^2\cdot 35$ *эв*, и «расстояния» между соседними уровнями

$$\Delta E_n = (2n+1)\cdot 35\ \textit{эв}.$$

Это очень большие «расстояния», и спектр энергии действительно дискретный.

Условие квантования энергии (4), которое мы получили, пользуясь аналогией с колебаниями струны, оказывается вполне строгим — оно точно совпадает с тем, которое дает решение уравнения Шредингера для данной задачи. Мы еще вернемся к формуле (4) и покажем, какие интересные результаты из нее следуют. А пока обратимся к другой задаче.

## Гармонический осциллятор

Рассмотрим квантование гармонического осциллятора. Так называется частица, находящаяся под действием упругой силы $f = -kx$, пропорциональной отклонению $x$ частицы от положения равновесия и стремящейся вернуть частицу в это положение.

Коэффициент пропорциональности $k$ — константа, характеризующая упругие свойства системы, со стороны которой действует упругая сила. Например, в случае пружины $k$ — жесткость пружины.

Выведенный из положения равновесия осциллятор совершает гармонические колебания с частотой

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (5)$$

Энергия гармонического осциллятора в любой момент времени (при любом отклонении $x$ от положения равновесия) складывается из потенциальной $П = \frac{kx^2}{2}$ и кинетической $K = \frac{mv_x^2}{2}$ энергий, т. е.

$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv_x^2}{2}.$$

Если колеблется микрочастица, то ее полная энергия оказывается квантованной. Найдем условия квантования.

График потенциальной энергии осциллятора — парабола $П = \frac{kx^2}{2}$ (рис. 4).

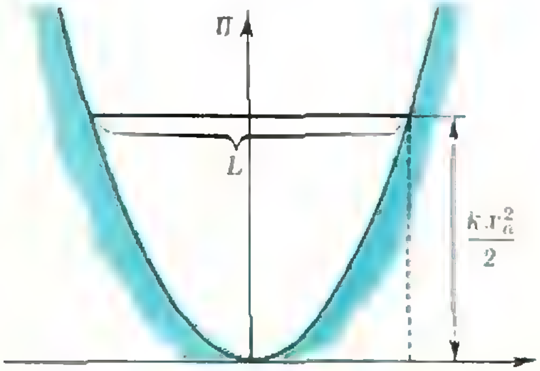


Рис. 3.

Микрочастица, колеблющаяся с максимальным отклонением $x_0$, по существу, движется по отрезку длины $2x_0$, и скорость этого движения зависит от координаты $x$ ($v = \sqrt{\frac{k}{x}(x_0^2 - x^2)}$. Поэтому длина волны де Бройля, соответствующей частице, не будет оставаться постоянной. Это значительно усложняет решение задачи. Чтобы упростить решение, сделаем нестрогое допущение — предположим, что между точками $x_0$ и $-x_0$ на всем отрезке полная энергия частицы равна кинетической энергии.

Сделанное нами допущение означает, что осциллятор можно рассматривать как частицу в «потенциальном ящике», «глубина» которого $\frac{kx_0^2}{2}$ (см. рис. 3). На «стенках» полная энергия равна потенциальной, т. е.

$$E = \frac{kx_0^2}{2}.$$

Следовательно, расстояние между стенками

$$L = 2x_0 = 2\sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

Тот факт, что внутри «ящика» на всем отрезке $L$ кинетическая энергия остается постоянной $\left(\frac{mv^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}\right)$, означает, что скорость частицы внутри «ящика» постоянна. Такой частице соответствуют стоячие волны де Бройля, длины которых определяются условием

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{4}{n}\sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

Следовательно, возможные значения скорости частицы

$$v_n = \frac{nh}{4m}\sqrt{\frac{k}{2E}}.$$

Найдем возможные значения энергии осциллятора:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{nh}{4m}\sqrt{\frac{k}{2E}}\right)^2,$$

откуда

$$E_n = \frac{nh}{8}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

или, с учетом (5),

$$E_n = \frac{\pi}{4}\, nh\nu \qquad (6)$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Строгое решение задачи с помощью уравнения Шредингера имеет вид

$$E_n = nh\nu + \frac{1}{2}h\nu \; (n = 0, 1, 2, \ldots). \quad (7)$$

Существенно, что нестрогое решение (6) отражает основную особенность квантования осциллятора —

пропорциональность значения энергии квантовому числу $n$. Уровни энергии гармонического осциллятора расположены на равных расстояниях друг от друга. И это также отражает решение (6). Правда, в строгом решении эти расстояния равны $h\nu$, а в нестрогом — $\frac{\pi}{4}h\nu$. (Опыт подтверждает, конечно, строгое решение.) Кроме того, согласно строгому решению минимальная энергия гармонического осциллятора при $n=0$ отлична от нуля и равна $\frac{h\nu}{2}$ (рис. 4а). В нестрогом решении $E_0=0$ (рис. 4б).

Из условия квантования (6) следует, что возможные значения максимального отклонения от положения равновесия дискретны:

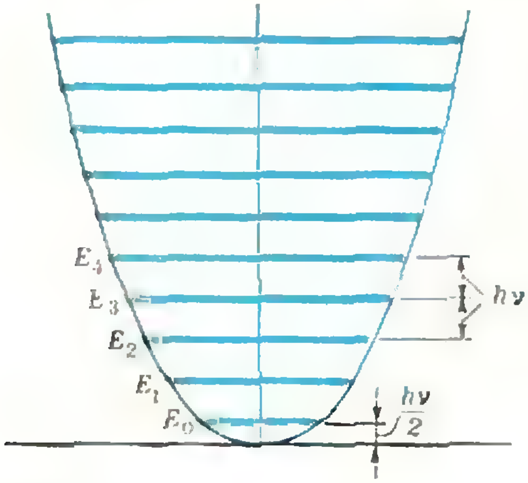


Рис. 4а.

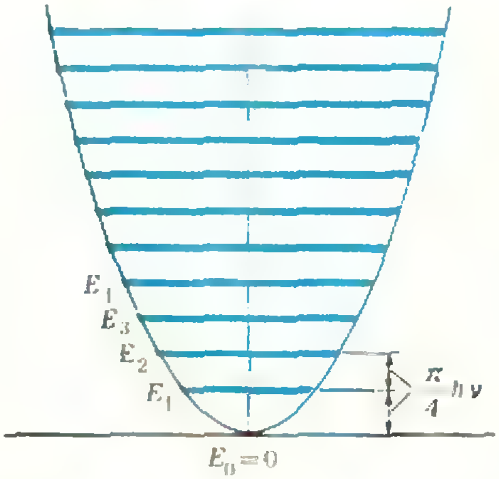


Рис. 4б.

$$E_n=\frac{kx_n^2}{2}=\frac{\pi}{4}nh\nu,$$

откуда

$$x_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}nh\frac{\nu}{k}}. \qquad (8)$$

Этот вывод кажется совсем странным. Ведь амплитуда колебаний, по существу, задается начальным смещением из положения равновесия. А из «житейского» опыта известно, что смещение, скажем, шарика на пружинке можно менять плавно, непрерывно. В чем же дело? Попробуйте сами, пользуясь формулой (8), найти расстояние между «соседними» значениями $x_n$ и $x_{n+1}$, например, для шарика массы $m=10$ г, колеблющегося на пружине жесткости $k=1000$ н/м. И вы убедитесь, что это расстояние столь мало, что спектр возможных значений $x$ практически непрерывный. И только для микрочастиц спектры $E_n$ и $x_n$ дискретны.

## Атом водорода

Рассмотрим еще одну задачу — о квантовании энергии атома водорода. Впервые эта задача была решена Нильсом Бором. Он рассчитал спектр атома водорода, пользуясь так называемой планетарной моделью. Хотя расчетные значения энергии электрона совпадали с наблюдаемым спектром, эта модель не позволяла рассчитать другие характеристики атома.

Согласно современным представлениям квантовой механики планетарная модель лишь очень условно отражает действительное поведение электронов. В атоме водорода единственный электрон как бы образует вокруг ядра электронное облако — облако отрицательного заряда, плотность которого характеризует вероятность нахождения электрона в данной области внутри атома. В невозбужденном состоянии атома радиус сферы наибольшей плотности равен приблизительно 0,53 Å. (В планетарной модели этому расстоянию соответствует наименьший радиус орбиты электрона $\sim 0{,}53$ Å.)

Как мы уже говорили, на вопросы о строении и свойствах электронных оболочек атомов дает ответ решение уравнения Шредингера для данной системы. Мы же попытаемся решить задачу о квантовании энергии атома водорода, не пользуясь ни планетарной моделью, ни уравнением Шредингера — ограничимся по-прежнему механической аналогией с колебаниями струны с закрепленными концами.

Потенциальная энергия электрона, обусловленная его взаимодействием с ядром, равна

$$\Pi = -\frac{e^2}{r},$$

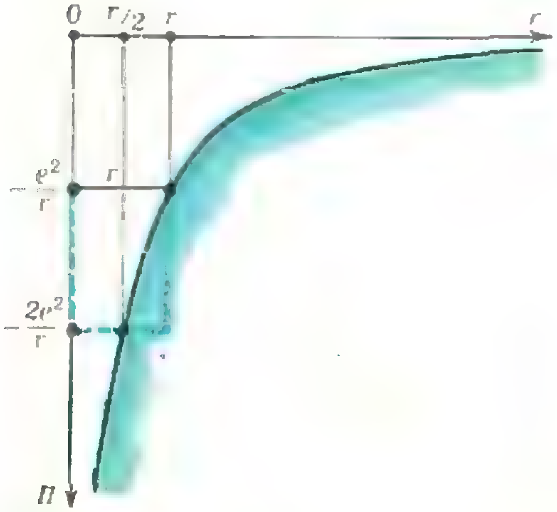


**Рис. 5а.**

где $e$ — величина заряда электрона, а $r$ — радиус сферы наиболее вероятного пребывания электрона в атоме (т. е. радиус сферы наибольшей плотности электронного облака).

График зависимости $\Pi(r)$ — потенциальная кривая — имеет вид гиперболы (рис. 5а) Можно считать, что при данном значении $r$ электрон движется в атоме внутри области, линейный размер которой равен $r$.

Будем считать, что на «границе» этой области вся энергия электрона равна его потенциальной энергии, т. е.

$$E = \Pi = -\frac{e^2}{r}.$$

«Внутри» отрезка энергия электрона в каждой точке $x$ складывается из кинетической и потенциальной:

$$E = \frac{mv^2(x)}{2} + \Pi(x) = -\frac{e^2}{r}. \qquad (9)$$

Скорость электрона меняется на протяжении отрезка $r$; следовательно, длина волны де Бройля, соответствующей электрону, не будет постоянной. Это усложняет решение задачи. Чтобы упростить его, сделаем следующее допущение: будем считать, что скорость электрона постоянна. Например, пусть скорость равна по величине значению $v(r/2)$.

Так как $\Pi(r/2) = -\frac{2e^2}{r}$, то из (9) находим значение $v = v\,(r/2)$

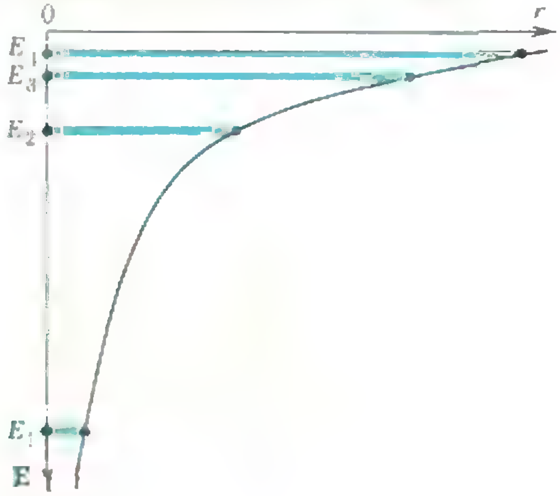


**Рис. 5б.**

$$v = \sqrt{\frac{2e^2}{mr}} = \sqrt{\frac{-2E}{m}}. \qquad (10)$$

Сделанные нами допущения, по существу, означают, что мы представляем электрон в атоме как частицу в «потенциальном ящике», «глубина» которого равна $-\frac{e^2}{r}$, а «ширина» равна $r$ (см. рис. 5а). Такой частице соответствуют стоячие волны де Бройля, возможные длины которых определяются условием

$$\lambda_n = \frac{2r}{n} = -\frac{2e^2}{nE}.$$

Следовательно, возможные значения скорости электрона

$$v_n = \frac{h}{m\lambda_n} = -\frac{hnE}{2me^2}. \qquad (11)$$

Согласно (10) полная энергия электрона может быть выражена через его скорость: $E = -\frac{mv^2}{2}$. Подставив возможные значения $v_n$ из (11), получим

$$E = -\frac{mv_n^2}{2} = -\frac{h^2n^2E^2}{8me^4}.$$

Следовательно, возможные значения энергии электрона —

$$E_n = -\frac{8me^4}{n^2h^2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots). \qquad (12)$$

Строгое решение этой задачи (решение уравнения Шредингера) имеет вид

$$E_n = -\frac{2\pi^2me^4}{n^2h^2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots). \qquad (13)$$

Решения (12) и (13) отличаются друг от друга лишь численными множителями. Так что полученное нами решение качественно верно описывает спектр атома водорода. Уровни энергии электрона в атоме сближаются при возрастании квантового числа $n$ (рис. 5б). Значения энергий на разных уровнях относятся как

$$E_1 : E_2 : E_3 : \ldots \quad 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{9} : \ldots$$

С ростом $n$ энергия электрона растет (напомним, что $E_n < 0$), и при $n \to \infty$ $(r \to \infty)$ обращается в нуль.

Электрон отрывается от атома. Энергия свободного электрона положительна, а спектр ее возможных значений непрерывный.

Таким образом, соображения о стоячих волнах де Бройля в рассмотренных нами случаях помогают объяснить квантование энергии системы.

## Металлическая модель молекулы

Вернемся теперь к потенциальному ящику с бесконечными стенками. В отличие от других задач, мы получили здесь вполне строгое решение. Спрашивается, где может понадобиться такая модель? В теории молекул.

Молекулы органических соединений, в которых двойные связи углерод — углерод сопряжены с единичными связями, т. е. чередуются с ними, обладают подвижными электронами. На каждую двойную связь приходится по два подвижных электрона (они называются пи-электронами). Эти электроны могут свободно перемещаться вдоль всей системы связей, но, конечно, для того чтобы покинуть молекулу, электроны должны приобрести очень большую энергию.

Вещества, молекулы которых содержат большое число сопряженных связей, т. е. пи-электронов, окрашены. Это значит, что, в отличие от большинства органических соединений, которые бесцветны, эти вещества поглощают свет в видимой области спектра. Именно такими веществами являются органические красители. Длина волны поглощаемого света тем больше, чем больше число сопряженных связей, т. е. чем больше число пи-электронов. Например, в ряду углеводородов с сопряженными связями длины волн λ, отвечающие наиболее длинноволновому поглощению, представлены в таблице.

| Формула углеводорода | Число пи-электронов | Длина волны поглощаемого света λ, *нм* |
|---|---|---|
| $H_2C{=}CH_2$ | 2 | 180 |
| $H_2C{=}CH{-}CH{=}CH_2$ | 4 | 217 |
| $H_3C{-}HC{=}CH{=}CH{-}CH{=}CH{-}CH{=}CH{=}CH{-}CH_3$ | 8 | 320 |
| $H_3C{-}HC{=}CH{-}CH{=}CH{=}CH{-}CH{=}CH{-}CH{=}CH{-}$<br>$-CH{=}CH{=}CH{-}CH_3$ | 12 | 372 |

Эти вещества поглощают свет в ультрафиолетовой области спектра, но при дальнейшем увеличении числа сопряженных связей полоса поглощения сдвигается в видимую область. Мы видим, что $\lambda$ примерно пропорциональна числу пи-электронов.

Вычислим длины волн $\lambda$ при помощи модели потенциального ящика.

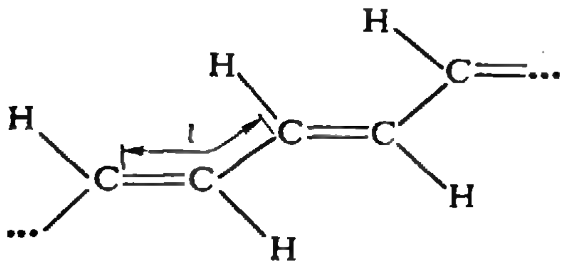


Рис. 6.

Ширина ящика $L$ равна длине цепочки сопряженных связей, т. е. $L = Nl$, где $N$ — число сопряженных связей, $l$ — длина одного звена цепи (связей C — C = C) (рис. 6). Наиболее длинноволновая полоса поглощения соответствует переходу электрона с последнего занятого уровня энергии на первый свободный. Число пи-электронов в молекуле с $N$ двойными связями равно $2N$. Согласно правилам квантовой механики (принцип Паули) на каждом уровне энергии могут расположиться два электрона (с антипараллельными спинами, т. е. присущими электрону моментами количества движения). Следовательно, $2N$ электронов занимают $N$ уровней, и наиболее длинноволновая полоса поглощения отвечает переходу электрона с $N$-го занятого уровня на $N+1$-й уровень, который свободен. Этому переходу согласно формуле (1) соответствует частота световой волны

$$\nu_{N,\,N+1} = \frac{E_{N+1} - E_N}{h}.$$

Значения энергии $E_{N+1}$ и $E_N$ мы находим из условия (4) квантования электрона в ящике, положив $L = Nl$:

$$E_{N+1} = \frac{(N+1)^2h^2}{8mN^2l^2}, \quad E_N = \frac{N^2h^2}{8mN^2l^2}.$$

Следовательно,

$$\nu_{N,\,N+1} = \frac{h}{8ml^2}\,\frac{2N+1}{N^2}.$$

Этой частоте соответствует длина волны ($c$ — скорость света)

$$\lambda = \frac{c}{\nu_{N,\,N+1}} = \frac{8mcl^2}{h}\,\frac{N^2}{2N+1}.$$

Если $N$ велико и можно пренебречь единицей по сравнению с $2N$, то

$$\lambda \cong \frac{4mcl^2}{h}\,N.$$

При большом числе сопряженных связей длина волны поглощаемого света пропорциональна этому числу. Наша теория, основанная на простой модели потенциального ящика, согласуется с опытом и объясняет спектральные свойства молекул с сопряженными связями. В физике молекул принято называть модель потенциального ящика металлической моделью молекулы, так как модель исходит из того, что пи-электроны свободно перемещаются вдоль молекулы подобно электронам в металлической проволоке.

Это только один пример применения нашей модели. Она позволяет рассчитать и объяснить многие другие свойства сопряженных систем.

Мы видим, что элементарные свойства струны весьма поучительны. Они объясняют очень важные квантовомеханические закономерности без решения уравнения Шредингера.

*В. Майер*

# Опыты по полному внутреннему отражению

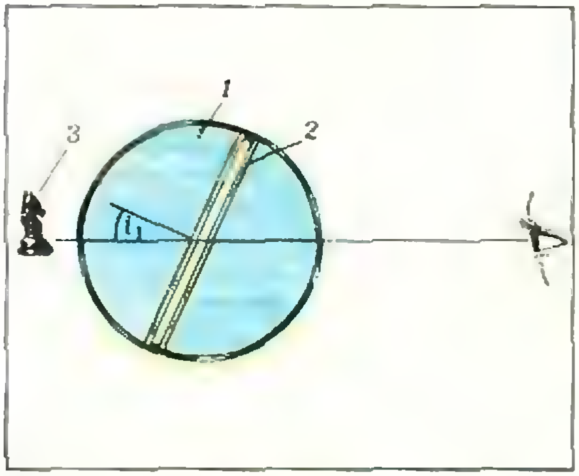


Рис. 1. *1* — стакан с водой, *2* — стеклянные пластинки, *3* — предмет.

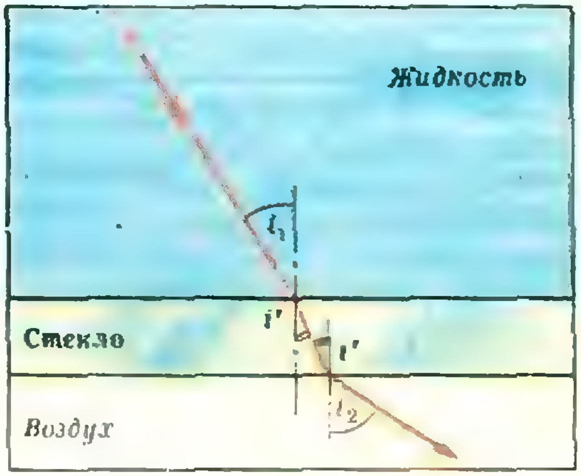


Рис. 2.

В 70-х годах прошлого столетия был разработан простой метод определения показателей преломления жидкостей, основанный на использовании явления полного внутреннего отражения света. Мы предлагаем вам поставить опыт, иллюстрирующий этот интересный метод.

Между двумя тонкими стеклянными пластинками положите вырезанную в виде рамки картонную прокладку и обмажьте края пластинок пластилином так, чтобы воздушная полость между ними была изолирована от окружающей среды. В стеклянную банку или стакан налейте воду и вертикально погрузите в нее пластинки. Посмотрите через стакан и пластинки, ориентированные перпендикулярно к лучу зрения, на какой-нибудь достаточно ярко освещенный предмет (рис. 1). Теперь постепенно поворачивайте пластинки, меняя угол между ними и направлением наблюдения. Начиная с некоторого значения этого угла, вместо предмета, расположенного за стаканом с водой, вы увидите блестящую, как превосходное зеркало, внутреннюю поверхность ближайшей к глазу пластинки.

Ясно, что результат опыта объясняется явлением полного внутреннего отражения: при переходе света из оптически более плотной в оптически менее плотную среду существует такой предельный угол падения света на границу раздела сред, что угол преломления составляет 90°. Если угол падения превышает предельный, то свет во вторую среду не проникает.

Можно ли в описанном выше опыте определить показатель преломления жидкости? На первый взгляд, казалось бы, нет: свет переходит в воздух из стекла, а значит, предельный угол зависит от показателя преломления стекла. Однако более внимательное рассмотрение условий опыта показывает, что это не так. Действительно, пусть абсолютные показатели преломления стекла и жидкости соответственно равны $n_{ст}$ и $n_ж$. Тогда по закону преломления (рис. 2).

$$\frac{\sin i_1}{\sin i'} = \frac{n_{ст}}{n_ж}. \qquad (1)$$

Поскольку стеклянная пластинка плоскопараллельна, $i'$ — это одновременно угол падения света на границу стекло — воздух. Если наблюдается полное внутреннее отражение, то угол преломления $i_2 = 90°$. Следовательно, для границы раздела стекло — воздух по закону преломления

$$\frac{\sin i'}{\sin i_2} = \sin i' = \frac{1}{n_{ст}}. \qquad (2)$$

Сопоставляя формулы (1) и (2), видим, что

$$n_ж = \frac{1}{\sin i_1}.$$

Следовательно, в описанном эксперименте можно определить показатель преломления жидкости, если измерить угол падения $i_1$ света из жидкости на стеклянную пластинку.

Это можно сделать с помощью транспортира, положенного на дно банки. По результатам измерений, пользуясь таблицами значений синусов, можно вычислить показатель преломления жидкости.

Полное внутреннее отражение — настолько красивое явление, что трудно удержаться и не рассказать о фокусе, которым вы можете озадачить своих малоискушенных товарищей.

Плоской пластинкой, вырезанной из оргстекла, разделите небольшой стаканчик на две части, промазав щели между пластинкой и внутренней поверхностью стакана пластилином. В одну половину стакана налейте воду. В другую поместите какой-нибудь предмет (мы использовали значок с изображением популярного киногероя). Из картона сделайте экран, ограничивающий поле зрения так, чтобы наблюдатель мог видеть стакан только из одного положения. Поворачивайте стакан с водой и предметом до тех пор, пока не наступит полное внутреннее отражение света: при этом предмет, находящийся во второй половине стакана, виден не будет. Опустите в эту половину стеклянную трубку, соединенную с резиновой грушей, в которую набрана вода. Нажимая на грушу, вы будете поднимать уровень воды во второй половине стакана, и при этом «появится» предмет; уменьшая давление на грушу, вы вновь заставите предмет «исчезнуть».

С помощью пластинок с «воздушной прокладкой» этот фокус можно осуществить и так, как показано на рисунках 3а и 3б.

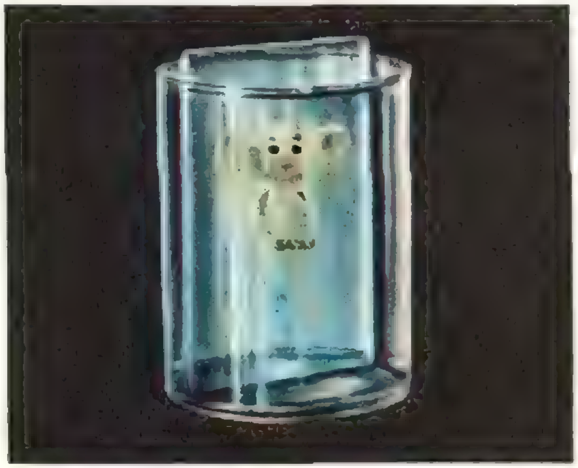


**Рис. 3а.**

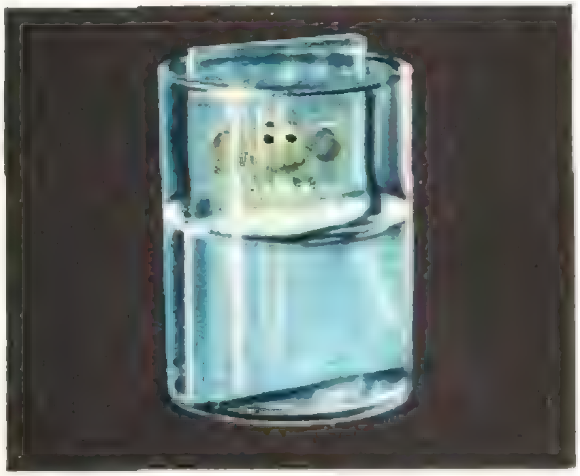


**Рис. 3б.**

# ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА «КВАНТА»

**В соответствии с решением Оргкомитета Всесоюзной Олимпиады школьники, регулярно присылавшие особенно оригинальные и полные решения задач «Задачника «Кванта», получают право участия в республиканском туре Всесоюзной олимпиады.**

**За прошлый, 1975 год редакция получила много писем с решениями задач. Редколлегия журнала «Квант» совместно с членами Оргкомитета отобрала авторов правильных и наиболее интересных решений.**

**Ниже публикуется список школьников — победителей конкурса «Кванта», — которые получили право участвовать в республиканских олимпиадах 1976 года.**

## Математика

О. АПОЛОНСКИЙ г. Жуковский, с. ш. 1, 10 кл.
З. БЕРКАЛИЕВ г. Караганда, с. ш. 1, 10 кл.
М. ГЕДАЛИН г. Тбилиси, ФМШ при ТГУ, 10 кл.
Р. ГИЛЯЗОВ г. Навои, с. ш. 1, 10 кл.
В. ГИШЛАРКАЕВ с. Урус-Мартан ЧИ АССР, с. ш. 3, 10 кл.
С. ГРИШИН г. Рыбное, Рыбновская с. ш., 10 кл.
В. ГУСЕЙНОВ г. Нахичевань, с. ш. 3, 10 кл.
А. ДАНИЛОВ г. Шумерля, с. ш. 1, 10 кл.
А. ДИДЕНКО г. Краснодар, с. ш. 28, 9 кл.
М. ИМЕРЛИШВИЛИ г. Тбилиси, с. ш. 101, 10 кл.
Н. КАЛИКА г. Киев, с. ш. 145, 9 кл.
А. КАМАЛЯН г. Иджеван, Русская с. ш. им. Б. Нерсисяна, 10 кл.
А. КНЯЗЮК г. Киев, с. ш. 145, 9 кл.
Ш. КУХАЛЕЙШВИЛИ г. Тбилиси, ФМШ при ТГУ, 10 кл.
Д. ЛИТВИНЕНКО г. Севастополь, с. ш. 34, 10 кл.
С. ЛИФИЦ г. Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
В. МЕДВЕДЬ г. Молодечно, с. ш. 3, 9 кл.

И. МОРОЗОВ г. Горький, с. ш. 184, 10 кл.
О. ОКУНЕВ г. Казань, с. ш. 122, 10 кл.
Д. ПАНУШ г. Харьков, с. ш. 27, 8 кл.
С. ПОСЛАВСКИЙ г. Харьков, с. ш. 116, 10 кл.
Ю. ПОШЕХОНОВ г. Саратов, с. ш. 13, 10 кл.
А. РОМАНОВ г. Ташкент, с. ш. 103, 10 кл.
Б. СМИРНОВ г. Уфа, с. ш. 86, 9 кл.
С. ТРЕГУБ г. Ташкент, с. ш. 103, 10 кл.
Ю. ФИЛОСОФОВ г. Саратов, с. ш. 13, 10 кл.
С. ФЛОРЯ Сату-Ноуская с. ш. Чимишлийский р-н Молд. ССР
Б. ЯЦАЛО Заречненская с. ш. Ровенской обл., 10 кл.

## Физика

Х. АБДУЛЛИН г. Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
Г. АПЗИН г. Брест, с. ш. 1, 10 кл.
М. ГЕДАЛИН г. Тбилиси, ФМШ при ТГУ, 10 кл.
О. ГОДИН г. Симферополь, с. ш. 40, 10 кл.
Г. ГОЛУБЦОВА г. Москва, с. ш. 410, 8 кл.
Ю. ГОНИК г. Брянск, с. ш. 5, 10 кл.
А. КНЯЗЮК г. Киев, с. ш. 145, 9 кл.
К. КОПЕЙКИН г. Ленинград, с. ш. 239, 10 кл.
С. КОПЫЛОВСКИЙ п. Знобь-Новгородское Сумской обл., с. ш., 10 кл.
О. ЛИЩЕНКО г. Киев, с. ш. 145, [illegible] кл.
И. МОРОЗОВ г. Горький, с. ш. 184, 10 кл.
Ю. МУХАРСКИЙ г. Киев, с. ш. 145, [illegible] кл.
В. ПОЗНЯК г. Барановичи, с. ш. 8, 10 кл.
Е. ПОНОМАРЕВ п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. 82, 8 кл.
И. РУДОП г. Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
П. САРГАЗАКОВ г. Новосибирск, ФМШ при НГУ, 10 кл.
И. СОКОЛОВ г. Москва, с. ш. 179, 10 кл.
Ю. ХАБАРОВ г. Павлово-Посад Моск. обл., с. ш. 1, 10 кл.

# задачник Кванта

## Задачи

### M371—M375; Ф383—Ф387

**Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 мая 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, ул. Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М371 или «...Ф383». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.**

**M371.** В каждой клетке шахматной доски написано целое число от 1 до 64, причем в разных клетках — разные числа. За один вопрос можно, указав любую совокупность полей, узнать совокупность (множество) чисел, стоящих на этих полях. За какое наименьшее число вопросов можно узнать число в каждой клетке?

*С. Фомин*

**M372.** Дан треугольник $ABC$. Доказать, что условие $\widehat{ACB} \geqslant 120^\circ$ необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $P$ плоскости выполнялось неравенство $|AP|+|BP|+|CP| \geqslant |AC|+|BC|$.

*П. Хайдуков*

**M373.** а) Все натуральные числа (записанные в десятичной системе) разбиты на два класса. Докажите, что любую бесконечную десятичную дробь можно разрезать на такие конечные куски, чтобы все они, кроме, быть может, первого куска, принадлежали одному классу.

б) Та же задача, но натуральные числа разбиты не на два, а на несколько классов.

**M374.** Пусть $a$, $b$ и $c$ — положительные числа, $a > c$ и $b > c$. Докажите неравенство

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}$$

*А. Резников*

**M375.** Внутри выпуклого многогранника объема 1 отмечено $3\cdot(2^n-1)$ точки.
Доказать, что из него можно вырезать выпуклый многогранник объема $(1/2)^n$, не содержащий внутри себя ни одной отмеченной точки.

*В. Макеев*

**Ф383.** Цепочка массы $m$ и длины $l$ надета на гладкий круговой конус с углом при вершине $2\alpha$. Конус вместе с цепочкой вращается с угловой скоростью $\omega$ вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью симметрии конуса. Плоскость цепочки горизонтальна. Найти натяжение цепочки.

**Ф384.** Две взаимодействующие между собой частицы *1* и *2* с массами $m_1$ и $m_2$ соответственно об-

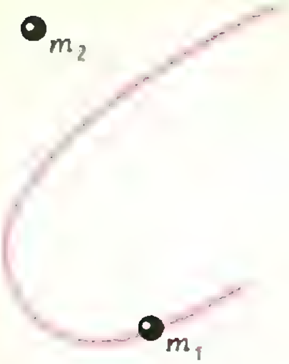


Рис. 1.

разуют замкнутую систему. На рисунке 1 показана траектория частицы *1* и положение обеих частиц в момент времени, когда скорость частицы *1* равна **v**, а скорость частицы *2* равна — 3**v**. Построить траекторию частицы *2*, если $\frac{m_1}{m_2}=3$.

**Ф385.** Большая тонкая проводящая пластина площади $S$ и толщины $d$ помещена в однородное электрическое поле **E**, перпендикулярное пластине. Какое количество тепла выделится в проводнике, если поле выключить?

*П. Зубков*

**Ф386.** В вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника, катет которого равен $a$, расположены одинаковые металлические шарики радиусов $r$ $(r \ll a)$. Шарики заряжены зарядом $q$ каждый. Шарики *1* и *2* соединяют проводником, затем проводник убирают. Затем также поступают с шариками *2* и *3* и, наконец, с шариками *3* и *1*. Какие заряды установились на шариках?

**Ф387.** Два велосипедиста в цирке едут с одинаковыми линейными скоростями $v$ по окружностям радиусов $R_1$ и $R_2$, центры которых находятся на расстоянии $l$ друг от друга $(l < (R_1+R_2))$. Один из велосипедистов движется по часовой стрелке, другой — против. Найти относительные скорости велосипедистов (в системе координат, связанной с одним из них) в тот момент, когда они оба находятся на линии, проходящей через центры окружностей, в точках: а) $A_1$ и $A_2$; б) $A_1$ и $B_2$; в) $B_1$ и $B_2$; г) $A_2$ и $B_1$ (рис. 2).

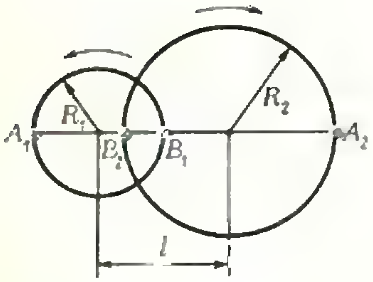


Рис. 2.

# Решения задач

## М331—М335; Ф343—Ф347

**М331.** *а) Треугольник $A_1B_1C_1$ получился из треугольника $ABC$ поворотом вокруг центра описанной окружности на некоторый угол, меньший 180°. Докажите, что точки пересечения соответствующих прямых: $(AB)$ и $(A_1B_1)$, $(BC)$ и $(B_1C_1)$, $(CA)$ и $(C_1A_1)$ — являются вершинами треугольника, подобного треугольнику $ABC$.*

*б) Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ получился из четырех-*

Многие читатели прислали решения этих задач, основанные на рассмотрении вписанных углов. Такие решения, как правило, не содержали разбора случая, при котором пересекаются не соответствующие стороны, а их продолжения. Приведем более простое и общее решение, использующее геометрические преобразования.

а) Обозначим точку пересечения прямой $AB$ с прямой $A_1B_1$ (получившейся из $(AB)$ поворотом вокруг центра $O$ описанной окружности на угол $\alpha$) через $C_2$: $C_2 = (AB) \cap (A_1B_1)$ (рис. 1). Проведем из центра $O$ перпендикуляр $OC_0$ к хорде $AB$; тогда $C_0$ — середина хорды $AB$. Очевидно, что

$$|OC_2|\cdot\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = |OC_0|.$$

*угольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром $O$, поворотом вокруг центра $O$ на некоторый угол, меньший 180°. Докажите, что точки пересечения соответствующих прямых: $(AB)$ и $(A_1B_1)$, $(BC)$ и $(B_1C_1)$, $(CD)$ и $(C_1D_1)$, $(DA)$ и $(D_1A_1)$ — являются вершинами параллелограмма.*

Следовательно, середина $C_0$ хорды $AB$ переходит в точку $C_2$ пересечения прямых $AB$ и $A_1B_1$ в результате последовательного выполнения двух преобразований: поворота на угол $\alpha/2$ относительно центра $O$ и гомотетии с тем же центром и коэффициентом $1/|\cos\frac{\alpha}{2}|$. Указанное преобразование не зависит от выбора хорды, поэтому после его выполнения середины $A_0$ и $B_0$ хорд $BC$ и $AC$ соответственно переходят в точки $A_2 = (BC) \cap (B_1C_1)$ и $B_2 = (CA) \cap (C_1A_1)$. Из этого следует, что треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику $A_0B_0C_0$ с коэффициентом подобия $1/|\cos\frac{\alpha}{2}|$. Но треугольник $A_0B_0C_0$ подобен треугольнику $ABC$ с коэффициентом подобия $^1/_2$; значит, треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику $ABC$ с коэффициентом подобия $1/2\cdot|\cos\frac{\alpha}{2}|$.

б) Решение этой задачи совершенно аналогично предыдущему. Пусть $P$, $Q$, $R$, $S$ — середины хорд $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ (рис. 2). Нетрудно доказать, что четырехугольник $PQRS$ — параллелограмм. Поэтому и точки пересечения $P_1 = (AB) \cap (A_1B_1)$, $Q_1 = (BC) \cap (B_1C_1)$, $R_1 = (CD) \cap (C_1D_1)$ и $S_1 = (DA) \cap (D_1A_1)$ являются вершинами параллелограмма $P_1Q_1R_1S_1$, подобного параллелограмму $PQRS$ с коэффициентом подобия $1/|\cos\frac{\alpha}{2}|$.

*З. Скопец*

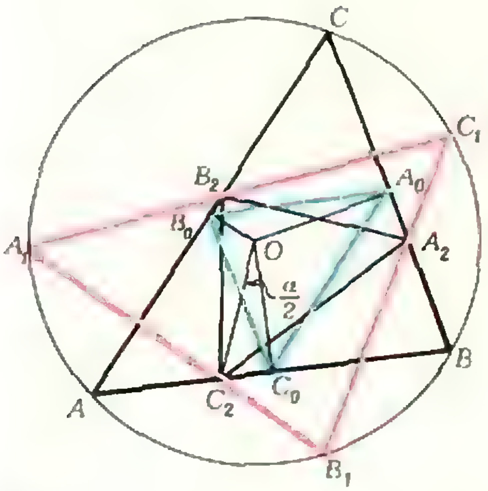


**Рис. 1.**

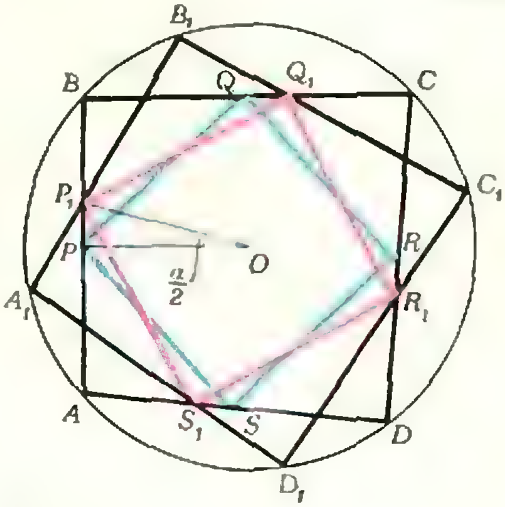


**Рис. 2.**

◆

**М332.** *Можно ли составить куб размерами $k\times k\times k$ из белых и черных кубиков $1\times1\times1$ так, чтобы для каждого кубика ровно два из его соседей имели бы тот же цвет, что и он сам? (Два кубика считаются соседними, если они имеют общую грань.)*

О т в е т. При $k$ четном можно, при $k$ нечетном нельзя.

Пример для четного $k$ построить нетрудно: можно, например, составит куб из чередующихся черных и белых блоков размерами $2\times2\times1$ или из чередующихся слоев, изображенных на рисунке 3 (на этом рисунке показаны два сечения куба $k\times k\times k$, $k=8$, горизонтальными плоскостями, находящимися на расстоянии единица друг от друга).

Предположим, что и для нечетного $k$ составить нужный куб можно. Соединим центры соседних белых кубиков отрезками. Из каждого центра будет выходить по два отрезка. Таким образом, мы получим одну или несколько замкнутых ломаных, звенья которых параллельны ребрам куба, а общая длина равна числу белых кубиков. Но длина замкнутой ломаной, составленной из единичных отрезков трех взаимноперпендикулярных направлений, очевидно, четна. Поэтому белых кубиков — четное число. Аналогично докажем, что и черных кубиков четное число. Но общее число $k^3$ кубиков — нечетно. Получили противоречие, следовательно, при нечетном $k$ нужный куб составить нельзя.

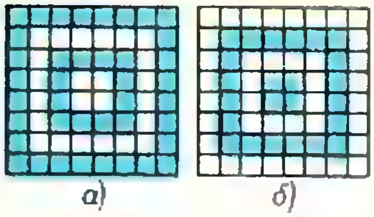

а) б)

**Рис. 3.**

**М333.** *Три мухи ползают по сторонам треугольника $ABC$ так, что центр тяжести образуемого треугольника остается на одном месте. Докажите, что он совпадает с центром тяжести треугольника $ABC$, если известно, что одна из мух проползла по всей границе треугольника. (Центром тяжести называется точка пересечения его медиан.)*

◆

Так как центр тяжести треугольника лежит на медиане и делит ее в отношении 2 : 1 (считая от вершины), то когда одна из мух находится в вершине $B$, центр тяжести «треугольника мух» находится внутри треугольника $DBE$, где $|BD| : |DA| = |BE| : |EC| = 2 : 1$ (рис. 4). Одна из мух побывала во всех вершинах, следовательно, центр тяжести «треугольника мух» лежит в пересечении заштрихованных на рисунке 4 треугольников $DBE$, $CKH$ и $AFQ$, т. е. в точке $O$ — центре тяжести треугольника $ABC$.

*Н. Васильев*

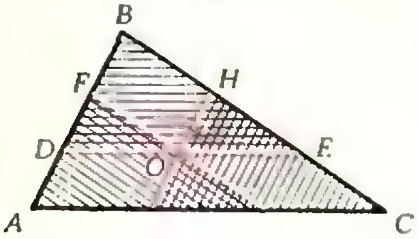
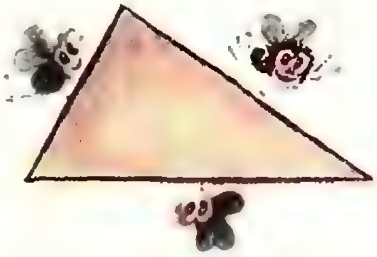


**Рис. 4.**



**М334.** *Дан многочлен $P(x)$:*

*а) с натуральными коэффициентами,*

*б) с целыми коэффициентами.*

*Для каждого натурального числа $n$ через $a_n$ обозначим сумму цифр в десятичной записи числа $P(n)$. Докажите, что найдется число, которое встречается в последовательности $a_1$, $a_2$, $a_3$, … бесконечное число раз.*

◆

Пусть $P(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0$, $c_n \neq 0$.

а) Числа $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1, c_0$ — неотрицательны. Рассмотрим такое натуральное число $l$, что $10^l$ больше всех чисел $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1, c_0$. Тогда в десятичной записи числа $a_{10^l} = P(10^l)$ будут сначала идти цифры числа $c_n$, затем нули; затем цифры числа $c_{n-1}$ — опять нули; цифры числа $c_{n-2}$ — нули и т. д. Таким образом, сумма цифр числа $a_{10^l} = P(10^l)$ равна сумме $S$ цифр всех чисел $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1, c_0$. Рассуждая аналогично, мы видим, что

$S =$ *сумма цифр* $a_{10^{l+1}} =$ *сумма цифр* $a_{10^{l+2}} = \ldots$,

т. е. число $S$ встречается в последовательности $a_1, a_2, \ldots$ бесконечное число раз.

б) Заменив, если нужно, $P(x)$ на $-P(x)$, мы можем считать, что $c_n > 0$. Пусть $m$ — какое-то натуральное число. Положим $Q(x) = P(x+m) = c_n(x+m)^n + c_{n-1}(x+m)^{n-1} + \ldots + c_1(x+m) + c_0$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, мы видим, что $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Если $b_k$ — сумма цифр числа $|Q(k)|$, то ясно, что $b_k = a_{k+m}$. Поэтому нам достаточно подобрать число $m$ так, чтобы все коэффициенты многочлена $Q(x)$ были неотрицательны; тогда некоторое число будет бесконечное число раз встречаться в последовательности $b_1, b_2, \ldots$ и, значит, встречаться бесконечное число раз и в последовательности $a_1, a_2, \ldots$. Покажем, что для этого нам достаточно взять любое число $m$, строго большее всех чисел $|c_{n-1}|, |c_{n-2}|, \ldots, |c_0|$. Действительно,

$$P(x) = (c_n - 1)x^n + (x + c_{n-1} - 1)x^{n-1} + (x + c_{n-2} - 1)x^{n-2} + \ldots + (x + c_0 - 1) + 1.$$

Поэтому

$$Q(x) = (c_n - 1)(x+m)^n + (x + (m + c_{n-1} - 1))(x + m)^{n-1} + \ldots + (x + (m + c_0 - 1)) + 1.$$

Поскольку числа $m$, $m + c_{n-1}$, $m + c_{n-2} - 1$, …, $m + c_0 - 1$, $1$ — неотрицательны, то, раскрыв скобки и приведя подобные члены, мы получим, что все коэффициенты многочлена $Q(x)$ неотрицательны.

*И. Бернштейн*

◆

**М335.** *а) В квадрате $7 \times 7$ клеток отмечены центры $k$ клеток. При этом никакие четыре отмеченные точки не являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. При каком наибольшем $k$ это возможно?*

*б) Решите ту же задачу для квадрата $13 \times 13$ клеток.*

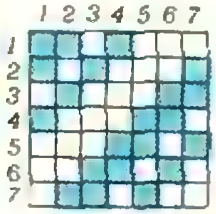


Рис. 5.

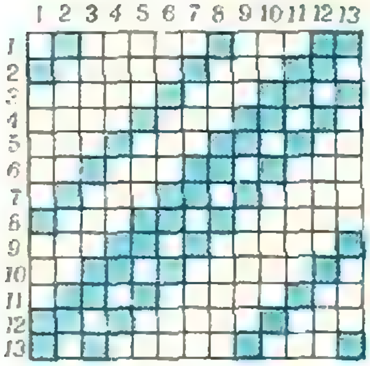


Рис. 6.

Квадрат $7 \times 7$ клеток (или $13 \times 13$ клеток) с отмеченными клетками мы назовем *правильным*, если, как говорится в условии, никакие четыре отмеченные клетки не являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. На рисунке 5 изображен правильный квадрат $7 \times 7$ клеток с 21 отмеченной клеткой, на рисунке 6 (рисунок С. Фомина) — правильный квадрат $13 \times 13$ с 52 отмеченными клетками. Очевидно, что ни в каком из них больше нельзя отметить ни одной клетки, не нарушив свойства *правильности*. Докажем, что в любом другом правильном квадрате $7 \times 7$ клеток число отмеченных клеток не превосходит 21, а в правильном квадрате $13 \times 13$ клеток — 52.

*Пара вертикалей* в квадрате $7 \times 7$ называется *отмеченной*, если найдется горизонталь, на пересечении которой с каждой вертикалью из этой пары лежит отмеченная клетка. Если квадрат правильный, то для каждой пары вертикалей существует не более одной такой горизонтали, а для отмеченной пары — ровно одна. Если на горизонтали с номером $k$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) расположено $a_k$ отмеченных клеток, то с помощью этой горизонтали можно отметить ровно $C^2_{a_k} = \frac{a_k(a_k-1)}{2}$ пар вертикалей. При этом разные горизонтали отмечают разные пары вертикалей! Отсюда следует, что общее число отмеченных пар вертикалей равно

$$\frac{a_1(a_1-1)}{2} + \frac{a_2(a_2-1)}{2} + \ldots + \frac{a_7(a_7-1)}{2} = \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k(a_k-1)}{2}.$$

С другой стороны, очевидно, что общее число всех возможных пар вертикалей равно $C^2_7 = 21$, так что выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{7} \frac{a_k(a_k-1)}{2} \leqslant 21. \qquad (*)$$

Наша цель — вывести из этого неравенства — неравенство:

$$\text{число отмеченных клеток} = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = \sum_{k=1}^{7} a_k \leqslant 21.$$

Из неравенства (**) следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{7} \frac{a_k^2}{2} - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} \leqslant 21, \qquad (**)$$

или

$$\sum_{k=1}^{7} a_k^2 - \sum_{k=1}^{7} a_k \leqslant 42.$$

Найдем такое наибольшее возможное значение числа $A = \sum\limits_{k=1}^{7} a_k$, чтобы последнее неравенство все еще было верным. Нетрудно доказать (мы сделаем это ниже), что

$$\sum_{k=1}^{7} a_k^2 \geqslant \frac{1}{7}\left(\sum_{k=1}^{7} a_k\right)^2 = \frac{1}{7} A^2;$$

тогда из неравенства (**) следует, что

$$\frac{1}{7} A^2 - A \leqslant \sum_{k=1}^{7} a_k^2 - \sum_{k=1}^{7} a_k \leqslant 42,$$

или $\frac{1}{7} A^2 - A \leqslant 42$, или $A^2 - 7A \leqslant 294$, то есть $(A - 21)(A + 14) \leqslant 0$, откуда $A \leqslant 21$.

Доказательство для квадрата 13×13 клеток проводится аналогично, и мы советуем читателям проделать все выкладки самостоятельно.

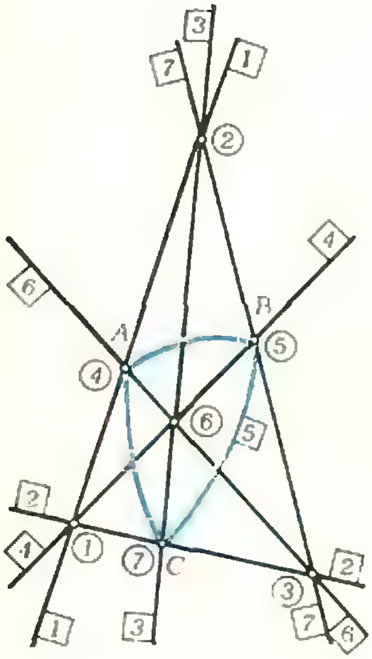


Рис. 7.

Сейчас мы докажем (для любых $n \geqslant 1$, $a_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$) неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2.$$

Для удобства выкладок положим $na = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и докажем, что $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \geqslant na^2$. Обозначим разность между числом $a_k$ и *средним значением* $a$ *чисел* $a_k$ через $\varepsilon_k$: $\varepsilon_k = a_k - a$. Тогда

$$na = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a + \varepsilon_k) = na + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k,$$

и поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = 0.$$

Отсюда следует:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (a + \varepsilon_k)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a^2 + 2a \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = na^2 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 \geqslant na^2.$$

В заключение сделаем одно замечание. В условии и решении задачи мы обошли молчанием тот факт, что правильные квадраты из 7×7, 13×13 (вообще, $(m^2 + m + 1) \times (m^2 + m + 1)$, где $m = 2, 3, \ldots$) клеток допускают красивое геометрическое истолкование. Например, таблицу на рисунке 5 можно считать *таблицей инцидентности* семи точек и семи прямых на рисунке 7 (пунктирную кривую ... $A$ ... $B$ ... $C$ ...

**Ф343**. *Угол, под которым видно Солнце с Земли (угловой диаметр), равен приблизительно* $\alpha \approx 10^{-2}$ *рад. Радиус Земли* $R_З = 6400$ *км. Ускорение свободного падения на Земле* $g \approx 10$ *м/сек²*. *Определите из этих данных отношение средних плотностей Земли и Солнца, принимая во внимание, что* $1$ *год* $\approx 3 \times 10^7$ *сек.*

*Примечание. Объем шара вычисляется по формуле* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, *где* $R$ *— радиус шара.*

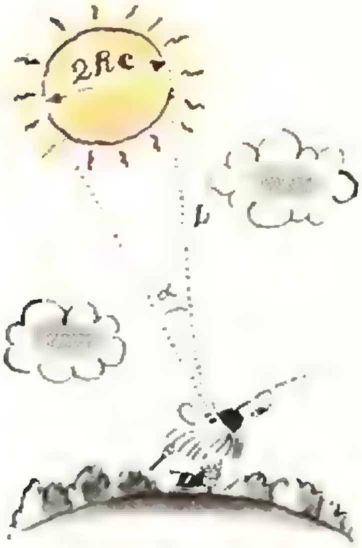


Рис. 8.

**Ф344**. *Заряд* $Q$ *равномерно распределен по тонкому диэлектрическому кольцу, которое лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Индукция магнитного поля, перпендикулярного к плоскости кольца, меняется от* $0$ *до* $B_0$. *Какую угловую скорость вращения приобретает при этом кольцо? Масса кольца равна* $m$.

мы также относим к числу прямых): *клетка, расположенная на пересечении строки с номером* $x$ *и столбца с номером* $X$ ($x = 1, 2, \ldots, 7$, $X = 1, 2, \ldots, 7$) *отмечена тогда и только тогда, когда прямая с номером* $x$ *проходит через точку с номером* $X$ (на рисунке 7 номера точек заключены в кружочки, номера прямых — в квадратики). Редакция надеется вернуться к этой теме в одном из последующих номеров журнала.

*Э. Белага*

◆

При движении Земли вокруг Солнца сила тяготения $F = \gamma \frac{m_C m_З}{L^2}$ сообщает Земле центростремительное ускорение $a_ц = \omega^2 L = \frac{4\pi^2}{T^2} L$. Здесь $\omega$ — угловая скорость, $T = 1$ *год* — период обращения Земли вокруг Солнца, $m_C$ — масса Солнца, $m_З$ — масса Земли и $L$ — радиус орбиты Земли. Согласно второму закону Ньютона

$$\gamma \frac{m_C m_З}{L^2} = m_З \frac{4\pi^2}{T^2} L. \qquad (1)$$

Но $\gamma \frac{m_З}{R_З^2} = g$, следовательно,

$$m_C g \frac{R_З^2}{L^2} = m_З \frac{4\pi^2}{T^2} L,$$

или

$$\frac{m_З}{m_C} = \frac{g R_З^3 T^2}{4\pi^2 L^3}. \qquad (2)$$

Так как $m_З = \frac{4}{3}\pi R_З^3 \rho_З$ и $m_C = \frac{4}{3}\pi R_C^3 \rho_C$,

то из соотношения (2) следует, что

$$\frac{\rho_З}{\rho_C} = \frac{g R_C^3 T^2}{4\pi^2 L^3 R_З}.$$

Теперь нам остается только выразить $R_C$ через $L$ и $\alpha$. Очевидно, что $R_C = L\,\alpha\,2$ (рис. 8). Поэтому окончательно получаем

$$\frac{\rho_З}{\rho_C} = \frac{g \alpha^3 T^2}{32\pi^2 R_З} \approx 4.4.$$

◆

При изменении магнитного поля возникает электрическое поле, напряженность которого в каждой точке кольца направлена по касательной к кольцу. Эту напряженность можно вычислить, разделив э. д. с. индукции, возбуждаемую в круговом контуре радиуса $R$, равного радиусу кольца, на длину окружности контура:

$$E = \frac{|\mathscr{E}_{инд}|}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi R}\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|.$$

Выделим малый участок кольца длиной $\Delta l_i$ с зарядом $\Delta Q_i = \frac{Q}{2\pi R}\Delta l_i$ и массой $\Delta m_i = \frac{m}{2\pi R}\Delta l_i$.

На этот участок действует электрическая сила

$$F_i = \Delta Q_i E = \frac{Q\Delta l_i}{2\pi R}\,\frac{1}{2\pi R}\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|,$$

которая сообщает ему ускорение, направленное по касательной к кольцу. Модуль ускорения

$$a_i = \frac{F_i}{\Delta m_i} = \frac{Q}{2\pi Rm}\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|.$$

Из последнего выражения видно, что модуль ускорения не зависит от выбранного участка кольца. Это означает, что за время $\Delta t$ линейная скорость всех точек кольца изменится на

$$\Delta v = a_i\Delta t = \frac{Q}{2\pi Rm}\left|\Delta\Phi\right| = \frac{QS}{2\pi Rm}\left|\Delta B\right| = \frac{QR}{2m}\left|\Delta B\right|.$$

К тому моменту, когда индукция магнитного поля изменится на $\sum|\Delta B| = B_0$, точки кольца приобретут линейную скорость

$$v = \sum\Delta v = \frac{QRB_0}{2m}.$$

Следовательно, угловая скорость $\omega$ вращения кольца будет равна

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{QB_0}{2m}.$$

*И. Слободецкий*

◆

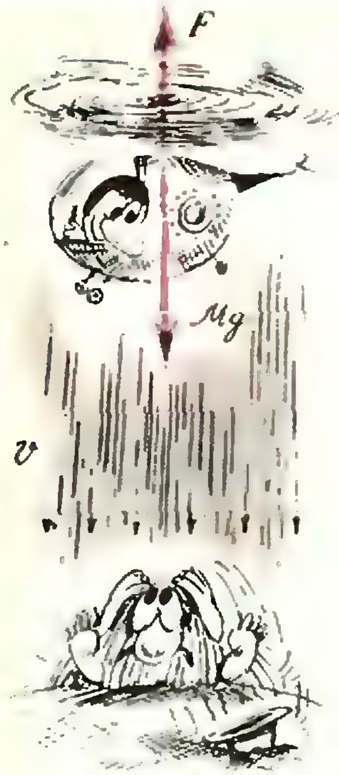


Рис. 9.

**Ф345.** *Оцените мощность двигателя, необходимую для поддержания в воздухе вертолета массы $M = 500$ кг с лопастями длиной $l = 3$ м. Считать, что весь воздух под вращающимися лопастями движется однородным потоком вниз.*

Мощность двигателя равна кинетической энергии, приобретаемой «отбрасываемым» воздухом в единицу времени:

$$N = \frac{\Delta mv^2}{2},$$

где $\Delta m$ — масса воздуха, «отбрасываемая» винтом за 1 *сек*, и $v$ — скорость воздуха.

Вертолет находится в равновесии благодаря тому, что сила тяжести $Mg$ уравновешивается силой $\mathbf{F}$, действующей на вертолет со стороны воздуха (рис. 9). Эта сила по третьему закону Ньютона равна по абсолютной величине силе $\mathbf{F}_1$, действующей со стороны лопастей вертолета на воздух. Так как в единицу времени лопастями «отбрасывается» масса воздуха $\Delta m$ со скоростью $\mathbf{v}$, то воздух за одну секунду приобретает импульс $\Delta m\mathbf{v}$. Согласно второму закону Ньютона этот импульс равен силе $\mathbf{F}_1$, действующей на воздух: $\mathbf{F}_1 = \Delta m\mathbf{v}$.

Следовательно,

$$\Delta mv = Mg, \text{ или } \Delta m = \frac{Mg}{v}. \qquad (1)$$

Тогда

$$N = \frac{\Delta mv^2}{2} = \frac{Mgv}{2}.$$

Если плотность воздуха равна $\rho$, то

$$\Delta m = \rho Sv = \rho\pi l^2 v. \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2)

$$\frac{Mg}{v} = \rho\pi l^2 v, \text{ и } v = \sqrt{\frac{Mg}{\rho\pi l^2}}.$$

Таким образом,

$$N = \frac{Mgv}{2} = \frac{Mg}{2l}\sqrt{\frac{Mg}{\rho\pi}}. \qquad (3)$$

Плотность воздуха можно найти из уравнения состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}. \qquad (4)$$

Для оценок будем считать, что воздух находится при нормальном атмосферном давлении $p = 10^5$ *н/м*$^2$ и при температуре $T = 300°K$. Подставив соответствующие значения величин в формулы (3) и (4), найдем

$$N \approx 3 \cdot 10^4 \text{ вт} = 30 \text{ квт}.$$

*С. Козел*

◆

**Ф346.** *Одна из обкладок плоского конденсатора площадью S подвешена на пружине. Другая обкладка закреплена неподвижно. Расстояние между пластинами в начальный момент равно $l_0$. Конденсатор на короткое время подключили к батарее, и он зарядился до напряжения U. Какой должна быть жесткость пружины k, чтобы не происходило касания пластин? Смещением пластины за время зарядки можно пренебречь.*

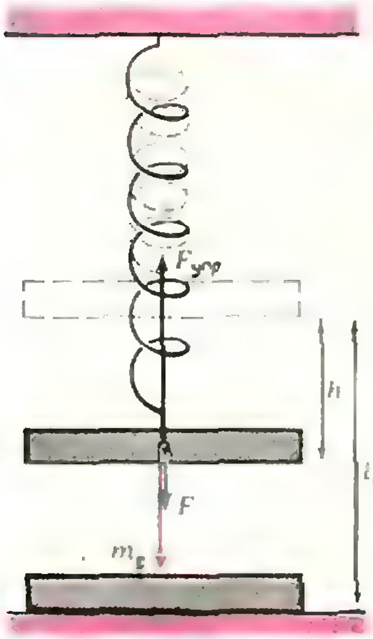


Рис. 10.

При подключении к источнику конденсатор заряжается до разности потенциалов $U$, и его пластины приобретают заряды $+q$ и $-q$, где

$$q = CU = \frac{\varepsilon_0 SU}{l_0}.$$

Верхняя заряженная пластина конденсатора оказывается при этом в поле заряда нижней пластины, и на нее действует сила

$$F = qE,$$

где $E$ — напряженность поля заряда нижней пластины. Так как в плоском конденсаторе линейные размеры пластин много больше расстояния между пластинами, то можно считать, что это поле совпадает с полем бесконечной равномерно заряженной плоскости. Напряженность такого поля не зависит от расстояния до плоскости и равна

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{U}{2l_0}.$$

Под действием силы $F$ верхняя пластина придет в движение, растягивая пружину. Сила $F$, так же как и сила тяжести, не зависит от положения пластины, а сила упругости пружины по абсолютной величине пропорциональна смещению. Поэтому пластина будет совершать гармонические колебания около положения равновесия, в котором (рис. 10)

$$F + mg = F_{упр}, \qquad (*)$$

где $m$ — масса пластины. Амплитуда колебаний пластины будет равна расстоянию $h$ между ее первоначальным положением и положением равновесия. Следовательно, пластины не будут соприкасаться, если это расстояние $h$ меньше половины первоначального расстояния между пластинами, т. е. если

$$h < \frac{1}{2} l_0.$$

Обозначим деформацию пружины в первоначальном положении через $\Delta x_0$. Ее деформация в новом положении равновесия равна $\Delta x_0 + h$, и

$$F_{упр} = k(\Delta x_0 + h).$$

Так как первоначально верхняя пластина находилась в равновесии, то

$$mg = k\Delta x_0.$$

Подставив выражения для $F_{\text{упр}}$ и $mg$ в формулу (*), получим

$$F + k\Delta x_0 = k(\Delta x_0 + h),$$

или

$$h = \frac{F}{k}.$$

Таким образом, пластины не коснутся, если

$$\frac{F}{k} < \frac{1}{2} l_0,$$

или

$$k > \frac{2F}{l_0} = \frac{2qE}{l_0} = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{l_0^3}.$$

◆

**Ф347.** *Космический корабль вращается вокруг Луны по круговой орбите радиуса $R = 3{,}4 \cdot 10^6$ м. С какой скоростью нужно выбросить из корабля вымпел по касательной к траектории корабля, чтобы он упал на противоположной стороне Луны? Через какое время вымпел упадет на Луну? Принять, что ускорение свободного падения тел вблизи Луны в 6 раз меньше земного. Радиус Луны принять равным $1{,}7 \cdot 10^6$ м.*

Вымпел, выброшенный из корабля, должен двигаться по эллиптической орбите, касающейся поверхности Луны (рис. 11). Большая ось этой орбиты равна $R + R_{Л}$, где $R_{Л}$ — радиус Луны. Найдем скорость $v_1$, которую должен иметь вымпел в максимально удаленной точке $A$ этой орбиты (т. е. в точке выброса вымпела из корабля). Для этого воспользуемся законом сохранения энергии и вторым законом Кеплера.

Сила тяготения между вымпелом и Луной аналогична силе взаимодействия двух точечных электрических зарядов противоположных знаков. Поэтому, зная выражение для потенциала поля точечного заряда, можно по аналогии записать выражение для потенциальной энергии вымпела в точке $A$ в виде *)

$$П_A = -\gamma \frac{M_{Л} m}{R}$$

($M_{Л}$ — масса Луны, $m$ — масса вымпела). В точке $B$ — точке касания траектории вымпела поверхности Луны — потенциальная энергия равна

$$П_B = -\gamma \frac{M_{Л} m}{R_{Л}}.$$

Кинетическая энергия вымпела в точках $A$ и $B$ равна

$$K_A = \frac{mv_1^2}{2} \text{ и } K_B = \frac{mv_2^2}{2},$$

где $v_2$ — скорость вымпела в точке $B$. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} - \gamma \frac{M_{Л} m}{R} = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma \frac{M_{Л} m}{R_{Л}}.$$

Сокращая на $m$ и учитывая, что $\gamma \frac{M_{Л}}{R_{Л}^2} = g_{Л}$, получим

$$\frac{v_1^2}{2} - g_{Л} \frac{R_{Л}^2}{R} = \frac{v_2^2}{2} - g_{Л} R_{Л}. \qquad (1)$$

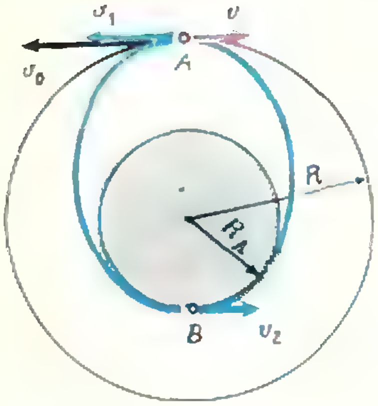


Рис. 11.

---

*) См., например, статью С. Козела «Физические аналогии», «Квант», 1975, № 11.

Из второго закона Кеплера можно получить еще одно соотношение между скоростями $v_1$ и $v_2$. Согласно этому закону радиус-вектор планеты за одинаковые промежутки времени описывает равные площади, поэтому

$$\frac{v_1 \Delta t R}{2} = \frac{v_2 \Delta t R_Л}{2},$$

или

$$v_1 R = v_2 R_Л \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) найдем $v_1$:

$$v_1 = R_Л \sqrt{\frac{2g_Л R_Л}{R(R_Л + R)}} = \sqrt{\frac{g_Л R_Л}{3}},$$

так как $R = 2R_Л$.

Для того чтобы определить скорость, с которой нужно выбросить вымпел относительно корабля, нам еще нужно найти скорость $v_0$ корабля на его круговой орбите. Поскольку корабль вращается по окружности под действием силы тяготения, то

$$\gamma \frac{M_Л m_1}{R^2} = \frac{m_1 v_0^2}{R}$$

($m_1$ — масса корабля). Отсюда

$$v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M_Л}{R}} = \sqrt{g_Л \frac{R_Л^2}{R}} = \sqrt{\frac{g_Л R_Л}{2}}.$$

Очевидно, что $v_1 < v_0$, следовательно,

$$v = v_0 - v_1 = \sqrt{g_Л R_Л}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 200 \text{ м/сек}.$$

С такой скоростью и нужно выбросить вымпел назад, чтобы он упал на противоположную сторону Луны.

Осталось теперь найти время падения вымпела. Воспользуемся для этого третьим законом Кеплера: квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит. Период обращения корабля (или вымпела) по круговой орбите радиуса $R$ равен

$$T_0 = \frac{2\pi R}{v_0} = 4\pi \sqrt{\frac{2R_Л}{g_Л}}.$$

Обозначим через $T$ период обращения вымпела по эллиптической орбите, касающейся поверхности Луны. Согласно третьему закону Кеплера

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{(R + R_Л)/2}{R}\right)^3.$$

Отсюда

$$T = T_0 \sqrt{\left(\frac{(R + R_Л)/2}{R}\right)^3} = \frac{3}{8}\sqrt{3}\, T_0 =$$

$$= \frac{3}{2}\pi \sqrt{\frac{6R_Л}{g_Л}} \approx 11{,}8 \cdot 10^3 \text{ сек} \approx 200 \text{ мин}.$$

*И. Слободецкий*

**В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М326—М335; Ф338—Ф347. Жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач.**

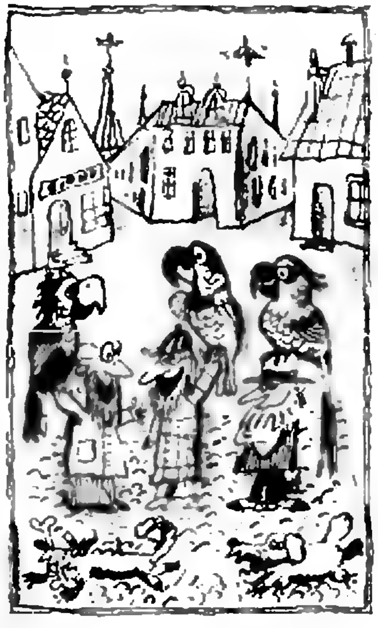
## Математика

В большинстве писем содержалось верное решение задачи **М326**. Остальные задачи решили: *А. Абрамян* (Ереван) **7,2**; *Д. Азов* (Челябинск) **7, 2, 3, 5**; *А. Ангелова* (Болгария) **1, 3**; *О. Аполонский* (Жуковский) **9, 0а), б), 1—3**; *Е. Асарин* (Москва) **3**; *М. Бабаев* (Баку) **2**; *З. Беркалиев* (Караганда) **8а), б), 1, 3**; *П. Билер* (Польша) **7, 1, 3, 4**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **8а), б), в), 9, 1, 3**; *Я. Верховский* (Рыбное Московской обл.) **7**; *А. Ворович* (Москва) **1—3**; *А. Гарнаев* (Таллин) **8а), б)**; *Р. Гассиев* (с. Сунжа СОАССР) **3**; *Р. Гилязов* (Навои) **7, 8а), б)**; *В. Гишларкаев* (с. Урус-Мартан ЧИАССР) **3**; *О. Годин* (Симферополь) **7, 8а), 9, 3**; *Д. Голуб* (Сумы) **7, 9, 3**; *Д. Гольденберг* (Ленинград) **1—3**; *Е. Горбатый* (Одесса) **7, 8а), б), в), 9**; *С. Гришин* (Рыбное Рязанской обл.) **7, 2**; *М. Грищенко* (ГСВГ) **7**; *В. Гроссман* (Одесса) **2, 3**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **7, 8а), б), в), 2—4**; *А. Данилов* (Шумерля) **7, 8а), в), 9, 1—3**; *Н. Дарьин* (Тольятти) **1, 2, 4**; *А. Двоскин* (Ворошиловград) **2**; *А. Диденко* (Краснодар) **2**; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) **2**; *А. Зипин* (Уфа) **8а), в)**; *А. Иванов* (Москва) **9**; *И. Калика* (Киев) **2, 3, 5**; *А. Камелян* (Иджеван) **7, 9, 2, 3, 5**; *Б. Каплан* (Киев) **3**; *В. Карташев* (Елец) **3**; *В. Качалов* (Киев) **1**; *И. Клевчук* (с. Ставчаны Черновицкой обл.) **8а)**; *А. Князюк* (Киев) **7, 8а), б), в), 9, 0в), 2, 3**; *В. Краськевич* (Польша) **4**; *В. Кулаксв* (Ленинград) **7**; *К. Купало-Ярополк* (Москва) **7, 9, 2, 3**; *М. Кутернин* (Алма-Ата) **7**; *А. Лалаян* (Красноводск) **3**; *Е. Ландман* (Ленинград) **7, 1**; *Я. Ланцман* (Ташкент) **9, 1, 3**; *Левыкин* (Райчихинск Амурской обл.) **4, 5**; *М. Липовский* (Волгоград) **3**; *Д. Литвиненко* (Севастополь) **7**; *С. Лифиц* (Харьков) **2, 3, 5**; *В. Любимов* (Харьков) **7**; *А. Ляховец* (Краснодар) **2**; *В. Медведь* (Молодечно) **7, 8а), в), 2, 3, 5**; *А. Меликов* (Сумгаит) **0а)**; *С. Мелихов* (Донецк) **7, 9, 2, 3**; *А. Мень* (Симферополь) **8а), в), 9**; *М. Морайнэ* (Польша) **7, 9, 0а), 1—3**; *И. Морозов* (Горький) **7, 8а), б), в), 9, 0а), б), в), 1—3**; *С. Мягков* (Челябинск) **2, 3**; *В. Нейман* (Ленинград) **7, 2—4**; *Л. Островецкий* (с. Держановка Черниговской обл.) **7, 8а), б), в), 9, 3, 4**; *М. Островский* (Харьков) **2, 3**; *Д. Папуш* (Харьков) **1, 3—5**; *С. Петров* (д. Шерашево ЧувАССР) **0а)**; *М. Питателев* (Москва) **9**; *П. Побылица* (Ленинград) **4**; *С. Попов* (Москва) **7, 8а)**; *Р. Портной* (Черновцы) **8а), в)**; *С. Пославский* (Харьков) **7, 8а),б), в), 9**; *О. Пронин* (Петропавловск) **9**; *С. Путинцев* (Невинномысск) **1—3, 5**; *А. Радул* (Кишинев) **8а), 9**; *В. Решетов* (Троицк) **1**; *В. Рогава* (Тбилиси) **4**; *Р. Романов* (Москва) **3**; *И. Рудаков* (Брянск) **7, 8а), б), в), 1—3**; *А. Симушев* (Москва) **2, 3**; *В. Слепой* (Томск) **1—3**; *В. Смирнов* (Уфа) **0а),б), 1, 3**; *А. Спирин* (Москва) **1**; *Л. Сыч* (Димитровград) **1**; *С. Трегуб* (Ташкент) **7, 8а), б), в), 9, 2**; *Н. Тренев* (Москва) **7, 8б), 3—5**; *В. Фалько* (Харьков) **1**; *С. Флоря* (с. Сатул-Ноу МолдССР) **1, 3**; *М. Фоменко* (Дальнегорск) **9**; *И. Хамитов* (Ухта) **7, 9**; *Д. Чирадзе* (Тбилиси) **2, 4**; *С. Шапиро* (Курск) **1**; *В. Шпильрайн* (Москва) **3**; *С. Яковенко* (Москва) **7, 8а), б), 2**; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) **7, 9, 2—5**.

## Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф338** и **Ф343**. Остальные задачи правильно решили: *Х. Абдуллин* (Алма-Ата) **0—2, 4—6**; *С. Агазарян* (с. Суренаван АрмССР) **2**; *М. Агеев* (Тула) **6**; *Г. Айзин* (Брест) **9, 1, 2, 4—6**; *И. Астров* (Таллин) **0, 7**; *М. Бабаев* (Баку) **7**; *И. Бабичев* (Урюпинск) **1**; *С. Балашов* (Москва) **2**; *Г. Бежиашвили* (Рустави) **5, 6**; *А. Беликов* (Москва) **1, 2**; *В. Белоцерковский* (Харьков) **5**; *С. Беляков* (п. Степной Краснодарского кр.) **1**; *И. Бережинский* (Дружковка) **9, 1, 6**; *И. Бернар* (с. Великий Бычков Закарпатской обл.) **1, 4**; *И. Бондарцев* (Люберцы) **4; 6**; *Я. Бондарчук* (с. Высоцк Ровенской обл.) **1**; *А. Брюм* (Донецк) **9, 1**; *В. Бурджанадзе* (Тбилиси) **1**; *С. Бурнасов* (Таллин) **1, 2**; *В. Буртовой* (Килия) **1**; *В. Вайчатис* (Куршенай) **4—6**; *Б. Васильев* (Самарканд) **1, 4**; *Б. Виноградова* (Великие Луки) **6**; *С. Власов* (Камышин) **1**; *Н. Высквarко* (д. Киевичи Минской обл.) **1, 2**; *В. Гаврилов* (Камень-Каширский) **9, 1**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **9—2, 4**; *А. Гейм* (Нальчик) **7**; *А. Гетман* (Моздок) **5, 6**; *Р. Гибадуллин* (Бугульма) **9, 1, 6**; *И. Гиззатуллин* (д. Старый Ашит ТАССР) **6**; *О. Годин* (Симферополь) **9—1, 4—7**; *Ю. Гоник* (Брянск) **9, 1, 2, 5, 7**; *Е. Горбатый* (Одесса) **9, 1, 2**; *Г. Городний* (Конотоп) **4**; *А. Громов* (Куйбышев) **5—7**; *С. Данилов* (Дрогичин) **9, 0, 2, 4, 6**; *Д. Данильчин* (Рязань) **9, 6, 7**; *М. Дворцов* (Фрунзе) **1**; *В. Дементьев* (Кировск) **5**; *В. Демидович* (Гадяч) **6**; *В. Деминенко* (Черкассы) **5**; *М. Емельянова* (Ташкент) **1**; *А. Жук* (Днепропетровск) **4, 5, 7**; *В. Задков* (Челябинск), **6, 7**; *А. Зарчаров* (Баку) **7**; *Т. Заяц* (с. Т. Пасека Закарпатской обл.) **1**; *А. Зубко* (Ростов-на-Дону) **5**; *П. Зятиков* (Урюпинск) **1, 5**; *С. Иванов* (Харьков) **5, 6**; *С. Керем* (Рига) **1**; *Ю. Кленов* (Целиноград) **9, 1, 2**; *А. Князюк* (Киев) **0, 4, 5**; *Д. Когосов* (Москва) **5, 6**; *А. Козодой* (Челябинск) **5**; *Л. Козырев* (п. Плозерский КарАССР) **9**; *К. Копейкин* (Ленинград) **4**; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) **9, 1, 2, 4, 5**; *И. Корытный* (Львов) **4, 7**; *И. Косенкова* (Калуга) **9, 4**; *Н. Костенко* (с. Гатное Киевской обл.) 9, 1, 2; *О. Костенко* (Кировск Ворошиловградской обл.) 4—7; *В. Кочетков* (Кораблино) 6; *А. Криканов* (Лыткарино) 5, 7; *М. Кроль* (Павловский Посад) 9—2, 7; *П. Крупкин* (Димитровград) 4, 5, 7; *А. Кузубов* (Краснодар) 4, 6; *И. Кузнецов* (Ленинград) 1; *З. Кучкаров* (Ташкент) 5, 7; *С. Кушнир* (п. Быково Московской обл.) 2; *Ю. Лебединский* (Могилев) 5; *А. Лебедь* (Днепропетровск) 9—2, 4—7; *И. Лепин* (Харьков) 5, 7; *А. Либман* (Орел) 2, 4; *Е. Либинзон* (Ярославль) 9, 2; *А. Листовничий* (Киев) 4, 7; *О. Лищенко* (Киев) 9, 1; *Т. Лищенко* (с. Юца Ставропольского кр.) 5; *М. Магид* (Даугавпилс) 9—1; *Е. Мартынова* (Курск) 1, 2; *Ю. Мартынов* (Алмалык) 1; *Е. Матусов* (Москва) 7; *А. Мгеладзе* (Тбилиси) 6; *А. Мень* (Симферополь) 9—2; *М. Микаэлян* (Москва) 9, 4; *А. Минин* (Чебоксары) 6; *О. Мирзеабасов* (Черновцы) 1, 5; *М. Мирзоев* (Нахичевань) 1, 2; *А. Молотков* (п. Кубинка Московской обл.) 4; *И. Морозов* (Горький) 9, 1, 2, 4—6; *А. Морозовский* (Киев) 9—2, 4—7; *А. Мурзашев* (Нефтекамск) 5, 6; *Р. Мусалимов* (Байрам-Али) 1; *Ю. Мухарский* (Киев) 9, 4, 5, 7; *И. Насонов* (Ташкент) 5; *И. Нелин* (Полтава) 9, 1; *Н. Николаев* (Ногинск) 9, 2; *А. Носин* (Харьков) 9; *П. Оксузян* (Орджоникидзе) 4; *А. Охримчук* (Выкса) 9, 0; *Р. Палюнис* (Каунас) 1; *Д. Папуш* (Харьков) 1; *В. Пиразян* (Чаренцаван) 9, 0, 6; *С. Парфенов* (Вороново Гродненской обл.) 4; *О. Певзнер* (Днепропетровск) 9, 0; *А. Подолек* (Пологи) 5, 6; *В. Позняк* (Барановичи) 9—2, 4, 5; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 9, 5; *С. Пятернев* (Саратов) 1, 4, 5, 7; *А. Радул* (Кишинев) 1, 2; *М. Райхман* (Винница) 9; *Л. Расин* (Даугавпилс) 4, 6; *В. Распономарев* (Оренбург) 9, 1, 4; *Р. Романов* (Москва) 5; *А. Рудерман* (Ленинград) 4; *И. Рудой* (Харьков) 9, 2, 4, 5, 7; *А. Савельев* (Александрия) 4, 6; *О. Самвелян* (Ереван) 5; *Т. Саргазаков* (Фрунзе) 4, 6; *И. Сатаев* (Саратов) 4—7; *И. Светличнова* (Куйбышев) 6; *П. Свистун* (Магнитогорск) 1, 2; *А. Святченко* (Кишинев) 9, 1; *В. Серебрянный* (Харьков) 1; *А. Симушев* (Москва) 7; *А. Смоляков* (Кадиевка) 9, 1; *В. Солионов* (Кировск) 4; *Ю. Солозубов* (Тамбов) 4; *В. Старшенко* (Запорожье) 0—2, 4, 5; *А. Суханов* (Москва) 9, 0, 1; *А. Тапочкин* (Новосибирск) 4, 6; *С. Тищенко* (Оренбург) 4; *А. Трищенко* (Комон-на-Дону) 1; *В. Трянин* (Городец Горьковской обл.) 6; *И. Тулинцев* (Чирчик) 5; *А. Тымчук* (Львов) 4; *А. Уточкин* (Ленинград) 5; *Н. Федин* (Омск) 9, 1, 2, 4—7; *Л. Фишбейн* (Березники) 0; *С. Флоря* (с. Сатул-Ноу МолдССР) 4; *А. Фрумкин* (Курск) 5—7; *Ю. Хабаров* (Павловский Посад) 9, 1, 2, 4—6; *И. Халитов* (Ухта) 9, 2; *С. Харовский* (с. В. Чернокинцы Тернопольской обл.) 6; *Л. Хигер* (Ташкент) 0—2, 4—7; *Г. Хоняк* (д. Замошье Витебской обл.) 6; *В. Цырюльников* (с. Кайсарово Ульяновской обл.) 4; *Е. Червоненко* (Днепропетровск) 0; *А. Чернилевский* (Павлодар) 9, 2; *Н. Чернобаев* (п. Серышево Амурской обл.) 5, 7; *А. Чуприн* (Шахты) 5; *Ю. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) 1; *С. Шаташвили* (Тбилиси) 9; *Н. Шеметов* (ст. Советская Краснодарского кр.) 6; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) 9; *Г. Шпарик* (Стрый) 5, 6; *А. Щербаков* (Тамбов) 6; *Г. Якимов* (Орша) 5; *Е. Яненко* (Киев) 7.

# Кто есть кто?



На рыночной площади одного маленького городка стояли три старичка с очень умными попугаями. За некоторую плату каждый попугай отвечал на заданные ему вопросы. Жители городка знали, что один из попугаев за любую плату говорит правду, другой, сколько ему ни дай, соврет, а третий отвечает согласно плате и настроению: решит, что мало дали — соврет, решит, что достаточно, — скажет правду. Но вот кто из попугаев — лжец, кто — хитрец, а кто — честный, никто не знал, пока в город не приехал... математик.

— Кто сидит рядом с тобой? — спросил он у первого попугая.

— Лжец — был ответ.

— А ты кто такой? — спросил математик у второго попугая.

— Я хитрец!

— А кто сидит рядом с тобой? — спросил он у третьего попугая.

— Абсолютно честный попугай! — был ответ.

И математик сразу сказал, кто из попугаев действительно абсолютно честный, кто лжец, а кто хитрец.

А вы сможете это сделать?

*В. Ляховский*

# Логарифмические и показательные...

Большая часть заданий по математике, предлагаемых на конкурсных экзаменах в вузах, сводится к решению уравнений и неравенств.

Для простейших из них, например, для квадратных уравнений и систем линейных уравнений, существуют общие методы решения. В большинстве же случаев нет правил, позволяющих решить уравнение путем последовательного выполнения арифметических действий и элементарных операций над коэффициентами уравнения. Поэтому при изучении, например, показательных и логарифмических уравнений и неравенств рассматриваются лишь частные приемы решений.

## Уравнения

При решении уравнений широко применяются преобразования обеих частей данного уравнения.

Определение 1. Если все корни одного уравнения являются корнями другого уравнения, то второе уравнение называется *следствием* первого.

Определение 2. Два уравнения называются *эквивалентными* (*равносильными*) на некотором множестве значений неизвестного, если они имеют одни и те же корни, принадлежащие этому множеству, то есть если каждое из них является следствием другого.

Естественнее всего применять только такие преобразования, при которых каждое последующее уравнение эквивалентно предыдущему на рассматриваемом множестве (ниже, если это особо не оговорено, имеется в виду множество всех действительных чисел). Тогда решения последнего уравнения будут корнями и исходного уравнения.

Однако такой способ решения не всегда возможен. Иногда легче заменить уравнение неэквивалентным ему следствием, а потом провести проверку корней — нет ли среди них посторонних.

Вспомним сначала несколько основных теорем.

Теорема 1. *При* $a > 0$, $a \neq 1$ *уравнение* $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ *эквивалентно уравнению* $f(x) = \varphi(x)$.

Теорема 2. *При* $a > 0$, $a \neq 1$ *уравнение* $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ *эквивалентно любой из систем*

$$\begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = \varphi(x), \\ \varphi(x) > 0. \end{cases}$$

Отметим, что если посторонние корни появляются только в результате расширения области допустимых значений (ОДЗ) неизвестного, то отделить их от корней исходного уравнения можно или проверив, входят ли они в ОДЗ, или непосредственно подставив их в исходное уравнение или в уравнение, эквивалентное исходному. Если же лишние корни могут появиться не из-за расширения ОДЗ, то необходима проверка подстановкой в исходное уравнение или в то промежуточное уравнение, при решении которого эти посторонние корни могли появиться.

Задача 1 (Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта, 1974). *Решить уравнение*

$$9^{\sqrt{x^2-2x}-x} - 7\cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}-x-1} = 2.$$

Замечая, что

$$9^{\sqrt{x^2-2x}-x}=3^{2(\sqrt{x^2-2x}-x)},$$

$$3^{\sqrt{x^2-2x}-x-1}=\frac{1}{3}\cdot 3^{\sqrt{x^2-2x}-x},$$

положим $3^{\sqrt{x^2-2x}-x}=t$, получим уравнение $3t^2-7t-6=0$, имеющее корни $t_1=3$ и $t_2=-\frac{2}{3}$. Второй корень не даст решений исходного уравнения, так как область значений показательной функции — множество всех положительных чисел. Следовательно, исходное уравнение в области допустимых значений неизвестного эквивалентно уравнению $3^{\sqrt{x^2-2x}-x}=3^1$, а последнее на основании теоремы 1 — иррациональному уравнению $\sqrt{x^2-2x}=x+1$. Возведя обе его части в квадрат, найдем $x=-0{,}25$. Так как при возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появиться посторонние корни, проверка необходима, причем лишь на этом этапе. Подстановка найденного значения $x$ в иррациональное уравнение показывает, что оно удовлетворяет ему и, следовательно, исходному уравнению.

В большинстве случаев основная трудность решения логарифмического или показательного уравнения состоит в преобразовании исходного уравнения до тех пор, пока не появится возможность применить теоремы 1 или 2. Но при этом надо внимательно следить за изменением ОДЗ. Упущение этого момента часто приводит к ошибкам в решении.

Так, используя, например, формулы логарифмирования

$$\log_a xy=\log_a x+\log_a y, \tag{1}$$

$$\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y, \tag{2}$$

$$\log_a x^p=p\log_a x, \tag{3}$$

абитуриенты часто забывают о том, что ОДЗ их левых и правых частей не совпадают.

В самом деле, правые части соотношений (1) и (2) определены для значений $x>0$ и $y>0$. Этим неравенствам удовлетворяют координаты точек, заполняющих первый координатный угол (рис. 1). В то же время левые части соотношений (1) и (2) имеют смысл, когда знаки $x$ и $y$ совпадают. Этому условию удовлетворяют координаты точек, заполняющих первый и третий координатные углы (рис. 2).

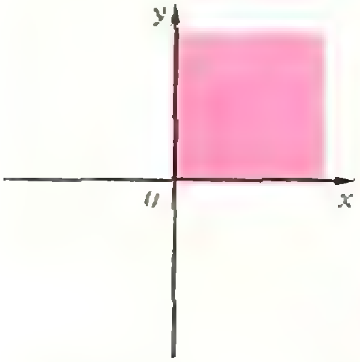


Рис. 1.

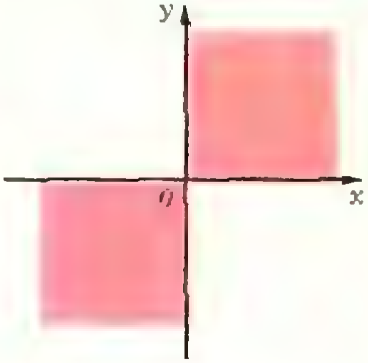


Рис. 2.

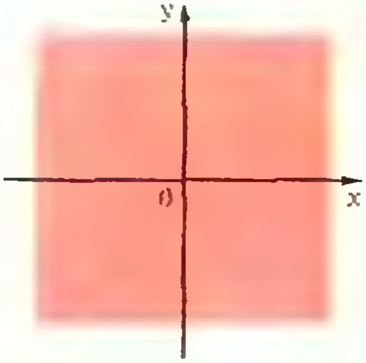


Рис. 3.

Следовательно, при переходе, например, от выражения $\log_a xy$ к выражению $\log_a x+\log_a y$, ОДЗ сужается (на третий координатный угол), а это может привести к потере решений.

Правая часть равенства (3) определена лишь при $x>0$, а ОДЗ левой части зависит от показателя степени $p$. Если $p$ — целое четное число, то левая часть равенства (3) имеет смысл и при отрицательных $x$. Поэтому переход от выражения $\log_a x^p$ к выражению $p\log_a x$ также может привести к потере решений уравнения.

Формулы логарифмирования лучше применять в такой форме:

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|, \qquad (1а)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|, \qquad (2а)$$

$$\log_a x^p = p \log_a |x| \ (p \text{ — четное}). \ (3а)$$

Теперь правые части формул (1а) и (2а) определены при $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Этим условиям удовлетворяют все точки координатной плоскости, за исключением точек, лежащих на осях (рис. 3), и при переходе от выражения $\log_a xy$ к выражению $\log_a |x| + \log_a |y|$ ОДЗ неизвестных не сужается, а расширяется (сравните рис. 2 и рис. 3). Возможность потери решений исключена, но посторонние корни появиться могут. А в равенстве (3а) ОДЗ правой и левой части совпадают: $x \neq 0$.

Второй способ избежать изменения ОДЗ — переход от одного уравнения к эквивалентной ему системе или совокупности уравнений (неравенств). Так, уравнение $\log_a \frac{x}{y} = c$ эквивалентно совокупности уравнений $\log_a x - \log_a y = c$, $\log_a(-x) - \log_a(-y) = c$.

**Задача 2.** *Решить уравнение*

$$\lg(x+10) + \frac{1}{2} \lg x^2 = 2 - \lg 4.$$

ОДЗ неизвестного: $x > -10$, $x \neq 0$. Поскольку $\frac{1}{2} \lg x^2 = \lg |x|$, приведем уравнение к виду $\lg(x+10) + \lg|x| + \lg 4 = 2$, откуда $\lg[4|x|(x+10)] = \lg 100$. По теореме 2 последнее уравнение эквивалентно такому:

$$4|x|(x+10) = 100$$

(поскольку $100 > 0$, неравенство выполняется). Рассматривая два случая и решая соответствующие уравнения:

а) $x > 0$, $x^2 + 10x - 25 = 0$,

б) $-10 < x < 0$, $x^2 + 10x + 25 = 0$,

находим два корня: $x_1 = -5 + 5\sqrt{2}$, $x_2 = -5$.

Нередко решение уравнения или системы уравнений можно упростить введением новых переменных.

**Задача 3** (Завод-втуз при ЗИЛе, 1974). *Решить уравнение*

$$\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14.$$

Обозначим $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x = u$, $\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = v$. Тогда система

$$\begin{cases} u + v = 14, \\ uv = 1 \end{cases}$$

при $u > 0$, $v > 0$ будет эквивалентна исходному уравнению. Ее решения:

$$u_1 = 7 + \sqrt{48}, \quad v_1 = 7 - \sqrt{48};$$

$$u_2 = 7 - \sqrt{48}, \quad v_2 = 7 + \sqrt{48}.$$

Запишем $u_2$ и $v_2$ в таком виде: $u_2 = (7+\sqrt{48})^{-1}$, $v_2 = (7-\sqrt{48})^{-1}$. Возвращаясь к исходной переменной, найдем $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Уравнение вида $[f(x)]^{\varphi(x)} = [g(x)]^{h(x)}$ обычно решают с помощью теоремы 2 логарифмированием обеих частей уравнения по некоторому основанию.

**Задача 4** (Московский геологоразведочный институт, 1975). *Решить уравнение*

$$x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - 4{,}5} = 10^{-2\lg x}.$$

ОДЗ неизвестного: $x > 0$. На этом множестве исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$\lg\left(x^{\lg^2 x^2 - 3\lg x - 4{,}5}\right) = \lg\left(10^{-2\lg x}\right),$$

которое подстановкой $\lg x = t$ сводится к кубическому: $t(8t^2 - 6t - 5) = 0$ с корнями $t_1 = 0$, $t_2 = 1{,}25$ и $t_3 = -0{,}5$. Возвращаясь к исходной переменной, найдем: $x_1 = 1$, $x_2 = 10\sqrt[4]{10}$ и $x_3 = \sqrt{10}/10$.

**Задача 5** (Новосибирский государственный университет, 1974). *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{x-y}} = 2\sqrt{3}, \\ (x+y) \cdot 2^{y-x} = 3. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $x+y>0$. Поэтому, прологарифмировав по основанию 2 и положив $\log_2(x+y)=u$, $x-y=v$, получим систему

$$\begin{cases}\dfrac{u}{v}=1+0{,}5\log_2 3,\\ u-v=\log_2 3,\end{cases}$$

эквивалентную на множестве $x+y>0$ исходной. Подставив значение $u$ из первого уравнения во второе, найдем $v=2$, а затем $u=\log_2 12$. Возвращаясь к исходным переменным и потенцируя, получим

$$\begin{cases}x-y=2,\\ x+y=12,\end{cases}$$

откуда $x=7$, $y=5$.

Заметим, что использование в ходе решения основного логарифмического тождества $a^{\log_a f(x)}=f(x)$ может привести к появлению посторонних решений из-за расширения ОДЗ.

Задача 6 (МФТИ, 1975) *Решить уравнение*

$$9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5.$$

Преобразуем левую часть уравнения, учитывая основное логарифмическое тождество и свойства степеней: $9^{\log_3(1-2x)}=(3^2)^{\log_3(1-2x)}=[3^{\log_3(1-2x)}]^2=(1-2x)^2$. Уравнение $(1-2x)^2=5x^2-5$ является следствием, не эквивалентным исходному уравнению. Действительно, первый его корень $x_1=-2-\sqrt{10}$, удовлетворяет исходному уравнению, так как входит в ОДЗ, а посторонний второй корень $x_2=-2+\sqrt{10}$, появляется вследствие расширения ОДЗ при замене выражения $9^{\log_3(1-2x)}$, имеющего смысл при $x<0{,}5$, выражением $(1-2x)^2$, определенном при любом значении аргумента.

Задача 7 (МФТИ, 1974; МАИ, 1975). *Решить уравнение*

$$\log_3(\log_2 x-9)=2+\log_3(1-4\log_x 4).$$

Так как $2+\log_3(1-4\log_x 4)=\log_3[9(1-4\log_x 4)]$, то по теореме 2 исходное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases}\log_2 x-9=9(1-4\log_x 4),\\ \log_2 x-9>0.\end{cases}$$

Поскольку $\log_x 4=\dfrac{1}{\log_4 x}=\dfrac{2}{\log_2 x}$, положим $\log_2 x=t$; получим систему

$$\begin{cases}t^2-18t+72=0,\\ t>9,\end{cases}$$

решение которой $t=12$, откуда $x=4096$. Заметим, что если ограничиться уравнением из смешанной системы без неравенства, то появится посторонний корень $x=64$.

Задача 8 (МГУ, геофак, 1972; завод-втуз при ЗИЛе, 1974). *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases}2\log_4 x^2+\log_{0,2}y^3=-1,\\ 2\log_4 x^4-\log_{0,2}y=5.\end{cases}$$

В области допустимых значений неизвестных, определяемой условиями $x\neq 0$ и $y>0$, данная система эквивалентна системе

$$\begin{cases}4\log_4|x|+3\log_{0,2}y=-1,\\ 8\log_4|x|-\log_{0,2}y=5,\end{cases}$$

линейной относительно $\log_4|x|$ и $\log_{0,2}y$. Эта система имеет единственное решение $\log_4|x|=0{,}5$, $\log_{0,2}y=-1$, откуда $x=\pm 2$, $y=5$. Если опустить знаки модуля, то решение $(-2;\ 5)$ будет потеряно при логарифмировании.

Иногда полезно пользоваться формулой $b^{\log_a c}=c^{\log_a b}$, справедливой при положительных $a$, $b$ и $c$ и при $a\neq 1$. Действительно,

$$b^{\log_a c}=(a^{\log_a b})^{\log_a c}=(a^{\log_a c})^{\log_a b}=c^{\log_a b}$$

Задача 9 (Московский горный институт, 1975). *Решить уравнение*

$$5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}.$$

Найдем ОДЗ: $x>0$. На основании рассмотренной формулы $x^{\lg 5}=5^{\lg x}$, поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $2\cdot 5^{\lg x}=50$, откуда $5^{\lg x}=5^2$, $\lg x=2$, $x=100$.

Показательные и логарифмические уравнения могут появиться и при решении «текстовых» задач.

Задача 10 (Московский институт электронной техники, 1975). *Найти $x$ и $y$, если известно, что $xy$, $x^x$ и $\frac{1}{y}$ являются последовательными членами геометрической, а $\log_x(y+1)$, $-0{,}5$ и $\log_x(2-y)$ — арифметической прогрессии.*
Условие задачи можно записать в виде

$$\begin{cases} x^{2x} = xy\cdot\dfrac{1}{y}, \\ \log_x(y+1)+\log_x(2-y) = -1. \end{cases}$$

Решение этой системы найдите самостоятельно. Ответ: $x = 0{,}5$; $y = 1$.

Задача 11 (ЛГУ, факультет психологии, 1970). *Решить уравнение*

$$\log_{\sqrt{2-x^2}}(2x^2+a) = 4.$$

Это — уравнение с параметром. Решить его — значит указать, при каких значениях параметра существуют решения и каковы они. При решении таких уравнений особенно важную роль играет контроль эквивалентности уравнений, так как проверка обычно затруднена.

Положив $x^2 = t$, приведем уравнение к виду

$$\log_{\sqrt{2-t}}(2t+a) = 4.$$

Последнее уравнение эквивалентно исходному (с учетом замены $x^2 = t$) при $t \geqslant 0$. В ОДЗ, определяемой соотношениями $2-t>0$, $2-t\neq 1$, $2t+a>0$, оно эквивалентно уравнению $2t+a=(2-t)^2$, имеющему корни $t_1 = 3+\sqrt{5+a}$, $t_2 = 3-\sqrt{5+a}$. Эти корни существуют при $a\geqslant -5$. Корень $t_1$ не входит в ОДЗ ни при каких $a$, а корень $t_2$ входит при $-4<a<-1$ и $a>-1$. Неравенство $t_2\geqslant 0$ выполняется при $a\leqslant 4$ (проверьте!). Вернувшись к исходной переменной, получим:

$$x = \pm\sqrt{3-\sqrt{5+a}}$$

при $-4<a<-1$, $-1<a\leqslant 4$; при остальных $a$ решений нет.

## Неравенства

Основные определения, необходимые для решения неравенств, почти аналогичны соответствующим определениям для уравнений. Все сказанное выше о преобразованиях, изменяющих ОДЗ, справедливо и для неравенств. Однако решение неравенств имеет свои особенности и требует хорошего знания свойств входящих в них функций. В частности, необходимо помнить, что свойства показательной и логарифмической функций различны при основаниях, больших или меньших единицы: при $a>1$ функции $y=a^x$ и $y=\log_a x$ монотонно возрастают, а при $0<a<1$ функции $y=a^x$ и $y=\log_a x$ монотонно убывают.

Из этих свойств вытекают важные теоремы.

Теорема 3. *Неравенство $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}$ при $0<a<1$ эквивалентно неравенству $f(x)>\varphi(x)$, а при $a>1$ — неравенству $f(x)<\varphi(x)$.*

Теорема 4. *Неравенство $\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$ при $0<a<1$ эквивалентно системе неравенств*

$$\begin{cases} f(x)>\varphi(x), \\ \varphi(x)>0, \end{cases}$$

*а при $a>1$ — системе*

$$\begin{cases} f(x)<\varphi(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Неравенства вида $\log_a f(x) > c$ и $a^{f(x)} > d$ ($d>0$; вместо $>$ может стоять $\geqslant$, $<$, $\leqslant$) можно привести к виду, рассматриваемому в теоремах 3 и 4, с помощью формул $c = \log_a a^c$ и $d = a^{\log_a d}$.

Задача 12 (Московский текстильный институт, 1974). *Решить неравенство*

$$3^{2x+5} \leqslant 3^{x+2} + 2.$$

Заметим, что $3^{2x+5} = 3\cdot 3^{2(x+2)}$. Положив $3^{x+2} = t\ (t>0)$, придем к

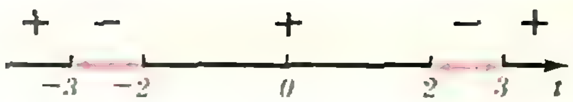


Рис. 4.

неравенству $3t^2-t-2\leqslant 0$. Оно удовлетворяется при $-\frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1$. Неравенство $3^{x+2}\geqslant-\frac{2}{3}$ справедливо при любом вещественном $x$. Представим 1 как $3^0$, тогда из неравенства $3^{x+2}\leqslant 3^0$ по теореме 3 найдем $x\leqslant-2$.

При решении показательных и логарифмических неравенств часто применяется метод интервалов.

Задача 13 (Московский горный институт, 1975). *Решить неравенство*

$$\log_2^4 x-\log_{0,5}^2\frac{x^3}{8}+9\log_2\frac{32}{x^2}<$$

$$<4\log_{0,5}^2 x.$$

ОДЗ неравенства имеет вид $x>0$. Заметим, что в ОДЗ

$$\log_{0.5}\frac{x^3}{8}=\log_2\frac{8}{x^3}=3(1-\log_2 x),$$

$$\log_2\frac{32}{x^2}=5-2\log_2 x,$$

$$\log_{0.5}x=-\log_2 x,$$

поэтому исходное неравенство эквивалентно следующему:

$$\log_2^4 x-13\log_2^2 x+36<0.$$

Положив $\log_2 x=t$, после разложения на множители получим неравенство $(t+3)(t+2)(t-2)(t-3)<0$. Его решение (см. рис. 4): $-3<t<-2$, $2<t<3$. Вернемся к исходной переменной: $-3<\log_2 x<-2$, $2<\log_2 x<3$, откуда: $0{,}125<x<0{,}25$ и $4<x<8$.

Задача 14 (Московский институт электронного машиностроения, 1974). *Решить неравенство*

$$0{,}3^{\log_{0,25}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>1.$$

По теореме 3 данное неравенство (в ОДЗ) эквивалентно неравенству

$$\log_{0,25}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}<0,$$

а последнее — неравенству $\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}>1$, откуда $\frac{3x+6}{x^2+2}>2$. Умножив обе части на $x^2+2$ (это выражение положительно при любых действительных $x$), получим $2x^2-3x-2<0$ или $2(x+0{,}5)(x-2)<0$, откуда $-0{,}5<x<2$.

При решении неравенств, содержащих в основании логарифма или степени параметры или неизвестные, необходимо отдельно рассматривать интервалы $(0;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$ значений основания.

Задача 15 (Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии, 1975). *Решить неравенство*

$$(x^2-x+2)^{\log_{0,6}\frac{2x-3}{x+1}}>1.$$

Поскольку основание степени $x^2-x+2$ положительно при любом действительном значении $x$ (проверьте!), то данное неравенство эквивалентно совокупности систем

$$\begin{cases}x^2-x+2<1,\\ \log_{0,6}\dfrac{2x-3}{x+1}<0,\end{cases}\qquad\begin{cases}x^2-x+2>1,\\ \log_{0,6}\dfrac{2x-3}{x+1}>0.\end{cases}$$

На множестве всех действительных чисел неравенство $x^2-x+2<1$ не имеет решений, а неравенство $x^2-x+2>1$ удовлетворяется при любом $x$ (докажите!). Поэтому первая система решений не имеет, а вторая эквивалентна неравенству $\log_{0,6}\frac{2x-3}{x+1}>0$, т. е. $0<\frac{2x-3}{x+1}<1$.

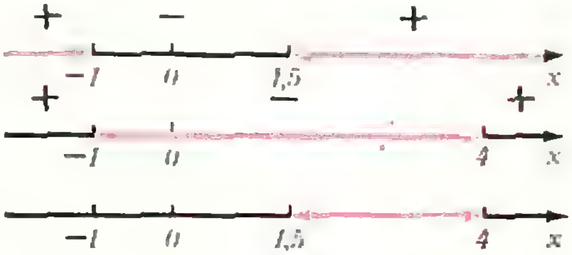


Рис. 5.

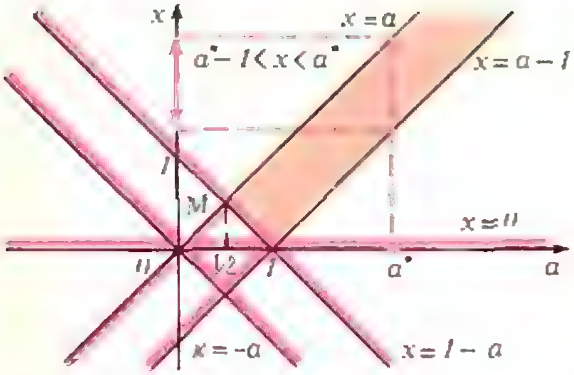


Рис. 6.

Преобразовав эти неравенства в систему

$$\begin{cases}(x+1)(x-1{,}5)>0,\\(x+1)(x-4)<0,\end{cases}$$

решим ее методом интервалов (рис. 5). Ответ: $1{,}5<x<4$.

В заключение рассмотрим решение неравенства с параметром.

Задача 16 (МИЭТ, 1975) *Найти все значения параметра $a$, при которых неравенство*

$$\log_{a+x}|x(a-x)|<\log_{a+x}x$$

*имеет хотя бы одно решение.*

В области допустимых значений неизвестного $x$ и параметра $a$, определяемой условиями $x>0$, $a+x>0$, $a-x>0$, $a+x\neq1$, неравенство эквивалентно следующему: $\log_{a+x}(a-x)<0$. Последнее неравенство с учетом ОДЗ эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases}x>0,\\x>-a,\\x<a,\\a+x>1,\\a-x<1,\end{cases}\qquad\begin{cases}x>0,\\x>-a,\\x<a,\\a+x<1,\\a-x>1\end{cases}$$

Проведем в прямоугольной системе координат (рис. 6) прямые $x=0$, $x=-a$, $x=a$, $x=1-a$ и $x=a-1$. Каждая прямая делит координатную плоскость на две полуплоскости, в одной из которых соответствующее неравенство выполняется, а в другой полуплоскости и на самой прямой не выполняется. Очевидно, первой системе удовлетворяют координаты точек, заполняющих на рисунке 6 закрашенную полосу и не лежащих на ее границах. Наименьшую координату $a=1/2$ среди точек, ограничивающих эту область, имеет точка $M$, следовательно, неравенство имеет решения при $a>1/2$. Эти решения (хотя их находить по условию не требуется) ясны из рисунка 6: $1-a<x<a$ при $1/2<a\leqslant1$ и $a-1<x<a$ при $a>1$.

Предлагаем читателям самостоятельно рассмотреть вторую систему и убедиться в том, что она решений не имеет.

Упражнения

Решить следующие уравнения и неравенства

1 (МАМИ, 1974). $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x^2-3}<\left(\frac{1}{5}\right)^7$.

2 (МТИММП, 1974). $9^x+15^x=25^x$.

3 (МАМИ, 1974). $\log_9 x+\log_9 x^2=\frac{\log_9 x}{\log_9 x^2}$.

4 (МИНГАвК, 1975) $\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}}-2^{4-\sqrt{4x+1}}\right)-2=\frac{1}{4}\lg 16-\lg 4^{\sqrt{x+0{,}25}}$.

5 (МИТХТ, 1974). При каких значениях $a$ уравнение
$x^2-(2^a-1)x-3(4^{a-1}-2^{a-2})=0$
имеет действительные корни?

6 (Станкин, 1975). $2\left(2^{\sqrt{x}}+3\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}-\sqrt[\sqrt{x}-1]{4^2}=0$.

7 (МИФИ, 1974) $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$

8 (МАИ, 1974). $\log_{\sqrt{5-2x}}(x-1-|x-2|)=\log_{5-2x}(3|x-2|-3x+7)$.

9 (МИФИ, 1974). $x^2\,2^{\sqrt{2x+1}-1}+2^x=2^{1+\sqrt{2x+1}}+x^2\cdot2^{x-2}$.

10 (МАТИ, 1974). $\log_{\frac{1}{3}}\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2-7}{2x-4}>0$.

11 (МИРЭА, 1974). $\log_{\frac{9}{2}}\left(4^{x^2+4x}+2^{x^2+4x-1}-\frac{1}{2}\right)<1$.

*А. Диденко, Г. Дубровский*

# Применение диаграмм тепловых процессов

В главе «Термодинамика» школьного курса физики имеется много задач, в которых рассматривается поведение простейшей *термодинамической системы* — идеального газа. Обычно эту систему представляют как достаточно разреженный газ, заключенный в цилиндре под поршнем (рис. 1). При этом термодинамика не рассматривает движения системы как целого и не учитывает потенциальной энергии системы во внешних силовых полях.

Напомним, что состояние идеального газа характеризуется следующими параметрами: давлением $p$, объемом $V$, температурой $T$, массой $m$ и молярной массой $\mu$.

Говорят, что система находится в *термодинамическом равновесии*, если каждый параметр имеет одно и то же значение в любой точке объема системы. Например, газ, предоставленный самому себе, всегда распределяется равномерно по всему объему, так что давление всюду одно и то же. Такое состояние и соответствует равновесному. Если хотя бы один из параметров изменяется от точки к точке, то состояние системы неравновесное. В системе возможны различные процессы: диффузия, теплопередача и т. п. Равновесное состояние отличается от неравновесного тем, что в равновесном состоянии система может находиться сколь угодно долго, если, конечно, не меняются внешние условия.

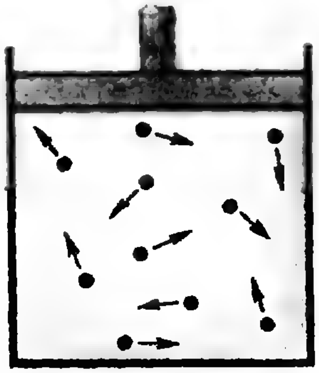


Рис. 1. Простейшая термодинамическая система.

Под влиянием внешних воздействий система переходит из одного состояния в другое. Изменение состояния системы называют *процессом*: процесс всегда связан с нарушением равновесия. Термодинамика рассматривает такие процессы, в которых начальное и конечное состояния являются равновесными. Но промежуточные состояния могут быть и неравновесными. Мы будем рассматривать наиболее простой случай, когда процесс происходит бесконечно медленно, так что состояние системы в любой момент можно считать равновесным. В таком случае говорят, что в системе происходит *равновесный процесс*, который представляет собой непрерывную последовательность равновесных состояний.

Понятия «равновесное состояние» и «равновесный процесс» являются, конечно, идеализацией, но идеализацией очень удобной для количественного анализа поведения системы.

Изменение одного из параметров влечет за собой изменение остальных параметров, поскольку все они связаны друг с другом. Взаимная зависимость между отдельными параметрами устанавливается экспериментально. Формулу, обобщающую результаты экспериментов, называют уравнением состояния системы. Для

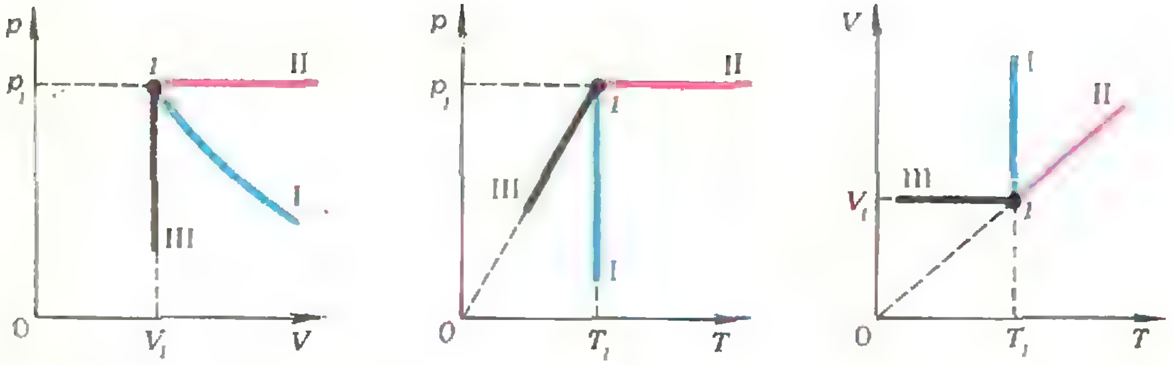


**Рис. 2. Точка *1* — начальное состояние газа; I — график изотермического процесса; II — график изобарического процесса; III — график изохорического процесса.**

газов уравнение состояния (уравнение Клапейрона — Менделеева) имеет вид

$$pV = \frac{m}{\mu}RT \qquad (1)$$

($R$ — универсальная газовая постоянная).

Равновесные состояния и равновесные процессы можно изображать графически. Для этого на двух взаимно перпендикулярных осях откладывают значения каких-либо двух параметров, например, давления $p$ и объема $V$, объема $V$ и температуры $T$, давления $p$ и температуры $T$. Таким образом получаются так называемые диаграммы состояния системы. На любой из диаграмм $(p, V)$, $(V, T)$ или $(p, T)$ каждое равновесное состояние обозначается точкой, а равновесный процесс — линией.

В школьном курсе подробно рассматриваются три частных процесса: изотермический ($T = \text{const}$), изобарический ($p = \text{const}$) и изохорический ($V = \text{const}$) процессы, происходящие с газом неизменного химического состава ($\mu = \text{const}$) и постоянной массы ($m = \text{const}$). Соответствующие графики показаны на рисунке 2.

Но нельзя забывать, что в общем случае могут изменяться все без исключения параметры, в том числе $m$ и $\mu$. Пусть, например, газ переходит из состояния *1* (с параметрами $p_1$, $V_1$, $T_1$, $m_1$, $\mu_1$) в состояние *2* (с параметрами $p_2$, $V_2$, $T_2$, $m_2$, $\mu_2$). Вообще говоря, этот переход может быть осуществлен бесконечным числом способов, в зависимости от того, как меняются отдельные параметры. Например, на рисунке 3 изображены графики одного и того же процесса *1*→*2* на различных диаграммах. Подумайте, как при этом изменяются масса и молярная масса газа.

Часто предметом беседы экзаменатора с абитуриентом становятся круговые процессы, или циклы. Цикл — это такой процесс, для которого совпадают начальное и конечное состоя-

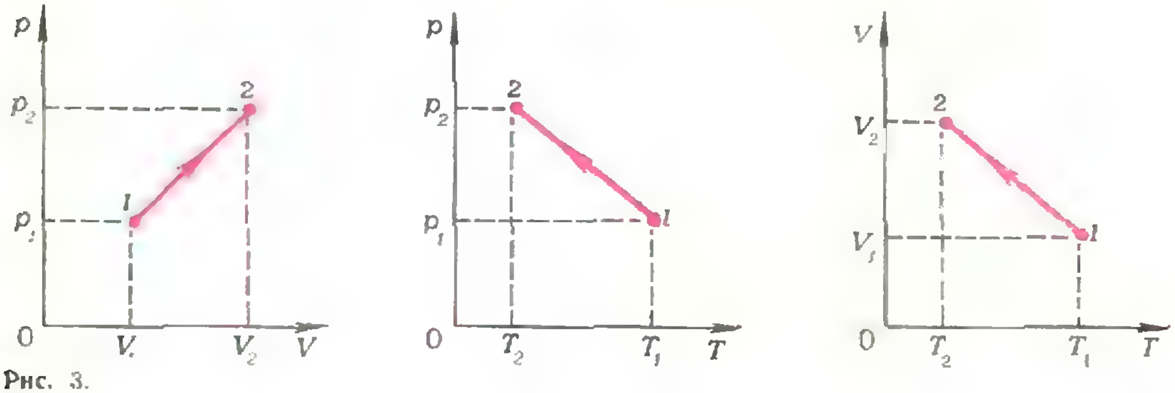


Рис. 3.

ния. В качестве примера разберем такую задачу.

Задача 1. *Как будет выглядеть график кругового процесса $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ (рис. 4) на диаграмме $(p, V)$? Масса газа и его химический состав остаются неизменными.*

Прежде всего «расшифруем» график, приведенный на диаграмме $(p, T)$, и выясним, какие процессы проводились над газом?

На участке $1 \to 2$ давление неизменно и имеет величину $p_1$, а температура увеличивается от значения $T_1$ до значения $T_2$. Изменяться может лишь один параметр — объем $V$. Следовательно, на первом этапе объем изобарически увеличивается от $V_1$ до $V_2$. На диаграмме $(p, V)$ этот процесс изобразится прямой $1 \to 2$, параллельной оси $V$ (рис. 5).

На участке $2 \to 3$ давление изменяется прямо пропорционально температуре (прямая $2 \to 3$ проходит через начало координат). Это указывает на то, что на этом участке объем газа не изменяется: $V_2 = V_3$. На диаграмме $(p, V)$ процесс $2 \to 3$ изобразится вертикальным отрезком, идущим вниз, так как давление уменьшается.

Процесс $3 \to 4$ — изобарический ($p = p_3$). Температура, а следовательно, и объем убывают. Процесс $3 \to 4$ на диаграмме $(p, V)$ будет изображаться отрезком, параллельным оси $V$. Но пока остается неизвестным, где заканчивается процесс $3 \to 4$, так как неизвестен объем $V_4$. Поэтому предварительно исследуем процесс $4 \to 1$. Из рисунка 4 видно, что в процессе $4 \to 1$ давление растет прямо пропорционально абсолютной температуре. А это означает, что процесс происходит при $V = \text{const}$, и $V_4 = V_1$. Окончательно график цикла $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ на диаграмме $(p, V)$ имеет вид, показанный на рисунке 5.

Умение строить графики круговых процессов иногда существенно облегчает количественные оценки некоторых характеристик этих процессов. Поясним это на двух конкретных задачах.

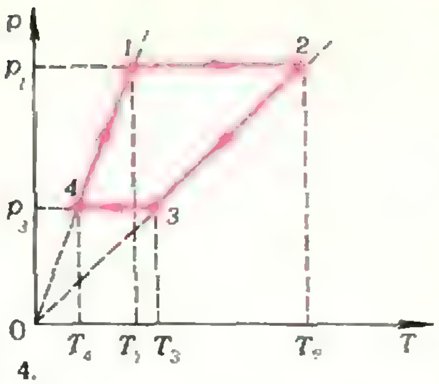


**Рис. 4.**

Задача 2. *Над газом проводят два круговых процесса: процесс $1 \to 2 \to 3 \to 1$ и процесс $3 \to 4 \to 2 \to 3$. Графики этих процессов, представленные в координатах $(V, T)$, изображены на рисунке 6. В каком случае газ совершит большую работу?*

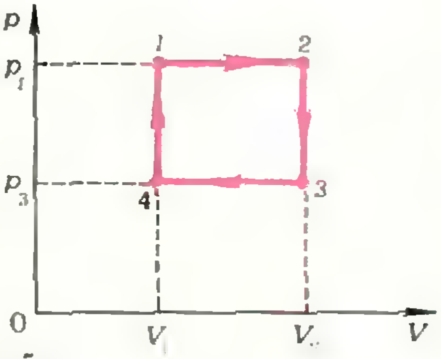


**Рис. 5.**

Решение этой задачи может быть сравнительно простым, если воспользоваться известным свойством диаграммы $(p, V)$: работа, совершенная газом за цикл, пропорциональна площади фигуры, ограниченной графиком этого процесса. Значит, нам не-

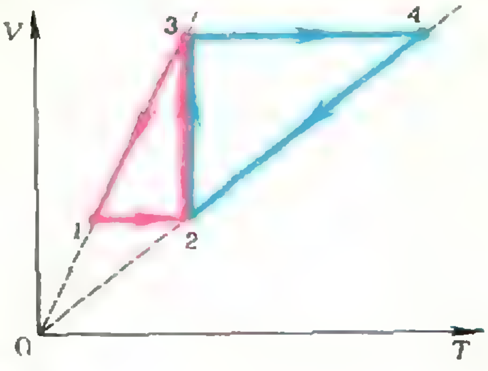


**Рис. 6.**

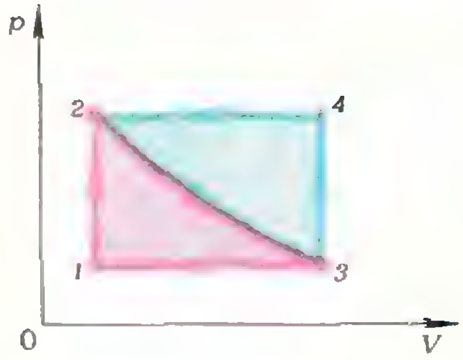


Рис. 7.

обходимо построить графики заданных круговых процессов на диаграмме ($p$, $V$).

Нетрудно видеть, что цикл $1\to2\to3\to1$ состоит из процесса изохорического нагревания $1\to2$, изотермического расширения $2\to3$ и изобарического охлаждения $3\to1$. В координатах ($p$, $V$) он принимает вид, показанный на рисунке 7.

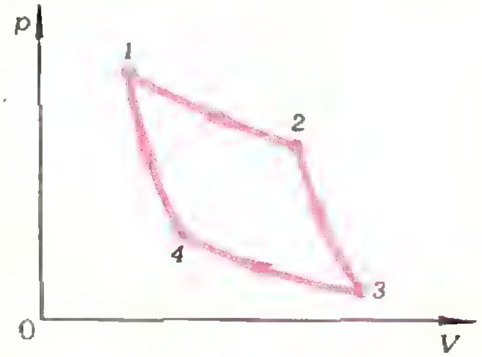


Рис. 8.

Цикл $3\to4\to2\to3$ состоит из процессов изохорического нагревания $3\to4$, изобарического охлаждения $4\to2$ и изотермического расширения $2\to3$. Так как процессы $2\to3$ для обоих циклов совпадают, то разумно графики зависимости $p(V)$ для них изобразить на одних осях координат (рис. 7).

Совершенно очевидно, что площадь фигуры $1\to2\to3\to1$ меньше площади фигуры $3\to4\to2\to3$. Отсюда непосредственно следует, что по модулю работа газа $A$ в первом процессе меньше, чем во втором, т. е. $|A_{1\to2\to3\to1}| < |A_{3\to4\to2\to3}|$. Но нельзя забывать, что работа, совершаемая газом, является алгебраической величиной: если процесс происходит с увеличением объема, то $A > 0$, а если объем системы уменьшается, то $A < 0$. Для круговых процессов можно сформулировать такое правило определения знака работы, совершенной газом: если обход контура кругового процесса совершается по часовой стрелке, то $A > 0$; если же обход контура происходит против часовой стрелки, то $A < 0$. Применив это правило к данной задаче, получаем

$$A_{1\to2\to3\to1} > 0 \text{ и } A_{3\to4\to2\to3} < 0.$$

Окончательно ответ задачи можно дать такой:

$$A_{1\to2\to3\to1} > A_{3\to4\to2\to3},$$

но при этом

$$|A_{1\to2\to3\to1}| < |A_{3\to4\to2\to3}|.$$

Задача 3. *Газ совершает цикл $1\to2\to3\to4\to1$ (рис. 8), состоящий из двух изотерм ($1\to2$ и $3\to4$) и двух адиабат ($2\to3$ и $4\to1$). Какие из этих процессов происходят при подведении теплоты к системе, а какие требуют отвода теплоты?*

Учащиеся редко дают правильный ответ на этот вопрос. Наиболее распространенная ошибка заключается в том, что отождествляются два различных понятия: температура и количество теплоты. При этом утверждается, что если температура неизменна (процессы $1\to2$ и $3\to4$), то теплоту не нужно ни подводить, ни отводить. Это, конечно, неверно.

Для решения задачи воспользуемся первым законом термодинамики:

$$Q = \Delta U + A. \qquad (2)$$

Здесь $Q$ — количество теплоты, переданное системе, $\Delta U$ — изменение внутренней энергии системы и $A$ — работа, совершенная системой.

Внутренняя энергия идеального газа зависит лишь от температуры (конечно, при условии, что $m = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$). Поэтому для изотермического процесса $1\to2$ изменение внутренней энергии $\Delta U = 0$, и равенство (2) принимает вид

$$Q = A.$$

Так как объем системы увеличива-

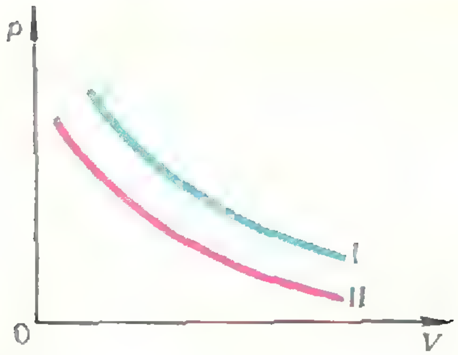


Рис. 9.

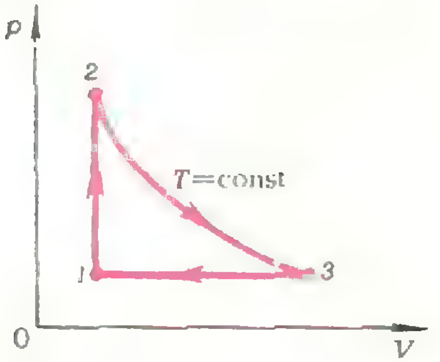


Рис. 10.

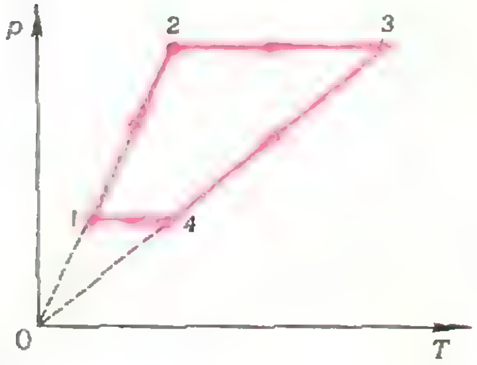


Рис. 11.

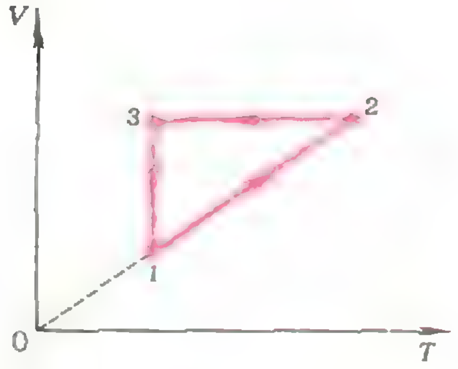


Рис. 12.

ется, то $A > 0$. Следовательно, и $Q > 0$, то есть к системе нужно подвести некоторое количество теплоты. За счет подведенной теплоты система и совершает работу в процессе изотермического расширения. Аналогичные рассуждения можно провести для процесса изотермического сжатия $3 \to 4$. Но в этом случае объем системы уменьшается, поэтому $A < 0$, и $Q < 0$: теплоту нужно от системы отводить.

Процессы $2 \to 3$ и $4 \to 1$ адиабатные. По определению адиабатный процесс — это процесс без теплообмена с окружающей средой, то есть $Q = 0$. Следовательно, на участках $2 \to 3$ и $4 \to 1$ теплота ни подводится к системе, ни отводится от нее.

Заметим, что адиабаты на диаграмме $(p, V)$ идут круче, чем изотермы. Это легко понять, если снова воспользоваться первым законом термодинамики, записанным для адиабатных процессов:

$$\Delta U + A = 0.$$

При адиабатном расширении (процесс $2 \to 3$) система совершает работу за счет внутренней энергии:

$$A > 0, \quad \text{и} \quad \Delta U < 0.$$

Внутренняя энергия газа уменьшается и температура системы понижается (система переходит с изотермы $1 \to 2$ на изотерму $4 \to 3$, соответствующую более низкой температуре). При адиабатном сжатии (процесс $4 \to 1$)

$$A < 0, \quad \text{и} \quad \Delta U > 0.$$

Внутренняя энергия увеличивается, температура газа повышается.

### Упражнения

1. На диаграмме (рис. 9) изображены изотермы для двух различных систем идеального газа. Чем различаются параметры этих систем?

2. На рисунке 10 дан график изменения состояния идеального газа в координатах $(p, V)$. Представить этот круговой процесс на диаграмме $(V, T)$.

3. Над газом, масса которого $m$, а молярная масса $\mu$, производят круговой процесс $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$, изображенный на рисунке 11. Температуры газа в состояниях 1, 2, 3 и 4 равны соответственно $T_1$, $T_2$, $T_3$ и $T_4$. Определить работу, совершенную газом за цикл.

4. Изменение состояния газа при круговом процессе показано на диаграмме $(V, T)$ (рис. 12). В каких процессах газ получает теплоту, а в каких отдает ее? Изобразите процесс на диаграмме $(p, T)$.

# Московский государственный университет

## им М. В. Ломоносова

В этом номере мы приводим образцы вариантов письменного экзамена по математике и примеры задач устного экзамена по физике, предлагавшихся поступающим в МГУ в 1975 году. Экзамены на всех естественных факультетах проводятся в июле.

## Математика

### Механико-математический факультет

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4x+6)+6\sqrt{\log_3(x^2+4x+6)}\geq 8.$$

2. Найти все пары чисел $(x, y)$, удовлетворяющие условию $y\geq 0$ и системе уравнений

$$\begin{cases} 4^{x^2+(y+1)^2}-32=31\cdot 2^{x^2+(y+1)^2},\\ \cos[\pi\cdot(x^2+y^2)]=1. \end{cases}$$

3. Два равных ромба $ABCD$ ($AB\parallel CD$, $AD\parallel BC$) и $APQR$ ($AP\parallel QR$, $AR\parallel PQ$) имеют общую вершину $A$ и лежат в одной плоскости. Известно, что $\angle BAD=\angle PAR=\alpha<\frac{\pi}{2}$, точка $R$ лежит внутри ромба $ABCD$ и угол $RAD$ равен $\beta$. Стороны $BC$ и $QR$ пересекаются в точке $K$. Найти величину угла $BAK$.

4. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной $S$ и основанием $ABC$ вписан шар единичного радиуса; двугранный угол между основанием пирамиды и боковой гранью равен 60°. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания $AB$ и $BC$ в некоторых точках $M$ и $N$ таких, что $MN=5$, касающаяся шара в точке, удаленной на равные расстояния от точек $M$ и $N$, пересекающая продолжение высоты пирамиды $SK$ за точку $K$ в некоторой точке $D$. Найти длину отрезка $SD$.

5. Без помощи таблиц найти все значения $x$ в промежутке $-4<x<-2{,}5$, удовлетворяющие равенству

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(\sin x-\cos 6x+\frac{2}{3}\right)=$$

$$=\log_{\frac{1}{5}}\left(\sin 3x-\cos 8x+\frac{2}{3}\right).$$

### Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2+4x-5}-2x+3>0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin(2x+\sin^2 y)=0,\\ x-3\sin^2 y=-2. \end{cases}$$

3. Дана прямоугольная трапеция. Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определить основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны $c$ и $d$, причем $c<d$.

4. Два грузовика доставили со склада на стройку одно и то же количество кирпича и одно и то же количество цемента, причем каждый из них сначала доставлял кирпич, а затем цемент, перевозя за каждую поездку груз одного и того же веса. Первый грузовик начал работу на 40 минут раньше, а закончил на 40 минут позже второго. При этом интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был не более 20 минут.

Если бы первый грузовик начал работу на 1 час 5 минут раньше второго, уменьшив свою производительность на 10%, а производительность второго грузовика не изменилась, то второй грузовик закончил бы работу на 55 минут раньше первого, а интервал времени между окончаниями доставки кирпича грузовиками был бы не менее 25 минут.

Если бы производительность первого грузовика уменьшилась на 2 тонны в час, а производительность второго грузовика не изменилась, то первый грузовик затратил бы на выполнение всей работы в два раза больше времени, чем второй грузовик на доставку кирпича.

Сколько всего цемента было доставлено на стройку?

5. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Скрещивающиеся ребра $AC$ и $BD$ и $AD$ и $BC$ этой пирамиды перпендикулярны, ребра $AB$ и $CD$ равны, все ребра пирамиды касаются шара радиуса $r$. Найти площадь грани $ABC$.

### Физический факультет

1. Решить уравнение

$$2\sin(x+3)\cdot\cos(4x-1)+\sin(3x-4)=0.$$

2. Решить уравнение

$$6^{\log_{\frac{1}{6}}(x+3)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_4(x^2+5x+12)}$$

3. Решить неравенство

$$(2-5^x)(7x^2-10x+3)<0.$$

4. В прямоугольном треугольнике $ABC$ угол $ACB$ — прямой. Пусть $E$ — точка пересечения биссектрисы угла $ABC$ со стороной $AC$; точка $D$ — середина стороны $AB$, $O$ — точка пересечения отрезков $BE$ и $CD$. Через точку $O$ проведен перпендикуляр к прямой $BO$ до пересечения со стороной $BC$ в точке $F$. Известно, что $FC=b$, $OC={}^{3b}/_{2}$. Найти площадь треугольника $ABC$.

5. Два равных треугольника $KLM$ и $KLN$ имеют общую сторону $KL$, $\angle KLM=\angle LKN=\pi/3$, $KL=a$, $LM=KN=6a$. Плоскости $KLM$ и $KLN$ взаимно перпендикулярны. Шар касается отрезков $LM$ и $KN$ в их серединах. Найти его радиус.

### Биологический факультет

1. Двое рабочих в первый день работали одно и то же время, обрабатывая одинаковые детали. При этом первый рабочий обработал на 30 деталей больше, чем второй. На следующий день первый рабочий увеличил производительность труда в 1,2 раза и закончил работу на 1 час раньше, чем в первый день. Второй рабочий во второй день обрабатывал на 5 деталей в час меньше, чем в первый день, и проработал в 7/6 раза дольше, чем в первый день. Известно, что во второй день каждый из рабочих обработал по 420 деталей. Сколько деталей в час обрабатывал второй рабочий в первый день?

2. Найти все значения параметра $p$, при которых квадратное уравнение

$$(4x)^2+\left(2^{\frac{1}{p}+4}-24\right)x+1=0$$

имеет ровно одно решение.

3. В окружность вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$, причем его сторона $AB$ является диаметром окружности. Диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $M$. Известно, что $BC=3$ $CM=\frac{3}{4}$, а площадь треугольника $ABC$ втрое больше площади треугольника $ACD$. Найти длину отрезка $AM$.

4. Решить уравнение

$$|\sin x+2\sin 2x+\sin 3x|=1+2\cos x+\cos 2x.$$

5. Найти все целые числа $n$, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}-n+13\right)}\left(\frac{\sqrt{16-n}}{\sqrt{n+11}+1}\right)\leqslant 0.$$

### Химический факультет

1. Решить неравенство

$$9^{\frac{3}{2}x+\sqrt{x}}<8\cdot 3^{2x+3\sqrt{x}}+3^{x+4\sqrt{x}+2}.$$

2. Две шахты соревновались в течение первого квартала. Мартовская добыча второй шахты была на 400 $m$ меньше февральской добычи первой шахты. Январская добыча первой шахты равнялась ее же мартовской добыче и равнялась февральской добыче второй шахты. По итогам первых двух месяцев добыча первой шахты оказалась меньше добычи второй шахты на 1000 $m$. Что больше и на сколько: январская добыча первой шахты или январская добыча второй шахты? Известно, что если бы январская добыча второй шахты равнялась ее же мартовской добыче, то добыча второй шахты за январь, февраль и март месяцы оказалась бы больше добычи первой шахты за эти же месяцы на 1300 $m$.

3. В треугольнике $ABC$ косинус угла $ACB$ равен ${}^{2}/_{3}$, $AC=3$, $BC=9$. Точка $D$ лежит на стороне $BC$ так, что $CD=3$. Найти отношение площади круга, описанного около треугольника $ACD$, к площади круга, вписанного в треугольник $ABD$.

4. Шар радиуса $R$ касается всех боковых граней треугольной пирамиды в серединах сторон ее основания. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром шара, делится пополам точкой пересечения с основанием пирамиды. Найти объем пирамиды.

5. Найти все значения параметра $a$, при которых система

$$\begin{cases}\sin(3a-3y)+3\sin x=0,\\ 2\log_4(a-y)+2\log_4(2\sqrt{y})=\\ \qquad=\log_2\sqrt{y}+3\log_8(2x)\end{cases}$$

имеет четное число решений.

### Факультет почвоведения

1. Два экскаватора должны вырыть три одинаковых котлована. Если они будут работать вместе, то выроют их за два дня. Первый экскаватор может вырыть один такой котлован на день быстрее, чем второй экскаватор. В один из дней первый экскаватор работал полдня, а второй работал весь день. Какая часть всей работы была выполнена за этот день?

2. Найти все значения переменной $x$, при которых выражение $3+\sin^2 2x-2\sin^2 x$ достигает своего максимального значения.

3. Решить уравнение

$$x+27^{\frac{5}{2}\left|\log_{9\sqrt{3}}\sqrt[3]{x}\right|}=\frac{10}{3}.$$

4. В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трех

сторон параллелограмма каждая. Радиус одной окружности равен 1. Известно также, что один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найти площадь параллелограмма.

5. Доказать без помощи таблиц, что

$$\log_2 7+\left(3+\cos\frac{15}{7}\right)\log_7 2<4.$$

### Геологический факультет

1. Решить уравнение
$\cos 4x+6=7\cos 2x$.

2. Экскаватор роет котлован. После того как было вынуто 20 $м^3$ грунта, производительность экскаватора снизилась на 5 $м^3/ч$. Найти первоначальную производительность экскаватора, если через 8 часов после начала работы было вынуто 50 $м^3$ грунта.

3. Решить неравенство

$$2\log_{(2x-1)^2}10+\log_{10}|2x-1|^3<\log_2 8.$$

4. В равнобедренном треугольнике $ABC$ известны стороны: $AC=4$ *см*, $AB=BC=6$ *см*. Биссектриса угла $C$ пересекает сторону $AB$ в точке $D$. Через точку $D$ проведена окружность, касающаяся стороны $AC$ в ее середине и пересекающая отрезок $AD$ в точке $E$. Найти площадь треугольника $DEC$.

5. Решить неравенство

$$\sqrt{(x-5)(-x+7)}+1>-\sqrt{x-5}+\sqrt{-x+7}.$$

### Географический факультет

1. Человек в лодке начал грести против течения быстрой реки. Однако через 4 минуты лодка оказалась на 80 *м* ниже по течению. Развернув ее, он перестал грести, и, пока он отдыхал, лодку снесло на 40 *м*. Затем он принялся грести по течению, причем лодка двигалась относительно воды с той же скоростью, как и в первые 4 минуты, и прошла относительно берега еще 40 *м*. В целом после разворота лодки прошло 100 секунд. Какова скорость течения?

2. Решить уравнение

$$\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{4}-\cos^2\frac{x}{2}.$$

3. Решить уравнение

$$5^{\log_{\sqrt{5}}(x-1)}=25^{\log_5\sqrt{x^2-1}}\cdot 25^{\log_5\frac{x^2-1}{4x^2-7}}.$$

4. В треугольнике $ABC$ биссектриса $AH$ пересекает высоты $BP$ и $CT$ в точках $K$ и $M$ соответственно, причем эти точки лежат внутри треугольника. Известно, что $BK:KP=2$ и $MT:KP=\frac{3}{2}$. Найти отношение площади треугольника $PBC$ к площади описанного около этого треугольника круга.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\operatorname{ctg}4x=\operatorname{ctg}\dfrac{7-y}{3},\\[2ex] 3x+4\log_{\frac{3x}{\pi}}\sqrt[4]{\dfrac{\pi^3x}{27}}=\\[2ex] \quad=2\log_{\sqrt{\frac{3x}{\pi}}}\left(\dfrac{3x^2}{\pi}\right)-36^{-\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{6}}\sqrt{y^3}}\end{cases}$$

## Физика

### Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. На подвижный вал радиуса $R=10$ *см* намотана веревка, к концу которой привязан груз. Под действием тяжести груза веревка разматывается, и груз, двигаясь равноускоренно без начальной скорости, опускается на $h=1$ *м* за время $t=5$ *сек*. Найти центростремительное ускорение точек обода вала в тот момент времени, когда груз находится в середине пути. Веревка не скользит по валу.

2. Тело брошено под углом $\alpha$ к горизонту. При каком минимальном угле $\alpha_{\min}$ кинетическая энергия тела может сравняться с его потенциальной энергией (отсчитываемой от точки бросания)?

3. Дистиллятор имеет две нагревательные спирали. Одна из них обеспечивает производительность $q_1=0{,}2$ *кг/мин* дистиллированной воды, другая — $q_2=0{,}4$ *кг/мин*. Во сколько раз отличаются производительности дистиллятора при параллельном и последовательном соединении этих спиралей? Напряжение сети постоянно, тепловых потерь не учитывать.

4. Катушка диаметром $d=10$ *см* помещена в магнитное поле с индукцией $B=1{,}256\cdot10^{-2}$ *тл* так, что ее ось совпадает с направлением линий магнитной индукции. Катушка содержит $N=500$ витков и имеет сопротивление $R=10$ *ом*. Найти заряд, который пройдет через обмотку катушки, если магнитное поле равномерно убывает до нуля.

5. В зрительном зале кинотеатра изображение кадра размером 18 × 24 *мм* должно быть точно уложено на экран размером 3 × 4 *м*. Каково должно быть фокусное расстояние объектива, если расстояние от кадра до экрана $L=16$ *м*?

6. Две собирательные линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 12$ *см* и $F_2 = 7$ *см* имеют общую оптическую ось и находятся на растоянии $l$ друг от друга. Предмет длины $a = 2$ *см* находится в фокальной плоскости первой линзы на расстоянии $F_1 + l$ от второй. Найти размер изображения.

### Физический факультет

1. Невесомый стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку $O$ и перпендикулярной к стержню (рис. 1). На стержне с одной стороны от оси укреплены равные грузы с массой $m$ каждый на расстояниях $l$ и $l/2$ от точки $O$. С другой стороны на стержне укреплен груз с массой $2m$ на расстоянии $l/2$ от оси. В начальный момент стержень расположен горизонтально и отпущен. Определить линейную скорость среднего груза в момент прохождения стержнем положения равновесия.

2. В объеме $V$ содержится влажный воздух при относительной влажности $\varepsilon$ %, температуре $T_0$ и давлении $p_0$. Масса влажного воздуха $M$. Определить давление насыщающего водяного пара при этой температуре.

3. Найти емкость последовательного соединения двух конденсаторов, изображенных на рисунке 2, если известны: $S$ — площадь каждой обкладки конденсатора, $d$ — расстояние между обкладками каждого из конденсаторов, $\varepsilon$ — диэлектрическая проницаемость изолятора, заполняющего половину конденсатора (краевые эффекты во внимание не принимать).

4. Равнобедренная стеклянная призма с малыми преломляющими углами $\alpha$ помещена в параллельный пучок лучей, падающих нормально на ее основание (рис. 3). Показатель преломления стекла $n = 1{,}57$; размер основания $2d = 5$ *см*. Найти величину преломляющего угла $\alpha$, если в середине экрана, расположенного на расстоянии $L = 100$ *см* от призмы, наблюдается неосвещенный участок экрана шириной $2a = 1$ *см*.

5. Параллельный пучок света направляется собирающей линзой на катод фотоэлемента. Фокусное расстояние линзы $F$ значительно больше ее диаметра $D$. Взаимное расположение линзы и фотоэлемента таково, что круглый фотокатод, диаметр которого $d$, в точности перекрывает световой поток. При этом гальванометр в цепи фотоэлемента показывает ток $I$. Какой ток покажет гальванометр, если между линзой и фотоэлементом, не меняя их положения, поставить плоскопараллельную пластинку толщиной $H$ с показателем преломления $n$? (Потери света при отражении и поглощении не учитывать.)

### Химический факультет

1. Шарик подброшен вертикально вверх с начальной скоростью $v = 4$ *м/сек*. В тот момент, когда он достиг верхней точки, сни-

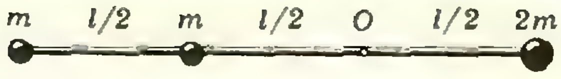


Рис. 1.

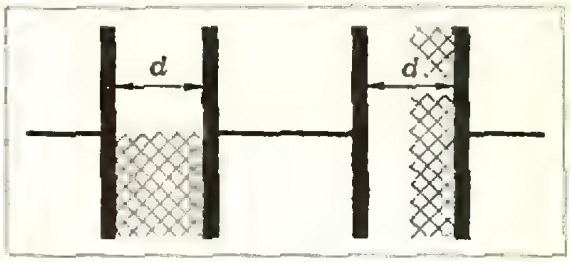


Рис. 2.

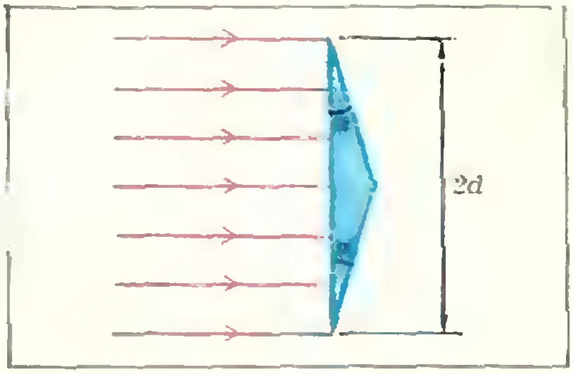


Рис. 3.

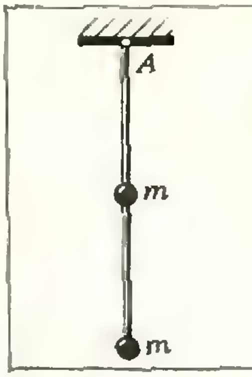


Рис. 4.

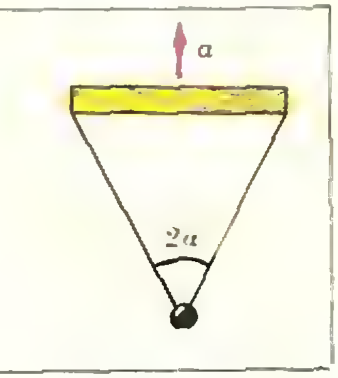


Рис. 5.

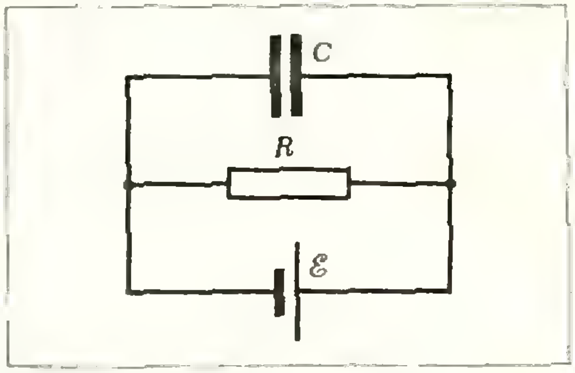


Рис. 6.

зу из той же точки точно с такой же скоростью подбросили еще один шарик. На какой высоте они встретятся?

2. На невесомом стержне длины $l = 75$ *см* укреплены две равные массы $m$ — одна на конце, другая посередине стержня (рис. 4). Стержень может вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки закрепления $A$. Какую горизонтальную скорость нужно сообщить нижнему концу стержня, чтобы стержень отклонился до горизонтального положения?

3. В воду массы $m_в = 2$ *кг* при температуре $t_в = 17°$ С опускают лед, предварительно охлажденный до температуры $t_л = -10°$С. Какое количество льда необходимо, чтобы получить при равновесии воду с температурой $t = 7°$ С? Потери тепла не учитывать. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4{,}2\cdot 10^3$ *дж/(кг·град)*; удельная теплоемкость льда $c_л = 2{,}1\cdot 10^3$ *дж/(кг·град)*; удельная теплота плавления льда $r = 3{,}3\cdot 10^5$ *дж/кг*.

4. В вершинах квадрата, стороны которого равны $l$, расположены одинаковые положительные точечные заряды $q$. Какую работу надо совершить, чтобы переместить отрицательный точечный заряд $q_1$ из центра квадрата на середину одной из сторон?

5. Электрическое поле создается точечным положительным зарядом $Q$. Потенциалы точек $A$ и $B$ равны 30 *в* и 20 *в* соответственно. Найти потенциал точки $C$, лежащей посередине между точками $A$ и $B$ (прямая $AB$ проходит через заряд).

6. Источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы на ее оптической оси. За линзой перпендикулярно к оси помещено плоское зеркало. На каком расстоянии от линзы нужно поместить плоское зеркало, чтобы лучи, отраженные от зеркала, пройдя вторично через линзу, стали параллельными? Фокусное расстояние линзы $F$.

**Биологический, географический, геологический факультеты и факультет почвоведения**

1. Шарик массы $m$ прикреплен двумя нитями к доске (рис. 5). Угол между нитями $2\alpha$. Какими будут натяжения каждой нити, если доска станет двигаться вверх с ускорением $a$?

2. Засасывающая камера поршневого насоса имеет объем $V_0 = 0{,}8$ *л*. Во сколько раз уменьшается давление при каждом ходе, если воздух откачивается из баллона объемом $V = 4$ *л*?

3. В кастрюлю налили холодной воды с температурой $t_1 = 10°$ С и поставили ее на электроплитку. Через время $\tau_1 = 5$ *мин* вода закипела. Через какое время $\tau_2$ после начала кипения вода полностью испарится? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2\times 10^3$ *дж/(кг·град)*, удельная теплота парообразования воды $\lambda = 2{,}3\cdot 10^6$ *дж/кг*. Кипение происходит в открытой кастрюле при нормальном давлении.

4. Найти разность потенциалов на конденсаторе (рис. 6), если известно, что при коротком замыкании цепи (в обход сопротивления $R$) ток через батарею возрастает в три раза. Э. д. с. батареи $\mathscr{E} = 12$ *в*.

5. Расстояние от предмета до собирающей линзы в 5 раз больше фокусного расстояния линзы. Во сколько раз изображение будет меньше предмета?

*Ю. Нестеренко, М. Потапов,*
*А. Склянкин, Н. Тяпунина*

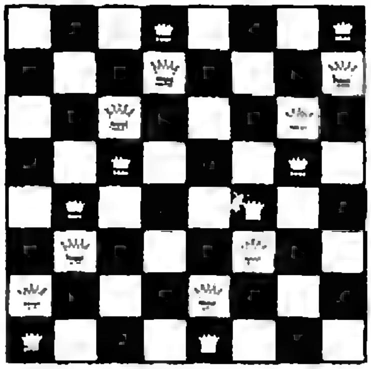
---

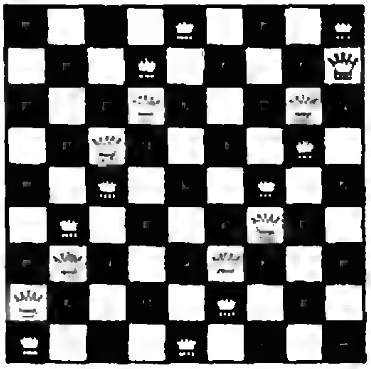
# Ферзи на доске

В статье «Шахматно-математические задачи С. Лойда» («Квант», 1975, № 6) была сформулирована следующая нерешенная задача.

*На доске $n \times n$ расставить $2n$ ферзей так, чтобы на каждой вертикали, горизонтали и диагонали стояло не более двух из них.*

В статье приводилось решение Лойда для обычной шахматной доски 8×8. Вскоре после опубликования статьи в редакцию пришли сразу два письма — от ученицы 10 класса г. Орехово-Зуево *Н. Горбатовой* и выпускника 344-й школы г. Ленинграда *В. Бровкина*. И Наташа, и Володя решили эту задачу, причем метод расстановки ферзей у них один и тот же!





Для четных и нечетных $n$ решения несколько отличаются. На рисунках приведены расстановки ферзей на досках 8×8 и 9×9, которые легко обобщаются для любых $n > 1$. Убедитесь в этом самостоятельно.

# «Квант» для младших школьников

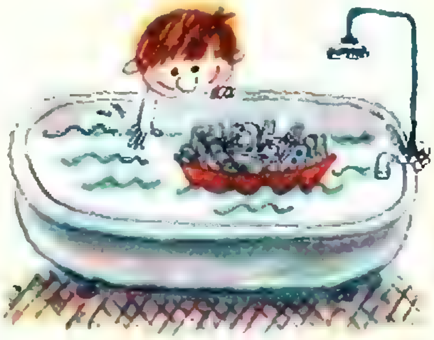
5. III
Я и мои друзья
1976

## Задачи

1. — У нас в классе 35 человек. И можешь себе представить, каждый дружит ровно с 11 одноклассниками...

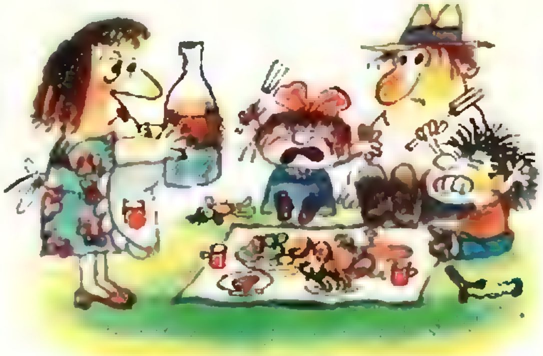
— Не может этого быть, — сразу ответил своему приятелю Витя Иванов, победитель олимпиады.

Почему он так решил?



2. Виктор пускал в ванне пластмассовый кораблик, нагруженный металлическими деталями от конструктора. Вдруг кораблик наклонился, и детали высыпались в воду. Изменился ли уровень воды в ванне?

3. В олимпиаде участвовало 55 школьников. Все они сдали свои работы. При проверке каждой задачи ставилась одна из трех оценок: «+» — задача решена, «—» — задача решалась, но не решена, «0» — задача не решалась. После проверки всех работ оказалось, что ни в каких двух работах не совпало одновременно количество оценок «+» и оценок «—». Какое наименьшее число задач могло быть предложено на олимпиаде?



4. Выезжая за город на прогулку, хозяйка взяла с собой различные продукты. Так как уксус и подсолнечное масло не смешиваются, она налила обе жидкости в одну бутылку.

Можно ли извлечь немного уксуса для салата отцу и немного масла для салата детям так, чтобы остальное масло и остальной уксус остались в бутылке?

*Е. Семенов*

# Ошибки Степы Мошкина

## 1. Потеряно свойство. К чему это может привести?

Этот Петр Иванович вечно придирается! — оправдывался семиклассник Степа Мошкин перед отцом, изучавшим сочную двойку в дневнике сына. — Отвечаю ему, что трапеция — *это четырехугольник, две стороны которого параллельны друг другу*. Так нет, ему это почему-то не понравилось! Говорит, подумай еще, изобрази трапецию и снова ответь на тот же вопрос. Я сделал рисунок и повторил тот же ответ. А он мне — двойку! За что? Это же несправедливо!..

Что же определил Степа?

Чтобы выяснить, кто прав, откроем Степин учебник геометрии. Трапеция в этом учебнике определяется как *четырехугольник, обладающий двумя свойствами*:

(1) *имеется пара параллельных сторон*;

(2) *имеется пара непараллельных противоположных сторон*.

При таком определении лишь множество $T$ на рисунке 1 состоит из трапеций. Все параллелограммы (множество $П$ на рисунке 1) — не трапеции. Но второе свойство, входящее в определение трапеции, Степа «потерял». А поскольку всякий параллелограмм имеет пару параллельных сторон, то и все параллелограммы нужно отнести к множеству $C$ «Степиных трапеций».

Таким образом, Степа вместо множества $T$ получил множество $C = T \cup П$. Исключение какого-либо свойства из определения понятия может привести к новому понятию! В данном случае получено понятие *четырехугольника, имеющего пару параллельных сторон*. То, что такие четырехугольники не имеют специального названия, роли не играет.

Как вы уже успели, вероятно, заметить, между множеством $T$ трапеций и множеством $C$ четырехугольников, обладающих свойством (1), существует интересное соотношение: $T \subset C$. Вместо такой записи *) можно сказать: *множество четырехугольников, обладающих свойством* (1), *шире, чем множество трапеций*. То же самое можно выразить и другими словами: *понятие четырехугольника, имеющего пару параллельных сторон, — обобщение понятия трапеции*, или: *трапеция — частный случай четырехугольника, имеющего пару параллельных сторон*.

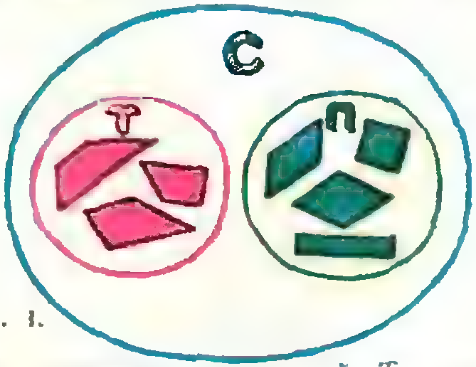


**Рис. 1.**

Итак, Степина ошибка при определении трапеции теперь всем ясна. Но, пожалуй, не стоило тратить столько времени на ее выяснение, если бы при этом не возникла мысль: а нельзя ли воспользоваться этой ошибкой для чего-либо полезного?

## 2. Введение нового понятия исключением части свойств имеющегося

Степа пропустил второе свойство в определении трапеции и получил новое понятие. Опустим, теперь уже не по рассеянности и неаккуратности, а преднамеренно, в определении трапеции свойство (1). Тогда получим понятие *четырехугольника, имеющего пару непараллельных противоположных сторон*. Если $H$ — множество таких четырехугольников, то $T\subset H$. Здесь трапеция — частный случай четырехугольника, имеющего пару непараллельных противоположных сторон.

---

* Здесь и далее знак «$\subset$» означает не только «включается», но и «не совпадает».

Задача 1. Верны ли утверждения:

а) четырехугольник — обобщение понятиятрапеции;

б) трапеция — частный случай четырехугольника?

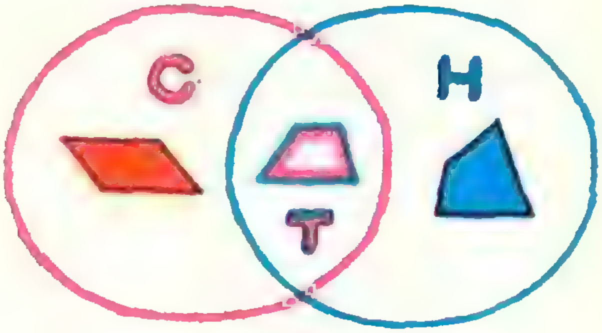


Рис. 2.

Ни одно из двух понятий: *четырехугольник, имеющий пару параллельных сторон*, и *четырехугольник, имеющий пару непараллельных противоположных сторон*, — не является обобщением другого, так как $C\not\subset H$, $H\not\subset C$. Пересечение множеств $C$ и $H$ непусто, оно состоит из трапеций. Множества $T$, $C$ и $H$ изображены так называемыми «кругами Эйлера» на рисунке 2, для наглядности на рисунке приведены изображения четырехугольников, принадлежащих этим множествам.

Задача 2. Рассмотрите следующие пары понятий и в каждом случае укажите, какое из двух понятий — обобщение другого:

а) параллелограмм и ромб;
б) параллелограмм и прямоугольник;
в) параллелограмм и квадрат;
г) ромб и квадрат;
д) прямоугольник и квадрат;
е) ромб и прямоугольник;

Задача 3. Верны ли высказывания:

а) прямоугольник — частный случай ромба;

б) прямоугольник — обобщение ромба?

Изобразите множества ромбов и прямоугольников кругами Эйлера. Верно ли, что пересечение этих двух множеств пусто?

## 3. Вторая история со Степой Мошкиным

На следующем уроке Степа был осторожнее. — Свойства терять нельзя! — твердил Степа про себя. — Лучше «переборщить», чем «недоборщить»! И когда Петр Иванович обратился к нему с вопросом, что такое параллелограмм, Степа выпалил: «*параллелограмм — это четырехугольник, обладающий следующими свойствами*:

(1) *противоположные стороны параллельны*;

(2) *имеются конгруэнтные стороны*;

(3) *диагонали точкой пересечения делятся пополам*;

(4) *имеется центр симметрии*;

(5) *имеются конгруэнтные углы*».

По мере того как Степа перечислял свойства, в классе росло оживление. Ученики с любопытством смотрели то на Степу, то на Петра Ивановича. Переведя дух, Степа не столь уверенно произнес: «Еще, помнится, *площадь параллелограмма равна произведению длины основания на длину высоты*...» Все засмеялись. Только Петр Иванович был подчеркнуто внимателен и серьезен. — Скажи, Степа, получится ли новое понятие, если из твоего определения опустить последнее свойство параллелограмма, связанное с его площадью? — спросил он.

После обсуждения пришли к выводу, что, пользуясь свойством (1), последнее свойство можно вывести. Следовательно, его исключение из определения к новому понятию не приведет.

Итак, если какое-либо свойство понятия является следствием других свойств, то исключение этого свойства из определения к новому понятию не приводит. Другими словами, исключение некоторого свойства из определения понятия не всегда приводит к обобщению этого понятия.

Поэтому обычно в определение понятия включаются только независимые свойства, т. е. свойства, не являющиеся следствиями других свойств.

А в некоторых случаях бывает удобно от «минимальности» числа свойств, содержащихся в определении, отступить. Например, в учебнике геометрии прямоугольник определен как *параллелограмм, у которого все углы прямые*. Это короткое определение можно сформулировать иначе: *параллелограмм* $ABCD$ *— прямоугольник, если он обладает следующими свойствами:*

(1) $\hat{A} = 90°$;
(2) $\hat{B} = 90°$;
(3) $\hat{C} = 90°$;
(4) $\hat{D} = 90°$.

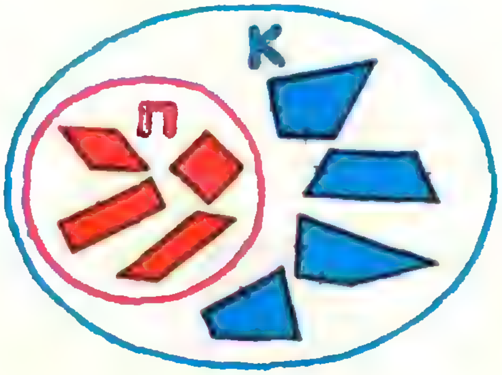


Рис. 3.

Однако если для параллелограмма выполняется одно из перечисленных четырех свойств, то выполняются и оставшиеся три (докажите это). Поэтому прямоугольник можно определить как *параллелограмм, один из углов которого прямой*.

Задача 4. а) Приведет ли к новому понятию исключение из степиного определения параллелограмма свойств (2)—(5)?

б) Можно ли определить прямоугольник как *четырехугольник, все углы которого равны*?

Задача 5. Можно ли определение «*ромб — параллелограмм, все стороны которого конгруэнтны*» заменить другим: «*ромб — параллелограмм, имеющий пару конгруэнтных смежных сторон*»?

Один из учащихся предложил определить параллелограмм как *четырехугольник, обладающий степиным свойством* (2) (имеются конгруэнтные стороны). Посмотрим, что из этого получится.

Обозначим через $П$ множество параллелограммов (по определению учебника), через $К$ множество четырехугольников, имеющих конгруэнтные стороны. В множество $К$ входят и не параллелограммы (например, равнобедренные трапеции). Поэтому $П \subset К$ (эти множества показаны на рисунке 3).

Мы нашли еще один способ получения нового понятия: если свойства, входящие в определение понятия, заменить каким-либо их следствием, то может получиться новое понятие, — обобщение прежнего.

Задача 6. Пусть $П$ — множество параллелограммов, $У$ — множество четырехугольников, имеющих пару конгруэнтных углов. Какое высказывание верно:

а) П = У;
б) П ⊃ У;
в) П ⊂ У?

Задача 7. Даны два понятия: *параллелограмм* и *четырехугольник, имеющий центр симметрии*. Является ли одно из них обобщением другого?

Задача 8. Осевая симметрия — это перемещение, обладающее, в частности, следующими свойствами:

(1) существует прямая, отображающаяся на себя;

(2) существует неподвижная (отображающая на себя) точка;

(3) существует отображающаяся на себя окружность;

(4) существует отображающийся на себя треугольник.

а) Заполните таблицу на стр. 73 (в двух строках показано, как это делать).

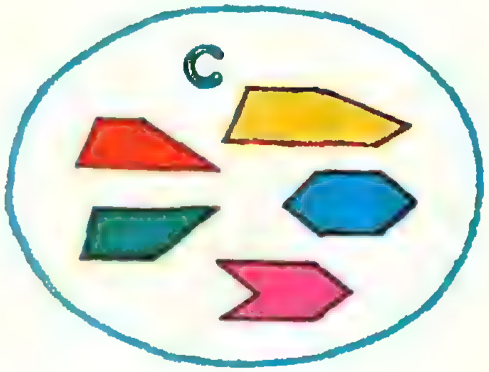


Рис. 4.

б) Докажите, что понятие *перемещения, обладающего свойством (1)*, является обобщением понятия *перемещения, обладающего свойствами (1) и (2)*.

в) Докажите, что ни одно из двух понятий: *перемещение, обладающее свойством (3)*, и *перемещение, обладающее свойством (4)*, не является обобщением другого.

г) Докажите, что осевая симметрия входит в множество *перемещений, обладающих свойствами (1) и (2)*.

## 4. Новая ошибка Степы Мошкина

Предусмотрительный Петр Иванович включил в письменную работу Степы задание дать определение трапеции. Степа точно помнил, что в определение трапеции входят два свойства. Он помнил также, что «лишние» свойства указывать в определении не надо. Учитывая все это, он быстро и уверенно написал: *трапеция — это многоугольник, обладающий двумя свойствами*:

(1) *имеется пара параллельных сторон*;

(2) *имеется пара непараллельных сторон*.

Задача 9. Укажите на рисунке 4 множество новых «Степиных трапеций». Укажите подмножество этого множества, не содержащее трапеций.

Центральную симметрию с центром $O$ можно определить как *перемещение, при котором точка $O$ неподвижна* ($O \to O$), *а всякая другая точка $A$ отображается на такую отличную от $A$ точку $A_1$, что* $O \in [AA_1]$. Заменим множество перемещений в этом определении более широким множеством *отображений плоскости на себя*. Получим новое понятие: *отображение плоскости на себя, при котором некоторая точка $O$ неподвижна, а всякая другая точка $A$ отображается на такую отличную от $A$ точку $A_1$, что* $O \in [AA_1]$. В это понятие входит не одна центральная симметрия с центром $O$, а целое множество отображений, например, любая гомотетия с центром $O$.

Таким образом, замена множества, в котором задается понятие, более широким может привести к новому понятию. А может и не привести: если в определении прямоугольника как *параллелограмма, все углы которого прямые*, термин «параллелограмм» заменить термином «четырехугольник», то нового понятия не получится (это

Таблица

| Свойства | Обладает ли данное перемещение свойствами, указанными в первом столбце? | | |
|---|---|---|---|
| | центральная симметрия | поворот на угол α (α ≠ 180°) | параллельный перенос на ненулевое расстояние |
| (1) | Да | Нет | Да |
| (2) | | | |
| (3) | | | |
| (4) | | | |
| (1) и (2) | Да | Нет | Нет |
| (1) и (3) | | | |
| (1) и (4) | | | |
| (2) и (3) | | | |
| (2) и (4) | | | |
| (3) и (4) | | | |
| (1), (2) и (3) | | | |
| (1), (2) и (4) | | | |
| (1), (3) и (4) | | | |
| (2), (3) и (4) | | | |
| (1), (2), (3) и (4) | | | |

объясняется тем, что в определении прямоугольника в учебнике содержатся свойства, являющиеся следствиями других входящих в определение свойств).

Задача 10. Получится ли новое понятие, если:

а) в определении ромба как *параллелограмма, все стороны которого конгруэнтны,* термин «параллелограмм» заменить термином «четырехугольник»;

б) в определении параллелограмма термин «четырехугольник» заменить термином «многоугольник»?

Итак, вы познакомились с тремя способами введения новых математических понятий на основе имеющихся:

а) путем исключения части свойств, содержащихся в определении;

б) путем замены части содержащихся в определении свойств другими;

в) путем расширения множества, в котором задается понятие.

Вы изучили связь между свойствами понятия и множеством, в котором задается понятие, познакомились с требованием минимальности числа свойств, перечисленных в определении, и теперь вам должно быть ясно, как важна осторожность при формулировке определений. Стоит только не указать какое-либо свойство, заменить его другим или указать другое множество, в котором задается понятие, — и может оказаться, что вы определили нечто, чему математики даже не дали специального названия. Не повторяйте ошибок Стены Мошкина!

## К статье «Волшебный мир Анри Пуанкаре»

1. Указание. а) Нужно заметить, что евклидовы касательные, проведенные к «верхним» полуокружностям, перпендикулярным к полуокружности $L_0$, через точки их пересечения с $L_0$, пересекаются в евклидовом центре $L_0$. б) Докажите, что для непересекающихся «верхних» полуокружностей имеется единственная точка на оси $x$-ов, такая, что длины касательных, проведенных из нее к этим полуокружностям, равны (рассмотрите два случая; см. рис. *8*, *а* и *б* в статье).

2. «Опуская» основания $A_iC_i$ равнобедренных п-треугольников $A_iBC_i$ (см. рис. 9 в статье) к границе нашей полуплоскости, видим, что вначале п-перпендикуляры к сторонам этих треугольников, проходящие через их п-середины, пересекаются в одной точке, затем становятся параллельными, и, наконец, сверхпараллельными. Ясно, что в последних двух случаях вокруг соответствующих п-треугольников $A_iBC_i$ окружность описать не удастся.

4. Докажем четвертый признак конгруэнтности для равнобедренных п-треугольников, т. е. докажем, что равнобедренный п-треугольник однозначно определяется своими углами.

Сделаем такое п-перемещение, чтобы осью симметрии треугольника $ABC$ стала прямая $L\ (0,\ \infty)$. Пусть $\varphi$ — величина угла при вершине $B$, и $\psi$ — величина угла при основании.

Можно считать, что ордината точки $B$ равна 1. Тогда п-прямые $AB$ и $BC$ однозначно определены (рис. 1): пусть $O_1$ и $O_2$ — их евклидовы центры (точки $O_1$ и $O_2$ симметричны относительно $O = (0;\ 0)$). Очевидно, что евклидовым центром п-прямой $AB$ является точка $O$. Нам нужно определить положение точек $A$ и $C$. Но $\widehat{OAO_1} = \psi$ (в евклидовом смысле). Поэтому нужно построить дугу окружности с центром в точке $O$, из точек которой отрезок $OO_1$ виден под углом $\psi$; эта дуга и даст нам положение вершин $A$ и $C$.

5. Сделаем п-перемещение, переводящее $L(\alpha,\ \beta)$ в $L(0,\ \infty)$. Пусть при этом п-прямые $L(\alpha,\ \beta_1)$, $L(\alpha,\ \beta_2)$ перешли в п-прямые $L(0,\ \gamma_1)$, $L(0,\ \gamma_2)$ соответственно (рис. 2). П-перемещение $F_\lambda$, $\lambda = \gamma_2/\gamma_1$ переводит $L(0,\ \infty)$ в себя, а $L\ (0,\ \gamma_1)$ в $L(0,\ \gamma_2)$, если $\gamma_1$, $\gamma_2$ одного знака. В противоположном случае надо добавить отражение.

6. В Пуанкарии сравнительно легко научиться восставлять перпендикуляры к п-прямым, но труднее опускать их. Гораздо проще иметь дело с п-прямой $L(0,\ \infty)$: ей перпендикулярны все п-прямые вида $L(-\alpha,\ \alpha)$ (полуокружности с центром в нуле). Поэтому сделаем п-перемещение, переводящее $L_0$ в $L(0,\ \infty)$.

1) Пусть $L_1$ пересекает $L_0 = L\ (0,\ \infty)$.

Тогда (рис. 3, *а*) $L_1 = L(-\alpha,\ \beta)$, $\alpha,\ \beta > 0$. Перпендикуляры из точек п-прямой $L_1$ к $L_0$ будут иметь вид $L(-\gamma,\ \gamma)$, где $\alpha < \gamma < \beta$, и поэтому проекция $L_1$ на $L_0$ совпадает с интервалом $(\alpha,\ \beta)$ на п-прямой $L(0,\ \infty)$.

2) Пусть $L_1$ параллельна $L_0 = L(0,\ \infty)$.

Тогда либо $L_1 = L(\gamma,\ \infty)$, и ее проекцией будет луч $(|\gamma|,\ \infty)$ (рис. 3, *б*), либо $L_1 = L(0,\ \alpha)$, и тогда $L_1$ проектируется в п-луч $(0,\ |\alpha|)$ на $L\ (0,\ \infty)$ (рис. 3, *в*).

3) $L(\alpha,\ \beta)$ сверхпараллельна $L(0,\ \infty)$, если $\alpha\beta > 0$.

Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тогда проекцией будет интервал $(\alpha,\ \beta)$ (рис. 3, *г*).

7. Пусть $L_0 = L(0,\ \infty)$, $L_1 = L(-1,\ 1)$ (это всегда можно добиться, сделав п-перемещения). Если $y$ — ордината точки $A$ (рис. 4), то $x = \rho\ (A,\ A_0) = |\ln y|$, где $A_0 \in L_1$ имеет ординату 1. Тогда $y = e^x$. Пусть $L(\alpha,\ 1)$ — параллель к $L_1$, проходящая через $A$; $C$ — евклидов центр этой полу-

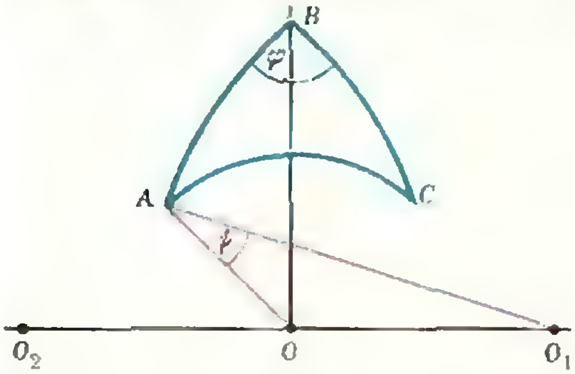


Рис. 1.

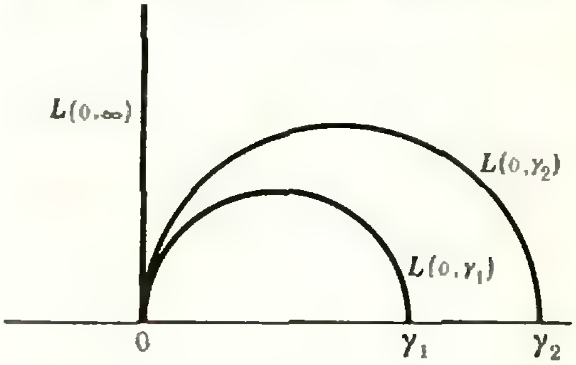


Рис. 2.

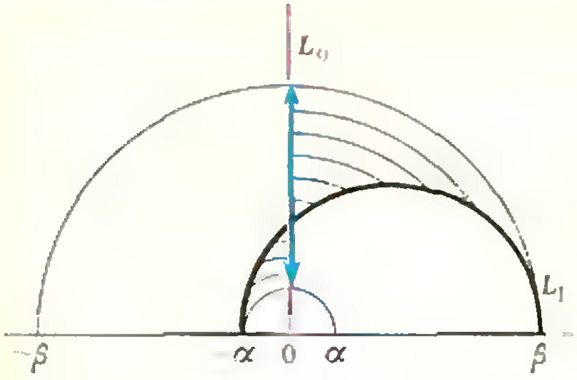

$L_0$
$L_1$
$-\beta$
$\alpha$
0
$\alpha$
$\beta$

Рис. 3а.

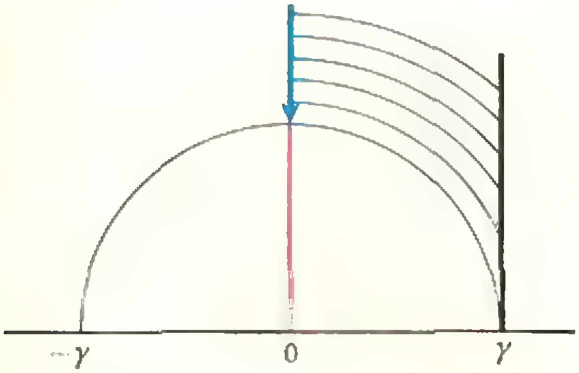

$-\gamma$
0
$\gamma$

Рис. 3б.

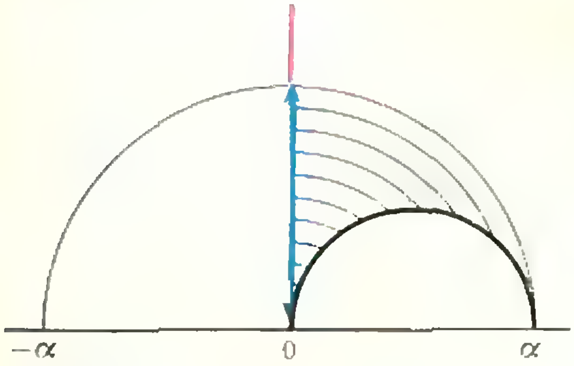

$-\alpha$
0
$\alpha$

Рис. 3в.

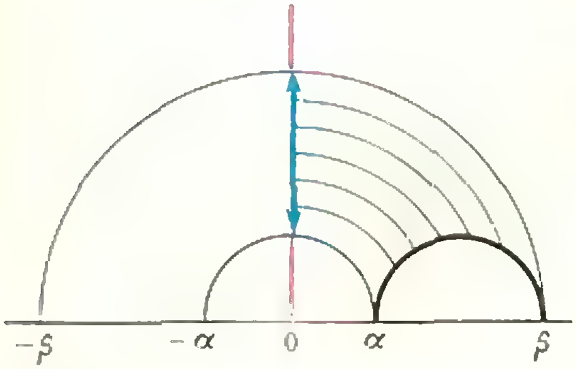

$-\beta$
$-\alpha$
0
$\alpha$
$\beta$

Рис. 3г.

окружности. Тогда

$$|OA| = y = e^x,\ |AC| = \frac{|OA|}{\sin\varphi(x)},$$

$$|CO| = \frac{|OA|}{\operatorname{tg}\varphi(x)},\quad |AC| - |CO| = 1,$$

откуда $\dfrac{1}{y} = e^{-x} = \dfrac{1}{\sin\varphi(x)} - \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi(x)} = \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi(x)}{2}$, и $\varphi(x) = 2\operatorname{arcctg} e^{-x}$

**К статье «Логарифмические и показательные...»**

1. $x < -\sqrt{5}$, $x > \sqrt{5}$. **2.** $x = \log_{\frac{3}{5}}\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 3. $x = \sqrt[3]{3}$. **4.** $x = 2$ **5.** $a \leqslant -2$, $a \geqslant 0$. **6.** $x = 9$. **7.** $0 < x < \dfrac{1}{2}$, $1 < x < 2$, $3 < x < 6$. **8.** $2 < x < \dfrac{5}{2}$.

Указание. На множестве допустимых значений неизвестного $\dfrac{3}{2} < x < \dfrac{5}{2}$, $x \neq 2$ исходное уравнение равносильно уравнению $(2x+1)\,|(x-2) - |x-2|| = 0$. **9.** $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Указание. Привести уравнение к виду $(x^2-4)\left(2^{1+\sqrt{2x+1}} - 2^x\right) = 0$.

**10.** $\dfrac{1-\sqrt{21}}{2} < x < -1$, $\dfrac{1+\sqrt{21}}{2} < x < 3$.

**11.** $-2-\sqrt{5} < x < -2-\sqrt{3}$, $-2+\sqrt{3} < x < -2+\sqrt{5}$.

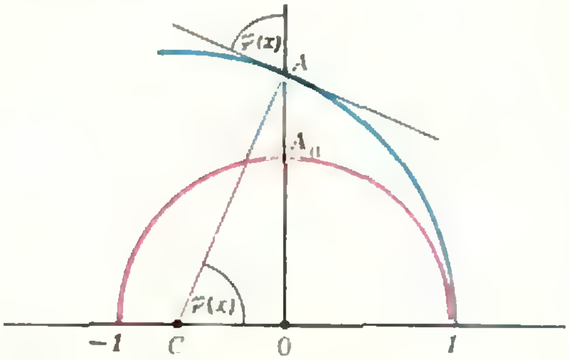

$\varphi(x)$
A
$A_0$
$\varphi(x)$
−1
C
0
1

Рис. 4.

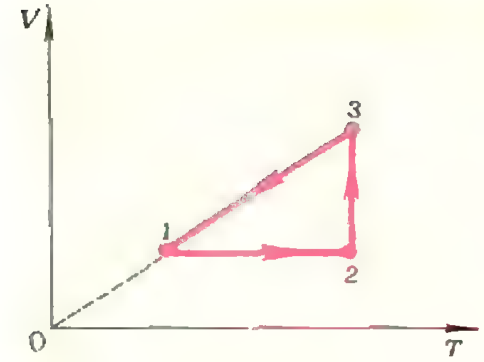


Рис. 5.

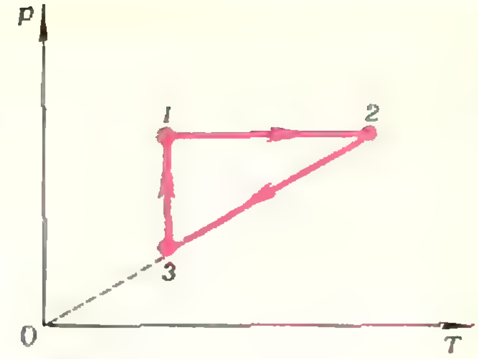


Рис. 6.

### К статье «Применение диаграмм тепловых процессов»

1. Параметры систем I и II связаны соотношением $\frac{m_I T_I}{\mu_I} > \frac{m_{II} T_{II}}{\mu_{II}}$. Возможны, например, такие частные случаи:
а) $T_I > T_{II}$, если $m_I = m_{II}$ и $\mu_I = \mu_{II}$;
б) $m_I > m_{II}$, если $T_I = T_{II}$ и $\mu_I = \mu_{II}$;
в) $\mu_I < \mu_{II}$, если $m_I = m_{II}$ и $T_I = T_{II}$.

2. См. рис. 5.

3. $$A = \frac{m}{\mu} R (T_1 + T_3 - T_2 - T_4).$$

Указание. Изобразить данный цикл на диаграмме ($p$, $V$).

4. Газ получает теплоту в процессе $1 \to 2$ и отдает ее в процессах $2 \to 3$ и $3 \to 1$. См. рис. 6.

### К статье «Московский физико-технический институт»

### Математика

Билет I

1. Пусть $a$ — первый член, $q$ — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{a}{1-q} - \dfrac{a(1-q^3)}{1-q} = 2, \\ \dfrac{a(1-q^6)}{1-q} = 3. \end{cases}$$

Исключив $a$, получим $2q^6 + 3q^3 - 2 = 0$, откуда $q^3 = -2$ и $q^3 = \frac{1}{2}$. Очевидно, возможно только $q^3 = \frac{1}{2}$; тогда $S = 4$.

2. Преобразуя левую часть, получаем

$$\frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 32 \cos^3 2x.$$

Отсюда

а) $\cos 2x = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$;

б) $1 = 2\sin^2 4x$, $\cos 8x = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Легко проверить, что для всех найденных значений $x$ функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ определены.

3. Из точки $B$ опустим перпендикуляр на плоскость грани $Q$; поскольку двугранный угол — острый, основание $D$ этого перпендикуляра расположено в самой грани $Q$ (рис. 7). Перпендикуляры, опущенные из точек $B$ и $D$ на ребро двугранного угла, очевидно, имеют общее основание $E$. Угол $BED$ — линейный угол данного двугранного угла. Перпендикуляр из точки $D$ на $AC$ пройдет через точку $A$ ($AC \perp AB$, $BD \perp Q$).

В треугольниках $ABE$, $AED$ имеем: $BE = AB \cdot \sin\alpha$, $AE = AB \cdot \cos\alpha$, $ED = BE \cdot \cos\varphi = AB \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi$. Далее, $\operatorname{tg} \measuredangle EAD = \frac{ED}{AE} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\varphi}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\varphi$. Острый угол $\beta$ между $AC$ и ребром двугранного угла равен $\frac{\pi}{2} - \measuredangle EAD$. Следовательно,

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\varphi) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\varphi).$$

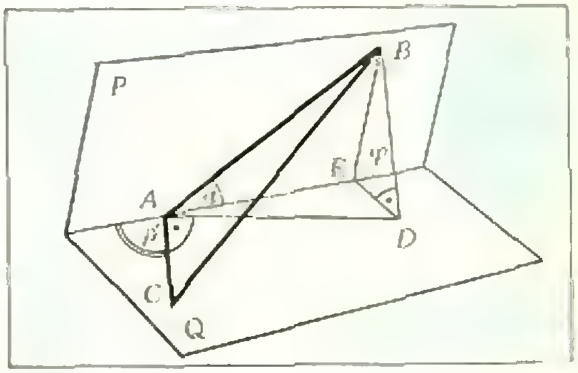


Рис. 7.

**4**. Во втором уравнении перейдем к основанию $\frac{2}{3}$: $\left(-\log_{\frac{2}{3}} x\right)\cdot\left(-\log_{\frac{2}{3}} y\right) - \log_{\frac{2}{3}}(x+y) = 0$, откуда $\log_{\frac{2}{3}}(x+y) = \log_{\frac{2}{3}} x\cdot\log_{\frac{2}{3}} y$. После подстановки в первое уравнение системы и преобразований получим

$$\left(1 - \log^2_{\frac{2}{3}} y\right)\cdot\left(\log^2_{\frac{2}{3}} x - 1\right) = 0.$$

Отсюда

$$\text{а) } \log^2_{\frac{2}{3}} y = 1;\ \text{б) } \log^2_{\frac{2}{3}} x = 1.$$

В первом случае имеем $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = \frac{3}{2}$. Подставляя эти значения $y$ в исходную систему, получим, что для значения $y_1 = \frac{2}{3}$ решений нет, а для значения $y_2 = \frac{3}{2}$ имеется решение $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$. Аналогично исследуется второй случай. Получим решение $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

Ответ. $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

**5**. Поскольку $AE \parallel DF$ и $AE = 2\cdot DF$, то и $AM = 2\cdot DM$ (рис. 8).

Пусть $N$ — точка пересечения $BC$ и $EF$. Поскольку $CF \parallel BE$ и $CF = 2\cdot BE$, то и $CN = 2\cdot BN$. Возможны лишь два положения точки $N$, удовлетворяющие этому условию (рис. 8, *а*, *б*).

Рассмотрим случай (а). Поскольку $NB = BC$ и $AD = DM$, то $NE = EF = FM = \frac{1}{3} MN$. Площади треугольников $EDF$ и $FDM$ равны ($EF = FM$, $D$ — общая вершина). Расстояние от точки $F$ до прямой $AD$ втрое меньше расстояния от точки $N$ до этой же прямой. Последнее равно высоте трапеции. Обозначим длину высоты через $H$, а длину $BC$ через $b$. Тогда $DM = AD = 3b$. Площадь трапеции $S = 2bH$. Находим площадь треугольника $EFD$: $S_{\triangle EFD} = S_{\triangle FDM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} H\cdot 3b = \frac{1}{2} Hb$. Следовательно,

$$S_{\triangle EFD} = \frac{1}{4} S.$$

Рассмотрим случай (б). Поскольку $AD = DM$, то $EF = FM$; а поскольку $BN = \frac{1}{2} CN$, то $EN = \frac{1}{2} NF$. Отсюда $NF = \frac{2}{5} MN$, $FM = \frac{3}{5} MN$. Следовательно, расстояние от точки $F$ до прямой $AD$ составляет $\frac{3}{5}$ расстояния от точки $N$ до этой прямой, то есть $\frac{3}{5} H$. Как и ранее, имеем

$$S_{\triangle EFD} = S_{\triangle FDM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} H\cdot 3b = \frac{9}{10} Hb = \frac{9}{20} S.$$

### Билет 2

**1**. После простых преобразований получим $\sin 12x - \sin 8x = 0$. Отсюда $\sin 2x \times \cos 10x = 0$,

$$\text{а) } \sin 2x = 0,\quad x_1 = \frac{\pi n}{2};$$

$$\text{б) } \cos 10x = 0,\ x_2 = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10}\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\cos 5x \neq 0\ (*).$$

В первом случае это означает, что $n \neq 2l + 1$, то есть решениями служат лишь значения $x = \pi l$ ($l = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$). Во

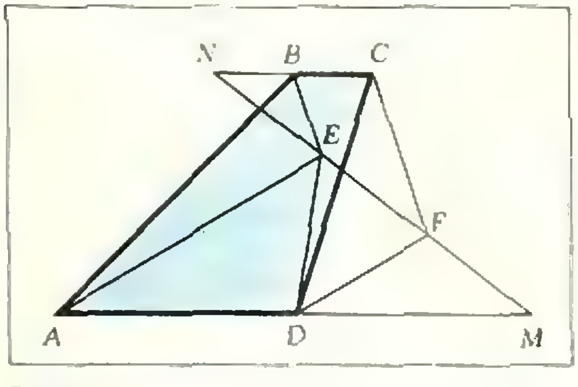


Рис. 8а.

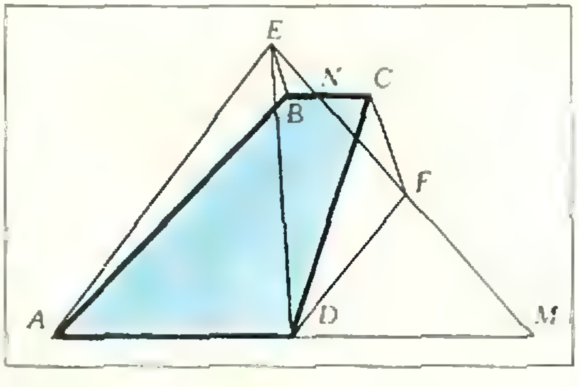


Рис. 8б.

втором случае все найденные значения $x_2$ удовлетворяют (*).

Ответ. $x = \pi l$, $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10}$ ($l, n$ — целые).

2. Преобразуем неравенство так:

$$\frac{\log_3 (3 - 3^{1-x})}{x - 1} \geqslant 0.$$

Это неравенство эквивалентно совокупности двух систем неравенств:

$$\text{а)} \begin{cases} x - 1 > 0, \\ 3 - 3^{1-x} \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x - 1 < 0, \\ 0 < 3 - 3^{1-x} \leqslant 1. \end{cases}$$

В первом случае

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \geqslant 1 - \log_3 2, \end{cases}$$

откуда $x > 1$.

Во втором случае

$$\begin{cases} x < 1, \\ 0 < x \leqslant \log_3 \frac{3}{2}, \end{cases}$$

откуда $0 < x \leqslant \log_3 \frac{3}{2}$.

Ответ. $0 < x \leqslant \log_3 \frac{3}{2}$, $1 < x$.

3. $2 \sin^2 \alpha$. Указание. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$, $O_1O_2O_3O_4$ — параллелограмм, высоты которого равны $AC/2$, $BD/2$, угол между ними $\alpha$.

4. $V_1 : V_в = 1:2$, $V_2 : V_в = 1:3$. Указание. От момента выхода пешеходов до момента выезда велосипедиста прошло время $\tau = \frac{5S}{6(v_1 + v_2)}$, а до момента встречи первого пешехода с велосипедистом $t = \frac{4S}{9v_2}$.

Из условия встречи первого пешехода и велосипедиста получаем

$$t \cdot v_1 + (t - \tau) \cdot v_в = S.$$

Из условия одновременного окончания движения этими же лицами получаем

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_в} + \tau.$$

5. $\arccos \sqrt{\frac{2}{5}}$. Указание. Середина ребра $AD$ удалена от плоскости $SBC$ на то же расстояние, что и точка $A$ (поскольку $AD \parallel SBC$), это расстояние равно $AS \cdot \sin \alpha$ ($\alpha$ — искомый угол).

## Физика

### Билет 1

1. По третьему закону Кеплера имеем

$$\left(\frac{T_Г}{T_З}\right)^2 = \left(\frac{a_Г}{a_З}\right)^3.$$

Здесь $T_Г$, $T_З$ — периоды обращения вокруг Солнца кометы Галлея и Земли соответственно, $a_Г = r_{\min} + r_{\max}$, $a_З = 2r_З$. Отсюда получим

$$r_{\max} \approx 5{,}2 \cdot 10^9 \text{ км}.$$

2. Запишем условие равновесия поршня в конечном состоянии и закон сохранения энергии:

$$kx = p_2 S = p_2 \frac{V_2 - V_1}{x},$$

$$\nu C_V (T_1 - T_2) = \frac{kx^2}{2}.$$

Здесь $kx^2/2$ — потенциальная энергия пружины, $\nu$ — число молей. Кроме того, для идеального газа

$$p_1 V_1 = \nu R T_1 \text{ и } p_2 V_2 = \nu R T_2.$$

Отсюда

$$C_V = \frac{5}{2} R \approx 21 \text{ дж/(моль·град)}.$$

3. Пусть мост сбалансирован, то есть ток через гальванометр не идет. Тогда на нелинейном элементе имеем

$$I = \frac{\mathscr{E}}{2R}, \quad U = \frac{\mathscr{E}}{2}$$

($\mathscr{E}$ — э. д. с. внешней батареи, внутренним сопротивлением батареи пренебрегаем). При условии, что $I = 0{,}01U^3$, находим: $I = 1{,}25 a$. Ток батареи

$$I_б = 2I = 2{,}5 \text{ } a.$$

4. $V = \frac{1}{3} l^3 \frac{F}{F + l}\left(1 + \frac{F}{F + l} + \frac{F^2}{(F + l)^2}\right)$. Указание. Изображение кубика имеет вид усеченной пирамиды, у которой размер большего основания $b = l$, размер меньшего основания $a = \frac{Fl}{F + l}$, расстояние между основаниями $h = \frac{Fl}{F + l}$.

### Билет 2

1. Начальная скорость струи $v_0 = \frac{q}{\rho S} = 2$ м/сек. Конечная скорость струи $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 6{,}6$ м/сек. Время паде-

ния струи $t_1 = \dfrac{h}{(v + v_0)\,2} = 0.46$ *сек*.

Изменение силы давления, связанное с импульсом струи, $\Delta F_1 = qv = 1{,}3$ *н*. Изменение силы давления, определяемое весом накопившейся воды, $\Delta F_2 = qg(t - t_1)$, причем $\Delta F_{2\max} = qgt_0 = 3{,}9$ *н*. Полное изменение силы давления $\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2$ (см. рис. 9).

2. Запишем уравнения состояния газа для начального и конечного состояний:

$$\begin{cases} p_0(V_1 + V_2) = \dfrac{m}{\mu} RT_0, \\[2ex] pV_1 = \dfrac{m_1}{\mu} RT, \\[2ex] pV_2 = \dfrac{m_2}{\mu} RT_0, \end{cases}$$

где $m = m_1 + m_2$. Отсюда

$$T = \frac{pT_0V_1}{p_0(V_1 + V_2) - pV_2} \approx 3\,^\circ\mathrm{K}.$$

3. Напряженность поля в конденсаторе $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \dfrac{Q}{r^2}$ ($Q$ — заряд конденсатора, $r$—расстояние от центра до выбранной точки). Выделим сферический слой малой толщины $\Delta r$ (такой, что поле внутри слоя можно считать однородным). Изменение потенциала на толщине слоя

$$\Delta\varphi = E\,\Delta r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{\Delta r}{r^2}. \qquad (1)$$

Сопротивление этого слоя

$$\Delta R = \rho \frac{\Delta r}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \frac{\Delta r}{r^2}. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta R} = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0\rho} = \mathrm{const} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R},$$

где $\varphi_2 - \varphi_1$ — разность потенциалов между обкладками конденсатора. Так как $\dfrac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \varepsilon C$, получаем

$$R = \frac{\varepsilon_0\rho}{C} = 885 \text{ ом}.$$

4. Представим толстую линзу как систему из тонкой плоско-выпуклой линзы и приставленной к ней плоскопараллельной пластины толщиной 5 *см*. Для тонкой плоско-выпуклой линзы $\dfrac{1}{F} = (n - 1)\dfrac{1}{R}$, откуда $F = 5$ *см*. Поэтому ход лучей в системе такой, как показано на рис. 10. Из этого рисунка $y = F \operatorname{tg} \alpha = F \operatorname{tg} \beta + x \operatorname{tg} \alpha$,

или $y \approx F \sin \alpha \approx F \sin \beta + x \sin \alpha$. Тогда

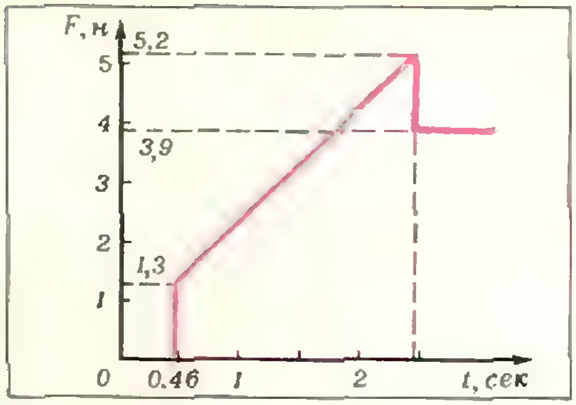


Рис. 9.

$$\frac{F}{F - x} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \text{ и } x = F\frac{n - 1}{n} = \frac{5}{3} \text{ см}.$$

Билет 3

1. На Земле энергия сжатой пружины целиком переходит в кинетическую энергию конуса, а на орбите—в энергию конуса и ракеты:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_\text{к}^2}{2} + \frac{Mv_\text{р}^2}{2}.$$

Из закона сохранения импульса, записанного в системе отсчета, движущейся с орбитальной скоростью,

$$mv_\text{к} = Mv_\text{р}.$$

Из этих соотношений найдем скорости $v_\text{к}$ и $v_\text{р}$. Тогда относительная скорость конуса и ракеты

$$v_\text{отн} = v_\text{к} + v_\text{р} = 5{,}6 \text{ м/сек}.$$

2. $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{p_0 - p_{\text{н}_1}}{p_0 - p_{\text{н}_2}} \dfrac{T_2}{T_1} = 0{,}91.$

3. Поле максимально у поверхности внутренней сферы: $E = E_{\max} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q}{r^2}$ ($q$ — заряд конденсатора, $r$ — радиус внутренней сферы). Искомая разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} - \frac{q}{R}\right) = E_{\max}\left(r - \frac{r^2}{R}\right).$$

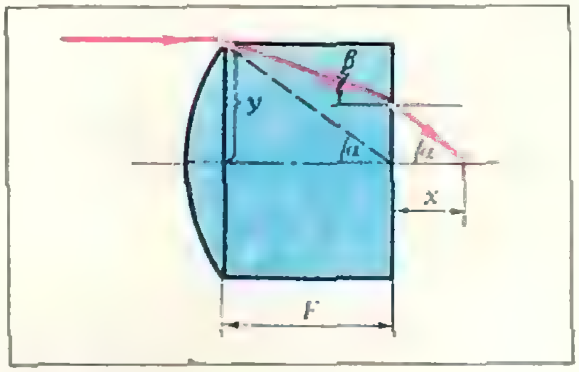


Рис. 10.

Максимум этого выражения достигается при $r = \frac{R}{2}$, поэтому

$$\Delta\varphi_{\max} = \frac{E_{\max} R}{4} = 3\cdot 10^4 \text{ в}.$$

4. В первом случае имеем

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где $f_1$ и $f_2$ — фокусные расстояния плосковыпуклых линз,
$R_1$ и $R_2$ — радиусы кривизны соответствующих выпуклых поверхностей.

Во втором случае система состоит из трех линз, поэтому

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - (n_{\text{в}} - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

(третья, двояковогнутая линза — рассеивающая).

Из этих соотношений получим

$$F_2 = F_1 \frac{n-1}{n-n_{\text{в}}} = 2F_1.$$

## К задачам «Квант» для младших школьников»

*(см. «Квант» № 2)*

1. Назовет Иван Царевич 1, 10, 100 и останется жив.

2. Налейте в сосуд воды. Мяч всплывет, и его можно будет вынуть.

3. Остывшее масло занимает меньший объем, чем горячее. «Освободившееся» место в сосуде занял воздух. Поэтому показания весов в конце дня должны быть больше, чем утром.

4. Шесть вопросов. 1) Верно ли, что номер твоей квартиры больше 32-х? 2) (Нет.) Верно ли, что он больше 16-ти? (Да.) Верно ли, что он больше 48-ми? И далее спрашивать про среднее число из оставшихся. После ответа на каждый вопрос интервал допустимых номеров уменьшается вдвое.

## К статье «Все», «некоторые» и отрицание»

*(см. «Квант» № 2)*

1. Есть хотя бы один белый шар.
2. Все шары — белые.
3. Все шары — красные.
4. Некоторые равнобедренные треугольники не являются прямоугольными.
5. Некоторые ученики класса не были на собрании.
6. Ни одной девочки не было на собрании.
7. Некоторые углы данного шестиугольника — прямые или острые.
8. По крайней мере для одного $x$ из $A$ $x^2$ не превосходит 4.
9. Все люди — не дети.
10. Для всех $x$ из $A$ $x^2 - 2x + 1 \neq 0$.
11. Некоторые мужчины не выше 2-х метров.
12. Некоторые простые числа четны.
13. По крайней мере для одного простого числа $p$ число $2^p - 1$ не является простым.
14. Неверно. Может быть один белый шар, а остальные — синие.
15. Верно.
16. Чтобы наверняка попался белый шар, надо вынуть по крайней мере 20 шаров. Меньшего числа может не хватить, ибо первыми могут быть вынуты красные и черные шары — их 19. Чтобы наверняка попались шары всех трех цветов, надо вынуть как минимум 22 шара; 21 может не хватить, если первыми вынуты все белые и черные шары; их как раз 21.
17. Надо вызвать 31 человека. Меньше нельзя — может случиться, что к доске выйдут лишь троечники и хорошисты (их 10+20=30) и каждый ответит не более, чем на 4. Если же вызвать 31 человека, то по крайней мере один из них окажется отличником и ответит на 5.
18. Если выполнено условие а) или условие б), то выполнено и условие в), то есть выполнены одновременно два условия, что противоречит условию задачи. Значит, а) и б) не выполнены. Тогда в) также не выполнено, г) не выполнено, д) обязательно выполнено, е), ж) и з) не выполнены, про и) ничего нельзя сказать.

Поскольку выполнено может быть только одно условие из девяти, то и) не выполнено. Значит, надо из данного множества отобрать те $n$, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 11. Таких чисел имеется пять, именно: 487, 491, 493, 497, 499.

Номер оформили:
Е. Верентинова, С. Верховский, В Карцев, Г. Красиков, Э Назаров, Э. Смирнов.

Корректор *М. Медведская*

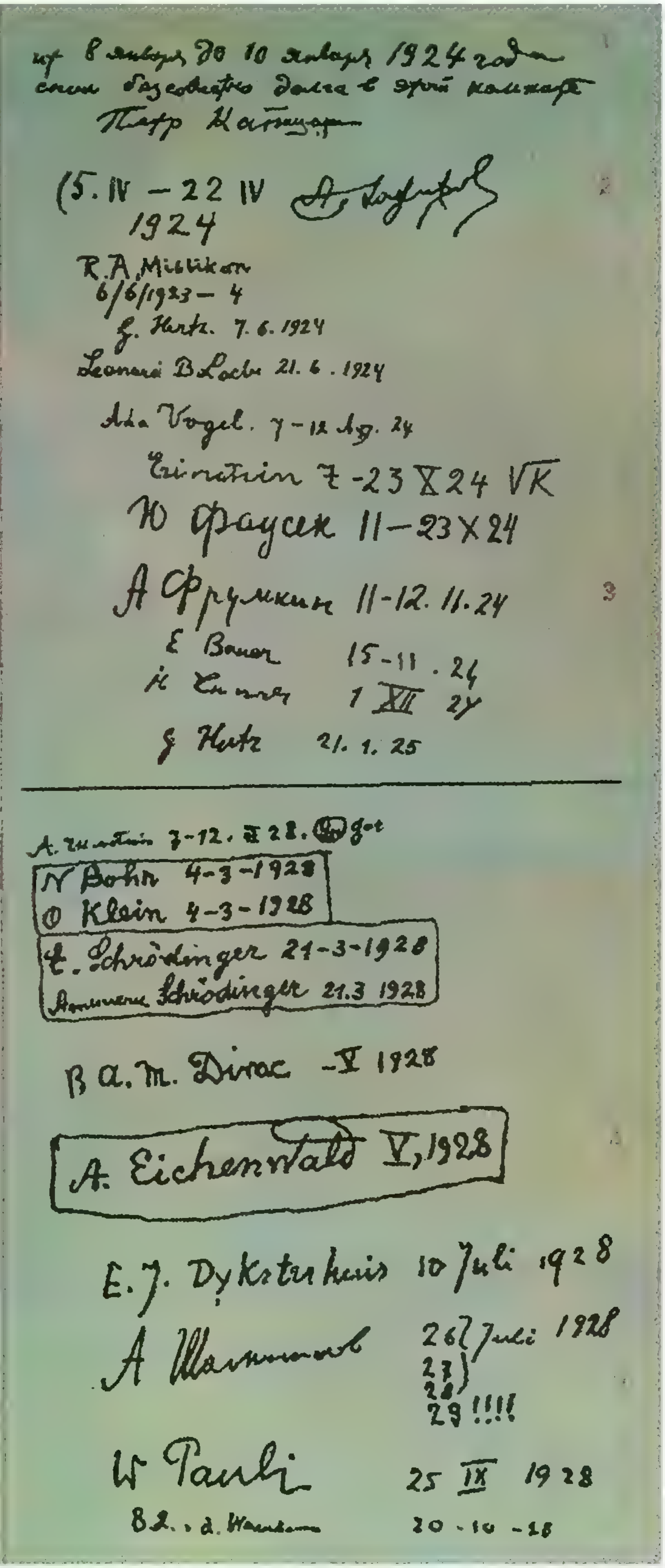
113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 23/XII 1975 г.
Подписано в печать 1/II 1976 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 6,78 Т-01883
Цена 30 коп. Заказ 2862. Тираж 326 700 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

*Рукописи не возвращаются*

Знаменитый физик-теоретик первой половины XX века Пауль Эренфест вместе с женой Татьяной Алексеевной Афанасьевой с 1907 по 1912 год жил в России. Он оказал большое влияние на развитие русской физики. В организованном им домашнем семинаре занимались известные советские физики и математики А. Ф. Иоффе, Д. С. Рождественский, А. А. Фридман, С. Н. Бернштейн и другие. В 1912 году он переехал в Лейден (Голландия), где стал заведовать университетской кафедрой физики вместо вышедшего в отставку по возрасту выдающегося голландского физика Гендрика Лоренца. До последних дней жизни Эренфест сохранял дружеские отношения со многими советскими физиками и огромный интерес к нашей стране и ее молодой науке.

Многие советские ученые, командированные за границу, гостили у Эренфеста. В его доме была выделена специальная комната для гостей, которые перед отъездом по традиции расписывались на одной из стен. Мы воспроизводим здесь два фрагмента этих подписей. На первом отчетливо видны подписи академиков П. Л. Капицы, А. Ф. Иоффе и А. Н. Фрумкина (помечены цифрами 1, 2 и 3). Кроме них также видны подписи американского физика Роберта Милликена, первым измерившего величину заряда электрона, и Альберта Эйнштейна. На втором фрагменте мы видим подписи профессора А. А. Эйхенвальда и члена-корреспондента АН СССР А. И. Шальникова (помечены цифрами 4 и 5). Кроме них имеются также подписи Эйнштейна, Нильса Бора, Эрвина Шредингера, Поля Дирака, Вольфганга Паули и выдающегося немецкого математика Феликса Клейна.

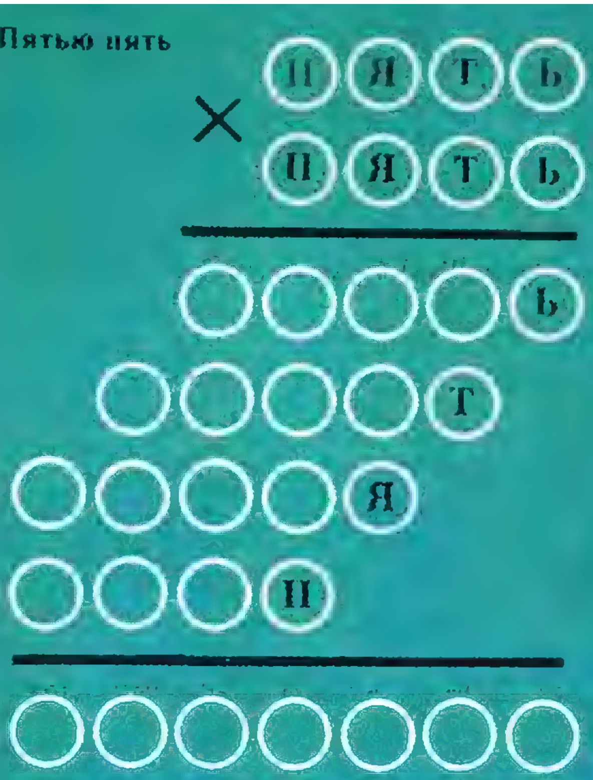

с 8 января до 10 января 1924 года
спал безсовестно долго в этой комнате
Петр Капица

(5. IV – 22 IV
1924

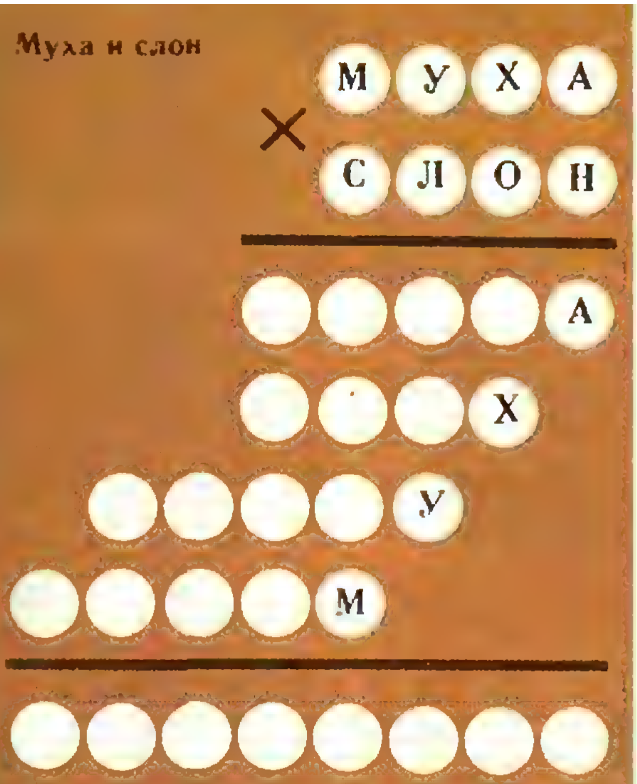
R. A. Millikan
6/6/1923 – 4
G. Hertz. 7. 6. 1924
Leonard B Loeb 21. 6. 1924
Ada Vogel. 7–12 Aug. 24
Einstein 7–23 X 24 VK
Ю Фаусек 11–23 X 24
А Фрумкин 11-12. 11. 24
E Bauer 15-11. 24
1 XII 24
G Hertz 21. 1. 25

A. Einstein 7-12. II 28.
N Bohr 4-3-1928
O Klein 4-3-1928
E. Schrödinger 21-3-1928
Annemarie Schrödinger 21.3 1928
P. A. M. Dirac -V 1928
A. Eichenwald V, 1928
E. J. Dykstrhuis 10 Juli 1928
А Шальников 26 27 28 29 !!!! Juli 1928
W Pauli 25 IX 1928
B. L. v. d. Waerden 20-10-28

**Пятью пять**


×
П Я Т Ь
П Я Т Ь
Ь
Т
Я
П

**Муха и слон**


×
М У Х А
С Л О Н
А
Х
У
М

**Праздник**

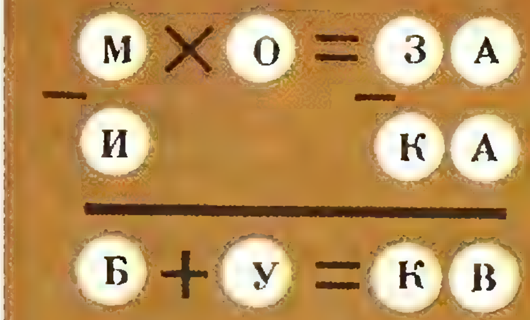
П И Р О Г : И = Г О С Т И

## Ребусы

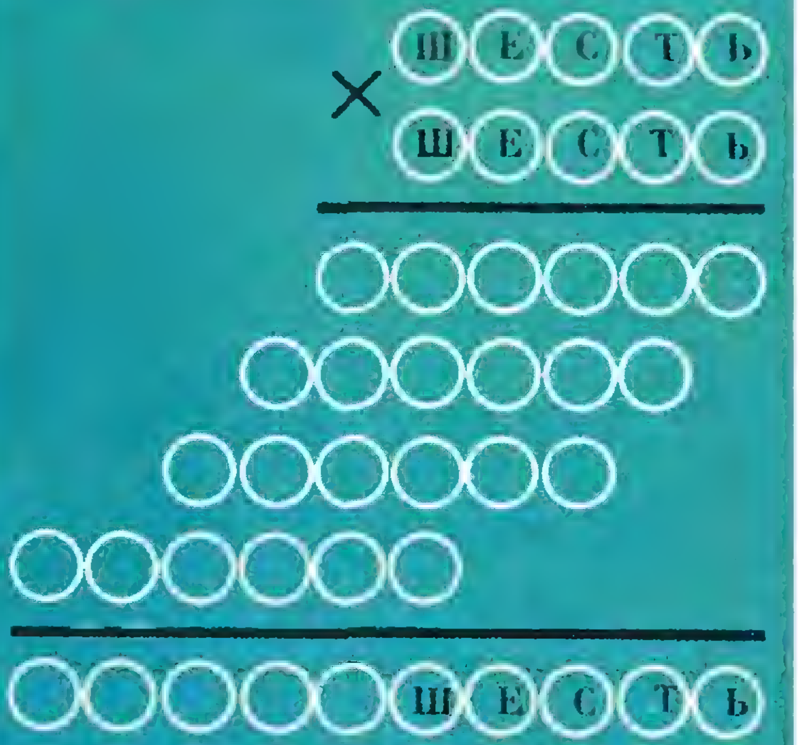
В каждом из этих ребусов цифры зашифрованы буквами. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные, в пустых клетках могут стоять любые цифры, в том числе и зашифрованные буквами, ни одно число не начинается нулем. Расшифруйте примеры.

*Л. П. Мочалов*

**Мозаика букв**


М × О = З А
—
И
—
К А
Б + У = К В

**Шесть на шесть**


×
Ш Е С Т Ь
Ш Е С Т Ь
Ш Е С Т Ь

# НОМЕР
# 4

Основан в 1970 году
1976
4

# Квант

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР
Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
*академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
*академик* А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
*(главный художник)*
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
*(зам. главного редактора)*
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
*(зам. главного редактора)*
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

**Редакция:**
В. Н. Березин
А. Н. Виленкин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова
*(художественный редактор)*
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чернова
*(зав. редакцией)*

**В НОМЕРЕ:**

---

2 *М. Башмаков.* Что такое вектор?
6 *Я. Гегузин.* Классические опыты с кристаллами
14 *В. Левин.* Парабола и неравенства

**Лаборатория «Кванта»**

20 *В. Майер.* Поучительный опыт с кумулятивной струей

**Математический кружок**

22 *Н. Васильев.* Сложение фигур

**Задачник «Кванта»**

30 Задачи М376—М380; Ф388—Ф392
32 Решение задач М336, М337, М339; Ф348—Ф352

**Практикум абитуриента**

40 *Н. Розов, В. Степанова.* Читатели советуют
46 *И. Молотков, В. Осипов, С. Славянов, П. Товстик.* Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова
47 *Г. Меледин.* Новосибирский государственный университет

**Рецензии, библиография**

50 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги

**«Квант» для младших школьников**

52 Задачи
53 *Л. Фладе.* Необходимо или достаточно?
56 **Ответы, указания, решения**

**Уголок коллекционера**

64 *В. Лешковцев.* Подвиг, который будет жить в веках
**Смесь** *(с. 19, 55)*

---

В третьем номере журнала мы писали о различных моделях плоскости Лобачевского. В частности, в статье С. Гиндикина рассказывалось о модели Пуанкаре в верхней полуплоскости, а в статье В. Болтянского — о той же модели, но в круге. Замечательному голландскому художнику М. Эшеру удалось разбить плоскость Лобачевского (в модели Пуанкаре внутри круга) на конгруэнтные (разумеется, на плоскости Лобачевского) части двух сортов: «дьяволов» и «ангелов» (см. первую страницу обложки). Эшер назвал эту картину «Рай и Ад».

---

© *Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1976 год*

*М. Башмаков*

# Что такое вектор?

**Слово «вектор» встречается в математике, физике и прикладных дисциплинах. Этим словом обозначают совсем разные объекты, не похожие друг на друга. Так, в школьном учебнике геометрии понятие вектора отождествляется с понятием параллельного переноса (плоскости или пространства). В физике при описании ряда величин говорят, что они имеют векторный характер — таковы скорость механического движения, сила притяжения, напряженность магнитного поля. Что же то общее, что позволяет называть все эти объекты одинаково? Как нужно построить математическую теорию, чтобы получившееся понятие обслуживало потребности и математики, и физики? Об этом и рассказывается в статье.**

## 1. Векторное пространство

Математика имеет замечательный способ определять новое понятие, описывая его свойства. Так, например, вместо того, чтобы прямо определить, что такое действительное число (с помощью десятичных дробей или как-нибудь еще), в большинстве книг перечисляют их основные свойства, которыми и пользуются в дальнейшем. Такой подход — он называется *аксиоматическим* — очень распространен в современной математике. Школьный курс геометрии построен именно так. Аналогично поступают и с векторами — перечисляют общие свойства, присущие всем векторным величинам, встречающимся и в математике, и в ее приложениях.

Как и всегда при аксиоматическом подходе, мы будем определять не что такое отдельно взятый, изолированный «вектор», а сразу всю совокупность векторов — *векторное пространство*.

*Векторное пространство — это множество $M$ с двумя операциями, удовлетворяющими определенным требованиям* *). Одна из этих операций (ее принято называть *сложением*) каждой паре $a$, $b$ элементов множества $M$ ставит в соответствие третий элемент (этот элемент называется *суммой* элементов $a$ и $b$ и обозначается $a + b$). Вторая операция каждому элементу $a$ множества $M$ и каждому действительному числу $\lambda$ ставит в соответствие элемент множества $M$, называемый *произведением* элемента $a$ на число $\lambda$ (это «произведение» обозначается $\lambda a$).

Перечислим требования (*аксиомы векторного пространства*), которым должны удовлетворять указанные операции:

1°. Сложение векторов подчиняется сочетательному (*ассоциативному*) и переместительному (*коммутативному*) законам:

$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$
$$x + y = y + x.$$

2°. Существует нулевой вектор: 0, такой, что $x + 0 = x$.

3°. Для каждого вектора существует вектор, сумма которого с исходным вектором есть нулевой вектор.

4°. $(\lambda_1\lambda_2)x = \lambda_1(\lambda_2 x)$.

5°. $(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$.

6°. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

7°. $1 \cdot x = x$.

Здесь $x$, $y$, $z$ — произвольные векторы, $\lambda$, $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — любые действительные числа.

## 2. Примеры векторных пространств

Наиболее привычные для нас векторы — это направленные отрезки на плоскости. Однако устроить из направленных отрезков векторное пространство совсем не легко. Поэтому мы начнем с более простых примеров.

---

*) Сравните с определением *кольца* в «Кванте», 1974, № 2, с. 4.

*1. Линейные функции*

Рассмотрим всевозможные линейные функции (заданные на множестве **R** всех действительных чисел). Каждая такая функция задается правилом: $x \to ax + b$. Понятно, что сумма двух линейных функций есть снова линейная функция. Точно так же, если линейную функцию умножить на число, то получится опять линейная функция. При этом все аксиомы 1°—7° выполняются, и таким образом, множество линейных функций с этими операциями является векторным пространством.

*2. Параллельные переносы*

Рассмотрим множество всех параллельных переносов плоскости. Их можно складывать, последовательно выполняя друг за другом, умножать на числа. С этим векторным пространством вы и встречаетесь в школе.

*3. Пространство строк*

Рассмотрим строки фиксированной длины $n$ из действительных чисел: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Определим сложение строк и умножение их на числа *поэлементно*:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n);$$

$$\lambda (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

Очевидно, что строки длины $n$ с так определенными операциями образуют векторное пространство.

*4. Квадратные трехчлены*

Множество квадратных трехчленов $\{ax^2 + bx + c\}$ (числа $a$, $b$, $c$ могут быть и нулями) также образует векторное пространство по отношению к обычным операциям сложения многочленов и умножения их на числа.

*5. Многочлены*

Множество всех многочленов с теми же операциями тоже образует векторное пространство.

*6. Функции*

Все функции, заданные на каком-то числовом множестве **A**, образуют векторное пространство по отношению к обычному сложению и умножению на числа.

*7. Свободные векторы*

Сконструируем теперь векторное пространство из направленных отрезков на плоскости. Каждый направленный отрезок задается *упорядоченной* парой точек — началом и концом. Каждой такой паре точек $(A, B)$ можно сопоставить параллельный перенос плоскости. Из геометрии известно, что существует единственный параллельный перенос, при котором точка $A$ переходит в точку $B$. В то же время ясно, что разные пары точек $(A_1, B_1)$ и $(A_2, B_2)$ могут задавать один и тот же перенос. Для этого необходимо и достаточно, чтобы отрезки $A_1B_1$ и $A_2B_2$ имели одинаковую длину и были одинаково направлены. Объединим теперь все направленные отрезки, задающие один и тот же параллельный перенос, в один класс: мы получим *взаимно однозначное соответствие* между такими классами и параллельными переносами. Один такой класс направленных отрезков называют *свободным вектором* (в отличие от фиксированного направленного отрезка — связанного вектора). Складывать и умножать на число свободные векторы надо так, как складывают параллельные переносы. Вот как выглядит сложение свободных векторов графически: в одном классе выбирают произвольный направленный отрезок $AB$, затем во втором классе находят отрезок с началом в точке $B$ (т. е. от $B$ откладывают направленный отрезок, принадлежащий второму классу), и если точка $C$ — конец второго отрезка, то $AC$ — направленный отрезок, принадлежащий классу, соответствующему сумме векторов. Постарайтесь самостоятельно доказать, что это определение суммы корректно, т. е. что результат не зависит от того, какой направленный отрезок из первого класса мы выбираем. Дайте графическое определение умножения на число. (Обращаться со свободными векторами трудно потому, что каждый из них представляет целый класс направленных отрезков. Графически же мы всегда изображаем каждый класс каким-то одним отрезком, выбирать который мы можем по своему произволу. Поэтому приходится проверять, что результат не зависит от произвольно выбранных нами представителей.)

## 3. Координаты

Вернемся к нашему первому примеру — векторному пространству линейных функций.

Рассмотрим две функции:

$$f_1\colon x\to x,$$
$$f_2\colon x\to 1.$$

Любая функция $f\colon x\to ax+b$ может быть представлена в виде линейной комбинации этих функций: $f=af_1+bf_2$. Пара чисел $(a,\ b)$ называется *координатами* линейной функции $f$.

Замечательно то, что при сложении линейных функций их координаты складываются, как строки:

$$f_1\colon x\to ax+b\leftrightarrow(a,\ b),$$
$$f_2\colon x\to cx+d\leftrightarrow(c,\ d),$$
$$f_1+f_2\colon x\to(a+c)x+(b+d)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(a+c,\ b+d);$$

но

$$(a+c,\ b+d)=(a,\ b)+(c,\ d).$$

Приведем еще несколько примеров. В векторном пространстве параллельных переносов плоскости можно выбрать два параллельных переноса (например, на два непараллельных вектора длины 1), по которым раскладывается любой перенос; коэффициенты этого разложения называются *координатами* соответствующего переноса.

Рассмотрим в векторном пространстве строк длины $n=4$ строки

$$f_1=(1,\ 0,\ 0,\ 0),\quad f_2=(0,\ 1,\ 0,\ 0),$$
$$f_3=(0,\ 0,\ 1,\ 0),\quad f_4=(0,\ 0,\ 0,\ 1).$$

Любую строку $f=(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ мы можем представить в виде

$$f=a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3+a_4b_4;$$

числа $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ называются координатами строки $f$.

В векторном пространстве квадратных трехчленов для произвольного трехчлена $f=ax^2+bx+c$ имеем: $f=af_1+bf_2+cf_3$, где $f_1=x^2$, $f_2=x$, $f_3=1$; числа $(a,\ b,\ c)$— координаты трехчлена $f$.

В пространстве же всех многочленов придется взять бесконечно много многочленов:

$$f_0=1,\ f_1=x,\ f_2=x^2,\ \dots,f_n=x^n,\dots.$$

Тогда любой многочлен $F$ запишется в виде конечной линейной комбинации выбранных многочленов; коэффициенты разложения многочлена $F$ по многочленам $f_0,\ f_1,\dots$— это его координаты:

$$F\,(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots$$
$$\dots+a_1x+a_0=a_mf_m+a_{m-1}f_{m-1}+\dots$$
$$\dots+a_1f_1+a_0f_0\leftrightarrow(a_m,\ a_{m-1},\dots,a_1,\ a_0).$$

Теперь мы уже можем задать ряд вопросов. Как в данном пространстве выбрать систему векторов, по которой раскладывался бы любой вектор этого пространства? Когда эту систему можно выбрать конечной? В какой мере разложение однозначно? И как связаны между собой коэффициенты разложения по разным системам векторов?

Ответы на эти вопросы дает раздел математики, именуемый *линейной алгеброй*. Вот краткий обзор некоторых результатов.

1. Векторные пространства бывают *конечномерные* и *бесконечномерные*. В конечномерных существуют конечные системы векторов, по которым раскладывается любой вектор пространства. В наших примерах пространства линейных функций, квадратных трехчленов, строк, параллельных переносов и свободных векторов — конечномерные. Пространства же всех многочленов и всех функций бесконечномерны.

2. Для конечномерного пространства можно указать наименьшее число $n$ такое, что существует $n$ векторов, по которым раскладывается любой вектор пространства. Это число $n$ называется *размерностью* пространства. Так, пространство линейных функций имеет размерность 2, пространство квадратных трехчленов

трехмерно, а пространство строк длины $n$ имеет размерность $n$.

3. Если в $n$-мерном пространстве мы возьмем систему из векторов $f_1$, $f_2, \ldots, f_n$, по которым раскладывается любой вектор пространства, то коэффициенты разложения определяются однозначно. Система векторов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ называется *базисом* пространства, а коэффициенты разложения $f = a_1f_1 + a_2f_2 + \ldots + a_nf_n$, т. е. числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, называются *координатами вектора $f$ в базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$*. Базисов существует бесконечно много. Формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в разных базисах, довольно громоздки.

### 4. Дальнейшая программа

Мы начали с того, что выделили основные свойства векторных величин — возможность их сложения и умножения на числа — и пришли к понятию векторного пространства. В математике и ее приложениях встречается очень много разнообразных, не похожих друг на друга векторных пространств. Естественно ожидать, что после общего описания векторных пространств последует какая-то их классификация, связанная с рассмотрением новых, дополнительных свойств. Например, мы до сих пор еще не говорили об *углах* между векторами и о *длинах* векторов. В примерах векторных величин, взятых из геометрии, это сделать легко. А как, скажем, определить угол между двумя квадратными трехчленами? И можно ли вообще говорить о длине, если в качестве вектора берется, например, произвольная функция? Эти вопросы очень подробно изучены в математике. Мы расскажем о том, как можно вводить в векторном пространстве углы и расстояния, в отдельной статье.

Наиболее интересным и важным в теории векторных пространств является изучение *отображений* одних пространств в другие. Этими вопросами занимается раздел математики, называемый *функциональным анализом*. В этом разделе много красивых результатов и еще больше нерешенных трудных задач.

#### Упражнения

1. Рассмотрим множество всех функций, заданных на $\mathbb{R}$, графики которых проходят через заданную точку $A$. Образуют ли такие функции (по отношению к сложению функций и умножению их на числа) векторное пространство, если точка $A$ имеет координаты: а) (0; 0), б) (1; 0), в) (0; 1)?

2. Изобразим линейную функцию $f: x \rightarrow ax + b$ точкой обычной координатной плоскости с координатами $(a, b)$.

а) Как будут изображаться линейные функции, обращающиеся в ноль при $x = 1$?

б) Предыдущую задачу можно сформулировать так: на плоскости $(a, b)$ изобразить прямые $y = ax + b$, проходящие на плоскости $(x, y)$ через точку (1; 0). Изобразите теперь на плоскости $(a, b)$ прямые $y = ax + b$, проходящие через какую-либо точку отрезка $[0, 1]$ оси ординат плоскости $(x, y)$.

3. а) Мы указали в пространстве линейных функций такой базис $f_1 = x$, $f_2 = 1$. Проверьте, что функции $f_1: x \rightarrow x + 1$, $f_2: x \rightarrow x - 1$ также образуют базис.

б) Найдите необходимое и достаточное условие того, чтобы две линейные функции $f_1: x \rightarrow a_1x + b_1$ и $f_2: x \rightarrow a_2x + b_2$ составляли базис пространства всех линейных функций.

4. Докажите, что в пространстве квадратных трехчленов нельзя указать два квадратных трехчлена $f_1$ и $f_2$ таких, что всякий трехчлен $f$ можно было бы записать в виде их линейной комбинации: $f = a_1f_1 + a_2f_2$, т. е. что это пространство не является двумерным.

5. Докажите, что в пространстве строк длины $n = 4$ векторы $f_1 = (1, 0, 0, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1, 0)$, $f_4 = (1, 1, 1, 1)$ образуют базис. Обобщите теорему на произвольное $n$.

Я. ГЕГУЗИН

# КЛАССИЧЕСКИЕ ОПЫТЫ С КРИСТАЛЛАМИ

Каким должен быть опыт, чтобы заслужить высший титул — *классический?* Быть простым и красивым? Неожиданным по постановке и по полученному результату? Оказавшим большое влияние на развитие какой-то области науки? Проиллюстрировавшим фундаментальный закон природы? Видимо, все эти признаки в различной степени присущи классическому опыту.

Я хочу рассказать о двух опытах, которые были поставлены выдающимися советскими физиками академиками Абрамом Федоровичем Иоффе и Петром Ивановичем Лукирским. Оба опыта, безусловно, заслуживают этого высшего титула.

## I. ЭФФЕКТ ИОФФЕ

История открытия и утверждения эффекта, носящего имя одного из патриархов советской физики академика А. Ф. Иоффе, содержит все то, чем богата логика живой науки и маняща деятельность ученого. В этой истории и рождение проблемы, когда обнаруживается кричащее противоречие между идеями и фактами; и неожиданность озарения, когда кажется, что загадка оборачивается ясностью; и эксперимент — красивый и настолько простой, что у каждого возникает ощущение сопричастности к замыслу эксперимента, уверенность, что и он придумал бы этот эксперимент, если бы ранее его не придумал и осуществил тот, с чьим именем эксперимент вошел в науку. В истории эффекта Иоффе есть место для деятельности и добросовестно заблуждавшихся научных оппонентов, и активных газетных репортеров, неуемно и без достаточных оснований фантазирующих на тему «эффект и будущее»; и высшая награда ученому, когда его идеи со страниц академических научных журналов перекочевывают на страницы учебников и в графы карточек цеховых технологических процессов.

Внешне эффект выглядит очень неожиданно: если кристалл каменной соли (химическая формула NaCl) смочить водой, его прочность на разрыв становится во много раз больше прочности сухого кристалла. Казалось бы, прочность — объемное свойство кристалла и она не должна зависеть от того, что происходит на поверхности кристалла. А на поверку оказывается, что соседство с водой резко упрочняет каменную соль, причем эффект наблюдается и для толстого, и для тонкого образцов.

### Противоречие между теорией и экспериментом

Начало истории эффекта Иоффе можно датировать 1915 годом. В этом году выдающийся немецкий физик-теоретик Макс Борн опубликовал строгую теорию кристаллов. Собственно, в этой теории впервые и было введено представление о кристаллах, состоящих из ионов, которые взаимодействуют друг с другом электростатическими силами (по закону Кулона). Сказанное в последней фразе для нас сейчас звучит азбучной истиной, а тогда, в 1915 году, всего через три года после того, как с помощью рентгеновских лучей впервые убедились в строгой периодичности чередования атомов в кристалле, мысли о ионной структуре кристалла были откровением.

Теория Борна, математически стройная и внутренне непротиворечивая, многими экспериментами подтверждалась. Борн сумел объяснить оптические, электрические и многие другие свойства разных кристаллов. В противоречии с его теорией оказались лишь данные о прочности кристаллов. Например, было известно, что кристалл каменной соли разрушается, когда его деформация достигает такого значения, что возникающее напряжение *) становится равным приблизительно $4{,}5 \cdot 10^6$ *н/м*². А точный и последовательный расчет теоретика предсказывал существенно иную величину — приблизительно $2 \cdot 10^9$ *н/м*², что чуть ли не в 500 раз больше экспериментального значения.

Сохранив идею, упростим точный расчет и попытаемся приближенно

---

*) Напомним, что механическим напряжением $\sigma$ называют величину, измеряемую отношением модуля силы упругости $F_{\text{упр}}$ к площади поперечного сечения образца $S$: $\sigma = F_{\text{упр}}/S$. Максимальное значение напряжения, после которого образец разрушается, называют пределом прочности $\sigma_{\text{пр}}$.

оценить величину предела прочности кристалла.

Предел прочности кристалла есть отношение силы, при которой он разрывается, к площади сечения, по которому произошел разрыв: $\sigma_{\text{пр}} = F/S$. Естественно считать, что сила $F$ есть сумма сил $f$, действующих на каждую из $n$ пар взаимодействующих ионов: $F = nf$. Если площадь сечения образца в месте разрыва $S$, а расстояние между ионами (постоянная решетки) $a$*), то $n = S/a^2$. А так как кристалл ионный и сила взаимодействия между ионами описывается законом Кулона, то

$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{a^2},$$

где $q$ — абсолютная величина заряда иона.

Итак,

$$\sigma_{\text{пр}} = \frac{F}{S} = \frac{nf}{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{a^4}.$$

В кристаллах NaCl заряд иона совпадает с зарядом электрона, т. е. $q = e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ *к*, величина $a = 5{,}3\cdot 10^{-10}$ *м*, следовательно, $\sigma_{\text{пр}} \approx 2{,}6\cdot 10^{9}$ *н/м*$^2$. Эта величина близка к следующей из точной теории.

Простота и очевидность сделанной оценки не должны в глазах читателя умалить проницательность теоретика. Полвека спустя нам легко и просто понять идею расчета, так как за нами величие Борна. Он же в 1915 году, не имея предшественников, мыслил независимо и революционно. Борн был великим мастером.

Осмысливая противоречия между точным расчетом и экспериментальными данными, Иоффе должен был обсудить следующие возможности: ошиблись либо теоретик, либо экспериментатор. Второе предположение следовало отбросить, не колеблясь, потому что даже если бы произошло невероятное и лабораторные исследователи ошиблись в 500 раз, их поправила бы многовековая практика обращения человека с кристаллами NaCl. Если, действительно, их прочность была бы в согласии с теорией, то не так просто было бы добыть в штольне соляную глыбу, орудуя киркой, и не простой была бы задача истолочь эту глыбу в порошок. В 500 раз экспериментаторы не ошиблись! И теоретик вряд ли ошибался так сильно: и мысли его логичны, и многие иные факты он объяснил весьма успешно.

Истину следовало искать где-то в другом месте. Вот здесь необходимо озарение, нужен неожиданный взгляд на сложившуюся ситуацию. Абрама Федоровича Иоффе озарила блестящая идея.

### Неожиданная идея

Иоффе рассуждал так: теоретик не ошибается, но рассчитывает он идеальную ситуацию, когда *одновременно* прекращаются взаимодействия всех $n$ пар ионов. А если это происходит не одновременно, т. е. связи между ионами рвутся последовательно друг за другом? Тогда, очевидно, разрушение образца будет происходить не мгновенно, и при этом возникающее напряжение будет значительно меньше того, которое следует из теории.

Иоффе придумал конкретную причину требующейся ему неодновременности разрыва связей. Он предполо-

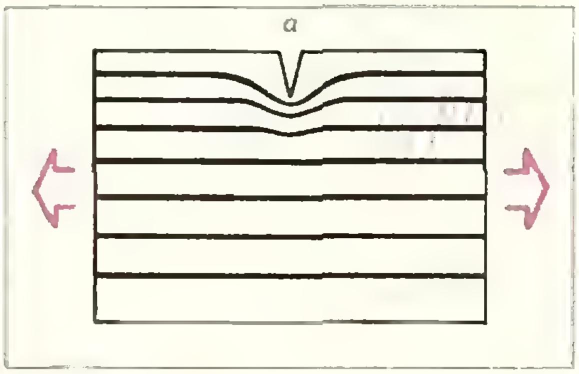


Рис. 1.

---

*) Каменная соль (NaCl) имеет кристаллическую решетку кубической формы — чередующиеся ионы натрия и хлора располагаются в вершинах кубов.

жил, что на поверхности кристалла имеются микроскопические трещинки. При нагружении кристалла до величины ниже «теоретической» прочности в устье трещины (область *а* на рисунке 1), в маленьком объеме кристалла, могут возникнуть напряжения, при которых связи между ионами начнут разрушаться. А это значит, что трещина будет распространяться в глубь образца, пронижет его и расчленит на две части. Но кристалл разрушится не потому, что в плоскости разрыва одновременно порвались все связи, а потому, что последовательное разрушение связей дало возможность трещине вырасти и расчленить кристалл.

То, как Иоффе представлял себе механизм разрушения кристалла, можно наглядно проиллюстрировать модельным опытом. Он прост, и его результаты не оставляют сомнений. На предметном столике микроскопа растягивалась тонкая пластинка плексигласа, на боковом торце которой сделан острый и неглубокий надрез. Пластинка моделирует кристалл, надрез — трещину на его поверхности. При специальном освещении (в поляризованном свете) можно отличить напряженные участки в плексигласе: чем больше напряжение, тем соответствующий участок темнее. Так вот, на последовательности кадров заснятого нами кинофильма (рис. 2) видно, что в устье надреза напряжения действительно максимальны и что пластинка разрушается вследствие движения напряженного устья сквозь нее. Причем происходит это при напряжениях, значительно меньших тех, которые необходимы для разрушения пластинки без надреза.

В упрощенном варианте подобный опыт вы можете сделать сами, не прибегая ни к микроскопу, ни к поляризованному свету, ни к кинокамере. Вы просто можете убедиться в том, что порвать полоску бумаги, растягивая ее, намного легче, если предварительно сделать на ней маленький надрез.

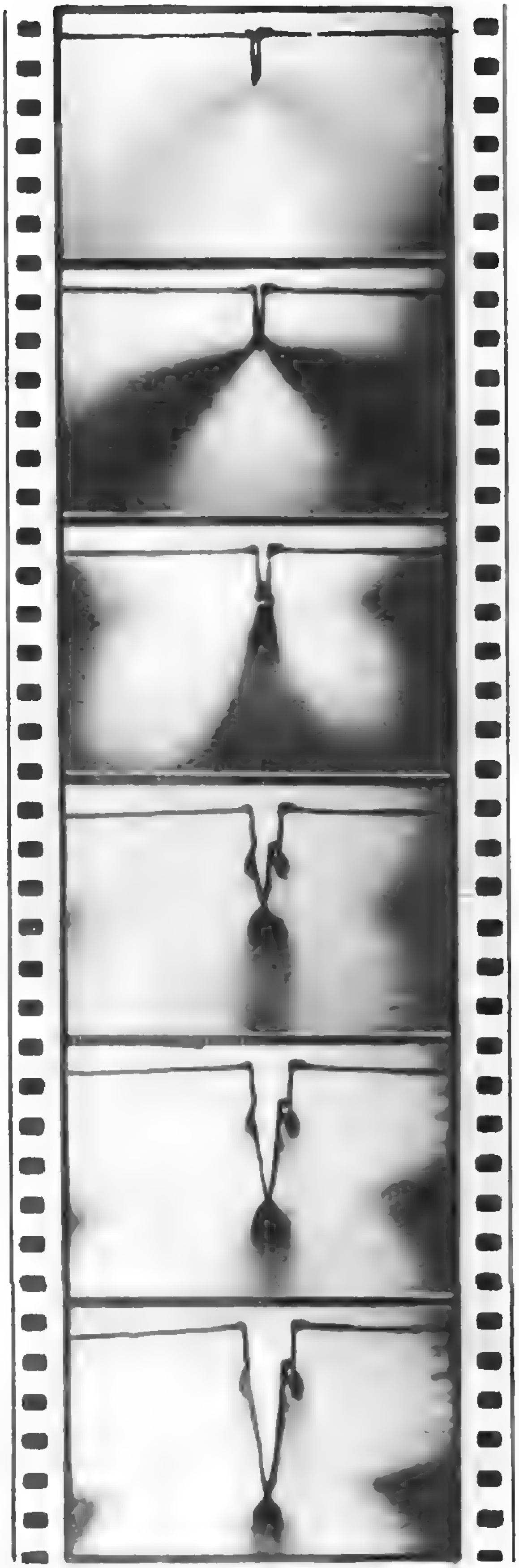


Рис. 2.

## Опыт Иоффе

Итак, гипотеза есть, нужен опыт, проверяющий ее. Идею опыта подсказывала прямолинейная логика: если действительно поверхностные трещины — истинная причина почти пятисоткратного понижения прочности, то, удалив тонкий слой кристалла, в котором расположены трещины, мы вправе ожидать, что прочность кристалла возрастет в пятьсот раз! Логика дает это право, а скепсис возражает против него.

Иоффе поставил следующий опыт. Он растягивал монокристальный образец каменной соли в условиях, когда часть образца была в воздухе, а часть омывалась теплой водой, которая постепенно растворяла кристалл и делала его тоньше. Результат опыта оказался в согласии с предсказаниями логики: образец разрушился в сухой части при напряжении $\approx 4{,}5 \cdot 10^6$ *н/м²*. Погруженная в воду более тонкая часть образца выдерживала напряжения до величины $1{,}6 \cdot 10^9$ *н/м²*, которая не так уж далека от «теоретического» предела прочности, равного $2 \cdot 10^9$ *н/м²*.

Видимо, красивым можно считать и такой опыт, который легко побеждает наш скепсис. В этом смысле опыт Иоффе безусловно красив!

Опыт (он был проведен в 1924 году), давший убедительный результат, естественно привлек к себе внимание и специалистов, и «околонаучных кругов».

Газеты и научно-популярные журналы наперебой рассказывали своим читателям о фантастических последствиях увеличения прочности материалов: мосты из проволок, сверхлегкие самолеты, автомобили, пароходы и т. п. В книге «Моя жизнь и работа» А. Ф. Иоффе с возмущением писал по этому поводу: «...между наблюдением исключительной прочности кристалла каменной соли и получением такой же прочности технических материалов — громадный путь».

## Возражения оппонентов

В научных журналах появились статьи, а на научных конференциях — выступления, которые, не ставя под сомнение результаты опытов по разрыву «мокрых» кристаллов, опровергали предлагавшееся Иоффе толкование причины влияния воды на прочность каменной соли.

Например, австрийский кристаллофизик Смѐкал, известный своими исследованиями структуры кристаллов, на конференции в Лондоне утверждал, что в опытах Иоффе прочность соли меняется в связи с тем, что вода проникает в соль и делает ее более прочной. Это утверждение было убедительно опровергнуто с помощью многочисленных опытов, поставленных в Ленинграде, в лаборатории Иоффе. Расскажем о двух из них. Один заключался в простом повторении опыта по разрыву образца, погруженного в воду. Была видоизменена лишь одна деталь: часть поверхности, находящейся в воде, была защищена от воды полоской нерастворимого лака. В этом случае эффект исчезал, прочность кристалла не повышалась. Согласно идее Смекала через защищенную поверхность вода могла поступать в кристалл и упрочнять его, но то обстоятельство, что на небольшом участке поверхности сохранились поверхностные трещины, делало кристалл уязвимым, малые нагрузки его разрушали. Идея Смекала явно оказалась несостоятельной.

Второй опыт был неожиданным по замыслу. Монокристальный шарик каменной соли предварительно охлаждался в жидком воздухе, а затем быстро погружался в расплавленное олово или свинец. Внешние слои шарика быстро нагревались, расширялись и растягивали во всех направлениях внутреннюю, еще не прогревшуюся часть шарика. Теоретики подсчитали, что в центре шарика возникали напряжения до $7 \cdot 10^8$ *н/м²*, между тем шарик не разрывался. Дело в том, что эти напряжения возникали внутри шарика, а поверхностные слои оставались недостаточно напряженными. Трещины не росли, и кристалл сохранял целостность.

Были и иные возражения против предложенных Иоффе объяснений. Его лаборатория спорила с оппонентами, проводя множество контрольных опытов, отстаивая (и отстояв) и существо эффекта, и его толкование.

Но все-таки возникает вопрос: почему трещины на поверхности кристалла оказались определяющими его прочность? Неужели объемная структура образца абсолютно бездефектна, свободна от «объемных» трещин, которые были бы одинаково безразличны и к наличию, и к отсутствию воды на поверхности образца? Действительно, могло бы оказаться и так, что роль поверхностных трещинок не была бы определяющей. Могло бы, а вот в случае соли не оказалось!

Быть может, это обстоятельство умаляет значимость и общность эффекта? Быть может, речь идет о случайной находке экспериментатора, находке, имеющей ограниченный, частный интерес? Конечно же, нет! Речь идет о другом. Благодаря тому, что отыскался объект, где поверхностные трещинки себя проявляют предельно отчетливо, физика обогатилась ясным пониманием возможного влияния поверхностных дефектов на механические свойства кристаллов. Кусочек истинной правды о законах природы оказался заключенным в «эффекте Иоффе».

Абрам Федорович Иоффе был счастливым ученым, он видел при жизни учебники физики с параграфом «эффект Иоффе» и видел карточки тех цеховых технологических процессов, в которых достигается значительное упрочнение изделий вследствие удаления трещин с поверхности.

## II. ОПЫТ ЛУКИРСКОГО

Война, 1943 год, большая комната в Казанском университете шкафами условно разделена на несколько маленьких, в каждой из них — группа физиков Ленинградского физико-технического института, эвакуировавшегося в Казань. В одной из импровизированных лабораторий — сотрудники профессора Петра Ивановича Лукирского. Много дел связано с работой на оборону, ими и занят профессор со своими сотрудниками. Но как дань естественной любознательности ищущего ученого — опыты с монокристаллами каменной соли. Они стали классикой кристаллофизики, о них я и хочу рассказать.

И по замыслу, и по осуществлению эти опыты тождественны и отличаются лишь объектом исследования, точнее, формой изучавшегося образца.

Один вариант опыта был таким. Длительному высокотемпературному отжигу подвергался тщательно отполированный цилиндр, изготовленный из монокристалла каменной соли; ось цилиндра была ориентирована параллельно ребру куба естественной огранки кристалла. Если до отжига цилиндр бесшумно скатывался по слегка наклоненной поверхности стекла, то после отжига скатывание сопровождалось равномерным постукиванием, как если бы на поверхности цилиндра появились ребра — четыре ребра, равно отстоящие одно от другого. Эти ребра можно было и увидеть, рассматривая отожженный цилиндр в отраженном свете.

В другом варианте опыта такому же отжигу подвергалась тщательно отполированная монокристальная сфера. После отжига на ее поверхности можно было отчетливо увидеть в отраженном свете фигурные блики (рис. 3) *); до отжига их не было.

---

*) На приведенной фотографии вы видите блики различной формы. Это связано с тем, что в кристаллах существуют оси симметрии разного порядка. (*Некоторая прямая называется осью симметрии $k$-го порядка для данного тела, если при повороте тела вокруг этой прямой на угол $360°/k$ оно совмещается с самим собой.*) В частности, эллиптический блик соответствует оси симметрии второго порядка, а квадратный блик — оси симметрии четвертого порядка.

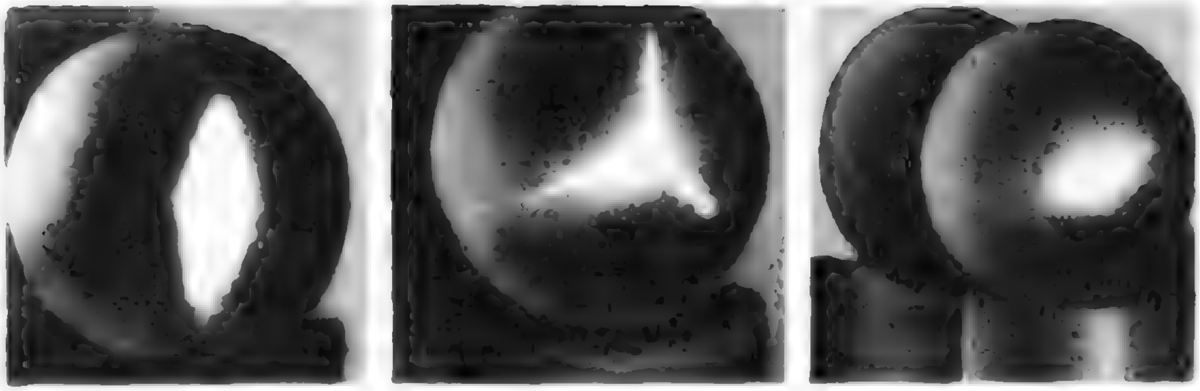


Рис. 3.

Результат обоих опытов можно сформулировать так: кристаллы каменной соли, которым принудительно придана не свойственная им цилиндрическая или сферическая форма, стремятся к восстановлению формы куба — своей естественной огранки, или, как говорят кристаллографы, «естественного габитуса». Высокая температура в этих опытах нужна лишь для того, чтобы придать активность какому-нибудь механизму переноса массы кристалла, необходимого для формирования «естественного габитуса». Кристаллы, разумеется, «предпочтут» тот из механизмов, который даст им возможность поскорее избавиться от принудительно заданной формы и восстановить свою естественную форму.

Почему же кристалл стремится к естественной огранке? Оказывается, среди несметного числа прочих мыслимых именно она обеспечивает наименьшую поверхностную энергию кристалла при заданном его объеме *). А именно минимум энергии характерен для равновесного, т. е. наиболее естественного, состояния кристалла. Математически такое поведение кристалла описывается правилом Кюри—Вульфа. Его можно сформулировать так: если кристалл имеет объем $V$, огранен $n$ гранями, его $i$-я грань имеет поверхность $s_i$ и поверхностную энергию $\alpha_i$, то

$$\sum_{i=1}^{n} s_i\alpha_i \to \text{minimum} \quad \text{при} \quad V = \text{const}.$$

В этой записи стрелкой обозначено стремление кристалла сделать свою суммарную поверхностную энергию минимальной при условии, что объем постоянен. Опыт Лукирского сделал зримым то, что символически обозначается стрелкой.

Мудрое правило Кюри—Вульфа может показаться противоречащим не менее мудрому утверждению геометрии, согласно которому из всех тел данного объема минимальную поверхность имеет сфера. Поэтому, если сферический монокристалл стремится к уменьшению поверхностной энергии, ему, казалось бы, не следует ограняться, так как при этом его поверхность лишь увеличится. Поверхность и в самом деле увеличится — геометрия права. А вот энергия уменьшится, потому что при огранении исчезают участки поверхности, которые имеют бо́льшую удельную поверхностную энергию (т. е. поверхностную энергию, отнесенную к единице площади поверхности), и развиваются поверхности, представленные в естественной огранке, которые имеют меньшую поверхностную энергию. И этот эффект играет бо́льшую роль, чем эффект увеличения поверхности. Увеличивается поверхность, а энергия при этом уменьшается! Процесс преобразования формы и цилиндра, и шара происходит так, что на каждом из последующих этапов энергия их

---

*) Поверхностная энергия кристалла — это, прежде всего, энергия взаимодействия атомов, находящихся на его поверхности.

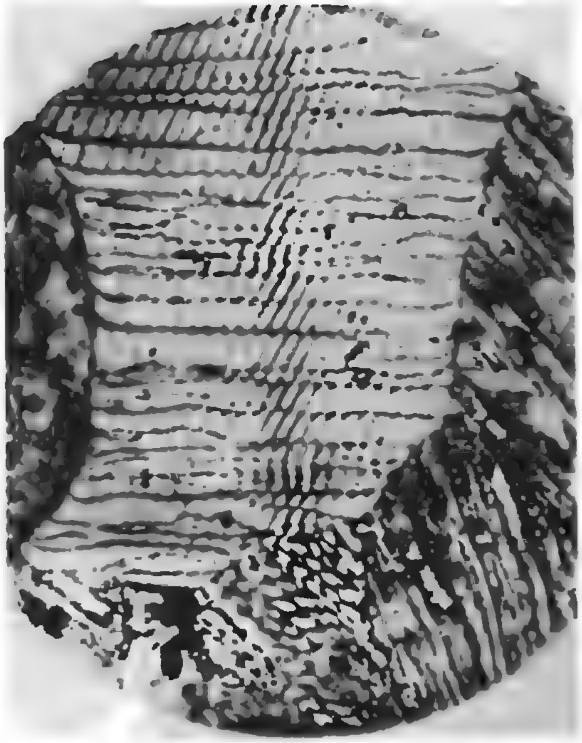


Рис. 4.

поверхностей меньше энергии на предыдущем этапе.

Опыты Лукирского очень зримо качественно проиллюстрировали основную тенденцию, которой следуют кристаллы, самопроизвольно преобразуя собственную форму. Эти опыты вызвали множество других, в которых этот процесс продолжал изучаться. Ставились, например, такие опыты. Тщательно полировали плоскость произвольного сечения кристалла, но при высокой температуре ее зеркальная гладь нарушалась, появлялись различные элементы так называемой «естественной шероховатости».

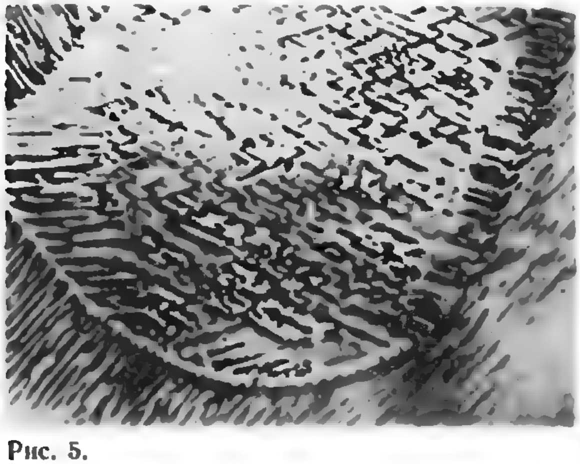


Рис. 5.

На стене нашей лаборатории много лет висят фотографии поверхностей кристаллов. Посмотрите на фотографию кристалла меди, приведенную на рисунке 4. Она у нас называется «лестница петергофского фонтана»— на ней отчетливо видны чередующиеся светлые и темные полосы, действительно напоминающие лестницу, по которой сплошным потоком течет вода. Поверхность среза кристалла была тщательно отполирована, а после отжига она стала шероховатой, превратилась в совокупность ступеней, ребра которых направлены так же, как и ребра в ограненном монокристалле меди.

Другая фотография поверхности кристалла (рис. 5) называется «палаточный городок». На ней видна совокупность остроконечных трехгранных выступов, которые ограничены теми же плоскостями, что и равновесной монокристалл.

Почему же кристалл, рассеченный по произвольной плоскости, не ограняется в целом, подобно сфере в опыте Лукирского, а допускается формирование «петергофской лестницы» и «палаточного городка»? Да просто потому, что и «лестница», и «городок»— лишь этапы на пути к истинному равновесию, этапы, которые достигаются быстрее, при меньшем переносе массы, чем истинно равновесная форма всего кристалла. И на поверхности образцов Лукирского можно было наблюдать промежуточные формы. Однако, благодаря тому, что при высокой температуре у кристаллов каменной соли быстро осуществляется нужный перенос массы, в опытах Лукирского процесс стремления к равновесной форме зашел настолько далеко, что можно было на сфере наблюдать блики, а при качении цилиндра — слышать постукивание.

*В. Левин*

# Парабола и неравенства

Прародителем всех тождественных неравенств является тот факт, что квадрат любого действительного числа неотрицателен: $x^2 \geqslant 0$. Этот факт можно сформулировать еще так: график функции $y = x^2$ (парабола) не проходит ниже оси абсцисс (рис. 1). Знак равенства в неравенстве $x^2 \geqslant 0$ имеет место только при $x = 0$ (парабола $y = x^2$ касается оси абсцисс в начале координат).

В этой заметке мы расскажем о том, как, исходя из этого элементарного неравенства, можно постепенно получить неравенства более сложные.

1. Рассмотрим квадратный трехчлен

$$y = Ax^2 + 2Bx + C, \quad A \neq 0;$$

графиком его также является парабола. Найдем необходимые и достаточные условия того, чтобы для всех действительных значений $x$ выполнялось неравенство

$$Ax^2 + 2Bx + C \geqslant 0. \qquad (1)$$

Эти условия находятся очень легко. Во-первых, необходимо, чтобы $A$ было положительным, так как при $A < 0$ всегда существуют значения $x$, для которых неравенство (1) заведомо неверно (это ясно, конечно, из того, что при $A<0$ парабола либо пересекает ось абсцисс, либо вся расположена ниже этой оси). Возьмем, например, $x = x_0 = m + \sqrt{m^2 + m}$, где $m$ выбрано так, чтобы оно было больше, чем $\frac{|B|}{|A|}$ и чем $\frac{|C|}{|A|}$. Тогда (напомним, что сейчас у нас $A<0$):

$$Ax_0^2 + 2Bx_0 + C \leqslant -|A|x_0^2 + 2|B|x_0 + |C| < |A|(-x_0^2 + 2mx_0 + m) =$$
$$= |A|(-2m^2 - m - 2m\sqrt{m^2 + m} + 2m^2 + 2m\sqrt{m^2 + m} + m) = 0,$$

то есть

$$Ax_0^2 + 2Bx_0 + C < 0.$$

Если же $A > 0$, то, выделив из квадратного трехчлена полный квадрат, получим

$$Ax^2 + 2Bx + C = A\left[\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2}\right] =$$
$$= A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A} \geqslant \frac{AC - B^2}{A}, \qquad (2)$$

так как $A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 \geqslant 0$. Знак равенства в неравенстве (2) достигается только при $x = -\frac{B}{A}$. Таким образом, *неравенство* (1) *верно для всех действительных значений $x$ тогда и только тогда, когда $A > 0$ и $AC \geqslant B^2$.*

*Знак равенства в неравенстве* (1) *достигается лишь в том случае, когда*

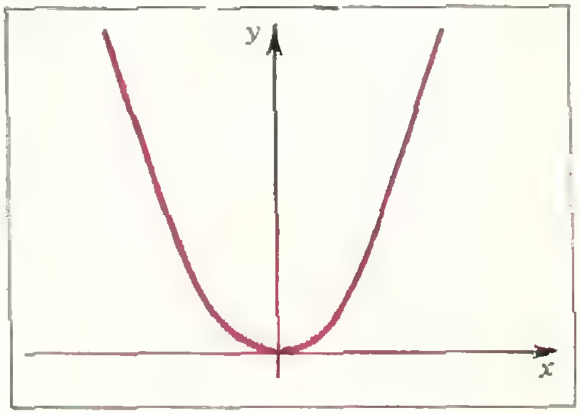


Рис. 1.

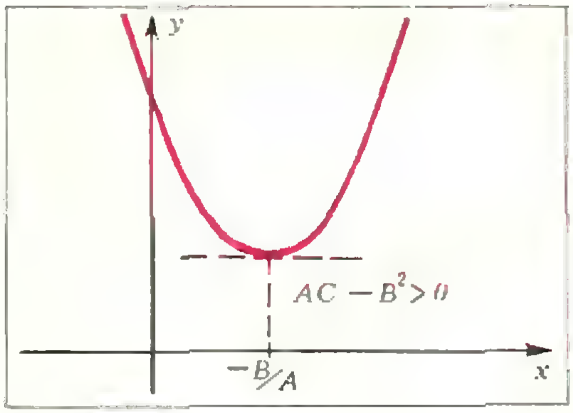


Рис. 2.

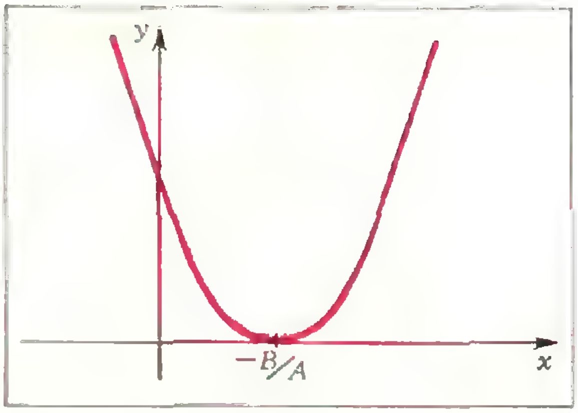


Рис. 3.

$AC = B^2$, *и именно при* $x = -\dfrac{B}{A}$ (рис. 2 и 3).

2. Возьмем произвольные действительные числа

$$a_1, a_2, \ldots, a_N; \quad b_1, b_2, \ldots, b_N; \quad N \geqslant 1,$$

и некоторое $x$, и напишем такое очевидное неравенство:

$$(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \ldots + (a_Nx + b_N)^2 \geqslant 0. \qquad (3)$$

Его можно переписать в виде

$$Ax^2 + 2Bx + C \geqslant 0,$$

где

$$A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_N^2,$$
$$B = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_Nb_N,$$
$$C = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_N^2.$$

Предположим, что не все $a_n$ ($n = 1, 2, \ldots, N$) равны нулю. Тогда мы можем утверждать, что $A > 0$. Поскольку мы знаем, что неравенство (3) обязано выполняться для всех действительных значений $x$, то в силу условия $AC \geqslant B^2$ должно быть

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_N^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_N^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_Nb_N)^2. \qquad (4)$$

Очевидно, что это неравенство справедливо, причем со знаком равенства, и тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_N = 0$, так что требование отличия от нуля хотя бы одного $a_n$ мы можем отбросить.

Неравенство (4) называется *неравенством Коши* (Огюстен Луи Коши (1789—1857) — известный французский математик); его удобнее записать в форме

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_Nb_N)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_N^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_N^2). \qquad \textbf{(K)}$$

Из происхождения неравенства Коши ясно, что знак равенства в нем имеет место тогда и только тогда, когда одновременно

$$a_1x + b_1 = 0, \quad a_2x + b_2 = 0, \ldots, \quad a_Nx + b_N = 0.$$

Отсюда вытекает, что

1) если какое-либо $a_n$ равно нулю, то и соответствующее $b_n = 0$;

2) для всех $a_n \neq 0$ отношение $\dfrac{b_n}{a_n} = -x$, то есть одно и то же.

Мы будем говорить, что *последовательности* $a_1, a_2, \ldots, a_N$ и $b_1, b_2, \ldots, b_N$ *пропорциональны*, если выполнены эти два условия (пример: последовательности 1, 2, 0, —3, 4, и —2, —4, 0, 6, —8 пропорциональны). Таким образом, *знак равенства в неравенстве Коши* (**K**) *имеет место тогда и только тогда, когда последовательности* $a_1, a_2, \ldots, a_N$ *и* $b_1, b_2, \ldots, b_N$ *пропорциональны.*

Примечание. Если записать неравенство Коши для $N = 2$:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2), \qquad (5)$$

и рассматривать $a_1$, $a_2$ и $b_1$, $b_2$ как координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости, так что (рис. 4)

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = |\vec{a}|\cos\alpha, \\ a_2 = |\vec{a}|\sin\alpha, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} b_1 = |\vec{b}|\cos\beta, \\ b_2 = |\vec{b}|\sin\beta. \end{array}\right.$$

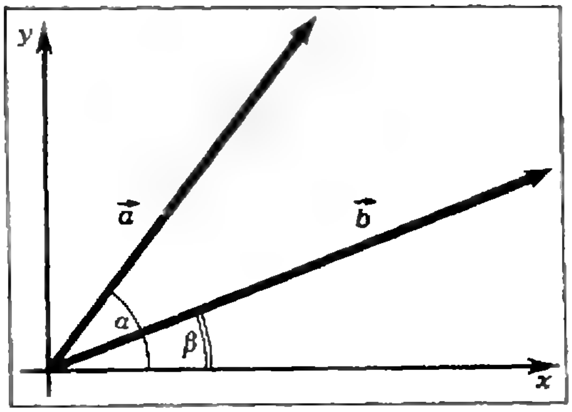


**Рис. 4.**

то простейшее неравенство Коши (5) представится в виде

$$|\vec a|^2\cdot|\vec b|^2(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)^2\leqslant$$
$$\leqslant|\vec a|^2\cdot|\vec b|^2,$$

то есть $\cos^2\varphi\leqslant 1$, где $\varphi=|\alpha-\beta|$ — угол между векторами $\vec a=(a_1,a_2)$ и $\vec b=(b_1,b_2)$.

В случае произвольного $N>2$ неравенство (**К**) также может быть записано в виде $\cos^2\varphi\leqslant 1$, если соответствующим образом понимать угол $\varphi$ между двумя векторами $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_N)$ в *N-мерном* пространстве.

3. Неравенство Коши имеет многочисленные приложения. Мы воспользуемся им для вывода других, несколько более сложных неравенств.

Рассмотрим две последовательности: последовательность $a_1, a_2, \dots, a_N$ и последовательность $c_1, c_2, \dots, c_N$ с отличными от нуля членами.

По неравенству (**К**) имеем

$$(a_1+a_2+\dots+a_N)^2=$$
$$=\left(a_1c_1\cdot\frac{1}{c_1}+a_2c_2\cdot\frac{1}{c_2}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+a_Nc_N\cdot\frac{1}{c_N}\right)^2\leqslant(a_1^2c_1^2+a_2^2c_2^2+\dots$$
$$\dots+a_N^2c_N^2)\left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}+\dots+\frac{1}{c_N^2}\right). \quad (6)$$

Положим

$$\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}+\dots+\frac{1}{c_N^2}=C_N,$$

и запишем неравенство (6) в виде

$$(a_1+a_2+\dots+a_N)^2\leqslant C_N(a_1^2c_1^2+$$
$$+a_2^2c_2^2+\dots+a_N^2c_N^2). \quad (7)$$

Знак равенства в (7) имеет место тогда и только тогда, когда последовательности $a_1c_1, a_2c_2, \dots, a_Nc_N$ и $\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \dots, \frac{1}{c_N}$ пропорциональны (легко убедиться в том, что это равносильно пропорциональности последовательностей $a_1, a_2, \dots, a_N$ и $\frac{1}{c_1^2}, \frac{1}{c_2^2}, \dots, \frac{1}{c_N^2}$).

Коэффициент $C_N$ в неравенстве (7) назовем *константой неравенства* *).

Наиболее интересными неравенствами типа (7) являются такие неравенства, константы которых меньше некоторого числа $C$ при любом $N$: $C_N<C$. Это будет так, если *существует предел*

$$\lim_{N\to\infty}C_N=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{1}{c_N^2}\right)=C,$$

то есть, если *бесконечный ряд*

$$\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}+\dots+\frac{1}{c_N^2}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n^2}$$

*сходится к сумме* $C$ **).

Пример. Положим $c_n=n$, $n=1, 2, \dots, N$.

Тогда неравенство (7) примет вид

$$(a_1+a_2+\dots+a_N)^2\leqslant$$
$$\leqslant C_N(a_1^2+2^2a_2^2+3^2a_3^2+\dots+N^2a_N^2) \quad (8)$$

с константой

$$C_N=1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{N^2}.$$

---

*) Константой потому, что $C_N$ — одно и то же для всех последовательностей $a_1, a_2, \dots, a_N$.

**) О пределах см. статью М. Гервера «20 задач на пределы», «Квант», 1974, № 3; о бесконечных рядах — статью того же автора «От перемены мест слагаемых ...», «Квант», 1974 № 9.

Знак равенства в неравенстве (8) имеет место тогда и только тогда, когда $a_n = \frac{\lambda}{n^2}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, при произвольном $\lambda$.

Известно, что бесконечный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, и что сумма его равна $\frac{\pi^2}{6}$ (это является довольно глубоким фактом, простейшее, вполне элементарное доказательство, которого все же довольно сложно). Это означает, что $\lim\limits_{N\to\infty} C_N = \frac{\pi^2}{6}$, то есть, что $C = \frac{\pi^2}{6}$. Значит, мы можем написать теперь неравенство, справедливое уже для всех $N \geqslant 1$:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_N)^2 < \frac{\pi^2}{6}\left(a_1^2 + 2^2a_2^2 + \ldots + N^2a_N^2\right). \qquad (9)$$

Говорят, что в этом неравенстве константа $\frac{\pi^2}{6}$ — *точная*; это значит, что при достаточно большом значении $N$ отношение его левой и правой частей может, при соответствующем выборе $a_n$, иметь значение, сколь угодно близкое к единице.

В рассмотренном только что примере мы, подобрав соответствующим образом члены $c_n$, вывели из неравенства (7) неравенство (9), константа которого — точная. Однако для нахождения этой константы нам пришлось прибегнуть к суммированию бесконечных рядов. Сейчас же мы элементарно выведем одно новое неравенство, принадлежащее Ф. Карлсону (1934 г.). Оно получается также из неравенства (7), в котором мы на этот раз положим $c_n^2 = t + \frac{n^2}{t}$, $n = 1, 2 \ldots, N$, где $t$ — произвольное положительное число.

Тогда

$$a_1^2c_1^2 + a_2^2c_2^2 + \ldots + a_N^2c_N^2 = tP + \frac{1}{t}Q,$$

где

$$P = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_N^2,$$

$$Q = a_1^2 + 2^2a_2^2 + \ldots + N^2a_N^2.$$

В силу неравенства (7) имеем

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_N)^2 \leqslant C_N\left(tP + \frac{1}{t}Q\right),$$

где константа $C_N$ имеет вид

$$C_N = \frac{1}{t + \frac{1}{t}} + \frac{1}{t + \frac{2^2}{t}} + \ldots + \frac{1}{t + \frac{N^2}{t}} = \frac{t}{t^2 + 1} + \frac{t}{t^2 + 2^2} + \ldots + \frac{t}{t^2 + N^2}.$$

Оказывается, что эту сложную константу, зависящую от произвольной переменной $t$ и натурального индекса $N$, можно элементарным способом оценить сверху.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $OM_0M_N$ (рис. 5) с катетом $OM_0$ длины $t$ и катетом $M_0M_N$ длины $N$. Точки $M_1, M_2, \ldots, M_{N-1}$ на катете $M_0M_N$ расположены так, что они делят его на $N$ отрезков длины единица. Тогда площадь каждого треугольника $OM_{n-1}M_n$, с одной стороны, равна $\frac{1}{2}t$, а с другой —

$$\frac{1}{2}|OM_{n-1}|\cdot|OM_n\cdot\sin\alpha_n = \frac{1}{2}\sqrt{t^2 + (n-1)^2}\sqrt{t^2 + n^2}\cdot\sin\alpha_n,$$

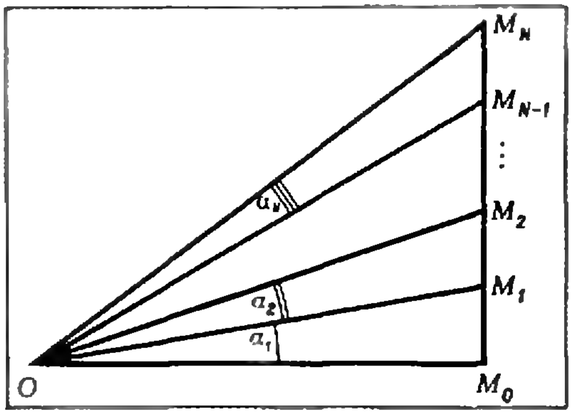


Рис. 5.

где $\alpha_n$ — величина угла между отрезками $OM_{n-1}$ и $OM_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Таким образом, мы можем записать равенство

$$t = \sqrt{t^2+(n-1)^2}\,\sqrt{t^2+n^2}\sin\alpha_n,$$

из которого

$$\sin\alpha_n = \frac{t}{\sqrt{t^2+(n-1)^2}\,\sqrt{t^2+n^2}} > \frac{t}{t^2+n^2},$$

то есть

$$\frac{t}{t^2+n^2} < \sin\alpha_n < \alpha_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Поэтому

$$C_N = \frac{t}{t^2+1} + \frac{t}{t^2+2^2} + \ldots + \frac{t}{t^2+N^2} < \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N < \frac{\pi}{2},$$

и мы получаем неравенство

$$(a_1+a_2+\ldots+a_N)^2 < \frac{\pi}{2}\left(tP + \frac{1}{t}Q\right),$$

справедливое при любом положительном значении $t$.

Положим $t = \sqrt{\frac{Q}{P}}$, при таком выборе $tP + \frac{1}{t}Q = 2\sqrt{PQ}$, и мы получим *неравенство Карлсона*, которое обычно записывают в форме

$$(a_1+a_2+\ldots+a_N)^4 < \pi^2(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_N^2)(a_1^2+2^2a_2^2+\ldots+N^2a_N^2).\text{*)}$$

Неравенство это справедливо при любом $N \geqslant 1$, оно может быть распространено и на бесконечные ряды. В этом неравенстве константа $\pi^2$ — точная, однако простого доказательства этого факта мы привести не можем.

Точность полученной константы $\pi^2$ в неравенстве Карлсона означает, что приведенная выше элементарная оценка $C_N$ через углы $\alpha_n$ — не слишком грубая.

Неравенство Карлсона имеет многочисленные обобщения. Приведем без доказательства только два из них (знак $\Sigma$ означает суммирование по $n$ от 1 до $N$ или же бесконечный ряд, то есть суммирование по $n$ от 1 до $\infty$):

$$(\Sigma a_n)^6 < 54\,(\Sigma a_n^2)\,(\Sigma n a_n^2)\,(\Sigma n^2 a_n^2),$$

$$(\Sigma a_n)^{15} < 300\,000\,(\Sigma a_n^3)\times(\Sigma n a_n^3)\,(\Sigma n^2 a_n^3)\,(\Sigma n^3 a_n^3)\,(\Sigma n^4 a_n^3).$$

В этих неравенствах константы 54 и, соответственно, 300 000 — точные.

**Упражнения**

1. Пусть

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 = 1,$$
$$b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2 = 1.$$

В каких пределах заключено значение выражения

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n?$$

2. Доказать, что для любых положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\times\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

3. Доказать, что

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k)^2 \leqslant k\,(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2).$$

Когда соблюдается равенство?

4. Доказать, что для неотрицательных $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$

$$\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\ldots+\sqrt{a_kb_k} \leqslant \sqrt{a_1+a_2+\ldots+a_k}\times\sqrt{b_1+b_2+\ldots+b_k}.$$

5. *Неравенство Гельдера*

Пусть $p > 1$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ ($p$ и $q$ — рациональные положительные числа). Доказать, что

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k \leqslant \left(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(b_1^q+b_2^q+\ldots+b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

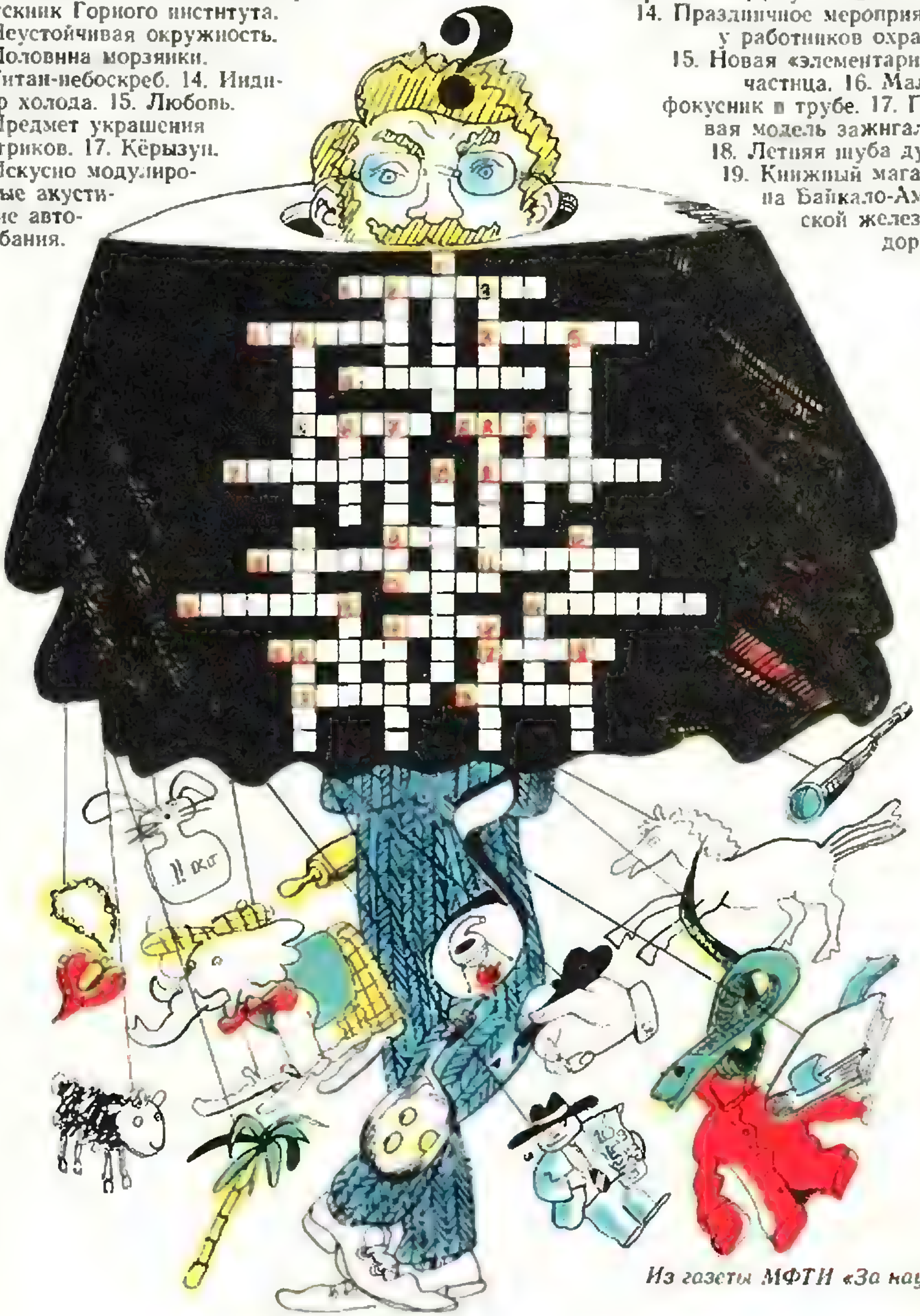
---

*) Изложенный здесь вывод неравенства Карлсона (кроме элементарной оценки $C_N$) принадлежит известному английскому математику Годфри Гарольду Харди (1877—1947).

# Кроссворд

**По вертикали:** 1. Клоун в маске слона. 2. Научная организация труда кустаря-алхимика. 3. Узкий специалист-арифметик. 4. Единица неразборчивости почерка. 5. Змея из бассейна Амазонки. 6. Не тот человек. 7. Вершина эмансипации. 8. Единица поражающего действия фильма «Ну, погоди!». 9. Вымерший обитатель русских лесов. 10. Революционер, выпускник Горного института. 11. Неустойчивая окружность. 12. Половина морзянки. 13. Титан-небоскреб. 14. Индикатор холода. 15. Любовь. 16. Предмет украшения электриков. 17. Кёрызун. 18. Искусно модулированные акустические автоколебания.

**По горизонтали:** 1. Альма-матер бенгальских огней. 2. Отец студентам. 3. Певец ломовых извозчиков. 4. Действие граждан после звонка «01». 5. Продукция Трифона. 6. Армейская болельщица. 7. Женщина-предатель. 8. Пржевальский. 9. Неустойчивый треугольник. 10. Маленький вывод. 11. Курица-мать. 12. Сын барана. 13. Девушка с Запада. 14. Праздничное мероприятие у работников охраны. 15. Новая «элементарная» частица. 16. Малый фокусник в трубе. 17. Первая модель зажигалки. 18. Летняя шуба дуба. 19. Книжный магазин на Байкало-Амурской железной дороге.



*Из газеты МФТИ «За науку»*

В. Майер

# Поучительный опыт с кумулятивной струей

**Мы уже рассказывали о том, как можно наблюдать образование тонкой сильной струи, вызванной концентрацией энергии в определенном направлении (см. статью Г. Покровского «Гидродинамический механизм в падающей пробирке», «Квант», 1974, № 3). Такой эффект называют кумулятивным (от латинского cumulo — собираю), а образовавшуюся струю — кумулятивной.**

**Теперь мы публикуем статью В. Майера, в которой рассказывается еще об одном опыте с кумулятивной струей, а также предлагается несколько экспериментальных задач, связанных с образованием струи в падающей пробирке.**

В простом и изящном опыте профессора Г. И. Покровского струя образуется при ударе о твердую поверхность стола вертикально падающей пробирки (с высоты нескольких сантиметров), частично заполненной водой. Поскольку вода смачивает стекло, поверхность воды в пробирке образует вогнутый мениск. При ударе о стол пробирка и находящаяся в ней вода резко тормозятся, возникают очень большие ускорения, жидкость становится как бы очень тяжелой и ее поверхность выравнивается. Края опускаются вниз, а из центральной части небольшое количество воды выбрасывается в воздух в виде узкого кратковременного фонтанчика.

Мы предлагаем вам поставить аналогичный эксперимент, быть может, еще более поразительный, чем опыт с ударяющейся пробиркой.

Аккуратно отрежьте дно пробирки, так чтобы получилась стеклянная трубка диаметром 15 *мм* и длиной около 100 *мм*. Верхний конец трубки (с отогнутыми краями) затяните тонкой резиновой пленкой от детского надувного шарика. Налейте в трубку воды и, зажав ее открытый конец пальцем, опустите трубку этим концом вниз в стакан с водой. Убрав палец, поднимите трубку до поверхности воды в стакане так, чтобы в нее вошел воздух и в трубке остался слой

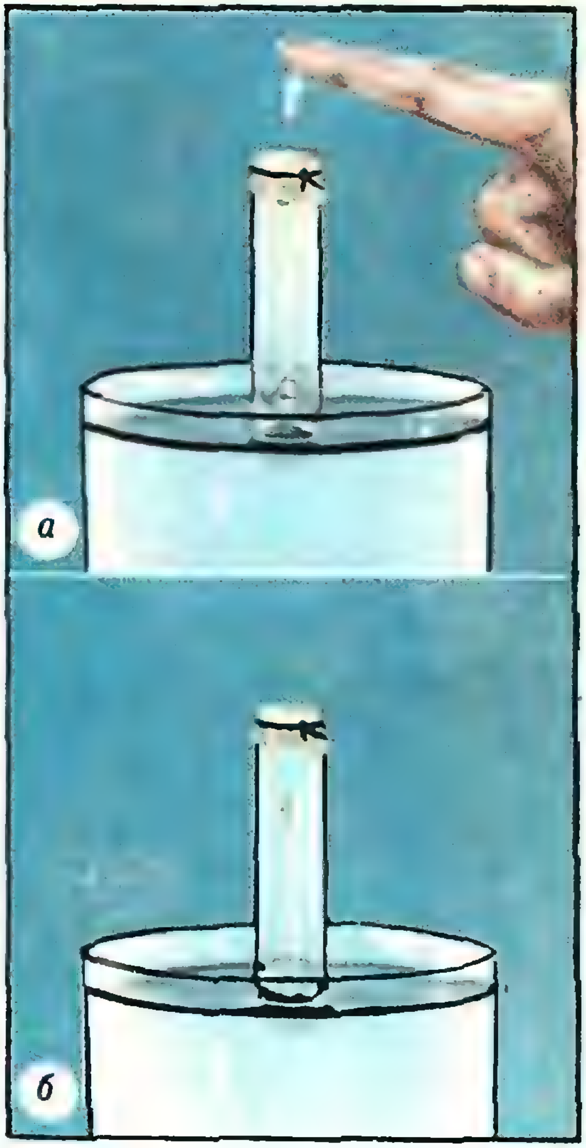


Рис. 1.

воды толщиной примерно 1 *см*. Поверхность воды в трубке должна находиться на одном уровне с поверхностью воды в стакане.

Расположите трубку вертикально и закрепите ее в штативе. Теперь слегка ударьте пальцем по резиновой пленке: немедленно внутри трубки возникнет кумулятивная струя, поднимающаяся до самой пленки!

На рисунках 1 и 2 приведены фотографии опыта, полученные в разные моменты времени для разных ударов, поэтому на них зафиксированы различные фазы образования и разрушения разных кумулятивных струй; на первых двух фотографиях вы видите собственно струю, на остальных — распадение струи на отдельные капли.

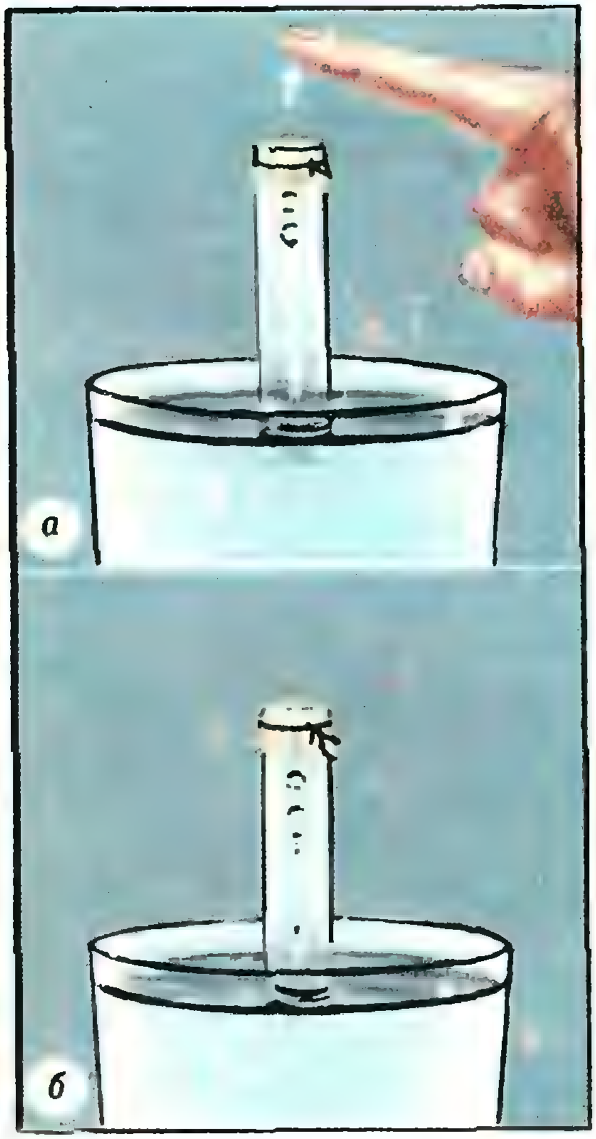


Рис. 2.

Сопоставив этот опыт с экспериментом, описанным Г. И. Покровским, попробуйте объяснить его результат.

Предлагаемый опыт особенно интересен тем, что в нем можно наблюдать сам процесс образования кумулятивной струи. В опыте с падающей пробиркой сделать это гораздо сложнее: глаз не успевает фиксировать явления, происходящие в момент образования струи при ударе пробирки о стол. Тем не менее, мы советуем вам еще раз вернуться к опыту с падающей пробиркой и подробнее исследовать причины образования струи. С этой целью предлагаем вам несколько экспериментальных задач.

1. Выясните, влияет ли форма дна пробирки на образование струи. Может быть, струя возникает за счет фокусировки вогнутым дном появляющейся в воде ударной волны?

Припаяйте к тонкостенной медной трубке жестяное дно любой интересующей вас формы (например, плоское или вогнутое). Опыты, проделанные с получившимися пробирками, покажут, что форма дна на образование струи не влияет. Таким образом, фокусировкой ударной волны объяснить результат опыта нельзя.

2. Обязательно ли жидкость должна смачивать стенки пробирки?

Поместите внутрь стеклянной пробирки небольшой кусочек парафина и расплавьте его на пламени сухого горючего. Вращая удаленную из пламени пробирку, покройте ее изнутри тонким слоем парафина и проведите опыт Г. И. Покровского. В этом случае кумулятивная струя не образуется. Следовательно, смачиваемость стенок пробирки жидкостью является существенным условием опыта.

3. Какие еще опыты можно провести, чтобы получить кумулятивную струю в неподвижной относительно наблюдателя пробирке?

Н. Васильев

# Сложение фигур

По-видимому, каждый из читателей поймет, что от него требуется, если его попросят сложить из трех одинаковых треугольников трапецию или из четырех уголков — уголок вдвое большего размера. Но в нашей заметке пойдет речь о «сложении» совсем другого рода. Суммой двух треугольников у нас будет, как правило, выпуклый шестиугольник, суммой двух одинаковых кругов — круг вдвое большего радиуса, а суммой двух отрезков — параллелограмм. Чтобы отличить операцию, о которой мы будем рассказывать, от обычного «объединения», ее называют «векторной суммой» или «суммой Минковского» — по имени изучившего ее замечательного немецкого математика Германа Минковского (1864—1909). Наиболее интересные применения этого понятия относятся к выпуклым телам в трехмерном и вообще $n$-мерном пространстве. Но мы будем иметь дело главным образом с плоскими фигурами.

Поводом для этой заметки послужила задача М330 из «задачника «Кванта», которую мы здесь решим. Вот ее формулировка.

*На плоскости расположены два выпуклых многоугольника F и G. Обозначим через H множество точек, в которые может попасть середина отрезка, один конец которого принадлежит F, второй — G. Докажите, что H — выпуклый многоугольник.*

*а) Сколько сторон может иметь H, если F имеет их $n_1$, а G — $n_2$?*

*б) Каков может быть периметр H, если периметр F равен $P_1$, а G — $P_2$?*

*в)* Какова может быть площадь H, если площадь F равна $S_1$, а площадь G — $S_2$?*

## § 1. Множество середин

Начнем с разбора более простой задачи.

Задача 1. Даны два отрезка: $[AB]$ и $[CD]$. Найти множество точек, в которые может попасть середина отрезка, один конец которого $P$ лежит на $[AB]$, а другой конец $Q$ — на $[CD]$.

Решение. Рассмотрим сначала общий случай, когда отрезки $[AB]$ и $[CD]$ не параллельны. (Частный случай $[AB]\parallel[CD]$ мы обсудим ниже.) Обозначим середину отрезка $[PQ]$ через $M$. Зафиксируем сначала положение точки $Q$. Если $P$ пробегает весь отрезок $[AB]$, то при этом $M$ пробегает среднюю линию треугольника $QAB$ (рис. 1а)— отрезок с концами в серединах отрезков $[QA]$ и

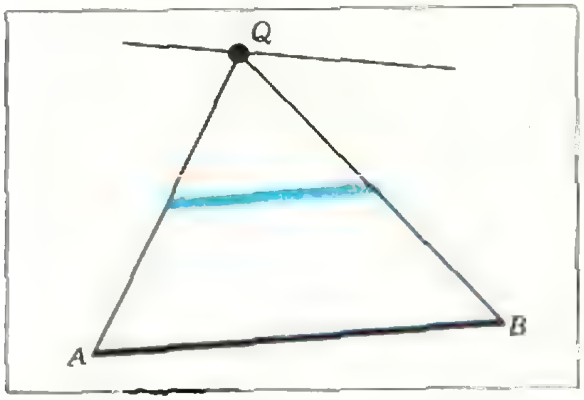


Рис. 1а.

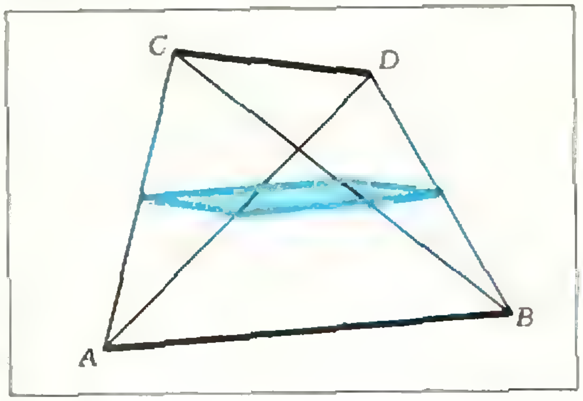


Рис. 1б.

$[QB]$. Если теперь заставить точку $Q$ пройти весь отрезок $[CD]$, то средняя линия треугольника $QAB$, очевидно, заметет целый *параллелограмм* (рис. 1б) — вершинами его будут середины отрезков $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$ и $[BD]$.

Заметим, что если $[AB]$ и $[CD]$ пересекаются, то искомое множество — параллелограмм с вершинами в серединах сторон выпуклого четырехугольника $ACBD$, а если $[AB]$ и $[CD]$ не лежат в одной плоскости, то наш параллелограмм получится в сечении тетраэдра $ABCD$ плоскостью, параллельной $[AB]$ и $[CD]$ и проходящей посередине между ними.

Выясним, во что превратится этот параллелограмм, когда отрезки $[AB]$ и $[CD]$ параллельны. (Можно считать, что они и одинаково направлены.) Если $[AB]$ и $[CD]$ принадлежат различным параллельным прямым, то $ABDC$ — трапеция, а середины $M$ отрезков $PQ$ заполняют среднюю линию этой трапеции (рис. 1в) — *отрезок с концами в серединах отрезков $[AC]$ и $[BD]$*.

Такой же ответ получается и в том случае, когда $[AB]$ и $[CD]$ принадлежат одной прямой. Здесь, чтобы не разбирать различных расположений точек $A$, $B$, $C$, $D$ на прямой, удобно перевести задачу на язык алгебры. Будем считать, что наша прямая — числовая ось, координаты данных точек — $k_A$, $k_B$, $k_C$, $k_D$ ($k_A<k_B$, $k_C<k_D$), и воспользуемся таким фактом: множество чисел $(x_P+x_Q)/2$, где $x_P \in [k_A, k_B]$, $x_Q \in [k_C, k_D]$ — отрезок $[(k_A+k_B)/2, (k_C+k_D)/2]$ (рис. 1 г). Заметим, что длина полученного отрезка равна $(|AB|+|CD|)/2$.

Задача 1 полностью решена. В дальнейшем мы не будем столь пунктуальны в изложении решений и доказательств — многие детали оставлены читателям.

Условимся, что граничные точки всех рассматриваемых фигур (многоугольников, кругов, полуплоскостей) принадлежат этим фигурам. Следующее определение позволит нам избежать повторения слов: «отрезок», «середина», «конец».

Определение 1. Пусть заданы две фигуры F и G (два множества точек на плоскости или в пространстве). Назовем *полусуммой* этих фигур множество всех середин отрезков, один конец которых принадлежит F, а другой — G. Обозначим это множество так: $F*G$.

Пример 1. а) Если и F, и G состоят из одной точки: $F=\{P\}$, $G=\{Q\}$, то $F*G$ — тоже одна точка (середина отрезка $[PQ]$). Будем обозначать ее $P*Q$.

б) Если F — отрезок, G — одна точка ($F=[AB]$, $G=\{Q\}$, рис. 1а), то $F*G$ — отрезок длины $|AB|/2$.

в) Если F и G — параллельные отрезки $[AB]$ и $[CD]$, то $F*G$ — параллельный им отрезок длины $(|AB|+|CD|)/2$ («средняя линия», рис. 1в, 1 г).

г) Если F и G — непараллельные отрезки: $F=[AB]$, $G=[CD]$, то $F*G$ — параллелограмм с вершинами $A*C$, $A*D$, $B*D$, $B*C$ (рис. 1б).

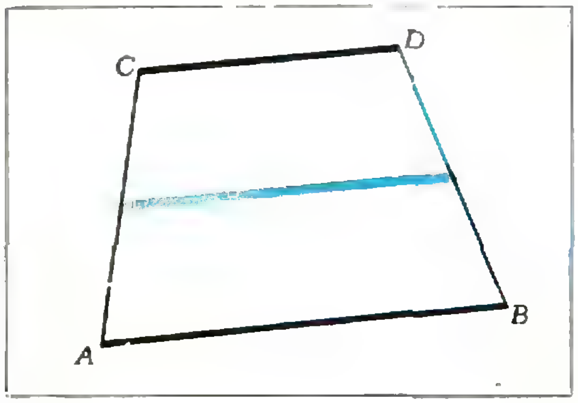


Рис. 1в.

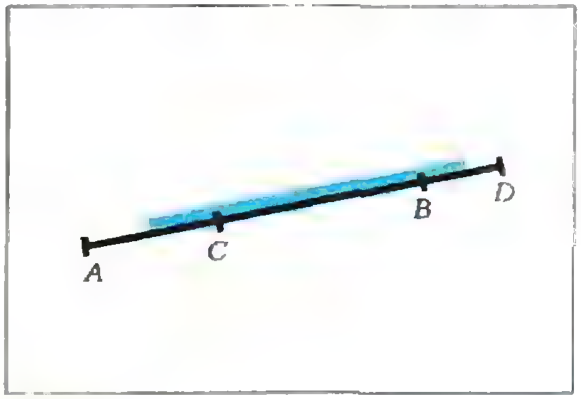


Рис. 1г.

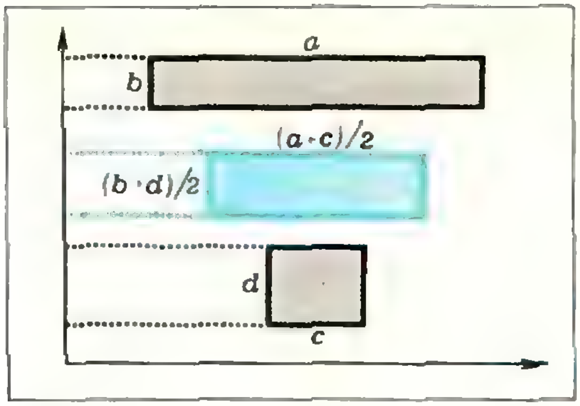


Рис. 2.

Пример 2. Полусумма двух прямоугольников F и G размерами $a \times b$ и $c \times d$, у которых стороны $a$ и $c$ параллельны,— прямоугольник размерами $(a+c)/2 \times (b+d)/2$ (рис. 2).

Действительно, в системе координат $Oxy$, у которой ось $Ox$ параллельна сторонам $a$ и $c$, координаты $x$ точек прямоугольников F и G пробегают отрезки длиной $a$ и $c$, координаты $y$ — отрезки длиной $b$ и $d$, а полусуммы этих координат — отрезки соответственно длиной $(a+c)/2$ и $(b+d)/2$. (Здесь вновь пригодился тот «очевидный факт», который мы использовали в конце решения задачи 1.)

Задача 2. Найдите полусумму следующих двух фигур:

а) двух непараллельно расположенных прямоугольников;

б) правильного треугольника и его стороны;

в) двух треугольников, на которые квадрат разрезается диагональю;

г) квадрата и правильного треугольника, имеющих одну общую сторону;

д) отрезка и круга;

е) двух окружностей разного радиуса;

ж) полуокружности с самой собой;

з) полуокружностей, составляющих вместе окружность;

и) одна фигура — две соседние стороны правильного пятиугольника, другая — три остальные его стороны.

**Решение задачи 2а).** Будем действовать так же, как при решении задачи 1. Зафиксируем точку $P$ прямоугольника F (рис. 3). Тогда множество точек $P * Q$, где $Q$ пробегает G, — прямоугольник $\{P\} * G$, гомотетичный G с коэффициентом 1/2 (и с центром гомотетии $P$). Мы должны теперь взять объединение всех прямоугольников $\{P\} * G$, где $P$ пробегает F. Нетрудно видеть, что нужное объединение F∗G (фигура, заметаемая голубым прямоугольником на рис. 3, когда нижняя синяя вершина пробегает розовый прямоугольник, гомотетичный прямоугольнику F с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$) — выпуклый восьмиугольник, стороны которого параллельны сторонам данных прямоугольников, а по длине равны их половинам.

Сопоставляя задачу 2а) с предшествующим ей примером 2, мы видим, что форма фигуры F∗G может существенно измениться при повороте одной из фигур F или G.

Восемь ответов к пунктам б) — и) задачи 2 в беспорядке приведены на рисунке 4.

Задача 3. Найдите полусумму следующих фигур в пространстве:

а) двух параллельно расположенных прямоугольных параллелепипедов;

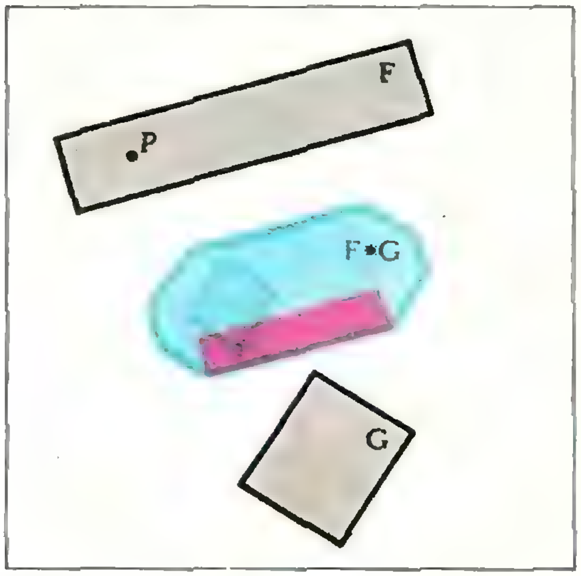


Рис. 3.

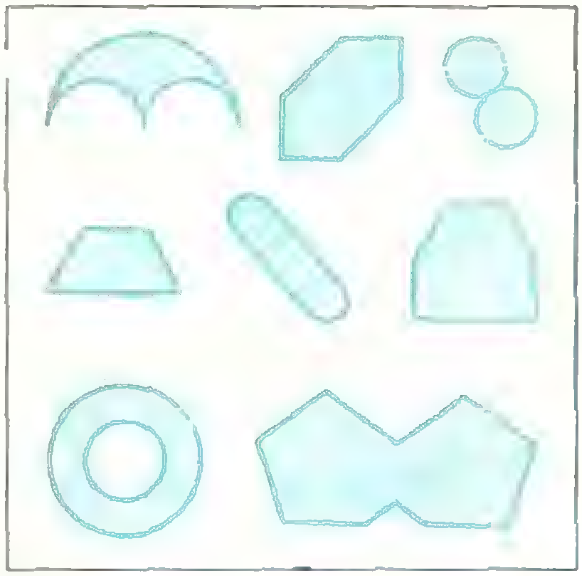


Рис. 4.

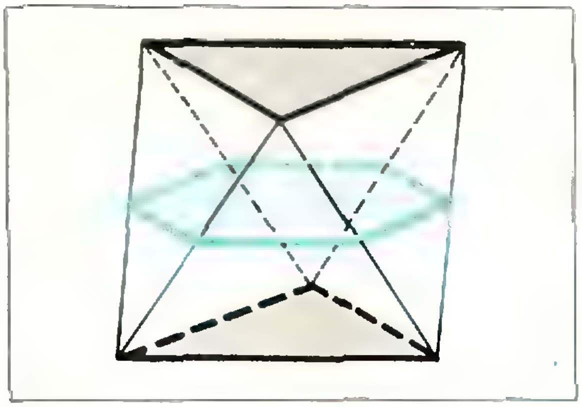


Рис. 5.

б) отрезка и многоугольника, не лежащих в параллельных плоскостях;

в) окружности и шара;

г) двух противоположных граней правильного октаэдра (рис. 5);

д) двух половинок шара, разрезанного диаметральной плоскостью.

## § 2. Полусумма выпуклых многоугольников

Напомним, что множество точек F называется *выпуклым*, если для любых двух точек $P$ и $Q$ из F весь отрезок $[PQ]$ содержится в F.

Возможно, вы заметили, что находить полусумму выпуклых фигур проще, чем не выпуклых, причем *если* F *и* G *— выпуклые фигуры, то* F$*$G *— тоже выпукло.*

Докажем это. Пусть $M_1$ и $M_2$ — произвольные точки из F$*$G. Тогда $M_1 = P_1 * Q_1$, $M_2 = P_2 * Q_2$ при некоторых $P_1 \in F$, $P_2 \in F$, $Q_1 \in G$, $Q_2 \in G$*). Поскольку F и G выпуклы, то $[P_1P_2] \subset F$ и $[Q_1\, Q_2] \subset G$. Тогда $([P_1P_2] * [Q_1\, Q_2]) \subset F * G$. Но, как мы знаем (пример 1), полусумма отрезков — параллелограмм, причем точки $M_1$ и $M_2$ — его вершины (параллелограмм может выродиться в отрезок, содержащий точки $M_1$ и $M_2$). Раз фигура F $*$ G содержит этот параллелограмм, она содержит и отрезок $[M_1\, M_2]$: $F * G \supset ([P_1P_2] * [Q_1\, Q_2]) \supset [M_1\, M_2]$.

Из примеров, встретившихся в задачах 2 а)— и), видно, что полусумма выпуклых многоугольников F и G — многоугольник, стороны которого параллельны сторонам F и G, но вдвое короче. Доказать этот факт (и даже точно его сформулировать) проще всего, представив выпуклый многоугольник как пересечение полуплоскостей.

Будем говорить, что две полуплоскости $\sigma_1$ и $\sigma_2$ имеют *одинаковое направление*, если $\sigma_1 \supset \sigma_2$ или $\sigma_2 \supset \sigma_1$. Разумеется, края таких полуплоскостей $l_1$ и $l_2$ — параллельные прямые, а их полусумма $\sigma_1 * \sigma_2$ — полуплоскость того же направления, края которой — прямая $l_1 * l_2$, расположенная посередине между $l_1$ и $l_2$. (Докажите это аккуратно!)

Назовем полуплоскость $\sigma_F$ *опорной* для многоугольника F, если $\sigma_F \supset F$ и пересечение F с граничной прямой $l_F$ полуплоскости $\sigma_F$ непусто. Это пересечение $l_F \cap F$ назовем *опорным* множеством. Ясно, что для каждого *направления* $\sigma$ есть своя опорная полуплоскость. Соответствующее ей опорное множество — либо одна точка (вершина многоугольника), либо отрезок (сторона многоугольника). Опорное множество мы обозначим $F_\sigma$.

Пусть F и G — два выпуклых многоугольника, $\sigma_F$ и $\sigma_G$ — их опорные полуплоскости одного и того же направления, $F_\sigma$ и $G_\sigma$ — соответствующие опорные множества. Легко найти опорное множество того же направления для полусуммы F $*$ G: *оно равно полусумме опорных множеств* $F_\sigma$ *и* $G_\sigma$, *то есть*

$$(F * G)_\sigma = F_\sigma * G_\sigma.$$

Действительно (рис. 6), середина $M$ любого отрезка $PQ$, где $P \in F$, $Q \in G$, лежит в полуплоскости $\sigma_F * \sigma_G = \sigma_{F*G}$, причем на граничную прямую полуплоскости $\sigma_{F*G}$ точка $M$ может попасть в том и только в том случае, если одновременно $P \in F_\sigma$ и $Q \in G_\sigma$.

---

*) Мы используем обычные обозначения: $F \cap G$ — пересечение фигур F и G, $F \cup G$ — их объединение, $G \subset F$ (или $F \supset G$) означает, что G содержится в F, $P \in F$ — что точка $P$ принадлежит F.

Теперь мы можем сформулировать удобное правило, позволяющее найти полусумму $F * G$ выпуклых многоугольников $F$ и $G$.

*Нужно рассмотреть каждое такое направление $\sigma$, для которого хотя бы одно из соответствующих опорных множеств $F_\sigma$ и $G_\sigma$ является отрезком (стороной $F$ или $G$), и построить полусумму $F_\sigma$ и $G_\sigma$ — отрезок $F_\sigma * G_\sigma$ (пользуясь примерами 1б), в)). Объединение всех этих отрезков $F_\sigma * G_\sigma$ по разным направлениям $\sigma$ — граница фигуры $F * G$.*

Применение этого правила иллюстрирует рисунок 6, где каждому из направлений $\sigma$ соответствует свой цвет. Ясно, что опорные множества $F_\sigma$, $G_\sigma$, а значит, и $(F * G)_\sigma = F_\sigma * G_\sigma$ для остальных «промежуточных» направлений состоят из отдельных точек (вершин соответствующих многоугольников). Мы уже доказали, что фигура $F * G$ выпукла. Теперь, найдя ее границу, мы видим, что $F * G$ — выпуклый многоугольник, причем направления его сторон — те же, что у $F$ и $G$.

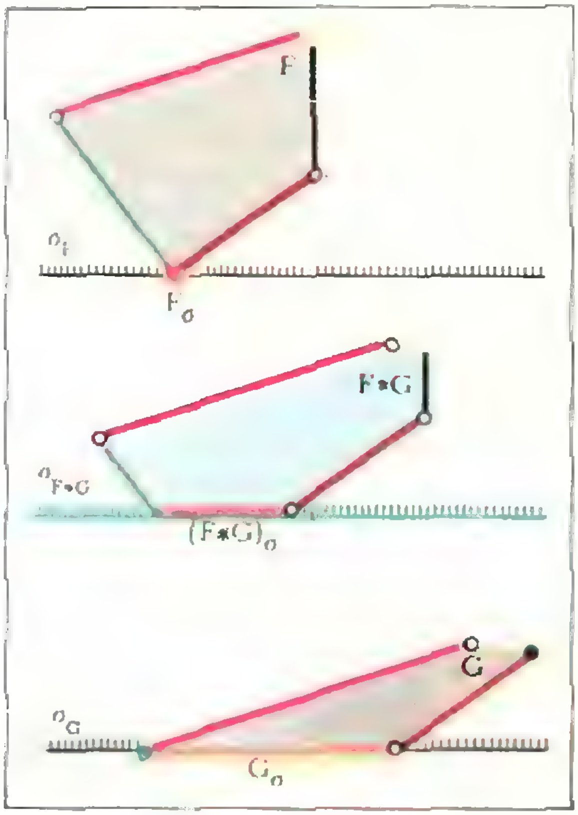


**Рис. 6.**

Задача 4. а) Докажите, что если $\sigma$ и $\tau$ — полуплоскости разных направлений, то $\sigma * \tau$ — вся плоскость.

б) Попробуйте решить задачи 2а) — г), пользуясь правилом, сформулированным выше.

в) Приведите пример пятиугольника $F$ и треугольника $G$, для которых $F * G$ имеет 5, 6, 7 и 8 сторон.

Теперь уже легко дать ответы на вопросы а) и б) задачи М330:

*а) количество сторон полусуммы $n_1$-угольника и $n_2$-угольника может быть любым числом, которое не больше $n_1 + n_2$ и не меньше, чем наибольшее из чисел $n_1$, $n_2$;*

*б) периметр $F * G$ равен полусумме периметров $F$ и $G$**).

Найти ответ на вопрос в) задачи М330 и обосновать его намного труднее. Мы узнаем его в § 4. А пока расскажем о том, что такое *сумма* и *линейная комбинация* фигур.

## § 3. Суммы и линейные комбинации фигур

Мы очень много раз использовали слово «полусумма» и заменяющий его значок $*$. Пора сказать, что такое *сумма* двух фигур.

Зафиксируем некоторую точку $O$ (*начало отсчета* или *полюс*).

Определение 2. Множество всех концов $M$ векторов

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ},$$

где $P$ и $Q$ — произвольные точки фигур $F$ и $G$ соответственно, называется *суммой* (или *суммой Минковского*) фигур $F$ и $G$ (рис. 7). Сумма $F$ и $G$ обозначается $F + G$.

Определение 3. Множество всех концов $M$ векторов

$$\overrightarrow{OM} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP},$$

где $P$ — произвольная точка фигуры $F$, $\lambda$ — данное положительное число, называется *произведением* $F$ на $\lambda$ (рис. 8). Эта фигура обозначается $\lambda F$.

---

*) Действительно, если длину точки считать равной 0, то длина $(F*G)_\sigma$ равна полусумме длин $F_\sigma$ и $G_\sigma$ для каждого направления $\sigma$.

Пример 3. «Полусумма» $F*G$ (определение 1) есть как раз $\frac{1}{2}(F_1+F_2)$: ведь условие $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\right)$ означает, что $M$ — середина отрезка $[PQ]$.

Фигуру $\lambda F+\mu G$, где $\lambda$ и $\mu$ — положительные числа, мы будем называть *линейной комбинацией* фигур F и G.

Пример 4. Линейная комбинация $\lambda F+\mu G$ прямоугольников $a\times b$ и $c\times d$, у которых стороны $a$ и $c$ параллельны (как в примере 2),— прямоугольник $(\lambda a+\mu c)\times(\lambda b+\mu d)$.

Задача 5. Как выглядят линейные комбинации $\lambda F+\mu G$ тех фигур F и G, полусуммы которых требовалось найти в задачах 2—4?

Задача 6. Докажите следующие свойства введенных операций:

1°) $F_1+F_2=F_2+F_1$;

2°) $(F_1+F_2)+F_3=F_1+(F_2+F_3)$;

3°) $\lambda(\mu F)=(\lambda\mu)F$;

4°) $\lambda(F_1+F_2)=\lambda F_1+\lambda F_2$;

5°) если $F_1\subset F_2$, $G_1\subset G_2$, то $\lambda F_1+\mu G_1\subset\lambda F_2+\mu G_2$;

6°) $\lambda F+\mu F\supset(\lambda+\mu)F$; если F выпукло, то $\lambda F+\mu F=(\lambda+\mu)F$;

7°) $\lambda(F\cup G)=\lambda F\cup\lambda G$ и $H+(F\cup G)=(H+F)\cup(H+G)$;

8°) $\lambda(F\cap G)=\lambda F\cap\lambda G$ и $H+(F\cap G)\subset\subset(H+F)\cap(H+G)$;

9°) если F и G — выпуклые многоугольники на плоскости периметров $P_F$ и $P_G$, то $\lambda F+\mu G$ — выпуклый многоугольник периметра $\lambda P_F+\mu P_G$;

10°) если $\lambda+\mu=1$, то линейная комбинация $\lambda F+\mu G$ не зависит от того, в какой точке $O$ помещен «полюс».

Вообще говоря, при другом выборе полюса $O$ и при параллельном переносе данных фигур F и G линейная комбинация $\lambda F+\mu G$ меняется, но не существенно — она просто подвергается параллельному переносу. Таким образом, если условиться две фигуры, получающиеся друг из друга параллельными переносами, не различать, считать *эквивалентными*, то можно не указывать, где выбран полюс — результат $\lambda F+\mu G$ будет однозначно определен.

Заметим, что любая линейная комбинация $\lambda F+\mu G$ фигур F и G получается из «*нормированной*» комбинации $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}F+\frac{\mu}{\lambda+\mu}G$ (такой, у которой сумма коэффициентов равна 1) умножением на число $(\lambda+\mu)$, то есть просто гомотетией. Таким образом, линейные комбинации с $\lambda+\mu\neq 1$ не дадут новых по форме фигур.

Опишем один способ представить себе все нормированные линейные комбинации двух выпуклых многоугольников F и G. Перенесем один из них (не поворачивая) в параллельную плоскость и построим «выпуклую оболочку» F и G — выпуклый многогранник, все вершины которого совпадают с вершинами F и G (например, правильный октаэдр на рисунке 5 — выпуклая оболочка верхнего и нижнего треугольников; его «среднее сечение» — полусумма этих треугольников). Тогда сечения этого многогранника плоскостями, параллельными F и G, дадут как раз линейные комбинации $\lambda F+\mu G$, где $\lambda+\mu=1$; отношение $\lambda/\mu$ равно отношению расстояний от секущей плоскости до плоскостей F и G.

Следующие пять задач с разных сторон иллюстрируют понятие «суммы Минковского».

Задача 7. Из точки $O$, лежащей на границе полуплоскости, внутрь полуплоскости направлено $n$ векторов длины 1. Дока-

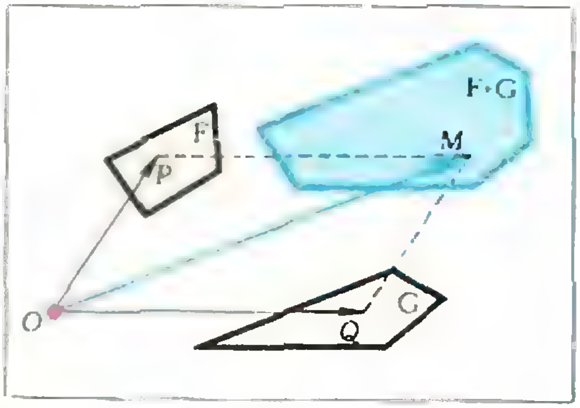


Рис. 7.

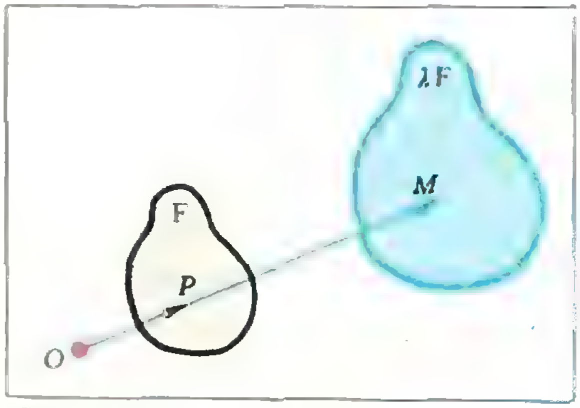


Рис. 8.

жите, что если $n$ нечетно, то длина их суммы не меньше 1.

**Задача 8.** Пусть F — выпуклый многоугольник, $S$ — его площадь, $P$ — периметр, K — круг радиуса 1 с центром $O$. Докажите, что площадь фигуры $F+\rho K$ ($\rho$-окрестности многоугольника F) равна $S+\rho P+\rho^2\pi$. Напишите аналогичную формулу для объема $\rho$-окрестности выпуклого многогранника.

**Задача 9.** Докажите, что следующие три свойства выпуклого многоугольника F эквивалентны: (1) F имеет центр симметрии; (2) F можно разрезать на параллелограммы; (3) F есть сумма нескольких отрезков.

**Задача 10.** Докажите, что следующие два свойства выпуклого многогранника эквивалентны: (1) все грани F — параллелограммы; (2) F есть сумма нескольких отрезков, никакие три из которых не параллельны одной плоскости. Сколько граней имеет такой многогранник, если количество отрезков — $k$?

**Задача 11.** От незагашенного окурка в одной точке загорелся лес. Ветер дул в течение времени $t_1$ со скоростью $\vec{v}_1$, затем $t_2$ — со скоростью $\vec{v}_2$, ..., $t_n$ — со скоростью $\vec{v}_n$. Пожар распространяется от загоревшихся участков со скоростью ветра (причем эти участки продолжают гореть). Какой участок выгорел за это время? А если пожар, кроме того, распространяется равномерно по всем направлениям со скоростью $\vec{u}$? (А. Савин)

## § 4. Площадь суммы фигур

Площадь фигуры F будем обозначать через $S_F$. Теорема о площадях гомотетичных фигур гласит:

$$S_{\lambda F}=\lambda^2 S_F. \qquad (1)$$

Посмотрим, что можно сказать о площади суммы и, вообще, линейной комбинации двух фигур. Начнем с частного случая, когда F и G — прямоугольники $a\times b$ и $c\times d$, причем стороны длины $a$ и $c$ параллельны. Тогда $\lambda F+\mu G$ — прямоугольник $(\lambda a+\mu c)\times(\lambda b+\mu d)$ и

$$S_{\lambda F+\mu G}=(\lambda a+\mu c)(\lambda b+\mu d)=$$
$$=\lambda^2ab+\mu^2cd+\lambda\mu(ad+bc)\geqslant$$
$$\geqslant\lambda^2ab+\mu^2cd+2\lambda\mu\sqrt{abcd}=$$
$$=\left(\lambda\sqrt{ab}+\mu\sqrt{cd}\right)^2,$$

то есть

$$S_{\lambda F+\mu G}\geqslant\left(\lambda\sqrt{S_F}+\mu\sqrt{S_G}\right)^2 \qquad (2)$$

(мы воспользовались неравенством $p+q\geqslant2\sqrt{pq}$). Получить какие-то еще, кроме неравенства (2), ограничения на величину $S_{\lambda F+\mu G}$ при заданных $S_F$ и $S_G$ нельзя. Действительно, положив в (2) $b=a$, $c=ke$, $d=e/k$ ($k$ — какое-то положительное число), мы получим: $S_F=a^2$, $S_G=e^2$,

$$S_{\lambda F+\mu G}=\lambda^2a^2+$$
$$+\mu^2e^2+\lambda\mu ae\left(k+\frac{1}{k}\right)=$$
$$=(\lambda a+\mu e)^2+\left(k+\frac{1}{k}-2\right)\lambda\mu ae.$$

При фиксированных $a$, $e$ и $\lambda$, $\mu$ вторая скобка принимает любое неотрицательное значение (в зависимости от $k$), поэтому $S_{\lambda F+\mu G}$ может принять любое значение, не меньшее $\left(\lambda\sqrt{S_F}+\mu\sqrt{S_G}\right)^2$.

Теперь мы можем, наконец, привести ответ на вопрос в) задачи М330: *площадь полусуммы выпуклых многоугольников площадей $S_1$ и $S_2$ может принимать любое значение, большее или равное $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2/4$.*

Тот факт, что меньшее значение площадь полусуммы принимать не может, вытекает из следующей замечательной теоремы.

**Теорема Брунна — Минковского.** *Неравенство (2) выполнено для любых двух выпуклых фигур F, G и любых положительных чисел $\lambda$, $\mu$.*

**Доказательство.** Прежде всего, используя соображения подобия и формулу (1), легко свести дело к случаю, когда площади данных фигур равны, а линейная комбинация — нормированная. Для этого случая неравенство (2) выглядит очень просто:

*если* $S_F=S_G=S$ *и* $\lambda+\mu=1$, *то*

$$S_{\lambda F+\mu G}\geqslant S. \qquad (3)$$

Покажем, как из (3) выводится неравенство (2) для любых F, G, $\lambda$ и $\mu$. Рассмотрим вместе с F и G гомотетичные им фигуры площади $S$:

$$F^*=\sqrt{S/S_F}\,F,\qquad G^*=\sqrt{S/S_G}\,G.$$

Тогда

$$\lambda F+\mu G=\lambda\sqrt{S_F/S}\;F^*+$$
$$+\mu\sqrt{S_G/S}\;G^*=\left(\lambda\sqrt{S_F/S}+\right.$$
$$\left.+\mu\sqrt{S_G/S}\right)(\lambda^*F^*+\mu^*G^*),$$

где $\lambda^*+\mu^*=1$. Применяя (3) к $\lambda^*F^*+\mu^*G^*$ и пользуясь еще раз (1), получим (2):

$$\sqrt{S_{\lambda F+\mu G}}\geqslant\left(\lambda\sqrt{S_F/S}+\right.$$
$$\left.+\mu\sqrt{S_G/S}\right)\sqrt{S}=\lambda\sqrt{S_F}+\mu\sqrt{S_G}.$$

Вот основное соображение, используемое при доказательстве неравенства (3). Если фигура F разбита горизонтальной прямой $l$ на две части: верхнюю $F_в$ и нижнюю $F_н$, и аналогично, G другой горизонтальной прямой $m$ разделена на две части $G_в$ и $G_н$, то множества $\lambda F_в+\mu G_в$ и $\lambda F_н+\mu G_н$ не налегают друг на друга: первое лежит выше прямой $\lambda l+\mu m$, второе — ниже.

Теперь доказательство в двух словах можно закончить так.

Разобьем многоугольники F и G на $N$ узких горизонтальных полосок и занумеруем их по порядку сверху вниз: $F_1\cup F_2\cup\ldots\cup F_N=F$, $G_1\cup G_2\cup\ldots\cup G_N=G$. Каждую полоску можно считать прямоугольником площади $S/N$ (если $N$ велико, это «с точностью до сколь угодно малого $\varepsilon$» не влияет на площади фигур F, G и $\lambda F+\mu G$). Но для прямоугольников с параллельными сторонами основное неравенство (2) уже доказано, поэтому площадь каждой из полосок $\lambda F_i+\mu G_i$, $i=1,2,\ldots,N$ (мы складываем лишь полоски с одинаковыми номерами!), не меньше $S/N$. А поскольку эти $N$ полосок не налегают друг на друга и, разумеется, содержатся в $\lambda F+\mu G$, то площадь $S_{\lambda F+\mu G}$ не меньше $S$.

Итак, неравенство Брунна — Минковского доказано. Приведем здесь только одно его следствие. Это — знаменитая изопериметрическая теорема: *площадь любой фигуры с периметром $P$ не больше, чем площадь круга с длиной окружности $P$*. Докажем ее для выпуклого многоугольника F. Используя обозначения и результат задачи 8, применим к сумме F + K (K — круг единичного радиуса) неравенство Брунна. Получим:

$$\sqrt{S+P+\pi}\geqslant\sqrt{S}+\sqrt{\pi},$$

или, после упрощений, $S\leqslant P^2/4\pi$. Это и есть нужное неравенство!

Задача 12. а) Докажите, что для площадей линейной комбинации двух выпуклых многоугольников верна формула $S_{\lambda F+\mu G}=S_F\lambda^2+2S_{F,G}\lambda\mu+S_G\mu^2$, где число $S_{F,G}$ зависит только от F и G (это число называется *смешанной площадью* фигур F и G). Найдите $S_{F,G}$ для фигур F, G из задач 2а) — д).

б) Докажите, что всегда $S^2_{F,G}\geqslant S_FS_G$, причем равенство имеет место, только если многоугольники F и G гомотетичны.

Задача 13. Докажите, что неравенство (2) верно для произвольных фигур (не обязательно выпуклых). Подумайте, как сформулировать и доказать аналогичную теорему для объемов пространственных фигур.

В заключение нашего беглого знакомства с суммой Минковского перечислим некоторые книги и статьи, в которых рассказано о сложении фигур, применении этой операции к теории выпуклых множеств, в частности, о различных доказательствах неравенства Брунна — Минковского, его обобщениях и геометрических следствиях.

И. М. Яглом, В. Г. Болтянский. «Выпуклые фигуры» (книга из серии «Библиотека математического кружка», вып. 4). Гостехтеориздат, 1951 г.

Л. А. Люстерник. «Выпуклые фигуры и многоугольники». Гостехтеориздат, 1956 г.

Б. Н. Делоне. Доказательство неравенства Брунна — Минковского. «Успехи математических наук», вып. II (1936 г.).

Н. Б. Васильев. Семейство параллельных $n$-угольников. «Квант», №11, 1974 г.; решение задачи М295, «Квант», № 6, 1975г.

Г. Хадвигер. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М., «Наука», 1966 г.

# задачник кванта

## Задачи

### М376—М380; Ф388—Ф392

**Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 июня 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, ул. Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М376» или «...Ф388». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).**

**После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.**

**М376.** а) В ряд расположено 30 клеток. На самой правой клетке стоит белая фишка, на самой левой — черная. Каждый из двух играющих по очереди передвигает свою фишку на одно поле — вперед или назад. (Пропускать ход нельзя.) Проигравшим считается тот, у кого нет хода. Кто выигрывает: начинающий или его партнер?

б) Решите задачу, заменив в условии 30 на $N$.

*А. Талалай*

**М377.** Дан треугольник $ABC$. Найти на стороне $AC$ такую точку $D$, чтобы периметр треугольника $ABD$ равнялся длине стороны $BC$.

*С. Охитин*

**М378.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде

а) $x^3+y^3+z^3$, где $x$, $y$, $z$ — целые числа;

б)* $x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n$, где $x_1,\ldots,x_n$ — целые числа.

в)* Докажите, что любое рациональное число можно представить в виде $x^3+y^3+z^3$, где $x$, $y$, $z$ — рациональные числа.

*В. Колосов*

**М379.** На каждом из нескольких кусков бумаги произвольной формы поставлена клякса (произвольной формы). Назовем промокашку подходящей для данного куска, если ее можно разместить внутри этого куска так, что она закроет кляксу. Пусть набор промокашек, имеющих форму кругов разных радиусов, обладает таким свойством: для произвольных двух данных кусков найдется промокашка, подходящая для каждого из них. Докажите, что тогда в этом наборе найдется одна промокашка, подходящая для всех кусков.

*В. Произволов*

**М380*** а). На плоскости дана выпуклая фигура и внутри нее — точка $O$. К каждой прямой $l$, проходящей через точку $O$, проводится перпендикуляр в точке $O$ и на нем по обе стороны от точки $O$ откладываются два отрезка, длины которых равны длине отрезка, получающегося при пересечении данной фигуры с прямой $l$. Объединение всех этих от-

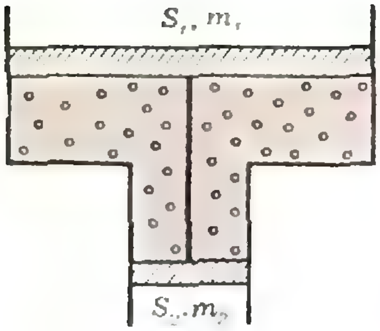


Рис. 1.

резков — новая фигура с центром симметрии $O$. Будет ли полученная фигура выпуклой?.

б) В пространстве дано выпуклое центрально-симметричное тело с центром $O$. К каждой плоскости $\alpha$, проходящей через точку $O$, проводится перпендикуляр в точке $O$ и на нем по обе стороны от этой точки $O$ откладываются два отрезка, длины которых равны площади сечения данного тела плоскостью $\alpha$. Объединение всех этих отрезков — новое тело с тем же центром симметрии $O$. Докажите, что полученное тело тоже выпуклое.

*С. Пухов*

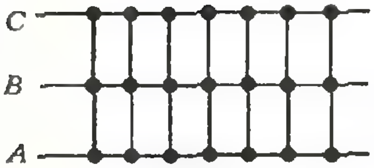


Рис. 2.

**Ф388.** В расположенном вертикально цилиндре переменного сечения (рис. 1) между поршнями находится $n$ молей воздуха. Массы поршней — $m_1$ и $m_2$, их площади — $S_1$ и $S_2$ соответственно. Поршни соединены стержнем длины $l$ и находятся на одинаковых расстояниях от стыка частей цилиндра с различными диаметрами. На сколько сместятся поршни при повышении температуры в цилиндре на $\Delta t$ градусов?

*Е. Кузнецов*

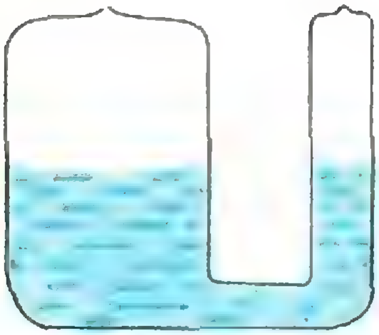


Рис. 3.

**Ф389.** Найти сопротивление между точками $A$ и $B$ и точками $A$ и $C$ бесконечной цепочки, показанной на рисунке 2. Сопротивление проволочек между узлами схемы 1 *ом*.

**Ф390.** Два запаянных сообщающихся сосуда цилиндрической формы разных диаметров частично заполнены водой (ртутью) (рис. 3). Воздух из сосудов откачан, так что над жидкостью имеются только ее пары. Как распределится количество жидкости в сосудах а) на земле? б) в невесомости?

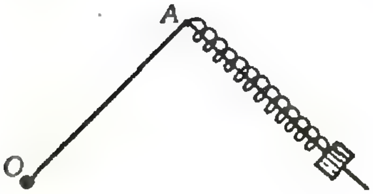


Рис. 4.

**Ф391.** Гладкий Г-образный стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец стержня $O$. Маленькая муфта массы $m$ прикреплена к стержню в точке $A$ с помощью пружины жесткостью $k$ (рис. 4). Длина пружины в 1,2 раза больше ее длины в нерастянутом состоянии. С какой угловой скоростью вращается стержень?

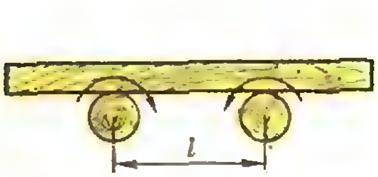


Рис. 5.

**Ф392.** Доска массы $M$ расположена горизонтально и опирается на два вращающихся цилиндра (рис. 5). Расстояние между осями цилиндров $l$. Коэффициент трения между доской и цилиндрами $k$. Доказать, что если доску, находящуюся в положении равновесия, слегка толкнуть в горизонтальном направлении, она будет совершать гармонические колебания, и найти период этих колебаний. Каким будет движение доски, если изменить направление вращения цилиндров на противоположное?

# Решения задач

## М336, М337, М339; Ф348—Ф352

**М336.** *В плоскости дано конечное множество многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, которая имеет общую точку с каждым из этих многоугольников.*

Спроектируем все многоугольники на какую-нибудь горизонтальную прямую $m$. Проекцией каждого многоугольника будет отрезок. Среди правых концов этих отрезков выберем самый левый (пусть это будет правый конец $A$ проекции многоугольника $M$ — см. рисунок 1) и проведем через него прямую $l$, перпендикулярную прямой $m$. Прямая $l$ пересекает все многоугольники, так как никакой многоугольник не может лежать целиком левее нее (тогда правый конец его проекции был бы левее $A$), и никакой не может лежать целиком правее (так как тогда он не имел бы общих точек с многоугольником $M$).

*С. Фомин*

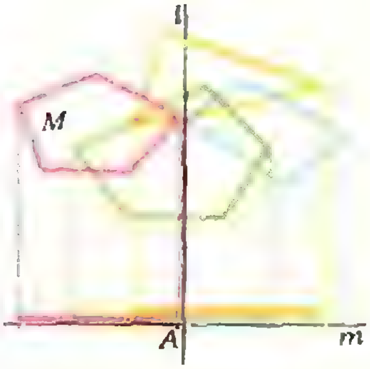


Рис. 1.

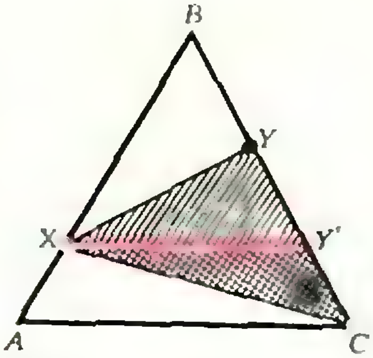


Рис. 2.

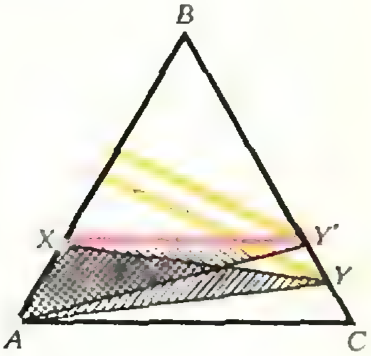


Рис. 3.

◆

**М337.** *Дан равносторонний треугольник $ABC$ со стороной длины 1. Первый игрок выбирает точку $X$ на стороне $AB$, второй — точку $Y$ на стороне $BC$, затем первый — точку $Z$ на стороне $AC$.*

*а) Цель первого игрока — получить треугольник $XYZ$ наибольшей площади, второго — наименьшей площади. Какую наибольшую площадь может обеспечить первый?*

*б) Цель первого игрока — получить треугольник $XYZ$ наименьшего периметра, второго — наибольшего периметра. Какой наименьший периметр может обеспечить первый?*

а) Докажем сначала, что наилучшая стратегия второго игрока — поставить точку $Y$ на стороне $BC$, так, чтобы прямая $XY$ оказалась параллельной стороне $AC$. Действительно, если $(XY') \parallel (AC)$, а $Y \in [BY']$ (см. рис. 2), то первый игрок своим вторым ходом поставит точку $Z$ в вершину $C$; тогда $S_{XYC} > S_{XY'C}$, так как у этих треугольников высота одна и та же, а основание первого больше. Если же $Y \in [Y'C]$, то первый игрок поставит точку $Z$ в вершину $A$, и опять будет $S_{XYA} > S_{XY'A}$, поскольку у этих треугольников одно и то же основание, а высота у треугольника $XYA$ больше (рис. 3).

Поэтому $(XY) \parallel (AC)$, и от того, где на $[AC]$ первый игрок поставит точку $Z$, уже ничего не зависит:

$$S_{XYZ} = S_{XYA} = \frac{1}{2} \cdot |XY| \cdot (H - h),$$

(здесь $H = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — высота треугольника $ABC$, $h$ — высота треугольника $XBY$). Выразив $|XY|$ через $h$, получим, что

$$S_{XYZ}(h) = \frac{\sqrt{3}(hH - h^2)}{3},$$

то есть искомая площадь является квадратным трехчленом от $h$. Этот трехчлен принимает максимальное значение $\frac{H^2\sqrt{3}}{12} =$

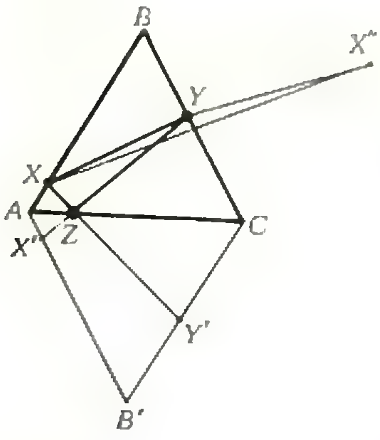


**Рис. 4.**

$= \frac{\sqrt{3}}{16}$, когда $h = \frac{H}{2}$, то есть когда первый игрок ставит точку $X$ на середине стороны $AB$.

*б*) Покажем, что в этом случае наилучшая стратегия второго игрока — поместить точку $Y$ в вершины $B$ или $C$ треугольника $ABC$. Предположим, что второй игрок поместил точку $Y$ внутри $[BC]$. Пусть $X'$, $Y'$ и $B'$ — точки, симметричные точкам $X$, $Y$ и $B$ относительно $(AC)$, а $X''$ — точка, симметричная $X'$ относительно $(BC)$ (рис. 4). Поскольку $|XZ| = |X'Z|$, то точку $Z$ первый игрок должен поставить в точку пересечения отрезков $AC$ и $X'Y$. Цель второго игрока — сделать максимальной величину $|XY| + |XZ| + |YZ| = |XY| + |X'Y| = |XY| + |X''Y|$. Но если точка $Y$ — не в вершине $B$, причем $Y$ и $B$ лежат по одну сторону от прямой $XX''$ (как на рисунке 4), то $|XY| + |X''Y| < |XB| + |X''B|$ (поскольку длина объемлющей ломаной больше); поэтому второму игроку, конечно же, нужно ставить точку $Y$ в вершину $B$. Если же точки $Y$ и $B$ лежат по разные стороны от прямой $XX''$ и точка $Y$ — не в вершине $C$ (см. рис. 5), то $|XY| + |X''Y| < |XC| + |X''C|$; следовательно, при правильной игре второй игрок не поставит точку $Y$ внутрь отрезка $BC$.

Итак, мы доказали, что второй игрок поставит точку $Y$ или в вершину $B$, или в вершину $C$.

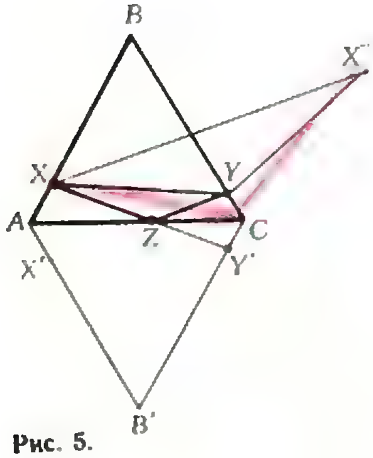


**Рис. 5.**

Если точка $Y$ — в вершине $C$, то первый игрок своим вторым ходом поставит точку $Z$ тоже в $C$, и тогда периметр «треугольника $XYZ$», вырождающегося в данном случае в отрезок $XC$, равен $2|XC|$. Если же точка $Y$ — в вершине $B$, то точка $Z$ должна быть поставлена в точку пересечения отрезков $AC$ и $XB'$, где $B'$ — точка, симметричная точке $B$ относительно $(AC)$, поскольку именно такому положению точки $Z$ отвечает треугольник $XBZ$ *наименьшего* периметра $|XB| + |XB'|$.

Теперь заметим, что величина $|XC|$ убывает при приближении точки $X$ к середине $D$ стороны $AB$, а сумма $|XB| + |XB'|$ убывает при приближении точки $X$ к точке $B$. Значит, точка $X$ должна лежать где-то на отрезке $DB$. Покажем, что если существует на $[DB]$ такая точка $E$, что $2|CE| = |EB| + |EB'|$, то первый игрок должен поставить точку $X$ именно в эту точку. В самом деле, при смещении $X$ от точки $E$ к точке $B$ второй игрок ставит точку $Y$ в вершину $C$, увеличивая тем самым периметр $\triangle XYZ$, равный $2|XC|$ (по сравнению с $2|EC|$). Если же первый игрок сместит точку $X$ от точки $E$ ближе к точке $D$, то второй игрок, поставив точку $Y$ в вершину $B$, снова увеличит периметр $\triangle XYZ$, равный $|XB| + |XB'|$ (по сравнению с периметром $\triangle EBZ$).

Поэтому нужно проверить существование точки $E \in [DB]$, для которой $2|EC| = |EB| + |EB'|$.

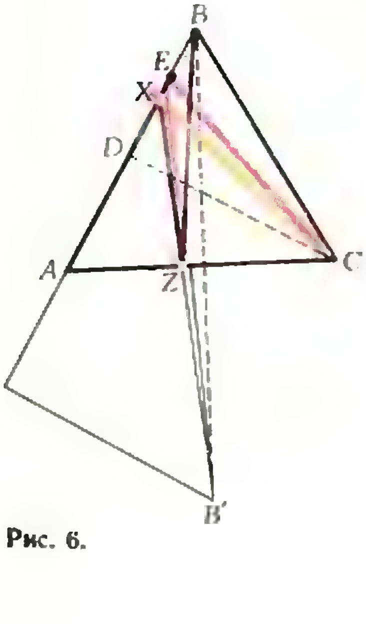


**Рис. 6.**

Обозначим $|AE|$ через $x$; $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$. Тогда

$$|EC| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \quad |EB| = 1 - x,$$

$$|EB'| = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

(см. рис. 6), и мы получаем уравнение:

$$2\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 - x + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}. \qquad (*)$$

Возведя обе части уравнения (*) в квадрат, получим:

$$2x^2-3x+2=2(1-x)\sqrt{x^2+x+1},$$

откуда

$$8x^3-17x^2+8x=0,$$

$$x=|AE|=\frac{17-\sqrt{33}}{16}$$

(проверьте, что это действительно корень уравнения (*)). Искомый периметр равен

$$2|EC|=2\sqrt{x^2-x+1}=\frac{3}{8}\sqrt{2(17-\sqrt{33})}.$$

*М. Бронштейн*

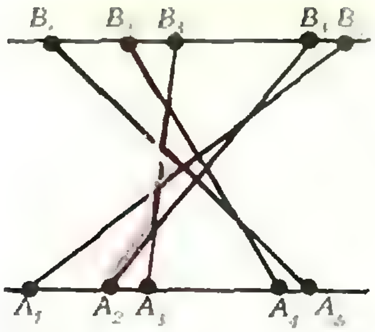


Рис. 7.

◆

**М339***). *Дана горизонтальная полоса на плоскости, края которой — параллельные прямые, и n прямых, пересекающих эту полосу. Каждые две из этих n прямых пересекаются внутри полосы и никакие три не проходят через одну точку. Рассмотрим все пути, начинающиеся на нижней кромке полосы, идущие по данным прямым и заканчивающиеся на верхней кромке, обладающие таким свойством: идя по такому пути, мы все время поднимаемся вверх; дойдя до точки пересечения прямых, мы обязаны перейти на другую прямую. Докажите, что среди таких путей*

*а) есть путь, состоящий не менее чем из n отрезков;*

*б) есть путь, проходящий не более чем по $\frac{n}{2}+1$ прямым;*

*в) есть путь, проходящий по всем n прямым.*

Обозначим точки пересечения прямых с нижней кромкой полосы по порядку (слева направо) через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (рис. 7). Точки пересечения тех же прямых с верхней кромкой полосы мы обозначим соответственно через $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Перечислим некоторые свойства путей, о которых говорится в условии.

1°. *По каждому отрезку каждой прямой проходит ровно один путь.* Действительно, правила, сформулированные в условии, позволяют единственным способом продолжить путь вверх и вниз до краев полосы.

2°. *Существует n различных путей:* из каждой точки $A_1, \ldots, A_n$ выходит свой путь. Занумеруем их по порядку: 1-й, 2-й, ..., $n$-й.

3°. *Путь, начинающийся в точке $A_k$, заканчивается в точке $B_k$.* В самом деле, согласно правилам, каждый путь в точке пересечения прямых переходит на другую прямую, поэтому (рис. 8) пути не могут пересекать друг друга, а лишь соприкасаются вершинами. Таким образом, $k$-й путь делит полосу на две области — левую, в которой расположены все пути с номерами $i<k$, и правую, в которой расположены пути с номерами $i>k$. Поэтому $k$-й путь окончится в $B_k$ (рис. 9).

Перейдем к доказательству отдельных утверждений задачи.

а) Посчитаем двумя способами общее количество отрезков во всех путях вместе. С одной стороны, каждая прямая разбита на $n$ отрезков, поскольку она пересечена $n-1$ другими прямыми; следовательно, общее число отрезков равно $n^2$. С другой стороны, ту же сумму $n^2$ мы должны получить, сложив количества отрезков во всех $n$ путях (мы используем здесь 1° и 2°). Отсюда следует, что хотя бы в одном из путей не менее $n$ отрезков.

б) Оценим количество отрезков в двух крайних путях: 1-м и $n$-м. Эти пути, очевидно, ограничивают выпуклые множества: первый — множество точек, лежащих левее всех прямых, последний — множество точек, лежащих правее всех прямых (рис. 10). Ясно, что первый путь лежит слева от ломаной $A_1PB_1$, последний — справа от ломаной $A_nPB_n$, где $P$ — точка пересечения $(A_1B_n)$ и $(A_nB_1)$, и лишь начальные и конечные отрезки того и другого пути лежат на прямых $A_1B_n$ и $A_nB_1$. Что же касается каждой из остальных $n-2$ прямых $A_2B_{n-1}, A_3B_{n-2}, \ldots, A_{n-1}B_2$, то они могут иметь об-

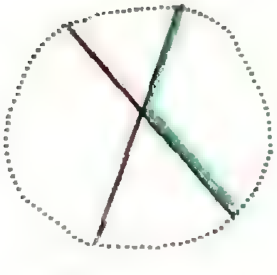


Рис. 8.

---

*) Решение задачи М338 см. в статье Ю. Ионина и Л. Курляндчика «Поиск инварианта», опубликованной в «Кванте», 1976, № 2.

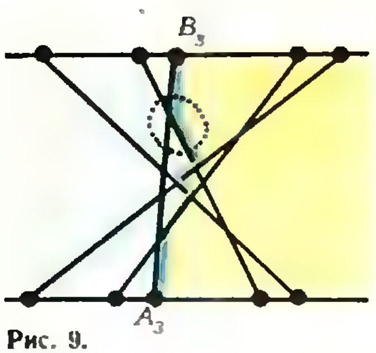


Рис. 9.

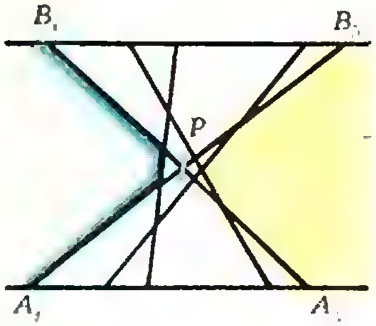


Рис. 10.

щий отрезок только с **одним** из крайних путей (если прямая проходит слева от точки $P$, то она не может иметь общий отрезок с правым крайним путем, и наоборот). Из выпуклости крайнего пути вытекает, что каждая из этих $(n-2)$ прямых имеет с ним не более одного отрезка. Таким образом, количество отрезков в двух крайних путях не больше $4+(n-2)$. Отсюда следует, что хотя бы в одном из этих путей не более $2+(n-2)/2=1+n/2$ отрезков.

в) Пусть $m=(n+1)/2$, если $n$ нечетно (тогда $m$ — средний номер между 1 и $n$), и $m=n/2$, если $n$ четно. Докажем, что $m$-й путь проходит по всем $n$ прямым. Выше (3°) мы говорили, что $m$-й путь делит полосу на две области, начинается в точке $A_m$ и заканчивается в точке $B_m$. Каждая из $n$ прямых $A_1B_n$, $A_2B_{n-1}, \ldots, A_mB_{n+1-m}, \ldots, A_nB_1$, как нетрудно видеть, начинается в одной области (быть может, на ее границе), а заканчивается — в другой. Следовательно, она имеет с $m$-м путем общую точку. Но по правилу «перехода» она должна тогда иметь с этим путем и общий отрезок. Итак, $m$-й путь имеет общий отрезок с каждой прямой.

*Любопытным*, но, видимо, очень трудным вопросом, связанным с этой задачей, является отыскание возможного числа отрезков в максимальном (по числу отрезков) пути. Можно убедиться (попробуйте!), что для $n=3$ максимальный путь всегда состоит из 3 отрезков, для $n=4$ он может состоять из 5 или 6 отрезков, для $n=5$ — из 6, 7 или 8. Интересно было бы найти те границы $c_n$ и $C_n$, между которыми заключена длина максимального пути для $n$ прямых (или хотя бы получить для $c_n$ и $C_n$ хорошие оценки и выяснить порядок роста $c_n$ и $C_n$ при $n \to \infty$).

*Н. Васильев*

◆

**Ф348.** *Космический корабль подходит к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. Чтобы перейти на стелющуюся круговую орбиту (т. е. круговую орбиту, очень близкую к поверхности Луны), в момент наибольшего сближения с Луной включается тормозной двигатель. Определить, на сколько изменится скорость корабля при выполнении этого маневра. Ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_Л \approx 1{,}7$ м/сек², радиус Луны $R_Л \approx 1{,}7 \cdot 10^6$ м.*

*Дополнительный вопрос. Попробуйте оценить, какую часть начальной массы корабля должно составлять сожженное горючее, если двигатель выбрасывает продукты сгорания с относительной скоростью $v = 4 \cdot 10^3$ м/сек.*

При движении тел в поле тяготения планеты (или звезды) полная механическая энергия (т. е. сумма кинетической и потенциальной энергий) сохраняется. В зависимости от величины полной энергии $E$ траектории имеют различный характер*). При $E<0$ тело не может удалиться на бесконечно большое расстояние; в этом случае его траектория имеет вид эллипса (первый закон Кеплера). При $E>0$ тело удаляется на бесконечность, имея некоторый запас кинетической энергии (гиперболическая траектория). При $E=0$ тело также уходит на бесконечность, но в этом случае его скорость на бесконечности обращается в нуль; траектория тела имеет вид параболы. При движении по параболической траектории скорость тела вблизи поверхности планеты равна второй космической скорости. Так принято называть минимальную скорость, при которой тело, стартуя с поверхности планеты, может удалиться от нее на бесконечно далекое расстояние. Для точки наибольшего сближения с Луной (рис. 11) можно записать:

$$E = K + П = \frac{mv_{II}^2}{2} - \gamma \frac{M_Л m}{R_Л} = \frac{mv_{II}^2}{2} - g_Л R_Л m = 0.$$

Здесь $v_{II}$ — скорость корабля в момент наибольшего сближения с Луной (вторая космическая скорость); $П = -\gamma \frac{M_Л m}{R_Л}$ — потенциальная энергия корабля вблизи поверхности Луны**).

---

*) См., например, статью К. Коваленко и М. Крейна «Баллистическая задача в космосе», «Квант», 1973, № 5.

**) См., например, статью С. Козела «Физические аналогии», «Квант», 1975, № 11.

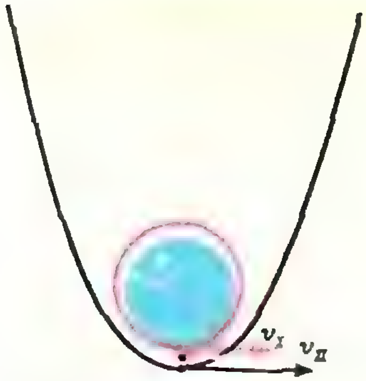


Рис. 11.

Для скорости $v_{II}$ получим:

$$v_{II}=\sqrt{2g_{Л}R_{Л}}\approx 2,4\cdot 10^{3}\ \text{м/сек}.$$

В процессе торможения скорость корабля должна по условию задачи уменьшиться до первой космической скорости (для Луны) $v_I$. Эта скорость может быть определена из условия движения корабля по круговой орбите:

$$\frac{mv_I^{2}}{R_{Л}}=\gamma\frac{M_{Л}m}{R_{Л}^{2}}=g_{Л}m;\quad v_I=\sqrt{g_{Л}R_{Л}}\approx 1,7\cdot 10^{3}\ \text{м/сек}.$$

Таким образом, скорость корабля должна измениться на величину

$$\Delta v=v_{II}-v_I\approx 0,7\cdot 10^{3}\ \text{м/сек}.$$

Чтобы ответить на второй (дополнительный) вопрос и оценить массу $m$ сожженного топлива, можно воспользоваться законом сохранения импульса. Предположим для упрощения расчета, что продукты сгорания массы $m$ были выброшены из сопла ракеты в виде одной порции с относительной скоростью $v$. Запишем закон сохранения импульса в системе отсчета, связанной с кораблем, движущимся со скоростью $v_{II}$:

$$(M_0-m)\Delta v=mv,$$

где $M_0$ — первоначальная масса корабля. Отсюда

$$m=\frac{\Delta v}{v+\Delta v}M_0\approx 0,15\,M_0,$$

т. е. сожженное топливо должно составлять приблизительно 15% от первоначальной массы корабля.

Можно найти массу топлива более строго. Для этого нужно воспользоваться формулой Циолковского. Эта формула выражает изменение скорости космического корабля $\Delta v$ через отношение его начальной $M_0$ и конечной $M$ масс:

$$\Delta v=v\ln\frac{M_0}{M}$$

($v$ — относительная скорость истечения продуктов сгорания). Отсюда

$$M=M_0e^{-\frac{\Delta v}{v}}=M_0\,e^{-0,175}\approx 0,84\,M_0,$$

т. е. сожженное горючее должно составлять примерно 16% от начальной массы корабля.

Отметим, что формула Циолковского учитывает непрерывный процесс истечения продуктов сгорания из сопла ракеты, поэтому полученный с ее помощью результат является более точным.

*С. Козел*

◆

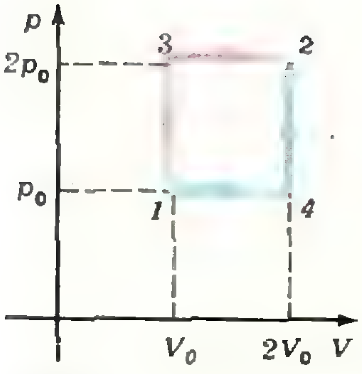


Рис. 12.

**Ф349.** *Один киломоль идеального одноатомного газа, находящегося при нормальных условиях, переводят из состояния 1 в состояние 2 двумя способами: 1 → 3 → 2 и 1 → 4 → 2 (рис. 12). Найти отношение количеств теплоты, которые необходимо сообщить газу в этих двух процессах.*

Согласно первому закону термодинамики сообщаемое газу количество теплоты $Q$ идет на изменение внутренней энергии газа $\Delta U$ и на совершение газом работы $A$:

$$Q_I=\Delta U_I+A_I,\quad Q_{II}=\Delta U_{II}+A_{II}.$$

Здесь индекс I относится к процессу 1 → 3 → 2, а индекс II — к процессу 1 → 4 → 2.

Так как газ одноатомный, то для одного моля

$$U=\frac{3}{2}RT,\quad \text{и}\quad \Delta U=\frac{3}{2}R\Delta T.$$

Отсюда видно, что изменение внутренней энергии газа при переходе из состояния 1 в состояние 2 зависит только от изменения температуры газа $\Delta T=T_2-T_1$ и не зависит от того, каким способом газ переводят из одного состояния в другое. Следовательно,

$$\Delta U_I = \Delta U_{II} = \Delta U = \frac{3}{2} R (T_2 - T_1).$$

Для того чтобы найти температуры газа $T_1$ и $T_2$, запишем уравнения состояния идеального газа для состояний *1* и *2* (см. рис. 12):

$$p_0 V_0 = R T_1, \qquad 2p_0 \cdot 2V_0 = R T_2,$$

откуда

$$T_2 - T_1 = \frac{3 p_0 V_0}{R}, \text{ и } \Delta U = \frac{9}{2} p_0 V_0.$$

Теперь найдем работы газа $A_I$ и $A_{II}$. В первом случае (процесс *1*→*3*→*2*) на участке *1*→*3* газ работы не совершает, а при изобарном расширении на участке *3*→*2* газ совершает работу

$$A_I = p \Delta V = 2p_0(2V_0 - V_0) = 2p_0 V_0.$$

Во втором случае (процесс *1*→*4*→*2*) газ совершает работу только на участке *1*→*4*:

$$A_{II} = p_0(2V_0 - V_0) = p_0 V_0.$$

Таким образом,

$$Q_I = \Delta U + A_I = \frac{13}{2} p_0 V_0,$$

$$Q_{II} = \Delta U + A_{II} = \frac{11}{2} p_0 V_0.$$

Отношение количеств теплоты равно

$$\frac{Q_I}{Q_{II}} = \frac{13}{11}.$$

◆

**Ф350.** *Найти зависимость падения напряжения на сопротивлении R в схеме, показанной на рисунке 13, от величины этого сопротивления. Э. д. с. всех источников равны ℰ, их внутренние сопротивления r. Диод считать идеальным (его сопротивление в прямом направлении равно нулю, а в обратном бесконечно велико).*

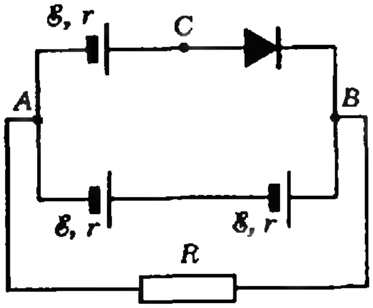


Рис. 13.

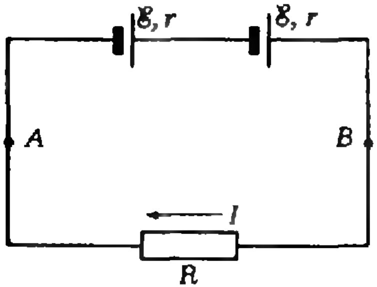


Рис. 14.

Если сопротивление $R$ велико, ток, идущий по нему, очень мал, и разность потенциалов между точками $B$ и $A$ (см. рис. 13) близка к $2\mathscr{E}$. При этом потенциал точки $B$ выше потенциала точки $C$ (равного $\mathscr{E}$, если считать потенциал точки $A$ равным нулю), диод закрыт, и ток по участку цепи $ACB$ не идет. Тогда данную схему можно заменить простой схемой с двумя источниками, включенными последовательно с сопротивлением $R$ (рис. 14). В этой цепи идет ток $I = \frac{2\mathscr{E}}{2r + R}$, и падение напряжения на сопротивлении $R$ равно

$$U_R = \frac{2\mathscr{E} R}{2r + R}.$$

По мере уменьшения сопротивления $R$ ток в цепи растет, увеличивается падение напряжения на внутренних сопротивлениях источников, и разность потенциалов между точками $B$ и $A$ уменьшается. Так будет происходить до тех пор, пока потенциал точки $B$ не станет равным потенциалу точки $C$, т. е. пока диод остается закрытым. Диод откроется в тот момент, когда напряжение между точками $B$ и $C$ станет равным нулю, а между точками $B$ и $A$ — $\mathscr{E}$. Значит, в этот момент падение напряжения на сопротивлении $R$ равно $\mathscr{E}$, т. е.

$$\frac{2\mathscr{E} R}{2r + R} = \mathscr{E}, \text{ или } R = 2r.$$

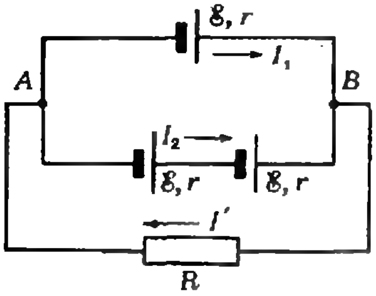


Рис. 15.

Теперь найдем напряжение на сопротивлении $R$, когда $R < 2r$. В этом случае сопротивление диода равно нулю, и схему можно представить так, как показано на рисунке 15.

В этом случае

$$U'_R = I'R = \mathscr{E} - I_1 r = 2\mathscr{E} - I_2 \cdot 2r,$$

$$I' = I_1 + I_2.$$

Отсюда

$$I' = \frac{4\mathscr{E}}{2r+3R} \quad \text{и} \quad U'_R = \frac{4\mathscr{E}R}{2r+3R}.$$

Таким образом,

$$U_R = \frac{2\mathscr{E}R}{2r+R} \text{ при } R \geqslant 2r,$$

$$U_R = \frac{4\mathscr{E}R}{2r+3R} \text{ при } R \leqslant 2r.$$

◆

**Ф351.** *При слабом ударе футбольного мяча о стенку он деформируется, как показано на рисунке 16. При этом деформация $x$ много меньше радиуса мяча $R$, и можно с хорошим приближением считать, что давление $p$ воздуха в мяче в процессе удара не меняется.*

*Пренебрегая упругостью покрышки, оценить время соударения мяча со стенкой. Провести числовой расчет для случая, когда масса мяча $m = 0{,}5$ кг, давление в нем $p = 2$ атм и радиус $R = 12{,}5$ см.*

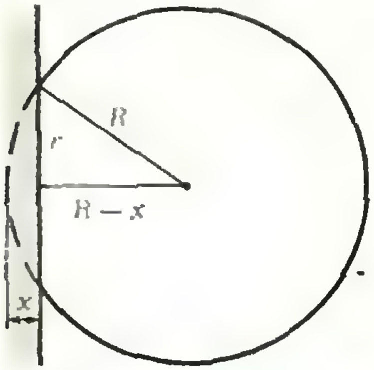


Рис. 16.

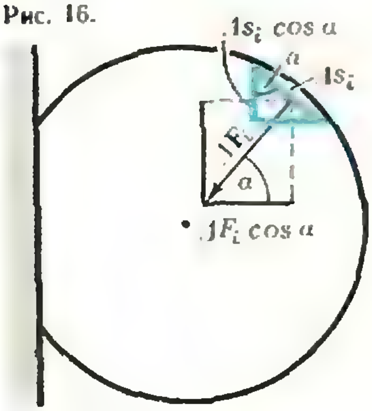


Рис. 17.

Рассмотрим силы, действующие на мяч во время удара. Это — сила реакции со стороны стенки **N** и сила атмосферного давления $\mathbf{F}_а$.

Согласно третьему закону Ньютона сила **N** численно равна и противоположно направлена силе давления мяча на стенку $\mathbf{F}_д$. Так как упругостью покрышки мяча можно пренебречь, то

$$N = F_д = pS = p\pi r^2$$

($S = \pi r^2$ — площадь соприкосновения мяча со стенкой, см. рис. 16). Направлена сила **N** перпендикулярно к стенке, т. е. по горизонтали вправо.

Для того чтобы найти силу атмосферного давления, разобьем поверхность соприкосновения мяча с окружающим воздухом на малые участки с площадью $\Delta s_i$. На каждый участок действует сила атмосферного давления $\Delta\mathbf{F}_i$ (рис. 17), направленная перпендикулярно к поверхности и равная по абсолютной величине $\Delta F_i = p_0 \Delta s_i$ ($p_0$ — атмосферное давление). Благодаря симметрии ясно, что вертикальные проекции всех сил $\Delta\mathbf{F}_i$ в сумме дают нуль, так что равнодействующая $\mathbf{F}_а = \sum \Delta\mathbf{F}_i$ направлена горизонтально влево и равна по модулю (см. рис. 17)

$$F_а = \sum \Delta F_i \cos\alpha = p_0 \sum \Delta s_i \cos\alpha.$$

Величина $\Delta s_i \cos\alpha$ — это проекция площади $i$-го участка на вертикальную плоскость, а $\Sigma\, \Delta s_i \cos\alpha$ — сумма таких проекций, равная проекции площади поверхности соприкосновения мяча с окружающим воздухом, т. е.

$$\sum \Delta s_i \cos\alpha = \pi r^2, \quad \text{и} \quad F_а = p_0 \pi r^2.$$

Найдем теперь абсолютное значение силы $\mathbf{F} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_а$:

$$F = N - F_а = (p - p_0)\pi r^2 = (p - p_0)\pi\left[R^2 - (R - x)^2\right] = (p - p_0)\pi(2Rx - x^2).$$

Поскольку деформация мяча $x$ мала по сравнению с его радиусом $R$, то величиной $x^2$ можно пренебречь по сравнению с величиной $2Rx$. Тогда $F = 2\pi R(p - p_0)x$, или с учетом, что эта сила направлена противоположно деформации,

$$F = -2\pi R(p - p_0)x = -kx.$$

Таким образом, сила $F$ пропорциональна величине деформации $x$ ($k = 2\pi R(p - p_0)$ — коэффициент пропорциональности; он не меняется в процессе удара), т. е. носит упругий характер. Под действием такой силы тело может совершать колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, где $m$ — масса тела.

Очевидно, что время соударения мяча со стенкой $\tau$ как раз равно половине периода колебаний, т. е.

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{\pi m}{2R(p-p_0)}} \approx 8\cdot 10^{-3} \text{ сек}.$$

◆

**Ф352.** *Для регулирования напряжения на нагрузке собрана схема, показанная на рисунке 18. Сопротивления нагрузки и регулировочного реостата равны $R$. Нагрузка подключена к половине реостата. Напряжение $U_{вх}$ на входе цепи увеличивается вдвое. Как изменить положение движка реостата для того, чтобы напряжение на нагрузке осталось прежним?*

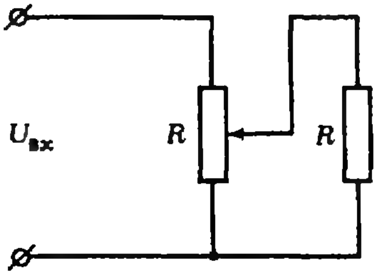


Рис. 18.

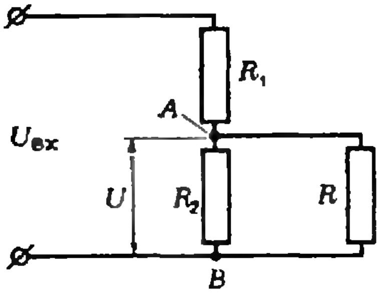


Рис. 19.

Найдем выражение для напряжения на нагрузке в общем случае.

Обозначим через $R_1$ и $R_2$ сопротивления частей реостата, на которые его делит движок, и перерисуем схему так, как показано на рисунке 19.

Напряжение на нагрузке равно напряжению на участке $AB$, содержащем параллельно соединенные сопротивления $R$ и $R_2$. Их можно заменить одним эквивалентным сопротивлением $R_э = \dfrac{RR_2}{R+R_2}$.

Напряжение на этом эквивалентном сопротивлении (а значит, и на нагрузке), очевидно, равно $U = IR_э$, где $I = \dfrac{U_{вх}}{R_1+R_э}$ — ток в цепи, т. е. $U = U_{вх}\dfrac{R_э}{R_1+R_э}$.

Так как $R_1 = R - R_2$, то

$$U = U_{вх}\frac{R_э}{R-R_2+R_э} = U_{вх}\frac{RR_2}{R^2-R_2^2+RR_2}.$$

Разделим числитель и знаменатель в этой формуле на $R^2$:

$$U = U_{вх}\frac{\alpha}{1-\alpha^2+\alpha}, \text{ где } \alpha = \frac{R_2}{R}.$$

В первоначальной цепи $R_2 = R/2$, т. е. $\alpha_1 = {}^1/_2$ и напряжение на нагрузке

$$U_1 = U_{вх}\frac{1}{2(1-{}^1/_4+{}^1/_2)} = \frac{2}{5}U_{вх}. \qquad (1)$$

При увеличении напряжения на входе цепи вдвое напряжение на нагрузке

$$U_2 = 2U_{вх}\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2^2+\alpha_2}, \qquad (2)$$

где $\alpha_2$ — новое значение отношения $R_2/R$.

Но по условию задачи напряжение на нагрузке в обоих случаях должно быть одним и тем же. Поэтому согласно равенствам (1) и (2)

$$\frac{2}{5}U_{вх} = 2U_{вх}\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2^2+\alpha_2}.$$

Отсюда

$$\alpha_2^2 + 4\alpha_2 - 1 = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$\alpha_2 = -2 \pm \sqrt{4+1} = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Так как $\alpha_2 > 0$, то оно равно $\sqrt{5}-2$. Следовательно, движок нужно передвинуть так, чтобы

$$R_2 = (\sqrt{5}-2)R.$$

*И. Слободецкий*

# Читатели советуют

**В редакцию нашего журнала приходит много писем и заметок, касающихся тематики «Практикума абитуриента». Большинство из них посвящено частным вопросам, и тогда редакция отвечает лишь их авторам. Но некоторые содержат соображения и замечания, с которыми, на наш взгляд, полезно познакомить всех читателей «Кванта». Не считая возможным публиковать такие письма и заметки полностью, редакция решила подготовить подборку материалов, составленную по идеям и предложениям читателей журнала. Мы надеемся, что обсуждаемые в подборке отдельные теоретические вопросы школьного курса и решения ряда задач будут полезны поступающим в вузы.**

На вступительных экзаменах довольно часто встречаются задачи на смешивание кислот с водой, спирта с водой, на получение растворов той или иной концентрации. Такого рода задачи в школе решают, исходя из предположения об *аддитивности объемов* при смешивании, т. е. считая, что объем смеси равен сумме объемов смешиваемых жидкостей. Между тем с точки зрения химии это предположение несостоятельно. Оно ведет к неприемлемым отклонениям от верных результатов при решении задач на смешивание с водой азотной, серной, уксусной, фосфорной, соляной кислот, этилового спирта и других жидкостей.

Убедимся в этом на примере следующей задачи.

Пример 1. *Сколько миллилитров* 100 %*-й азотной кислоты надо влить в* 1000 *миллилитров воды для получения* 50 %*-й кислоты? Температура кислоты и воды* 20°C.

Казалось бы, проще всего задачу решить так. Обозначим искомый объем безводной кислоты через $x$ *мл*. Тогда в $(1000+x)$ *мл* раствора будет содержаться $x$ *мл* чистой кислоты, что должно составлять 50 %. Другими словами, получаем уравнение

$$\frac{x}{1000+x}=\frac{1}{2},$$

имеющее корень $x=1000$ *мл*.

Однако надо иметь в виду, что *процентной концентрацией* кислот называют (если специально не оговорено противное) *количество граммов массы растворенного вещества, содержащееся в* 100 *граммах массы раствора*. Поэтому правильное решение требует прежде всего определения массы компонентов составляемого раствора и получающейся кислоты по формуле $m=d\cdot V$, где $m$ — масса жидкости, $d$ — плотность, $V$ — объем. Поскольку объем жидкости меняется в зависимости от ее температуры, значение плотности $d$ следует брать соответствующим указанной в условии температуры. Для различных кислот имеются специальные таблицы, содержащие величину плотности раствора при разных температурах.

Например, при 20°C плотность 100 %-й азотной кислоты приближенно равна 1,51 *г/см*$^3$, а плотность 50 %-й азотной кислоты 1,31 *г/см*$^3$; плотность воды при 20°C составляет 0,998 *г/см*$^3$.

Приведем теперь решение задачи, основанное на предположении об аддитивности объемов. Ясно, что масса чистой кислоты в 50 %-м растворе совпадает с массой влитой 100 %-й кислоты, т. е. равна $1{,}51\cdot x$ *г*, где $x$ — искомый объем безводной кислоты. Если считать, что объем 50 %-й кислоты равен $(1000+x)$ *мл*, то ее масса $1{,}31\cdot(1000+x)$ *г* и, следовательно, в ней содержится $0{,}5\cdot1{,}31\times\times(1000+x)$ *г* чистой кислоты. Получаем уравнение

$$1{,}51x=0{,}5\cdot1{,}31(1000+x),$$

откуда $x\approx766$ *мл*.

Можно рассуждать и несколько иначе. Масса *x мл* чистой кислоты равна $1{,}51\cdot x$ *г*, масса 1000 *мл* воды равна 998 *г*, а масса 50%-го раствора составляет $1{,}31\cdot(1000+x)$ *г*. Так как суммарная масса компонентов совпадает с массой раствора, то приходим к уравнению

$$1{,}51x+998=1{,}31\,(1000+x),$$

откуда $x\approx1560$ *мл*.

Мы видим, что эти два решения приводят к совершенно различным результатам. На самом деле *оба эти решения неверны*. Впрочем, грубая ошибочность второго результата очевидна: если к литру воды добавить больше полутора литров чистой кислоты, то концентрация получающегося раствора будет заведомо выше 50%.

Причина ошибки заключается в том, что предположение об аддитивности объемов, которое было использовано в обоих решениях, не соответствует действительности. При смешивании кислот с водой происходит существенное объемное сжатие; его можно объяснить действием сил межмолекулярного притяжения (молекулы воды сближаются с молекулами кислоты, проникая в «пустоты» между ними). Поэтому решение задач на смешивание жидкостей должно основываться на законе сохранения масс: *суммарная масса компонентов раствора равна массе самого раствора.*

Правильное решение рассматриваемой задачи состоит в следующем. Масса *x мл* чистой кислоты равна $1{,}51\cdot x$ (*г*), масса 1000 *мл* воды равна $0{,}998\cdot1000=998$ (*г*), так что суммарная масса компонентов раствора составляет $(998+1{,}51\ x)$ (*г*) (и действительный объем 50%-го раствора кислоты равен $\frac{998+1{,}51x}{1{,}31}$ *мл*). Поскольку масса чистой кислоты в 50%-м растворе совпадает с массой влитой 100%-й кислоты, то получаем уравнение $1{,}51x=0{,}5\cdot(998+1{,}51x)$, откуда находим $x\approx661$ *мл*.

Упражнения

1. Какой объем 91%-й серной кислоты надо добавить при 15°C к 1 *л* воды, чтобы получить электролит для аккумулятора автомобиля — раствор серной кислоты с плотностью 1,290 *г/см*³?

Плотность 91%-й серной кислоты при 15°C равна 1,825 *г/см*³; серная кислота с плотностью 1,290 *г/см*³ при 15°C имеет концентрацию 38,03%; плотность воды при 15°C составляет 0,999 *г/см*³.

2. Сколько воды надо влить в 800 *мл* 100%-й уксусной кислоты для получения 65%-го раствора? Смешивание производится при 20°C.

Плотность при 20°C 100%-й уксусной кислоты — 1,0498 *г/см*³; воды — 0,998 *г/см*³.

*А. Азия* (Одесса)

* * *

В своем письме в редакцию *Нгуен Конг Кви* (Ханой, ДРВ) предлагает вниманию читателей журнала довольно интересный геометрический факт, и любители математики, без сомнения, по достоинству это оценят. Решение приводимой задачи — хорошая проверка того, насколько активно усвоен материал курса планиметрии.

3. На плоскости дана окружность с взаимно перпендикулярными диаметрами $AB$ и $CD$ и прямая $m$, параллельная прямой $AB$. Через точку $T$ окружности (отличную от точек $C$ и $D$) проведена касательная к ней, пересекающая прямую $AB$ в точке $K$ и прямую $m$ в точке $M$. Пусть $E$ и $F$ — точки пересечения прямой $m$ с прямыми $KC$ и $KD$ соответственно. Доказать, что произведение длин отрезков $ME$ и $MF$ не зависит ни от радиуса окружности, ни от выбора точки $T$ на окружности.

* * *

В тригонометрических преобразованиях и, в частности, при решении тригонометрических уравнений иногда бывает полезно представить выражение $c\sin x+b\cos x$ в следующем виде:

$$a\sin x+b\cos x=\\=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi). \qquad (1)$$

Появляющийся в этой формуле угол $\varphi$ обычно называют *вспомогательным углом*. Как известно, он определяется соотношениями

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (2)$$

с точностью до слагаемого $2n\pi$ (где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Поэтому достаточно указать один угол $\varphi$, лежащий в каком-нибудь промежутке длины $2\pi$, чтобы получить все остальные значения вспомогательного угла.

Обратим внимание на следующую простую явную формулу для вспомогательного угла, которая отсутствует в школьных учебниках, но удобна при решении задач, особенно уравнений с параметром. Выберем в качестве промежутка длины $2\pi$ промежуток $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Тогда единственный угол $\varphi$, лежащий в этом промежутке и удовлетворяющий обоим соотношениям (2), определяется формулой

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \text{если } b \geqslant 0; \\ -\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \text{если } b < 0. \end{cases} \qquad (3)$$

В самом деле, независимо от знака $b$ оба угла (3) удовлетворяют второму соотношению (2), а первому соотношению (2) в промежутке $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ при $b\geqslant 0$ удовлетворяет только $\varphi = \arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и при $b<0$ — только

$$\varphi = -\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Следует напомнить, что ни одно из соотношений (2), взятое отдельно (или вытекающее из них соотношение $\operatorname{tg}\varphi = b/a$, также взятое отдельно), не является достаточным для нахождения вспомогательного угла: оно определяет в промежутке длины $2\pi$ два угла, из которых только один удовлетворяет обоим соотношениям (2). Так, если $a=-1$, $b=\sqrt{3}$, то уравнение $\operatorname{tg}\varphi = b/a$ имеет в промежутке $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ два корня: $-\pi/3$ и $2\pi/3$, но лишь для второго из них справедливо равенство (1).

Преимущества формулы (3) легко увидеть на следующем примере.

Пример 2 (МИЭМ, 1972). *Решить уравнение*

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a\sin 4x,$$

*где $a$ — параметр.*

Двукратным понижением степеней в левой части уравнение приводится к виду

$$a\sin 4x - \frac{3}{8}\cos 4x = \frac{5}{8},$$

откуда с помощью формул (1) и (3) получаем:

$$\sqrt{a^2+\frac{9}{64}}\sin(4x+\varphi) = \frac{5}{8},$$

$$\varphi = -\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{9}{64}}}.$$

Ясно, что решения этого уравнения существуют при

$$\frac{5}{8} \leqslant \sqrt{a^2+\frac{9}{64}},$$

т. е. при $|a| \geqslant 1/2$, и даются формулой

$$x = \frac{(-1)^n}{4}\arcsin\frac{5}{\sqrt{64a^2+9}} + \frac{1}{4}\arccos\frac{8a}{\sqrt{64a^2+9}} + \frac{\pi n}{4},$$

где $n$ — целое. Использование формулы (3) привело к весьма компактной записи результата (ср. с ответом, приведенным в «Кванте», 1973, № 7, с. 47, 60—61).

*В. Ритус* (Москва)

* * *

Как известно, некоторые «нестандартные» уравнения удается решить, если найти удачную замену неизвестного. Попробуйте отыскать такую замену для уравнения, которое прислал в редакцию ученик 8 класса *С. Ахмедов* (станция Минджевань Азербайджанской ССР).

**4.** Решить уравнение

$$\frac{x^4+4}{x^2-2}-5x=0\,.$$

* *
*

Иногда даже несложная геометрическая задача дает повод для своеобразного самостоятельного исследования, если пытаться выяснить существенность того или иного предположения, изменять условие задачи и рассматривать более общие конфигурации. *У. Алла* (г. Выру Эстонской ССР) предлагает читателям журнала провести такое исследование, начав со следующей задачи.

**5.** В трапеции $ABCD$ проведены диагонали, пересекающиеся в точке $O$. Доказать, что площади образовавшихся четырех треугольников связаны соотношением

$$S_{\triangle AOB}\cdot S_{\triangle COD}=S_{\triangle BOC}\cdot S_{\triangle DOA}.$$

Попытайтесь установить обобщения этого соотношения при различных более общих предположениях.

**6.** Пусть диагонали $A_1A_3$ и $A_2A_4$ выпуклого четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ пересекаются в точке $O$. Обозначим площади треугольников $A_1OA_2$, $A_2OA_3$, $A_3OA_4$, $A_4OA_1$ через $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ соответственно. Верно ли, что $S_1S_3=S_2S_4$?

**7.** Остается ли это соотношение справедливым

а) для невыпуклого несамопересекающегося четырехугольника;

б) для самопересекающегося четырехугольника?

**8.** Обобщить это соотношение на случай, когда точка $O$ — произвольная внутренняя точка выпуклого четырехугольника.

**9.** Справедливо ли соотношение, полученное в предыдущей задаче, если точка $O$ лежит вне выпуклого четырехугольника?

**10.** Обобщить это соотношение на случай выпуклого $2n$-угольника ($n\geqslant 2$) и произвольной точки $O$ в его плоскости.

* *
*

Многие поступающие начинают решение уравнения или неравенства с нахождения *области допустимых значений* (ОДЗ), т. е. множества чисел, для которых определены одновременно левая и правая части этого уравнения или неравенства. Однако следует иметь в виду, что находить ОДЗ нужно далеко не во всех случаях. Например, если в процессе решения используются равносильные преобразования, то отыскание ОДЗ представляет собой напрасную трату времени.

Пример 3 (МИНХ и ГП, 1974). *Решить неравенство*

$$\log_2\log_3\frac{x+2}{x-2}<\log_{1/2}\log_{1/3}\frac{x-2}{x+2}. \qquad (4)$$

Нахождение ОДЗ требует здесь решения системы неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} x\neq 2,\\ \dfrac{x+2}{x-2}>0,\\ \log_3\dfrac{x+2}{x-2}>0,\end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} x\neq -2,\\ \dfrac{x-2}{x+2}>0,\\ \log_{1/3}\dfrac{x-2}{x+2}>0,\end{array}\right.$$

что является довольно трудоемкой задачей. Между тем находить ОДЗ нет необходимости, поскольку от неравенства (4) мы можем последовательно переходить к равносильным неравенствам:

$$\log_2\log_3\frac{x+2}{x-2}<-\log_2\log_3\frac{x+2}{x-2}\,;$$

$$\log_2\log_3\frac{x+2}{x-2}<0;$$

$$0<\log_3\frac{x+2}{x-2}<1;$$

$$1<\frac{x+2}{x-2}<3,\qquad 1<1+\frac{4}{x-2}<3,$$

$$0<\frac{2}{x-2}<1,\qquad \frac{x-2}{2}>1,$$

откуда получаем решение: $x>4$.

Весьма часто нахождение ОДЗ оказывается излишним при решении иррациональных уравнений. Так, возводя в квадрат обе части уравнения

$$\sqrt{f(x)}=g(x), \qquad (5)$$

мы приходим к уравнению

$$f(x)=[g(x)]^2, \qquad (6)$$

следствием которого является неравенство $f(x)\geqslant 0$. Поэтому корни уравнения (6) всегда входят в ОДЗ уравнения (5).

Пример 4 (МГУ, физфак, 1968). *Для каждого значения параметра a найти все решения уравнения*

$$\sqrt{a(2^x-2)+1}=1-2^x.$$

Нахождение ОДЗ потребовало бы здесь решения неравенства с параметром $a(2^x-2)+1\geqslant 0$, однако без этого можно вполне обойтись. Полагая $t=2^x$, перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{at-2a+1}=1-t. \qquad (7)$$

После возведения обеих частей уравнения (7) в квадрат получим

$$at-2a+1=(1-t)^2, \qquad (8)$$

откуда $t_1=a$, $t_2=2$. Для найденных корней незачем проверять справедливость неравенства $at-2a+1\geqslant 0$ — оно является следствием уравнения (8). Нужно лишь проверить выполнение условия $1-t\geqslant 0$, которое обеспечивает равносильность уравнений (7) и (8), и условия $t>0$, вытекающего из равенства $t=2^x$; оба эти условия проверяются без труда.

Ответ: при $a\leqslant 0$ и при $a>1$ решений нет; при $0<a\leqslant 1$ имеется единственное решение $x=\log_2 a$.

Часто при решении уравнений и неравенств ОДЗ можно находить «не до конца», накладывая необходимые ограничения не непосредственно на неизвестное, а на какие-либо выражения от неизвестного.

Пример 5 (ЛГУ, матмех, 1966). *Решить уравнение*

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{1+x+x^2}=\sqrt{3}.$$

«Примерный» абитуриент, начав с нахождения ОДЗ, столкнется с необходимостью решать совокупность уравнений

$$\frac{2\pi x}{1+x+x^2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$) для определения «запрещенных» значений неизвестного. Между тем достаточно лишь знать, что ОДЗ описывается условиями

$$\frac{2\pi x}{1+x+x^2}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \qquad (9)$$

($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$). В самом деле, исходное уравнение немедленно сводится к совокупности уравнений

$$\frac{2\pi x}{1+x+x^2}=\frac{\pi}{3}+n\pi$$

($n=0,\pm1,\pm2,\ldots$), корни которых, конечно, удовлетворяют условиям (9).

На приведенных примерах можно убедиться, что фактическое вычисление ОДЗ отнюдь не является обязательным элементом решения уравнений и неравенств — проводить такое вычисление следует лишь тогда, когда это действительно необходимо.

Упражнения

11 (МГУ, ВМК, 1973). Решить неравенство

$$\log_{\frac{x^2-10x+31}{30}}\left(5x-\frac{11}{20}\right)\leqslant 0.$$

12 (МГУ, мехмат, 1974). Решить уравнение $\sqrt{2\sin 2x}+2\sin x=0$.

13 (МГУ, экономический факультет, 1974). Найти все решения уравнения

$$\log_{\cos 2x-\sin 2x}(1-\cos x-\sin x)=1.$$

*Ю. Ионин* (Ленинград)

* *

*

Интересное предложение высказал в своем письме *П. Горнштейн* (Киев): публиковать на страницах журнала красивые, короткие и «нестандартные» решения задач конкурсных экзаменов. В самом деле, часто, например, в геометрических задачах поступающие добираются до результата после проведения длинных и громоздких вычислений. Однако иногда решение той же задачи удается свести буквально к нескольким строчкам, если найти «изюминку» — догадаться применить некоторую геометрическую теорему или сделать удачное дополнительное построение.

Автор письма приводит несколько примеров таких задач, взятых из вариантов вступительных экзаменов в МГУ. Решить их можно и без «геометрической фантазии», хотя тогда к цели ведет довольно извилистый путь со сложными вычислениями (см. Б. И. Александров и М. В. Лурье, «Пособие по математике для поступающих в МГУ», издательство МГУ, 1974 г.). Предлагаем читателям журнала попытаться найти короткие геометрические решения следующих задач.

**14** (МГУ, физфак, 1972). В треугольнике $ABC$ угол $B$ равен $\pi/4$, угол $C$ равен $\pi/3$. На медианах $BM$ и $CN$ как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках $P$ и $Q$. Хорда $PQ$ пересекает среднюю линию $MN$ в точке $F$. Найти отношение длины отрезка $NF$ к длине отрезка $FM$.

**15** (МГУ, физфак, 1973). Боковые грани треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной $S$ образуют одинаковые двугранные углы с плоскостью основания $ABC$ пирамиды; $SO$ — высота пирамиды. Известно, что $\angle ASB = 7\pi/12$, $\angle BSC = \pi/2$, $\angle SCA = \pi/3$. Найти отношение площади треугольника $AOB$ к площади треугольника $ABC$.

**16** (МГУ, геофак, 1971). В треугольнике $ABC$ со сторонами $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$ проведена биссектриса $BD$. В треугольники $ABD$ и $BCD$ вписаны окружности, которые касаются отрезка $BD$ в точках $M$ и $N$ соответственно. Определить длину отрезка $MN$.

* *
*

В редакционной почте есть еще несколько писем, в которых читатели журнала предлагают простые и остроумные решения конкурсных задач.

Пример 6 (МФТИ, 1970). *Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 сек. Если пассажир идет с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спускается за 42 сек. За сколько секунд он спустится, стоя на ступеньках движущегося эскалатора?*

Если обозначить длину эскалатора через $l$, а скорость эскалатора и пассажира через $v_1$ и $v_2$, то нетрудно составить систему двух уравнений с тремя неизвестными, из которой определяется искомое отношение $l/v_1$ (см. «Квант», 1971, № 5, с. 46—47).

Ученик 7 класса *Д. Феофанов* (Алма-Ата) предлагает арифметическое решение задачи. При одновременном движении пассажира и эскалатора пассажир спускается за 1 *сек* на 1/24 часть длины эскалатора. Но за 1 *сек* сам пассажир спускается по неподвижному эскалатору на 1/42 часть его длины. Следовательно, ступенька эскалатора за 1 *сек* проходит $\frac{1}{24} - \frac{1}{42} = \frac{1}{56}$ часть длины эскалатора, а потому всю его длину она пройдет за 56 *сек*.

* *
*

В контрольной работе телевизионных курсов для поступающих в вузы была помещена следующая задача (см. «Квант», 1973, № 1, с. 55; № 2, с. 80).

Пример 7. *Найти* $\sin 2\alpha$, *если известно, что*

$$3\,\mathrm{tg}^2\alpha - 10\,\mathrm{tg}\,\alpha + 3 = 0$$

*и что угол* $\alpha$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{5}{4}\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi.$$

Любопытное решение этой задачи прислала в редакцию учащаяся ГПТУ *Т. Антипова* (Москва). Перепишем данное в условии равенство в виде

$$10\ \mathrm{tg}\,\alpha = 3\ (\mathrm{tg}^2\alpha + 1).$$

Так как $\mathrm{tg}^2\alpha + 1 \neq 0$, то отсюда получаем, что

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha} = \frac{3}{5}.$$

Если вспомнить выражение синуса через тангенс половинного аргумента

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}},$$

то немедленно находим ответ: $\sin 2\alpha = {}^3/_5$. Отметим, что условие $5\pi/4 < \alpha < 3\pi/2$ оказывается лишним.

*Обзор подготовили Н. Розов*
*и В. Степанова*

# Ленинградский государственный университет

## им. А. А. Жданова

**О Ленинградском государственном университете было рассказано в «Кванте» № 6 за 1975 и 1976 годы. В этом номере мы приводим варианты письменного вступительного экзамена по математике на различных факультетах ЛГУ в 1975 году.**

### Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. По окончании первого цикла работ имеется $a$ литров воды, содержащей $p$ % вредных веществ. Через каждый час работ второго цикла количество воды уменьшается на $b$ литров, а концентрация вредных веществ увеличивается на $q$ %. Когда нужно закончить второй цикл работ, чтобы при сливе оставшейся воды можно было уничтожить наибольшее количество вредных веществ?

2. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x+b}=1$$

при всех значениях параметров $a$ и $b$.

3. Решить уравнение

$$4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=(3a-\sin 2x)^2$$

при всех значениях параметра $a$.

4. Через середину хорды круга длины $a$ проведена другая хорда длины $b$. Определить длины отрезков, на которые хорда $b$ делится хордой $a$.

5. На окружности полукруга радиуса $R$ даны точки $A$ и $B$. Если $N$ — один из концов диаметра, а $O$ — центр окружности, то $\angle AON=\alpha$, $\angle BON=\beta$ $\left(0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Определить площадь полной поверхности тела, образованного вращением кругового сектора $AOB$ вокруг диаметра.

### Химический и психологический факультеты и экономический факультет (кроме отделения политэкономии)

1. В лаборатории имелось два одинаковых ящика порошка, содержащего $p$ % висмута. Из каждого ящика израсходовали по 2 *кг* порошка, а затем добавили столько же нового порошка, причем в первый ящик добавили порошок, содержащий $q$ % висмута, а во второй — $3q$ % висмута. В результате во втором ящике оказалось в 1,5 раза больше висмута, чем в первом. Сколько висмута было сначала в каждом из ящиков?

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(4y^2-y+6)\cdot 2^x=20y,\\ x+\log_2 y=2.\end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\log_3\cos 2x-2\log_3\operatorname{tg} x=1+\\ +\log_3(\sin x+\cos x)+\log_3(\cos x-\sin x).$$

4. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна $c$ и в три раза больше высоты, проведенной из вершины прямого угла. Найти катеты.

5. Тупоугольный равнобедренный треугольник вращается около оси, проходящей через точку пересечения его высот параллельно бо́льшей стороне. Определить объем тела вращения, если тупой угол равен $\alpha$, а противоположная сторона равна $a$.

### Биолого-почвенный и географический факультеты

1. Бригада лесорубов должна была заготовить 400 *м*³ дров. Эту работу лесорубы выполнили на 3 дня раньше, так как ежедневно заготовляли на 30 *м*³ дров больше, чем планировалось. Сколько дров заготовляла бригада ежедневно?

2. (Только для биолого-почвенного факультета). Решить неравенство

$$5\sqrt{x}+\frac{5}{2\sqrt{x}}\leqslant 2x+\frac{1}{2x}+4.$$

2a. (Только для географического факультета). Решить уравнение

$$5x+\frac{5}{2x}=2x^2+\frac{1}{2x^2}+4.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+y=2y\cdot\log_x y,\\ x^{\operatorname{tg} y}=1.\end{cases}$$

4. (Только для биолого-почвенного факультета). По сторонам треугольника $a$ и $b$ и медиане $m_c$ определить остальные медианы.

4a. (Только для географического факультета). Прямоугольный сектор радиуса $R$ разделен на две части дугой круга того же радиуса с центром в одном конце дуги сектора. Определить радиус круга, вписанного в большую из этих частей.

5. В трехгранном угле каждый из плоских углов при вершине равен $\alpha$. Как удалена от его вершины точка, которая находится внутри угла на расстоянии $a$ от каждой грани?

### Геологический факультет и отделение политэкономии экономического факультета

1. Танкер заполняется нефтью с помощью 5 труб. Если производительность каждой трубы уменьшить на 8 $м^3/мин$, а число труб увеличить на 2, то время заполнения танкера не изменится. Определить первоначальную производительность труб.

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2^x + y = 7, \\ \log_2 \dfrac{y}{3} = 2 - x. \end{cases}$$

3. Решить уравнение
$$\sin 2x = \sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right).$$

4. Найти множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $|3 - x| \geqslant y^2 - 1$.

5. Грани некоторого параллелепипеда есть ромбы, равные между собой и расположенные так, что встречаются вместе три острых плоских угла. Определить объем этого параллелепипеда, если сторона ромба равна $a$, а острый угол $\alpha$.

### Физический факультет

1. Пловец переправляется через реку с параллельными берегами, ширина реки равна $L$. Скорость пловца в стоячей воде равна $v$. Скорость течения реки предполагается постоянной во всех точках реки и равной $u$, причем $u > v$. Под каким постоянным углом $\alpha$ с нормалью к берегу пловцу следует направлять свою скорость, чтобы течение его меньше всего снесло?

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^5 + v^5 = 33. \end{cases}$$

3. Решить уравнение
$$\sqrt{x}\sqrt{1 - \sin x - \cos x} + \sqrt{\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)} = \operatorname{ctg}\frac{x}{4}.$$

4. При каких значениях параметра $a$ все пары чисел $(x, y)$, удовлетворяющие неравенству $y > 5(x-a)^2 - \sqrt{9-a^2}$, одновременно удовлетворяют и неравенству $y > x^2 - 3$?

5. Шар с центром в центре кубa касается его ребер. Какую часть объема куба составляет его общая часть с шаром?

*И. Молотков, В. Осипов, С. Славянов, П. Товстик*

---

# Новосибирский государственный университет

**В этом номере мы помещаем образцы вариантов письменного экзамена по физике на физическом факультете НГУ в 1975 году.**

На экзамене по физике каждому абитуриенту предлагалось 6 задач, из которых одна качественная — объяснить физическое явление, показанное экзаменатором на демонстрационном столе. На решение всех задач отводилось 5 часов.

Решения всех задач (кроме первой) оценивались в баллах, в зависимости от степени сложности задачи (за неполное решение задачи ставилась часть баллов). Максимальные баллы следующие: за задачу № 2 — 3 балла, № 3 — 4 балла, № 4 — 5 баллов, № 5 — 7 баллов, № 6 — 9 баллов. Для получения положительной оценки нужно было набрать не меньше 4-х баллов. Оценка «отлично» ставилась при 19—21 баллах и выше.

В приводимых ниже вариантах после формулировки каждой задачи в скобках указана доля (в процентах) правильных решений этой задачи. Первое число — процент правильных решений среди зачисленных в университет, второе — среди незачисленных и третье число — средний процент. При вычислении процентов задача считалась решенной, если за нее поставлено не меньше половины максимального балла.

### Вариант 1

1. Свет, пройдя стопку плоских тонких стеклянных пластин, погруженных в воду, создает на стенке — экране изображение букв: НГУ. В отсутствие воды изображение исчезает. Объяснить эффект.

2. В цилиндре с площадью поперечного сечения $S$ на высоте $h$ от дна находится поршень массы $M$, поддерживаемый сжатым газом с молярной массой $\mu$. Температура газа в цилиндре $T$, атмосферное давление $p$. Определить массу $m$ газа в цилиндре. Трение

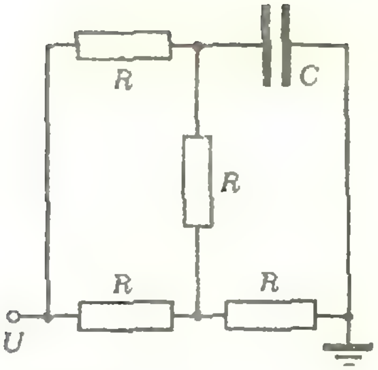


Рис. 1.

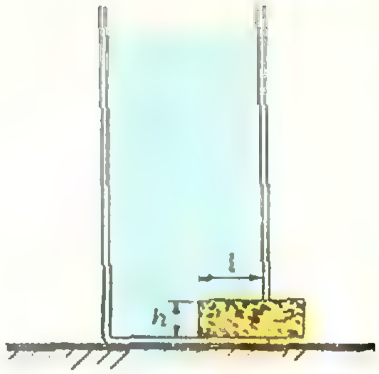


Рис. 2.

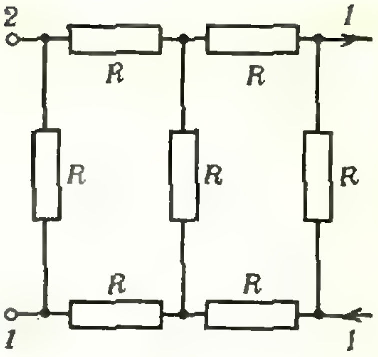


Рис. 3.

отсутствует. Ускорение свободного падения $g$. (88, 44, 69)

3. Конденсатор емкости $C$ включен в цепь, как показано на рисунке 1. Найти установившийся заряд конденсатора. (69, 35, 55)

4. На очень длинном стержне находятся три маленькие бусинки массы $m$ с зарядом $q$ каждая. Расстояние между первой и второй и между второй и третьей бусинками равно $a$. Какую скорость будут иметь бусинки на очень большом расстоянии друг от друга, если их отпустить? Трение отсутствует. (53, 13, 36)

5. В прямоугольный очень высокий сосуд налита жидкость плотности $\rho$. В одной из стенок у дна сосуда имеется прямоугольное отверстие высоты $h$, куда вдвинута на расстояние $l$ невесомая пробка того же сечения (рис. 2). Между пробкой и дном сосуда жидкость не проникает. Коэффициент трения пробки о дно сосуда равен $k$. Трение пробки о края сосуда пренебрежимо мало. При каком уровне жидкости над пробкой жидкость не сможет вытолкнуть пробку? Атмосферное давление $p$. (66, 26, 49)

6. На горизонтальной гладкой плоскости в начальный момент покоится прямоугольная рамка массы $M$ с длинной стороной, равной $a$. Со скоростью $v$ вдоль этой стороны движется упругий шарик массы $m$. В дальнейшем шарик движется, ударяясь о середины коротких сторон рамки. Найти время между двумя последовательными ударами шарика об одну и ту же короткую сторону. Размерами шарика пренебречь. (53, 0, 31)

### Вариант 2

1. В замкнутом сосуде, частично заполненном водой, плавает игрушка — «водолаз». В сосуд вставлена трубка. Если в трубку подуть, «водолаз» тонет. При освобождении трубки возникает два варианта: иногда «водолаз» всплывает, а иногда так и остается под водой. Объяснить поведение игрушки.

2. На рисунке 3 изображена электрическая схема, в которую втекает и вытекает ток $I$, как показано на рисунке. Найти напряжение $U$ между точками $1$ и $2$. (81, 8, 49)

3. В вертикальную стенку вбиты два гвоздя $A$ и $B$, на которые сверху опирается стоящий у стены обруч веса $P$ с центром в точке $O$ (рис. 4). Найти силы, действующие на каждый из гвоздей, если радиусы $OA$ и $OB$ составляют с вертикалью углы $\alpha$ и $\beta$ соответственно. Трение отсутствует. (87, 29, 62)

4. Утка летела по горизонтальной прямой $AB$ с постоянной скоростью $u$. В нее бросил камень неопытный «охотник», причем бросок был сделан без упреждения, т. е. в момент броска направление скорости камня (угол $\alpha$ к горизонту) было как раз на утку (рис. 5). Величина начальной скорости камня равна $v$. На какой высоте $h$ летела утка, если камень все же попал в нее? Ускорение свободного падения $g$. Сопротивлением воз-

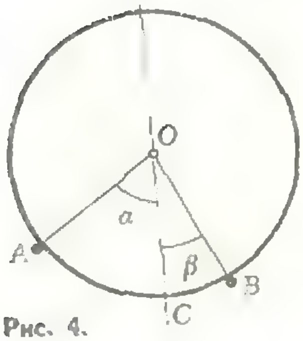


Рис. 4.

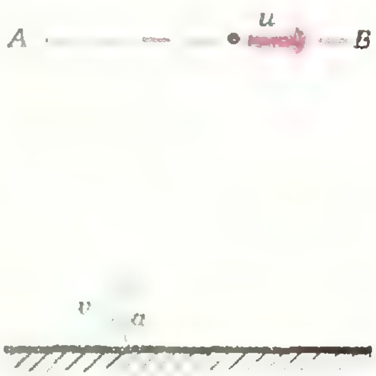


Рис. 5.

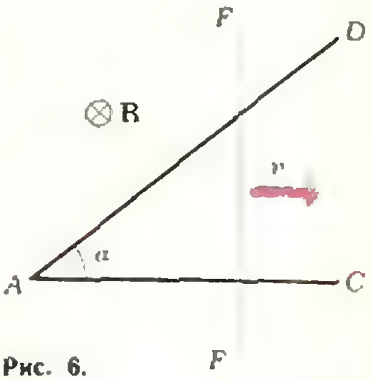


Рис. 6.

духа, размером утки и ростом «охотника» пренебречь. (81, 12, 51)

5. В длинной трубке между двумя поршнями (масса каждого из них равна $m$) находится идеальный газ, а вне поршней — вакуум. В начальный момент правый поршень имеет скорость $v$, а левый — в три раза бо́льшую, причем направлены они в одну сторону. Температура газа в начальный момент равна $T_0$. Найти максимальную температуру газа, если стенки трубки и поршни теплонепроницаемы. Внутренняя энергия газа пропорциональна абсолютной температуре ($U = cT$). Трение отсутствует. (78, 8, 44)

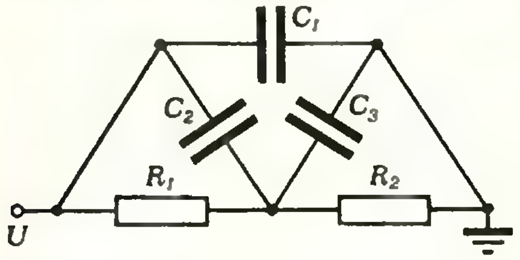


Рис. 7.

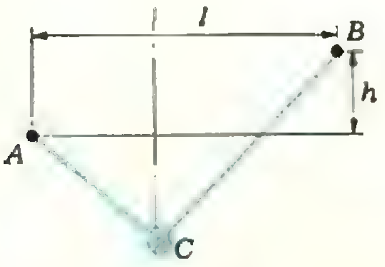


Рис. 8.

6. Металлический прут $EF$ (сопротивление единицы его длины равно $r$) движется с постоянной скоростью $v$, замыкая два идеальных проводника $AC$ и $AD$, образующих угол $\alpha$ (рис. 6). Длина $AC$ равна $l$ и $EF \perp AC$. Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле $B$, перпендикулярном плоскости системы. Найти полное количество тепла, которое выделится в цепи за время движения прута от точки $A$ до точки $C$. (65, 8, 40)

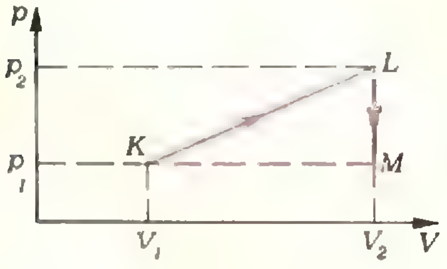


Рис. 9.

## Вариант 3

1. Пламя горелки коптит. Если поднести сверху вертикальную стеклянную трубку, копоть пропадает, однако появляется снова, если закрыть трубку сверху. Объяснить явление.

2. На дне моря (глубина $H$) стоит бак (куб с ребром $h$), заполненный водой. Какую минимальную работу $A$ надо совершить, чтобы выкачать воду из бака? Плотность воды $\rho$. Ускорение свободного падения $g$. (39, 37, 38)

3. Конденсаторы с емкостями $C_1$, $C_2$ и $C_3$ включены в цепь, как показано на рисунке 7. Найти установившиеся заряды конденсаторов. (78, 58, 69)

4. Концы нерастяжимой невесомой нити длины $L$ закреплены в точках $A$ и $B$, находящихся на разных уровнях, как показано на рисунке 8. На нить надета тяжелая бусинка $C$. Пренебрегая размером бусинки и трением, найти расстояние от точки $A$ до вертикали, проходящей через бусинку. (64, 21, 44)

5. Один моль газа участвует в процессе, график которого представлен на рисунке 9, проходя последовательно состояния $K$, $L$, $M$. Внутренняя энергия газа пропорциональна абсолютной температуре ($U = cT$). Найти поглощенное газом в процессе $KLM$ тепло. (36, 16, 27)

6. В тонкостенной непроводящей равномерно заряженной зарядом $Q$ сфере радиуса $R$ и массы $M$ имеются два небольших диаметрально противоположных отверстия. В начальный момент сфера покоится. По прямой, соединяющей отверстия, из бесконечности начинает двигаться со скоростью $v$ частица массы $m$ с зарядом $q$, одноименным с $Q$. Найти время, в течение которого заряд $q$ будет находиться внутри сферы. (36, 0, 19)

*Г. Меледин*

# Новые книги

**В этом году мы продолжаем публикацию аннотаций на книги по математике и физике, издающиеся в 1976 году, которые могут быть интересны нашим читателям. По многочисленным просьбам читателей мы будем также публиковать аннотации на некоторые книги издательств «Молодая гвардия», «Детская литература» и «Знание».**

**В этом номере мы расскажем о книгах, выходящих в первом квартале 1976 года.**

**Большинство этих книг можно приобрести через специализированные магазины «Книга почтой».**

## Математика

### Издательство «Наука»

1. Пойа Д. *Математическое открытие.* Перевод с англ. Издание 2-е. Объем 31 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 64 к.

Имя выдающегося математика и педагога Д. Пойа хорошо известно по его многочисленным научным работам. Однако наибольшей популярностью в среде любителей математики пользуются его двухтомные «Задачи и теоремы из анализа», а также книги «Как решить задачу?» и переизданная в 1975 году «Математика и правдоподобные рассуждения»; в математической литературе книг, равных ей по точности анализа и увлекательности изложения, найти нелегко.

Такой же характер имеет и книга «Математическое открытие». «Математическим открытием» Д. Пойа называет получение любого (сколь угодно скромного!) результата, например, просто решение задачи. Рассматриваемые в этой книге задачи редко требуют знаний, выходящих за пределы программы средней школы, но по своей трудности они зачастую превышают школьный уровень. Для некоторых задач дается их полное решение (хотя и в сжатом виде), для других намечается только несколько первых шагов, а иногда указывается только конечный результат.

2. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. *Элементарное введение в теорию вероятностей.* Издание 8-е, исправленное. Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 27 к.

Роль теоретико-вероятностных методов в самых различных областях знания с каждым годом все увеличивается. Книга Гнеденко и Хинчина отличается от других книг по теории вероятностей тем, что она предъявляет минимальные требования к математическим знаниям читателей — школьного курса вполне достаточно для свободного понимания всех ее разделов.

### Издательство «Просвещение»

3. Виленкин Н. Я. *Индукция. Комбинаторика.* Объем 3 л., тираж 300 000 экз., цена 10 к.

В настоящее время в курс математики средней школы вводятся вопросы, связанные с методами математической индукции и с комбинаторикой. Переход школьного курса математики на теоретико-множественные основы требует нового изложения и этих разделов. Такое изложение и дается в брошюре. Рассмотрение метода математической индукции основывается на системе аксиом Пеано; рассказывается о дедуктивном и индуктивном методах доказательства, разбирается большое количество интересных примеров на применение математической индукции для доказательства тождеств и неравенств. В разделе, посвященном комбинаторике, приводится подсчет числа подмножеств данной мощности и числа отображений данного вида (например, выясняется, сколько существует монотонных отображений, т. е. отображений, сохраняющих порядок; подсчитывается, сколько существует разных отображений одного множества в другое и т. д.). Выводится формула для числа размещений с повторениями; даются приложения комбинаторики к теории вероятностей.

Книга, безусловно, будет полезна всем старшеклассникам, особенно учащимся девятых классов, а также учителям математики и руководителям математических кружков.

### Издательство «Мир»

4. Эбботт Э. Э. *Флатландия.* Перевод с англ. Бюргер Д. *Сферландия.* Перевод с голл. Объем 16 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 04 к.

Серия переводов мало известных советскому читателю книг зарубежных авторов по занимательной математике, которую открыли три книги М. Гарднера (*«Математические головоломки и развлечения», «Математические досуги»* и *«Математические новеллы»*), получила оживленные отклики. В этой серии уже вышло 8 книг. В 1976 году она пополнится еще одной книгой.

Эта книга объединяет два произведения, написанных в разное время и разными людьми: «Флатландия» написана в 1880 году английским педагогом Эдвином Э. Эбботом, а «Сферландия» — в 1957 году голландским математиком Дионисом Бюргером, который продолжил и развил затронутую Эбботом тематику.

Авторы «Флатландии» («Романа о четвертом измерении с иллюстрациями Квадрата») и «Сферландии» («Романа об искривленном пространстве и расширяющейся Вселенной с иллюстрациями Шестиугольника») избрали не совсем обычный путь «постижения» геометрии. И Эббот, и Бюргер как бы ставят себе цель: учить математике так, как узнают мир дети — в игре. Об этих книгах можно сказать, что это — по-настоящему хорошая научная фантастика; их можно поставить где-то между произведениями Льюиса Кэррола и «Гулливером» Джонатана Свифта.

Мир, в котором живет Квадрат, населен двумерными существами. Их представление о «пространстве» — это, по-существу, евклидова геометрия на плоскости. И идеи Квадрата о возможности существования третьего, и даже четвертого измерений кажутся его «современникам» столь бредовыми и опасными, что они сажают Квадрата в тюрьму.

Мир Шестиугольника гораздо сложнее, чем мир его «деда» — это сфера. «Геометрия» сферландцев — это опять-таки геометрия двух измерений (но уже на сфере), однако Бюргер подводит читателя к представлению о трехмерном пространстве, геометрия которого может не быть евклидовой.

Написанные с мягким юмором, книги Эббота и Бюргера пользуются заслуженным успехом у себя на родине. Мы надеемся, что они заинтересуют и наших читателей.

5. Тригг Ч. *Задачи с изюминкой.* (Задачи и олимпиады.) Объем 16 л., тираж 50 000 экз., цена 87 к.

Этой книгой Ч. Тригга, американского математика и педагога, открывается новая серия книг издательства «Мир» — «Задачи и олимпиады», которая будет включать задачи, предлагавшиеся на математических олимпиадах разных стран. Задачи, собранные в книге Тригга, были опубликованы в различных, иногда серьезных математических журналах. Формулируются они довольно сложно, но, как правило, допускают простые, изящные и оригинальные решения. Среди авторов таких решений — известные американские математики.

Большинство задач вполне по силам школьникам старших классов.

## Физика

### Издательство «Наука»

1. Коган Б. Ю. *Сто задач по электричеству.* Объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 14 коп.

Этот сборник задач выпускается в серии «Библиотечка физико-математической школы». Он состоит из ста нестандартных задач по электричеству, носящих занимательный характер. Ко всем задачам даны подробные решения.

Книга рассчитана на учащихся 9—10 классов.

2. Перельман Я. И. *Занимательная физика.* Книга 1. Издание 19-е. Объем 12 л., тираж 400 000 экз., цена 46 коп.

3. Перельман Я. И. *Занимательная физика.* Книга 2. Издание 19-е. Объем 15 л., тираж 400 000 экз., цена 53 коп.

Эти книги написаны известным популяризатором науки. Задача книги не столько сообщить читателю новые знания, сколько помочь ему оживить уже имеющиеся. Несмотря на то, что книга написана давно, она «устарела» лишь в очень незначительной степени.

Рассчитана на интересующихся физикой учащихся средней школы и лиц, занимающихся самообразованием.

4. Компанеец А. С. *Законы физической статистики. Ударные волны. Сверхплотное вещество.* Издание 2-е. Объем 15 л., тираж 40 000 экз., цена 50 коп.

Научно-популярные статьи об основных законах и некоторых важных приложениях статистической физики написаны выдающимся советским физиком-теоретиком проф. А. С. Компанейцем. В популярной и вместе с тем строго научной форме автор рассказывает о статистической физике, об основных законах, управляющих физическими системами из многих частиц, о важных для практики специальных вопросах. Для понимания книги не требуется специальных знаний, но читать ее надо внимательно и вдумчиво.

Сборник рассчитан на школьников старших классов.

5. Шкловский И. С. *Вселенная, жизнь, разум.* Издание 4-е. Объем 22 л., тираж 150 000 экз., цена 1 р. 10 к.

Это — новое издание известной книги, посвященной увлекательной проблеме возможности разумной жизни на других планетных системах. Вместе с тем книга содержит достаточно полное и доступное изложение результатов современной астрофизики. Автор книги — известный советский астрофизик — включил в нее ряд оригинальных идей и гипотез. Отдельная глава посвящена советско-американской конференции в Бюракане, обсуждавшей вопросы связи с внеземными цивилизациями.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся успехами современного естествознания.

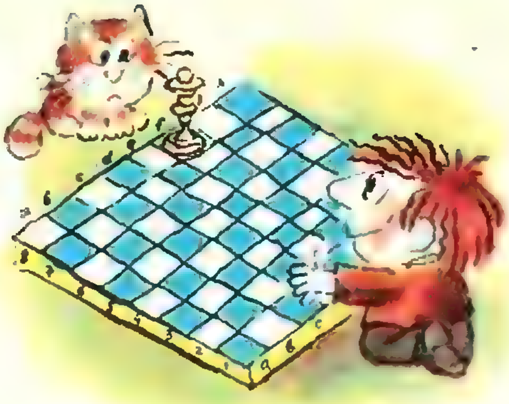
*И. Клумова,*
*М. Смолянский*

## «Квант» для младших школьников

## Задачи

1. На шахматной доске на поле f8 стоит ферзь. Двое по очереди передвигают ферзя либо на несколько клеток вниз, либо на несколько клеток влево, либо на несколько клеток влево — вниз по диагонали. Выигрывает тот, кто загонит ферзя в левый нижний угол — на поле a1. Известно, что в этой игре начинающий, если он играет правильно, всегда выигрывает, как бы хорошо ни играл его партнер. Как же должен играть начинающий, чтобы выиграть? Сколько ходов ему понадобится?

А кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его противник, если вначале ферзь стоит на поле e8?



2. На дачном участке летом стояла палатка. Когда начались морозы, палатку сняли, а участок решили перекопать. Оказалось, что сухая земля непосредственно под палаткой успела промерзнуть сильнее, чем окружающая более влажная земля. Как это объяснить?

3. В классе 35 учеников. Из них 20 занимаются в математическом кружке, 11 — в кружке «умелые руки», 10 ребят не ходят в эти кружки. Сколько «математиков» занимаются в «умелых руках»?

УМЕЛЫЕ РУКИ

4. Расположите на плоскости одинадцать одинаковых квадратов, не налегающих друг на друга, так, чтобы выполнялось следующее условие: как бы ни покрасить эти квадраты тремя красками, обязательно какие-нибудь два квадрата одного цвета будут иметь общий участок границы.

*Л. Фладе*

# Необходимо или достаточно?

Франк давно уже мечтал о собственной железной дороге. И вот в день рождения на столе были разложены рельсы, стрелки, реостат и электровоз с четырьмя вагонами. Был и домик с вывеской «Вокзал». После уроков Франк пригласил в гости своего приятеля Мишу. Сначала ребята построили путь, изображенный на рисунке 1. Франк регулировал скорость поезда с помощью реостата и переводил стрелку № 1 ($C_1$). Миша переводил остальные стрелки. Ребята заметили, что если стрелка $C_1$ поставлена в положение «налево» (по ходу поезда), то поезд не может миновать вокзала (красные стрелки на рисунке 1). Такую зависимость можно сформулировать в виде «если — то»:

(1) *если стрелка $C_1$ поставлена в положение «налево», то поезд приходит к вокзалу.*

Или иначе:

(2) *всегда, если $C_1$ поставлена «налево», то поезд приходит к вокзалу;*

(3) *положения $C_1$ «налево» достаточно, чтобы поезд пришел к вокзалу.*

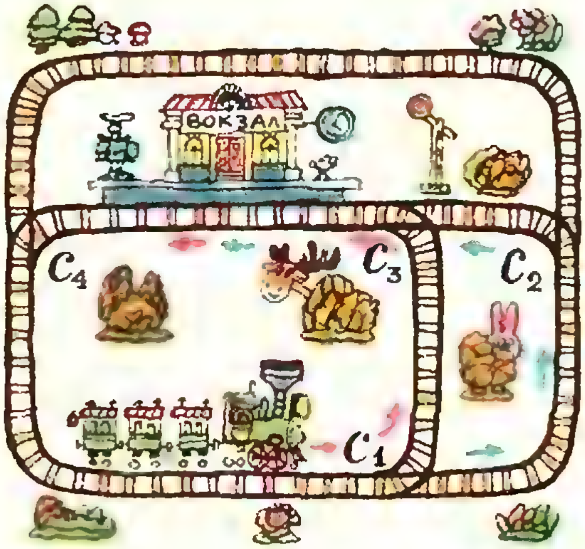


Рис. 1.

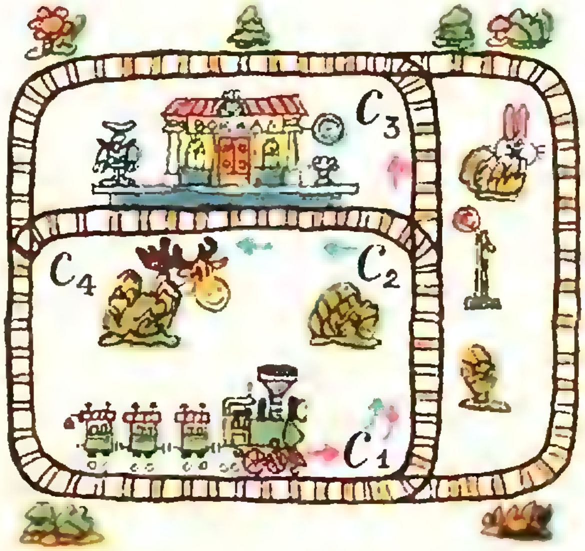


Рис. 2.

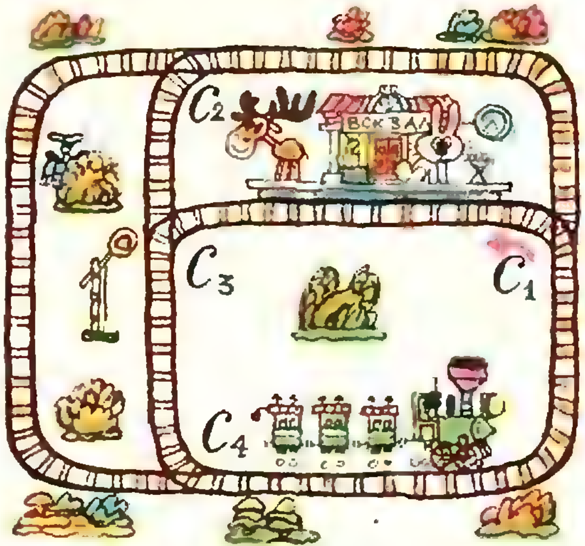


Рис. 3.

---

*) L. Flade. «Notwendig oder hinreichend — das ist hier die Frage». Журнал «Альфа» (ГДР), 1975, № 2. Перевод и обработка А. Халамайзера.

Посмотрим, необходимо ли такое положение $C_1$, чтобы поезд пришел к вокзалу? Оказывается, это не необходимо: при положении $C_1$ «прямо», а $C_2$ «налево» поезд также придет к вокзалу (синие стрелки на рисунке 1).

Переставив отрезок рельсов между стрелками $C_2$ и $C_3$ так, как показано на рисунке 2, ребята заметили, что теперь уже положения $C_1$ «налево» не достаточно для того, чтобы поезд пришел к вокзалу (красные стрелки на рисунке 2). В самом деле, если стрелка $C_1$ установлена «налево», а $C_2$ «прямо», то поезд не попадет к вокзалу; положение же обеих стрелок $C_1$ и $C_2$ «налево» приведет поезд к вокзалу. Ну, а если $C_1$ стоит «прямо», то независимо от положения $C_2$ поезд к вокзалу не придет. Значит, положение $C_1$ «налево» необходимо, чтобы поезд пришел к вокзалу; поезд не может придти к вокзалу, если $C_1$ не стоит «налево». Итак,

(4) *только, если $C_1$ стоит «налево», поезд может придти к вокзалу,*

или иначе:

(5) *поезд приходит к вокзалу только тогда, когда $C_1$ поставлена в положение «налево».*

Тот же смысл имеет предложение

(6) *если поезд приходит к вокзалу, то $C_1$ стоит в положении «налево».*

В школе на уроках математики вы выяснили, что оборот «если — то» связывает условие и заключение теоремы, предложения, высказывания. Посмотрим, что является условием и что — заключением в высказываниях (4), (5), (6). Вероятно, вы заметили, что во всех трех высказываниях условия совпадают: *поезд приходит к вокзалу*. Заключением во всех трех высказываниях будет *$C_1$ стоит в положении «налево»*

Задача 1. Укажите условие в следующих высказываниях.

а) *Если натуральное число делится на 5, то оно делится и на 10.*

б) *Если натуральное число делится на 10, то оно делится и на 5.*

в) *Треугольник ABC только тогда является равносторонним, когда он остроугольный.*

г) *Если ромб имеет прямой угол, то он является квадратом.*

д) *Число делится на 6 только тогда, когда оно делится на 3.*

Задача 2. Заполните пропуски словами «достаточно» или «необходимо», чтобы получились верные высказывания.

а) *Делимость натурального числа на 4. . . . . . . для того, чтобы это число делилось на 8.*

б) *Делимость натурального числа на 8. . . . . . . для того, чтобы это число делилось на 4.*

в) *Свойство треугольника быть остроугольным. . . . . . . для того, чтобы он был равносторонним.*

г) $a < 2$ и $b < 15$. . . . . . . *для того, чтобы было* $a + b < 17$.

д) $a \cdot b = 0$. . . . . . . *для того, чтобы было* $a = 0$ и $b = 0$.

е) $s > 3^3$ и $7 < p < 10$. . . . . . . *для того, чтобы было* $s \cdot p > 3^4$.

Вернемся к нашей железной дороге и рассмотрим схему путей, изображенную на рисунке 3. Выясним, достаточным или необходимым является положение $C_1$ «налево» для прихода поезда к вокзалу. Очевидно, здесь положения $C_1$ «налево» достаточно, чтобы поезд пришел к вокзалу. Или, иначе, высказывание

(7) *если $C_1$ установлена «налево», то поезд приходит к вокзалу*

— верное.

А является ли положение $C_1$ «налево» в схеме на рисунке 3 необходимым условием прихода поезда к вокзалу? Да, конечно, потому что высказывание

(8) *поезд приходит к вокзалу только если $C_1$ установлена «налево»*

— верное.

Итак, в схеме путей, изображенной на рисунке 3, положение $C_1$ «налево» необходимо и в то же время достаточно, чтобы поезд пришел к вокзалу. Такая зависимость может быть выражена словами «тогда и только тогда»:

(9) *поезд приходит к вокзалу тогда и только тогда, когда $C_1$ установлена «налево».*

Вообще, чтобы убедиться, что «$A$ верно тогда и только тогда, когда верно $B$», нужно убедиться в том, что условие $B$ является необходимым, и достаточным для заключения $A$. Если же выполнения условия $B$ достаточно, но не необходимо, или необходимо, но не достаточно, то выражение, содержащее слова «тогда и только тогда», оказывается неверным (ложным).

Задача 3. Какие из следующих высказываний верны:

а) *Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда он равносторонний.*

б) *Натуральное число делится на* $3^2$ *тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на* $4^2-7$.

в) $x < 4$ *необходимо и достаточно для того, чтобы было* $2x < 2^3$.

г) *Диагонали четырехугольника ABCD взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда ABCD — дельтоид* (*дельтоидом* или *ромбоидом* называется выпуклый четырехугольник, имеющий ровно одну ось симметрии, являющуюся его диагональю).

д) *Два параллелограмма имеют одинаковую площадь тогда и только тогда, когда у них совпадают соответственно длины оснований и длины высот.*

Рассматривая расположение рельсовых путей, мы познакомились с важными словами «достаточно» и «необходимо», установили, какие зависимости эти слова характеризуют. Внимательному читателю бросилось в глаза еще одно важное слово: «только». Следующие примеры иллюстрируют большую роль этого маленького слова.

(10) *Если четырехугольник ABCD — дельтоид, то его диагонали взаимно перпендикулярны.*

(11) *Только если четырехугольник ABCD — дельтоид, то его диагонали взаимно перпендикулярны.*

Высказывания (10) и (11) отличаются друг от друга лишь словом «только». Однако добавление этого маленького слова меняет очень многое: высказывание (10) — верное, а высказывание (11) — неверное (ложное)*). Иногда говорят, что высказывание (11) является «обращением» высказывания (10), потому что его можно записать в таком виде:

(11а) *Если в четырехугольнике ABCD диагонали взаимно перпендикулярны, то он — дельтоид.*

Задача 4. Определите, какие из следующих высказываний верны.

а) *Если четырехугольник ABCD имеет хотя бы один прямой угол, то он является квадратом.*

б) *Четырехугольник ABCD является квадратом только тогда, когда он имеет хотя бы один прямой угол.*

в) *Только те фигуры, которые имеют равные площади, конгруэнтны.*

г) *Если фигуры конгруэнтны, то их площади равны.*

д) *Только конгруэнтные фигуры имеют равные площади.*

е) *Для всех натуральных чисел* $a$, $b$ *верно, что если* $a \neq b$, *то* $a^b \neq b^a$.

ж) *Для натуральных чисел верно, что только если* $a \neq b$, *то* $a^b \neq b^a$.

---

*) По этому поводу мы советуем читателю познакомиться также со статьей Л. Фладе «Маленькие слова с большим значением» («Квант», 1973, № 8).

---

# Соревнование художников

Это соревнование хорошо проводить группой в 5—8 человек. Один ученик внятно произносит последовательно координаты точек, а остальные отмечают точки в прямоугольной декартовой системе координат и соединяют каждую точку с предыдущей отрезком прямой линии. Если точки найдены правильно, то в результате получится схематический рисунок какого-либо животного, птицы.

Вот фигуры для такого соревнования.

**1.** (—10,0), (—9,1), (—9,4), (—7,3), (—6,4), (3,1), (0,12), (1,14), (5,12), (1,12), (6,0), (4, —3), (—8, —3), (—10,0).

**2.** (0,0), (—1, —1), (—3,1), (—2,3), (—3,3), (—4,6), (0,8), (2,5), (2,11), (6,10), (3,9), (4,5), (3,0), (2,0), (1, —7), (3, —8), (0, —8), (0, 0).

**3.** (—1, 4), (5, 2), (5,—1), (4, —1), (4, 1), (3, 1), (3, —5), (2, —5), (2, —2), (1, —1), (—3, —1), (—3, —5), (—4, —5), (—4, 0), (—6, 0), (—6, 4), (—8, 3), (—8, 5), (—5, 6), (—5, 7), (—4, 7), (—4, 2), (—1,4).

**4.** (2, 5), (2, 0), (8, 0), (10, 1), (9,—3), (4, —3), (0, —2), (0, —3), (—5, —3), (—5, —2), (—1, —1), (—1, 0), (0, 3), (—2, 3), (—2, 5), (—1, 5), (—1, 6), (2, 5).

## К статье «Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова»

### Математико-механический факультет

1. Если $aq - bp \leqslant 0$, то второй цикл работ не следует начинать; если $aq - bp > 0$, то при $p + \frac{aq}{b} \leqslant 200$ второй цикл работ следует прекратить через $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right)$ часов, а при $p + \frac{aq}{b} > 200$ — через $\frac{100-p}{q}$ часов. Указание. На промежутке $0 \leqslant t \leqslant \frac{100-p}{q}$ надо найти точку, в которой квадратный трехчлен $-bqt^2 + (aq - bp)t + ap$ принимает наибольшее значение.

2. Если $a < b + \frac{1}{4}$, то решений нет; если $a = b + \frac{1}{4}$, то $x = -b - \frac{1}{8}$; если $a > b + \frac{1}{4}$, то $x_{1,2} = -b + \left(\frac{-3 \pm \sqrt{12(a-b)-3}}{6}\right)^3$. Указание. Записать уравнение в виде системы

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ u^3 - v^3 = a - b. \end{cases}$$

3. $$x_1 = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin\left(3a + 1 + \sqrt{6a+3}\right) + \frac{k\pi}{2};$$

$$x_2 = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin\left(3a + 1 - \sqrt{6a+3}\right) + \frac{k\pi}{2}$$

($k$ — целое). Если $a < -\frac{1}{2}$ или $a > 1$, то решений нет; если $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{3}$, то имеется две серии решений $x_1$ и $x_2$; если $-\frac{1}{3} < a < 1$, то имеется одна серия решений $x_2$; при $a = \frac{-1}{2}$, $a = \frac{-1}{3}$ и $a = 1$ решения найдите самостоятельно. Указание. После преобразований для $t = \sin 2x$ получается квадратное уравнение $t^2 - 2(1 + 3a)t + (9a^2 - 2) = 0$. Условие разрешимости этого уравнения есть $a \geqslant -\frac{1}{2}$. Не забудьте, что $|t| \leqslant 1$.

4. $$\frac{1}{2}\left(b + \sqrt{b^2 - a^2}\right), \quad \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right).$$

5. $$2\pi R^2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

### Химический факультет

1. $\frac{p+3q}{50}$ *кг*. 2. $x = 1$, $y = 2$.

3. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

4. $\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}$ *c*, $\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}$ *c*.

5. $$\frac{\pi a^3}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left(3 - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

### Биолого-почвенный факультет

1. 80 *м*³. 2. $0 < x \leqslant \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ или $x \geqslant \frac{3}{2} + \sqrt{2}$. Указание. Для $y = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ получается неравенство $2y^2 - 5y + 2 \geqslant 0$, т. е. $\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \geqslant 2$ или $\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2}$. 2a. $x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Указание. Для $y = x + \frac{1}{2x}$ получается квадратное уравнение $2y^2 - 5y + 2 = 0$, поэтому $x + \frac{1}{2x} = 2$ или $x + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$. 3. $(x, y) = (k\pi, k\pi)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Указание. Из второго уравнения имеем $x = 1$ или $\operatorname{tg} y = 0$. Но $x = 1$ не принадлежит ОДЗ. Если $\operatorname{tg} y = 0$, то $y = k\pi$. Ясно, что в ОДЗ входят только $y = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$. Для таких $y$ из первого уравнения получим

$x=y$. 4. $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+6b^2-8m_c^2}$; $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{3b^2+6a^2-8m_c^2}$. 4а. $\frac{3}{8}R$.

5. $\sqrt{3}\,a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

**Геологический факультет**

1. 28 *м³/мин*. 2. $(2,3)$; $(\log_2 3, 4)$. 3. $x_1=k\pi$ $(k=0, \pm1, \ldots)$, $x_2=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ $(k=0, \pm1, \ldots)$. 4. См. рис. 1. 5. $\frac{a^3\sin\alpha}{\cos(\alpha/2)}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}$.

**Физический факультет**

1. $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$. 2. $u_1=2$, $v_1=1$, $u_2=1$, $v_2=2$. 3. $x=2\pi+4\pi n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. 4. $a=0$. 5. $\frac{15-8\sqrt{2}}{12}\pi\approx0{,}97$.

## К статье «Новосибирский государственный университет»

### Вариант 1

1. При наличии воды стеклянные пластинки практически не препятствуют распространению света, так как показатели преломления стекла и воды близки и среда оказывается оптически почти однородной (вспомните — погруженное в воду стекло становится невидимым). Без воды возникает большое число отражений от пластин; световой поток резко ослабляется: изображение пропадает.

2. $m=\frac{\mu h}{RT}(pS+Mg)$.

3. $q=\frac{4}{5}UC$.

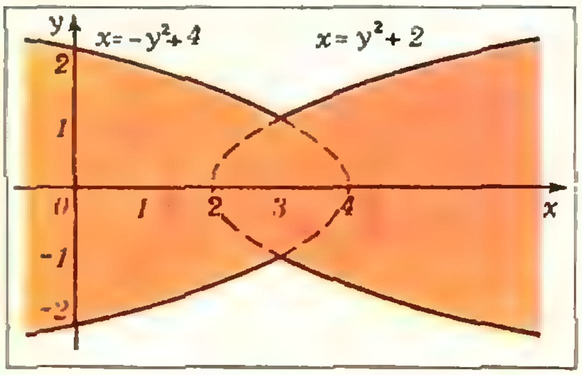


Рис. 1.

4. Из закона сохранения энергии $2\frac{mv^2}{2}=\frac{q^2}{2a}+2\frac{q^2}{a}$ получаем

$$v=q\sqrt{\frac{5}{2am}}.$$

5. Обозначим высоту уровня жидкости над пробкой через $H$. Запишем условие отсутствия движения пробки: $p_{\text{средн}}S \geqslant F_{\text{тр}}+pS$, где $p_{\text{средн}}=p+\rho g\left(H+\frac{h}{2}\right)$, $S=ah$ ($a$ — ширина пробки), $F_{\text{тр}}=k\times(\rho gH+p)\,la$. Отсюда получаем

$$H\geqslant\frac{kpl-\rho gh^2/2}{\rho g(h-kl)}$$

при

$$kl<h<\sqrt{\frac{2kpl}{\rho g}} \text{ или } \sqrt{\frac{2kpl}{\rho g}}<h<kl.$$

6. $t=2a/v$. Указание. Удобнее всего решать задачу в системе отсчета, связанной с центром масс системы шарик — рамка.

### Вариант 2

1. «Водолаз» плавает, когда его вес равен весу вытесненной воды. Если игрушка сделана из эластичного материала (например, из резины), то, сдавливая ее (поддувая воздух через трубку), можно заставить «водолаза» тонуть (при уменьшении объема уменьшается выталкивающая сила). По мере погружения увеличивается гидростатическое давление, которое дополнительно сжимает игрушку. Существует критическая глубина, начиная с которой уже без поддува «водолаз» сжат настолько, что выталкивающая сила меньше веса «водолаза». Если игрушка уже достигла критической глубины, то при освобождении трубки она будет продолжать тонуть. Если «водолаз» еще не дошел до критической глубины, он начнет всплывать.

2. $U_{12}=IR/15$.

3. Из-за отсутствия трения силы реакции $\mathbf{N}_A$ и $\mathbf{N}_B$ направлены по соответствующим радиусам. Условия равновесия обруча дают

$$N_A=\frac{P\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \text{ и } N_B=\frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

при $\alpha+\beta<\pi$.

4. $h=\frac{2u\,|v\cos\alpha-u|\operatorname{tg}^2\alpha}{g}$.

5. Внутренняя энергия, а значит, и температура газа будут увеличиваться до тех пор, пока скорости обоих поршней не станут одинаковыми и равными $2v$. Поэтому разумно решать задачу в системе отсчета, движущейся вправо со скоростью $2v$. Запи-

сав закон сохранения энергии $2\frac{mv^2}{2}+cT_0=\dot{c}T$, получаем

$$T=T_0+\frac{mv^2}{c}.$$

6. При движении прута в нем возникает э. д. с. индукции, мгновенное значение которой $\mathscr{E}=B\frac{\Delta S}{\Delta t}=Bvh=Bv^2t\operatorname{tg}\alpha$ ($h=vt\operatorname{tg}\alpha$ — перемещение прута за время $t$). Мгновенное значение тепловой мощности равно $P(t)=\frac{\mathscr{E}^2}{R}=\frac{B^2v^4t^2\operatorname{tg}^2\alpha}{rvt\operatorname{tg}\alpha}=\frac{B^2v^3\operatorname{tg}\alpha}{r}t$ ($R=rvt\operatorname{tg}\alpha$ — сопротивление цепи). Полное количество теплоты, выделяющееся в цепи за время $T=\frac{l}{v}$ — время движения прута от точки $A$ до точки $C$, равно

$$Q=P_{\text{средн}}T=\frac{P(T)}{2}T=\frac{B^2l^2v\operatorname{tg}\alpha}{2r}.$$

### Вариант 3

1. При нагревании воздуха его плотность уменьшается ($\rho=p\mu/RT$) и начинается конвекция: менее плотный нагретый воздух, обедненный кислородом, поднимается вверх. На его место поступает более холодный воздух, обеспечивая приток к пламени необходимого для его горения кислорода. Эти встречные потоки воздуха тормозят друг друга и частично перемешиваются. При нехватке кислорода пламя коптит (содержит большое количество несгоревшего, неокислившегося углерода — сажи).

Трубка создает заметный ток воздуха, обусловленный разностью давлений на ее концах; при этом взаимодействие с противотоком отсутствует. Это обеспечивает большую скорость тока (воздух в восходящую струю попадает лишь снизу, где давление максимально) и отсутствие попадания продуктов сгорания в подтекающую струю. Когда же трубка закрыта, нагретый воздух начинает течь вдоль внешней поверхности трубки, что ощутимо ограничивает доступ свежего воздуха. Пламя может даже погаснуть.

2. $A=\rho gh^3(H-h/2)$.

3. $q_1=C_1U$; $q_2=\frac{C_2U}{1+R_2/R_1}$;

$$q_3=\frac{C_3U}{1+R_1/R_2}.$$

4. На бусинку действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и силы натяжения $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ (рис. 2), причем силы натяжения одинаковы по абсолютной величине (поскольку нить невесома). Отсюда $\widehat{ACD}=\widehat{DCE}$, $AD=DE=x$ и $AC=CE$. Из подобия треугольников $DEC$ и $BEF$ следует, что $AC=Lx/l$, где $L=AC+CB$ — длина нити. По теореме Пифагора для треугольника $BEF$ имеем: $EF^2+FB^2=EB^2$, или $(l-2x)^2+h^2=(L-2Lx/l)^2$, откуда

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(l\pm\frac{h}{\sqrt{(L/l)^2-1}}\right).$$

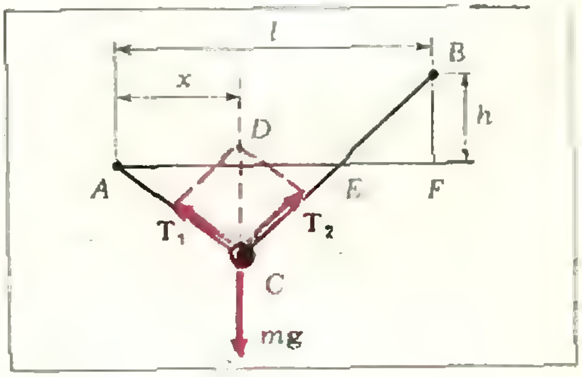


Рис. 2.

5. Согласно первому закону термодинамики $Q=\Delta U+A$. Изменение внутренней энергии $\Delta U=c(T_M-T_K)$. Из уравнения состояния идеального газа $T_M=\frac{p_1V_2}{R}$ и $T_K=\frac{p_1V_1}{R}$, поэтому $\Delta U=\frac{cp_1}{R}(V_2-V_1)$. Работу $A$, совершенную газом при расширении от объема $V_1$ до объема $V_2$, можем найти графически (см. рис. 9 в статье): $A=p_{\text{средн}}\times\times(V_2-V_1)=\frac{1}{2}(p_1+p_2)(V_2-V_1)$. Тогда окончательно для количества теплоты $Q$, поглощенного газом, имеем

$$Q=\Delta U+A=$$

$$=(V_2-V_1)\left[p_1\left(\frac{c}{R}+\frac{1}{2}\right)+\frac{p_2}{2}\right].$$

6. Запишем законы сохранения энергии и импульса для системы шарик — сфера:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2}+\frac{Qq}{R},$$

$$mv=mv_1+Mv_2.$$

Здесь $v_1$ — скорость шарика и $v_2$ — скорость сферы в тот момент, когда шарик влетает в первое отверстие сферы. Внутри сферы электрического поля нет, поэтому шарик движется от одного отверстия до другого прямолинейно и равномерно с относительной скоростью $v_{\text{отн}}=v_1-v_2$. Время его движения равно

$$t=\frac{2R}{v_1-v_2}=$$

$$=\frac{2R}{\sqrt{v^2-\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{2Qq}{Rm}}}.$$

причем $\frac{Mm}{M+m}\frac{v^2}{2} > \frac{Qq}{R}$.

### К статье «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

*(См. «Квант» № 3)*

## Математика

### Механико-математический факультет

1. При любом $x$ имеем $x^2+4x+6=(x+2)^2+2>1$, поэтому область допустимых значений неравенства совпадает с множеством всех действительных чисел. Представим левую часть неравенства в виде $2t^2+6t$, где $t=\sqrt{\log_3(x^2+4x+6)}$. Пользуясь тем, что неравенство $2t^2+6t\geqslant 8$ имеет решения $t\leqslant -4$, $t\geqslant 1$, а также тем, что множество значений функции $\sqrt{\log_3(x^2+4x+6)}$ лежит в области положительных чисел, найдем, что неравенство $\sqrt{\log_3(x^2+4x+6)}\geqslant 1$ равносильно исходному. Левая и правая части этого неравенства положительны при всех $x$, поэтому оно равносильно неравенству $\log_3(x^2+4x+6)\geqslant 1$, а последнее, в свою очередь, неравенству $x^2+4x+6\geqslant 3$ (мы воспользовались тем, что логарифмическая функция с основанием 3 монотонно возрастает). Решая последнее неравенство, находим ответ: $x\leqslant -3$, $x\geqslant -1$.

2. Обозначив $2^{x^2+(y+1)^2}$ через $t$, найдем из первого уравнения системы, что $t^2-32=31t$. Этому равенству удовлетворяют только два числа: $-1$ и 32. Поскольку $t>0$, то $t=32$, откуда $x^2+(y+1)^2=5$.

Далее, из второго уравнения системы получаем, что при некотором целом $K$ выполняется равенство $\pi\cdot(x^2+y^2)=2\pi K$, или $x^2+y^2=2K$, откуда следует, что $K\geqslant 0$. С другой стороны, имеем: $x^2+(y+1)^2-(x^2+y^2)=2y+1=5-2K$, откуда $y=2-K$. С учетом условия $y\geqslant 0$ получаем: $K_1=0$, $K_2=1$, $K_3=2$. Теперь $x=\pm\sqrt{6K-4-K^2}$, отсюда находим ответ: $(1,1)$, $(-1,1)$, $(2,0)$, $(-2,0)$.

3. $(\alpha-\beta)/2$. Указание. Точка $K$ равноудалена от прямых $AP$ и $AD$, поэтому прямая $AK$ является биссектрисой угла $PAD$.

4. $SD=9$. Указание. Рассматривая сечение пирамиды и шара плоскостью $ASK$, легко найти, что $AB=6$. Далее легко показать, что точки $M$ и $N$ равноудалены от точки $K$. Найдутся два положения точек $M$ и $N$ в треугольнике $ABC$ ($MN=5$), лишь при одном из них плоскость пересечет продолжение $SK$ за точку $K$.

5. Решая уравнение $\sin x-\cos 6x=\sin 3x-\cos 8x$, получаем серии: $x_1=K\pi$, $x_2=(4K-1)\pi/10$, $x_3=(4K+3)\pi/18$ ($K$ — целое). В промежуток $(-4;\ -2{,}5)$ попадают $-\pi$, $-9\pi/10$, $-7\pi/6$, $-17\pi/18$, из которых только $-9\pi/10$ и $-7\pi/6$ лежат в ОДЗ (в ходе решения требуется доказать неравенство $\sin\frac{\pi}{18}>\frac{1}{6}$).

### Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $x\leqslant -5$, $1\leqslant x<\frac{8+\sqrt{22}}{3}$. 2. $x_1=-\frac{\text{[illegible]}}{7}$, $y_1=\pm\arcsin\frac{2\sqrt{7}}{7}+K\pi$; $x_2=\frac{-2-3\pi}{7}$, $y_2=\pm\arcsin\sqrt{\frac{4-\pi}{7}}+K\pi$, $K=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$ 3. $\frac{d-\sqrt{d^2-c^2}}{\text{[illegible]}}$, $\frac{d+\sqrt{d^2-c^2}}{2}$. 4. $42\,m$. 5. $2r^2\sqrt{3}$.

### Физический факультет

1. $x=\frac{-2+K\pi}{5}$, $K=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$

2. $x=3$. 3. $\frac{3}{7}<x<\log_5 2$, $x>1$.

4. $\frac{8}{5}b^2\sqrt{11}$. 5. $\frac{a\sqrt{137}}{\sqrt{12}}$. Указание. Центр искомого шара является и центром шара, описанного около пирамиды $KLMN$.

### Биологический факультет

1. 65 деталей в час. 2. $p=1$. Указание. Дискриминант квадратного уравнения должен быть равен нулю. 3. $AM=17/4$. 4. $x_1=\pi+2k\pi$, $x_2=\pm(\pi/2)+2k\pi$, $x_3=\pm(\pi/6)+2k\pi$, где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$ 5. Все целые числа $n$, удовлетворяющие условию $-1\leqslant n\leqslant 13$. Указание. Данное неравенство выполняется, если или

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{5}-n+13>1, \\ 0<\frac{\sqrt{16-n}}{\sqrt{n+11}+1}\leqslant 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 0<2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{5}-n+13<1, \\ \frac{\sqrt{16-n}}{\sqrt{n+11}+1}>1. \end{cases}$$

Нужно заметить, что $\mathrm{tg}\,(\pi/6)<\mathrm{tg}\,(\pi/5)<\mathrm{tg}\,(\pi/4)$, и потому $1<2\,\mathrm{tg}\,(\pi/5)<2$.

### Химический факультет

1. $0 \leqslant x < 4$. 2. Январская добыча второй шахты больше январской добычи первой шахты на 3100 *т*.

3. $9(11 + 4\sqrt{6}):50$.

4. $R^3\sqrt{6}/4$.

5. $2k\pi < a \leqslant 2k\pi + \pi$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$ Указание. Из второго уравнения системы следует, что $x > 0$, $0 < y < a$ и $a - y = x$. С учетом последнего равенства первое уравнение системы принимает вид $\sin 3x + 3\sin x = 0$, или $\sin x\,(3 - 2\sin^2 x) = 0$, откуда $\sin x = 0$, т. е. $x = n\pi$, где $n$ — натуральное число. Таким образом, при $a \leqslant 0$ данная система решений не имеет, а при фиксированном $a > 0$ имеет решения $x = n\pi$, $y = a - n\pi$, где $n$ — натуральное число, удовлетворяющее неравенству $0 < n < a/\pi$. Остается более точно подсчитать зависимость числа решений от значения $a$ и определить, при каких $a > 0$ эта система имеет четное число решений.

### Факультет почвоведения

1. 1/3 всей работы. 2. $x = \pm(\pi/6) + k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Указание. Представьте данное выражение в форме $-\cos^2 2x + \cos 2x + 3$ и найдите наибольшее значение квадратного трехчлена $-z^2 + z + 3$ на отрезке $-1 \leqslant z \leqslant 1$. 3. $x_1 = 1/3$, $x_2 = 5/3$. 4. $2(6 + 4\sqrt{3})/3$. Указание. Докажите, что радиус второй окружности также равен 1 и что упомянутый в условии задачи отрезок есть отрезок от вершины острого угла параллелограмма до ближайшей к ней точки касания. Убедитесь, что длина отрезка стороны параллелограмма от вершины тупого угла до ближайшей к ней точки касания равна $\sqrt{3}/3$. 5. Указание. Заметьте, что $\cos(15/7) < 0$. Докажите, что неравенство $z + \dfrac{3}{z} < 4$ справедливо при $1 < z < 3$. Покажите, что $1 < \log_2 7 < 3$.

### Геологический факультет

1. $x = k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 2. 10 *м³/час*. 3. $1/2 < x < 1$, $(\sqrt[3]{10} + 1)/2 < x < (\sqrt[3]{100} + 1)/2$. Указание. Заметьте, что область допустимых значений неравенства определяется условиями $x > 1/2$, $x \neq 1$. Введите новую неизвестную $z = \log_{10}(2x - 1)^3$. 4. $44\sqrt{2}/45$. Указание. Для отыскания длины отрезка $DE$ используйте свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника и свойство касательной и секущей, проведенных к одной окружности. 5. $6 - \sqrt{4\sqrt{5} - 8} < x \leqslant 7$. Указание. Заметьте, что область допустимых значений неравенства есть отрезок $5 \leqslant x \leqslant 7$. Покажите, что неравенство

$$-\sqrt{x-5} + \sqrt{-x+7} \leqslant 0$$

выполнено при $6 \leqslant x \leqslant 7$, так что этот отрезок входит в решение рассматриваемого в задаче неравенства. На отрезке $5 \leqslant x \leqslant 6$ обе части неравенства неотрицательны, и потому допустимо возведение обеих его частей в квадрат. Далее введите новую неизвестную $z = \sqrt{(x-5)(-x+7)}$, причем интерес представляют только значения $0 \leqslant z \leqslant 1$.

### Географический факультет

1. 40 *м/мин*. 2. $x = \pm(2\pi/3) + 2k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 3. $x = 2$. 4. $4\sqrt{3} : 7\pi$. Указание. Используя свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника $BAP$, покажите, что $\angle ABP = 30^\circ$. Докажите, что $AM = BP$, а потому $\triangle AMB = \triangle APB$. 5. $x = 2\pi/3$, $y = 7 - 2\pi$.

## Физика

### Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Центростремительное ускорение точек обода вала равно $a_ц = v^2/R$, где $v$ — линейная скорость этих точек. Поскольку веревка по валу не скользит, линейная скорость $v$ равна скорости разматывания веревки, т. е. скорости движения груза $v_г$. Эту скорость можно найти из известных соотношений для равноускоренного движения без начальной скорости:

$$h = at^2/2 \quad \text{и} \quad v_г = \sqrt{2ah_1}, \text{ где } h_1 = h/2.$$

Тогда окончательно

$$a_ц = \frac{2h^2}{Rt^2} = 0{,}8 \ м/сек^2.$$

2. Обозначим через $v_0$ начальную скорость, $h_0$ — максимальную высоту подъема и через $v$ — скорость тела на высоте $h$, соответствующей равенству его кинетической и потенциальной энергий: $mv^2/2 = mgh$ ($m$ — масса тела).

С другой стороны, по закону сохранения энергии $mv^2/2 + mgh = mv_0^2/2$. Из этих уравнений можно найти высоту $h$: $h = \dfrac{v_0^2}{4g}$. Теперь определим максимальную высоту, на которую поднимается тело при данном угле $\alpha$ и начальной скорости $v_0$. По закону сохранения энергии $mv_0^2/2 = mgh_0 + m(v_0\cos\alpha)^2/2$ (скорость в верхней точке равна $v_0\cos\alpha$), откуда $h_0 = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$. Очевидно, условие задачи может быть выполнено, если

$$h \leqslant h_0, \text{ т. е. } \frac{v_0^2}{4g} \leqslant \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Отсюда $\sin\alpha \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, и $\alpha_{\min} = 45^\circ$.

3. При отсутствии тепловых потерь производительность дистиллятора определяется только мощностью нагревателя. Действительно, масса $\Delta m$ испарившейся (дистиллированной) воды зависит от количества выделившейся теплоты: $\Delta m\lambda = U^2\Delta t/R$. Здесь $\lambda$ — удельная теплота парообразования воды, $R$ — сопротивление нагревателя, $U$ — напряжение сети, к которой подключают дистиллятор. Тогда $q = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{U^2}{R\lambda}$. Найдем производительности дистиллятора для каждой спирали в отдельности: $q_1 = \frac{U^2}{R_1\lambda}$ и $q_2 = \frac{U^2}{R_2\lambda}$, для последовательно соединенных спиралей $(R_3 = R_1 + R_2)$: $q_3 = \frac{U^2}{(R_1 + R_2)\lambda}$ и для параллельно соединенных спиралей $\left(R_4 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)$: $q_4 = \frac{U^2(R_1 + R_2)}{R_1R_2\lambda}$. Отсюда

$$\frac{q_4}{q_3} = \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1R_2} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{q_1q_2} = 4{,}5.$$

4. При изменении магнитного потока в катушке возникает электродвижущая сила индукции $\mathscr{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, и по замкнутой катушке течет ток $I = \frac{\mathscr{E}_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. По условию задачи магнитное поле убывает равномерно. Это значит, что через катушку течет постоянный ток, поэтому величина протекшего заряда $q = I\,\Delta t = -\frac{1}{R}\Delta\Phi$. Изменение магнитного потока $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -BSN = -BN\pi d^2/4$. Таким образом,

$$q = \frac{B\pi d^2N}{4R} \approx 5\cdot10^{-3}\ \text{к}.$$

5. Обозначим расстояние от кадра до объектива через $d$, а расстояние от объектива до экрана через $f$. Линейное увеличение объектива $\Gamma = \frac{f}{d}$. Кроме того, $d + f = L$. Отсюда $d = \frac{L}{1 + \Gamma}$ и $f = \frac{\Gamma L}{1 + \Gamma}$.

Теперь, применив формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

найдем фокусное расстояние объектива: $F = \frac{df}{a + f} = \frac{\Gamma L}{(1 + \Gamma)^2}$, где $\Gamma = \frac{4\ \text{м}}{4\cdot10^{-3}\ \text{м}} = \frac{3\ \text{м}}{18\cdot10^{-3}\ \text{м}} \approx 166{,}7$. Окончательно

$$F = \frac{\Gamma L}{(1 + \Gamma)^2} \approx 10\ \text{см}.$$

6. Построим изображение предмета в данной оптической системе. Ход лучей показан на рисунке 3. Из подобия треугольников $A_1O_1B_1$ и $A_2O_2B_2$ следует, что $\frac{a}{x} = \frac{F_1}{F_2}$. Отсюда длина изображения $x$ равна

$$x = a\frac{F_2}{F_1} \approx 1{,}2\ \text{см}.$$

Заметим, что решение то же, если $l < F_1$.

**Физический факультет**

1. По закону сохранения энергии

$$mgl + mg\frac{l}{2} - 2mg\frac{l}{2} =$$

$$= \frac{m\omega^2l^2}{2} + \frac{m\omega^2(l/2)^2}{2} + \frac{2m\omega^2(l/2)^2}{2}.$$

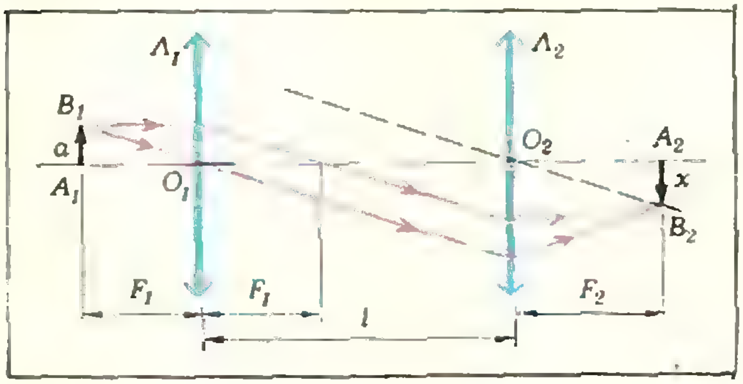


Рис. 3.

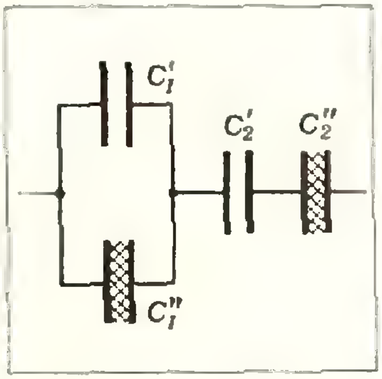


Рис. 4.

Отсюда находим угловую скорость $\omega$ и подставляем в выражение для искомой линейной скорости:

$$v = \omega \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{gl}{7}}.$$

2. Запишем закон Менделеева — Клапейрона для сухого воздуха и водяного пара, находящихся в сосуде:

$$p_в V = \frac{m_в}{\mu_в} RT, \qquad (1)$$

$$p_п V = \frac{m_п}{\mu_п} RT. \qquad (2)$$

Все величины с индексом «в» относятся к воздуху, а с индексом «п» — к парам воды. По закону Дальтона давление в сосуде равно сумме парциальных давлений содержащихся в нем газов:

$$p_в + p_п = p_0. \qquad (3)$$

Согласно определению относительной влажности давление насыщающего водяного пара $p_н$ равно

$$p_н = \frac{p_п}{\varepsilon} 100, \qquad (4)$$

и по условию задачи

$$m_в + m_п = M. \qquad (5)$$

Из системы уравнений (1) — (5) находим

$$p_н = \frac{100}{\varepsilon(\mu_в - \mu_п)} \left( p_0 \mu_в - \frac{MRT}{V} \right).$$

3. При последовательном соединении конденсаторов суммарная емкость $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$. Представим данное соединение конденсаторов (см. рис. 2 в статье) в виде эквивалентной схемы, изображенной на рисунке 4. Из схемы ясно, что

$$C_1 = C_1' + C_1'' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon (S/2)}{d} + \frac{\varepsilon_0 (S/2)}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} (\varepsilon + 1),$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_2'} + \frac{1}{C_2''} = \frac{d/2}{\varepsilon_0 \varepsilon S} + \frac{d/2}{\varepsilon_0 S}.$$

Тогда окончательно

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \cdot \frac{2\varepsilon(\varepsilon + 1)}{(\varepsilon + 1)^2 + 4\varepsilon}.$$

4. Ход лучей через призму показан на рисунке 5. Из треугольника $AOO'$ $L \operatorname{tg} \delta = a + d$, где $\delta = \beta - \alpha$ (см. рис. 6). Согласно закону преломления угол падения $\alpha$ и угол преломления $\beta$ связаны соотношением $\sin\alpha/\sin\beta = 1/n$. Поскольку углы $\alpha$, $\beta$ и $\delta$ малы, можно считать, что $\operatorname{tg}\delta = \delta$, $\sin\alpha = \alpha$ и $\sin\beta = \beta$. Тогда получаем $L\delta = a + d$ и $\delta = \alpha(n - 1)$. Отсюда

$$\alpha = \frac{a + d}{L(n - 1)} = \frac{3}{57} \text{ рад} \approx 3°.$$

5. Из-за присутствия плоскопараллельной пластинки световой пучок в месте нахождения фотоэлемента становится шире (рис. 7), и поэтому полностью фотокатод не перекрывается. Согласно закону фотоэффекта величина фототока пропорциональна световому потоку, падающему на фотокатод. Следовательно, гальванометр покажет ток $I_1$ такой, что $\frac{I_1}{I} = \frac{d^2}{d_1^2}$, где $d_1$ — новый диаметр светового пучка. Из рисунка 7 видно, что $d_1 = d + 2a$, где $a = H(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = H \operatorname{tg}\alpha \left(1 - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = H \frac{D/2}{F} \left(1 - \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$. Поскольку $D \gg F$, можно считать, что $\operatorname{tg}\beta / \operatorname{tg}\alpha = \sin\beta / \sin\alpha = 1/n$. Окончательно получим

$$I_1 = I \frac{d^2}{d_1^2} = I \frac{d^2}{\left[d + H \frac{D}{F}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]^2}.$$

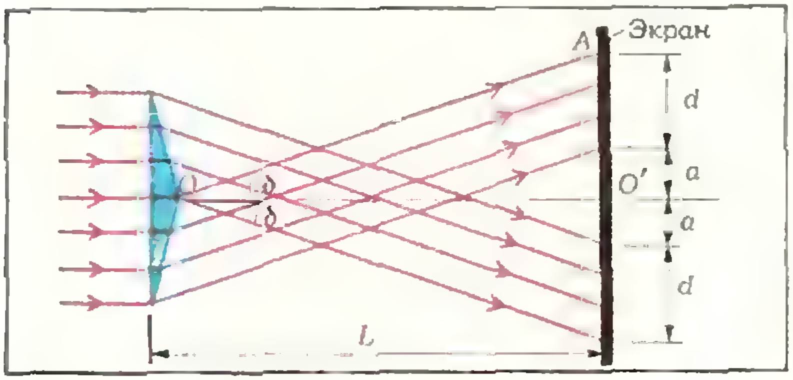


Рис. 5.

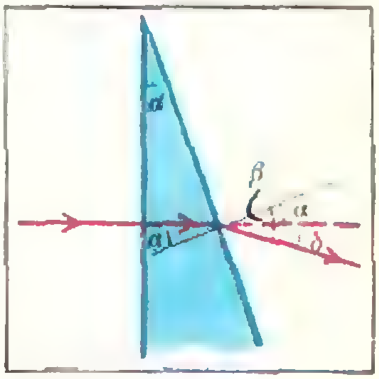


Рис. 6.

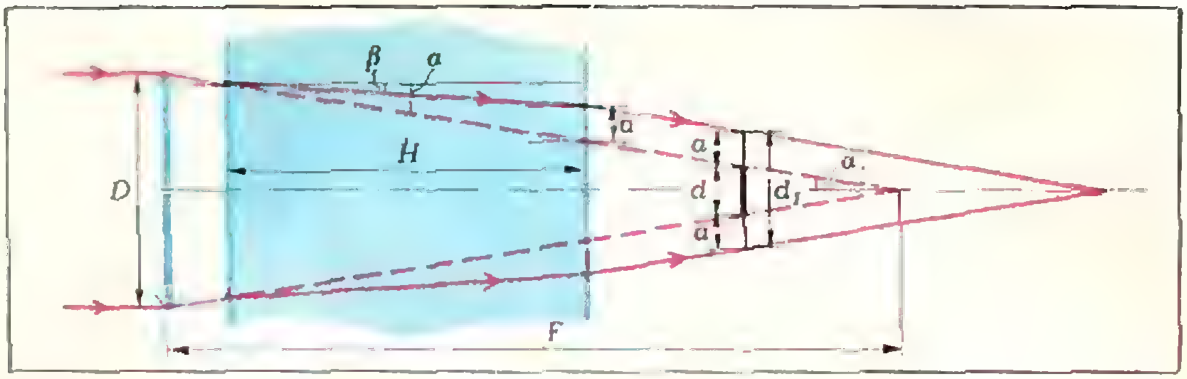


Рис. 7.

### Химический факультет

1. $h=\frac{3}{8}\frac{v^2}{g}\approx 0{,}6$ *м.*

2. $v=2\sqrt{\frac{3}{5}gl}\approx 4{,}2$ *м/сек.*

3. $m_л=m_в\frac{c_в(t_в-t)}{c_л(t_0-t_л)+r+c_в(t-t_0)}\approx$ $\approx 0{,}22$ *кг* (здесь $t_0=0^\circ$ C — температура плавления льда).

4. $A=\frac{q\cdot|q_1|}{\pi\varepsilon_0 l}\left(\sqrt{2}-1-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

5. $\varphi_C=\frac{2\varphi_A\varphi_B}{\varphi_A+\varphi_B}=24$ *в.*

6. $l={}^3/_2F$. Указание. См. рис. 8.

### Биологический, географический, геологический факультеты и факультет почвоведения

1. $T=\frac{m(g+a)}{2\cos\alpha}$.

2. $n=\frac{V+V_0}{V}=1{,}2$.

3. $\tau_2=\tau_1\frac{\lambda}{c(t_к-t_1)}\approx 30$ *мин* (здесь $t_к=$ $=100^\circ$ C — температура кипения воды).

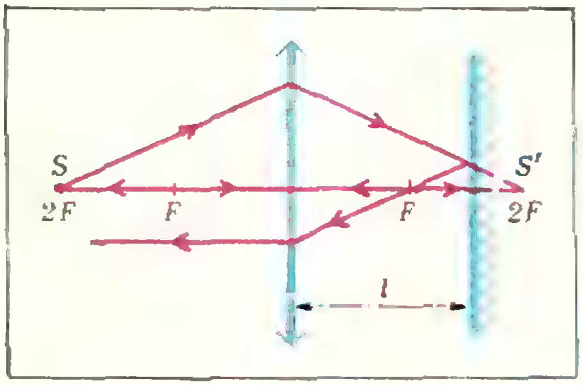


Рис. 8.

4. $U_C=\frac{2}{3}\mathscr{E}=8$ *в.*

5. Изображение меньше предмета в 4 раза.

### К статье «Ошибки Степы Мошкина»

*(см. «Квант» № 3)*

1. а) Да. б) Да.

2. Параллелограмм — обобщение понятий ромба, прямоугольника, квадрата, так как множество параллелограммов шире, чем множества ромбов, прямоугольников, квадратов. Ромб и прямоугольник — обобщение квадрата.

3. Оба высказывания неверны. Пересечением множества ромбов и множества прямоугольников является множество квадратов.

4. а) Исключение из степиного определения параллелограмма свойств (2)—(5) к новому понятию не приведет, так как свойства (2)—(5) — следствия свойства (1).

б) Да.

5. Да, так как легко доказать, что если в параллелограмме две смежные стороны конгруэнтны, то конгруэнтны все стороны.

6. $У$ — новое понятие — обобщение понятия параллелограмма, так как в множество четырехугольников, имеющих пару конгруэнтных углов, кроме параллелограммов входят, например, и равнобедренные трапеции. Таким образом, $П\subset У$.

7. Нет. Всякий параллелограмм имеет центр симметрии, и всякий четырехугольник, имеющий центр симметрии, — параллелограмм. Таким образом, не всякая замена свойств, входящих в определение понятия, приводит к новому понятию.

8. Указание. Достаточно проверить свойство лишь для первых 4 строк, по ним легко заполняются остальные. (См. таблицу на с. 64.)

9. Степа определил понятие не трапеции, а многоугольника, обладающего указанными им свойствами 1 и 2. Это произошло потому, что вместо множества четырехугольников он указал более широкое множество многоугольников.

| Свойства | Центральная симметрия | Поворот на угол $\alpha$ ($\alpha\neq 180°$) | Параллельный перенос на ненулевое расстояние |
|---|---|---|---|
| 1 | Да | Нет | Да |
| 2 | Да | Да | Нет |
| 3 | Да | Да | Нет |
| 4 | Нет | Да (при $\alpha = 120°$) | Нет |

**10** а) Нового понятия не получится, так как всякий четырехугольник с конгруэнтными сторонами—ромб Это объясняется тем, что в определении ромба в учебнике сделано отступление от минимальности числа свойств, указываемых в определении (достаточно было бы указать, что *ромб —это параллелограмм, две смежные стороны которого конгруэнтны*)

б) Да Новому определению удовлетворяет, например, правильный шестиугольник

**К задачам «Квант» для младших школьников** (*см «Квант» № 3*)

**1** Надо 35 точек соединить отрезками так, чтобы каждая была соединена с 11 другими Тогда концов отрезков будет 35 11, но это число — нечетное

**2** Уровень воды понизился

**3** Девять задач Решение Пусть было предложено $a$ задач Тогда работ, в которых все задачи решались, будет не более $a+1$ (от $a$ плюсов и 0 минусов до 0 плюсов и $a$ минусов), работ, в которых лишь одна задача не решалась (одна оценка «ноль»), будет не более $a$ (от $a-1$ плюсов и 0 минусов до 0 плюсов и $a-1$ минусов) и т д Сумма $(a+1)+a+\ \ +1$ равна $\dfrac{(a+1)(a+2)}{2}$

При $a=9$ будет $\dfrac{10\ 11}{2}=55$

**4** Сверху в бутылке находится масло Но если закрытую бутылку перевернуть «вверх ногами», то внизу, у горлышка, окажется уксус Так что можно выливать из бутылки и масло, и уксус

**К кроссворду (см. с. 19)**

По вертикали **1** Слоноун **2** НОТКА **3** Делец **4** Каракуль **5** Анаконда **6** Федот **7** Амазонка **8** Килозаяц **9** Леший **10** Карбонарий **11** Овал **12.** Тире **13** Атлас **14** Озноб **15** Яровая **16** Кулон **17** Нокалф **18** Вокал.

По горизонтали **1** Бангладеш **2** Деканат **3** Ломбард **4** Эвакуация **5** Кафтан **6** Скалка **7** Закладка **8** Лошадник **9** Набла **10** Выводок **11** Яичница **12** Агнец **13** Весталка **14** Опечатка **15** Ядрон **16** Окуляр. **17** Огниво **18** Листва **19** Бамбук

# Подвиг, который будет жить в веках

15 лет прошло с того дня, когда советский космический корабль «Восток» поднял в заоблачные высоты первого космонавта Юрия Гагарина Человек впервые оказался один на один с космическим пространством Героический полет был завершен успешно

15 лет — небольшой для истории срок Но как много сделано за это время в области исследования и использования космического пространства! Более тридцати советских космонавтов совершили свои полеты на кораблях «Восток», «Союз» и космических станциях «Салют», а некоторые из них уже дважды побывали в космическом пространстве Интенсивно развиваются исследования Луны и планет Солнечной системы Космические исследования приобрели международный характер Успешно осуществляются научные программы «Интеркосмос», завершена первая советско-американская космическая программа «Союз — Аполлон»

Полет Юрия Гагарина был отмечен выпуском большого количества почтовых марок во многих странах О некоторых из этих марок мы рассказали в четвертом номере нашего журнала за 1973 год Отдавая дань глубокого уважения подвигу Гагарина, многие страны продолжают выпускать почтовые марки, посвященные его полету Особенно много таких марок было выпущено в 1971 году, к десятой годовщине полета Мы приводим здесь советские и иностранные марки с изображением Юрия Гагарина и космического корабля «Восток», выпущенные после 1970 года

*В Лешковцев*

Номер оформили художники
Е Верентинова В Карцев, Г Красиков
Э Назаров

---

Корректор Л И Боровина

---

113035, Москва Ж 35, Б Ордынка 21/16
«Квант», тел 231 83 62 Сдано в набор 21/I 76 г
Подписано в печать 5/III 76 г
Бумага 70×108¹/₁₆ Физ печ л 4
Усл печ л 5,2 Уч изд л 6 07 Т 03619
Цена 30 коп Заказ 36 Тираж 326 855 экз

---

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств
полиграфии и книжной торговли, г Чехов
Московской области

---

*Рукописи не возвращаются*

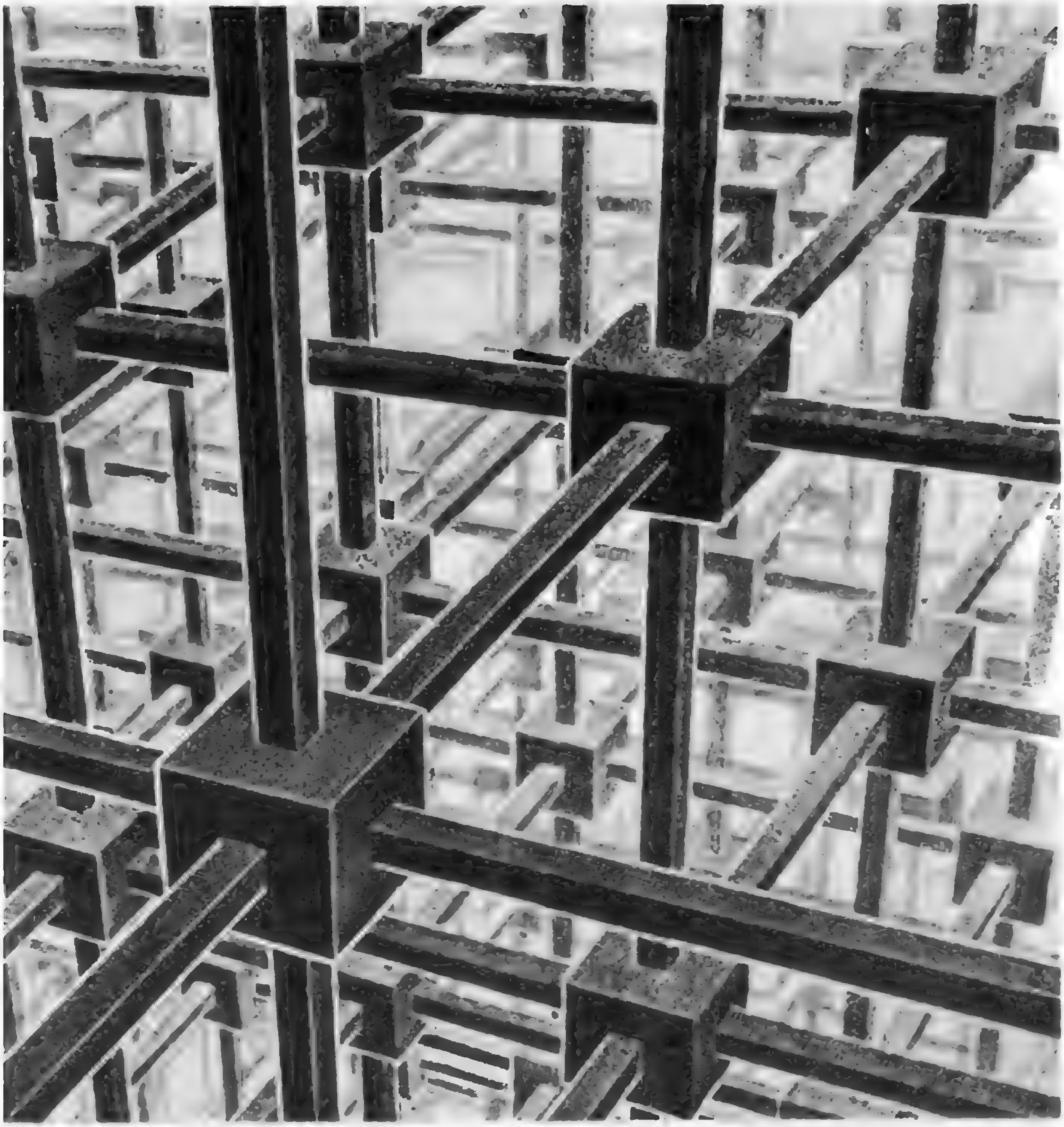
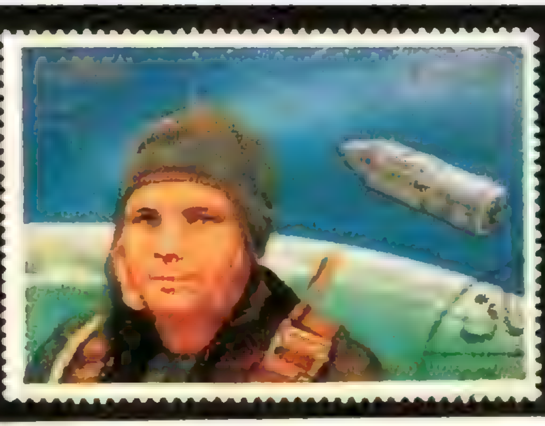
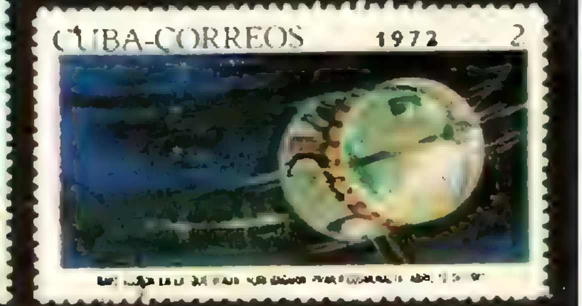
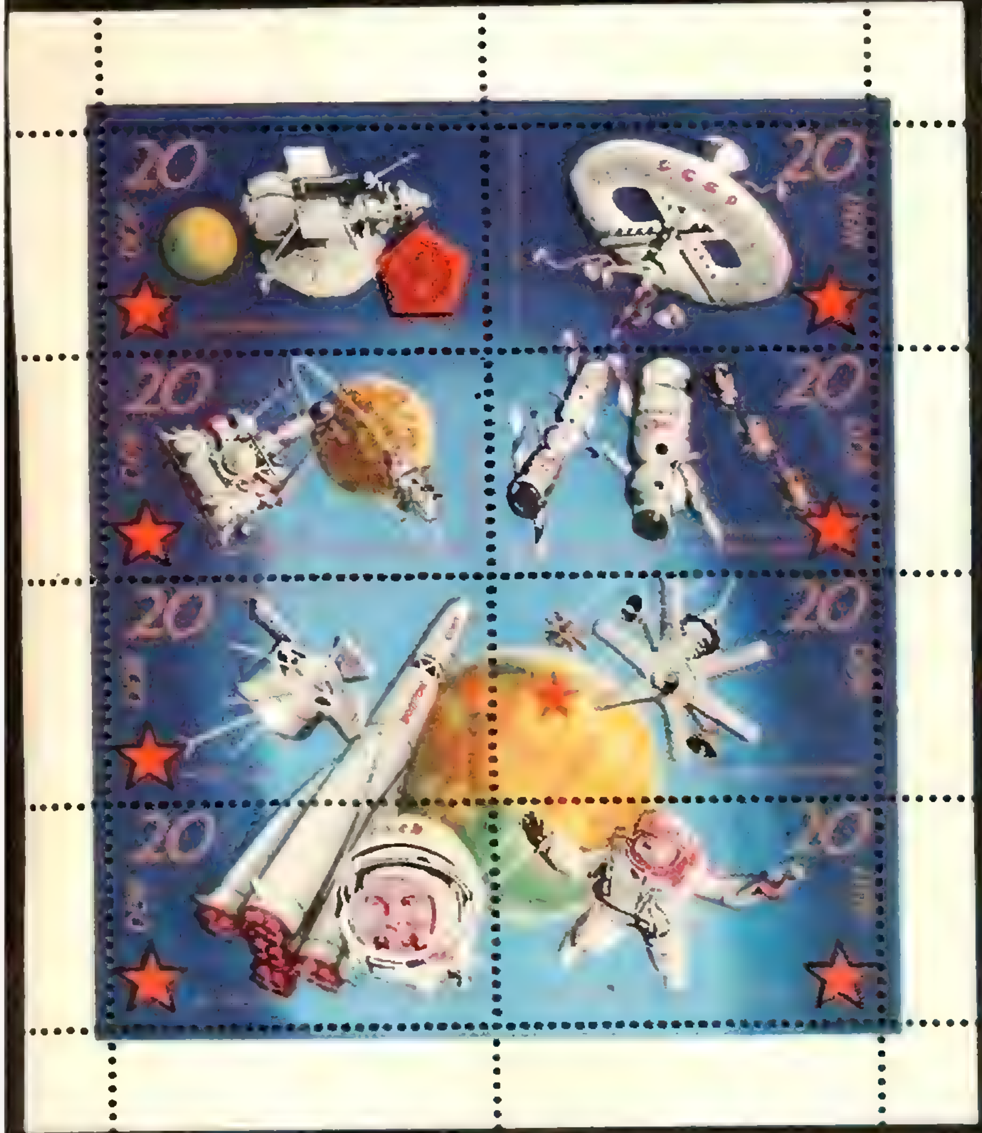


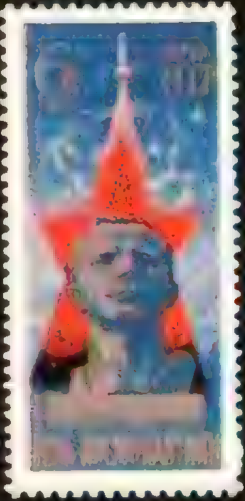
Рисунок М. Эшера «Пространство» дает хорошее представление о кристаллической решетке кубической формы (см. статью на с. 6).

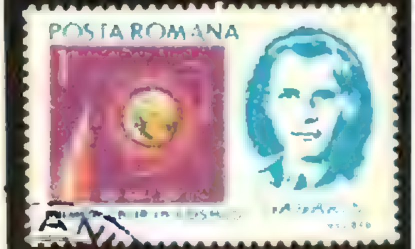
## Уголок коллекционера

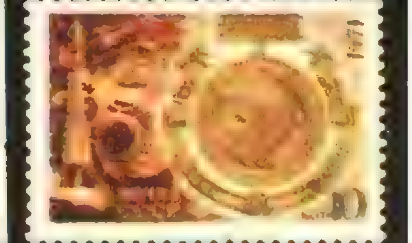


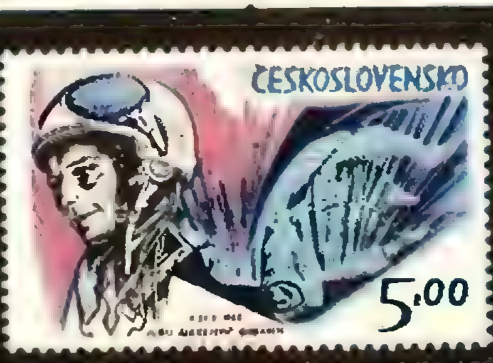

CUBA-CORREOS
1972
2

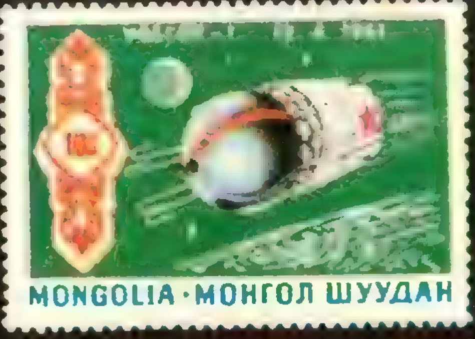

20
20
20
20
20
20
20
20




POSTA ROMANA

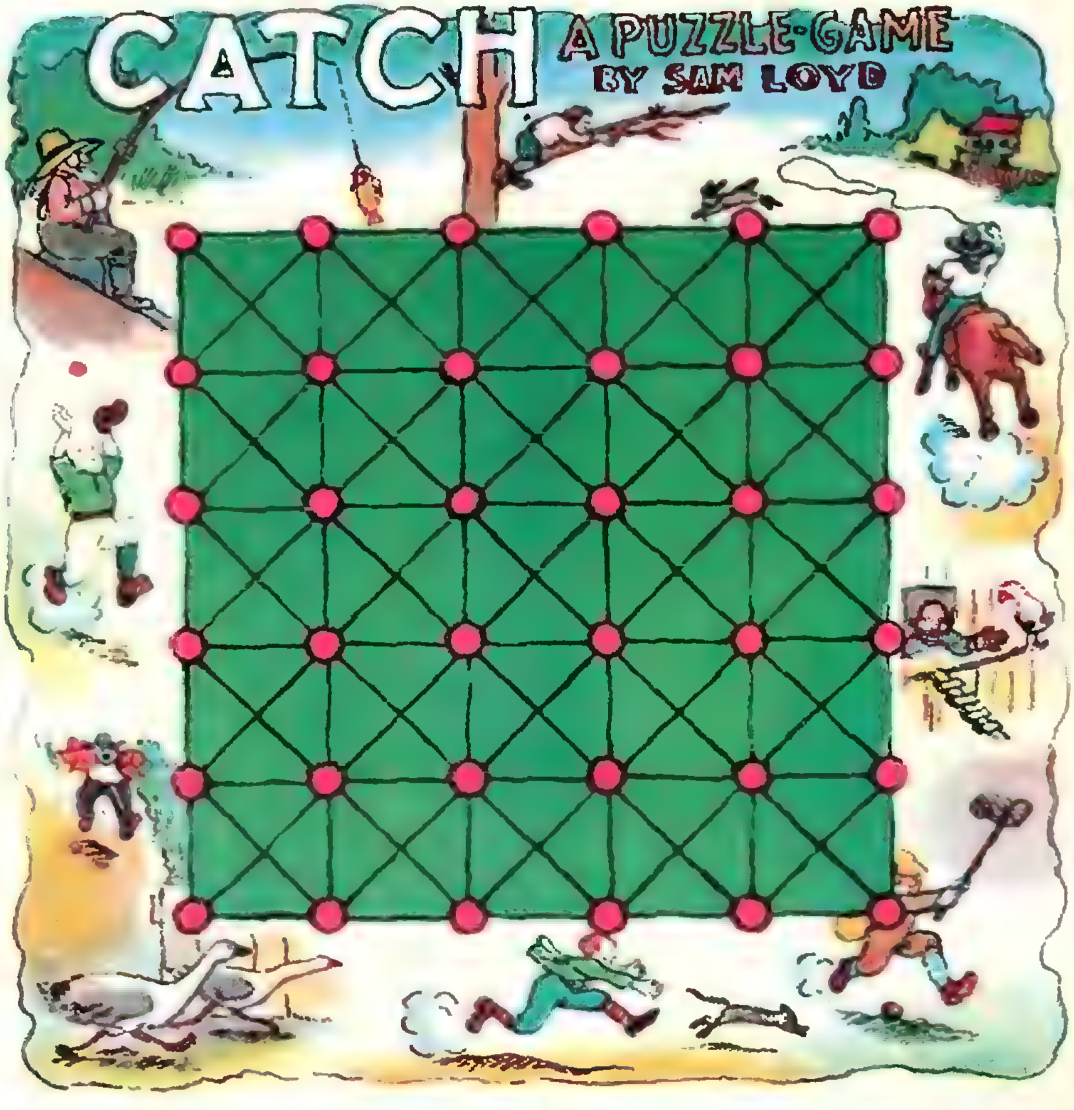



ČESKOSLOVENSKO
5,00


MONGOLIA · МОНГОЛ ШУУДАН

Цена 30 коп.
Индекс 70465

# Головоломка Сэма Лойда



**Игра — «Ловля»**

Игроки берут по десять фишек и ставят их по очереди. Начинающий ставит свою на любое из 36 полей. Его партнер также ставит фишку, но старается, чтобы она не попала на одну прямую с фишкой противника. Если же она все-таки попадет на одну прямую с фишкой противника, тот ее берет и ставит взявшую фишку на ее место. Игрок берет подряд столько фишек противника, сколько может. Взяв фишку, игрок снова делает ход, ставя еще одну фишку. Чтобы победить, игрок должен взять все фишки противника.

**Головоломка — «Ловля»**

Нужно поставить шесть фишек так, чтобы никакие две не были на одной прямой.

# НОМЕР
# 5

Основан в 1970 году
1976

# Квант 5

*Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*

*Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы*

Главный редактор
*академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора
*академик* А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
*(главный художник)*
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
*(зам. главного редактора)*
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
*(зам. главного редактора)*
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

**Редакция:**
В. Н. Березин
А. Н. Виленкин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова
*(художественный редактор)*
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чернова
*(зав. редакцией)*

**В НОМЕРЕ:**

2 *Н. Виленкин, В. Лишевский.* Нильс Хенрик Абель
11 *И. Воробьев.* Троянцы
17 *А. Земляков.* Математика биллиарда
27 *В. Новиков.* Энергия магнитного поля контура с током
33 *В. Саннинский.* Артиллерия и математика

**Лаборатория «Кванта»**

39 *В. Майер.* Волны на бумаге

**Математический кружок**

43 *А. Мордкович, В. Смышляев.* Антье

**Задачник «Кванта»**

48 Задачи М381—М385; Ф393—Ф397
50 Решения задач М340—М342

**Практикум абитуриента**

57 *С. Белый.* «Ключ» к решению — подобные треугольники
62 *Н. Бурмистрова, Н. Евграфова.* Московский электротехнический институт связи
65 *В. Коноваленко, Т. Стельмахович, А. Чернявский.* Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

**Информация**

67 *А. Митрофанов.* Экзамены по физике в Англии
69 *А. Халамайзер.* Экзамены по математике в ГДР

**«Квант» для младших школьников**

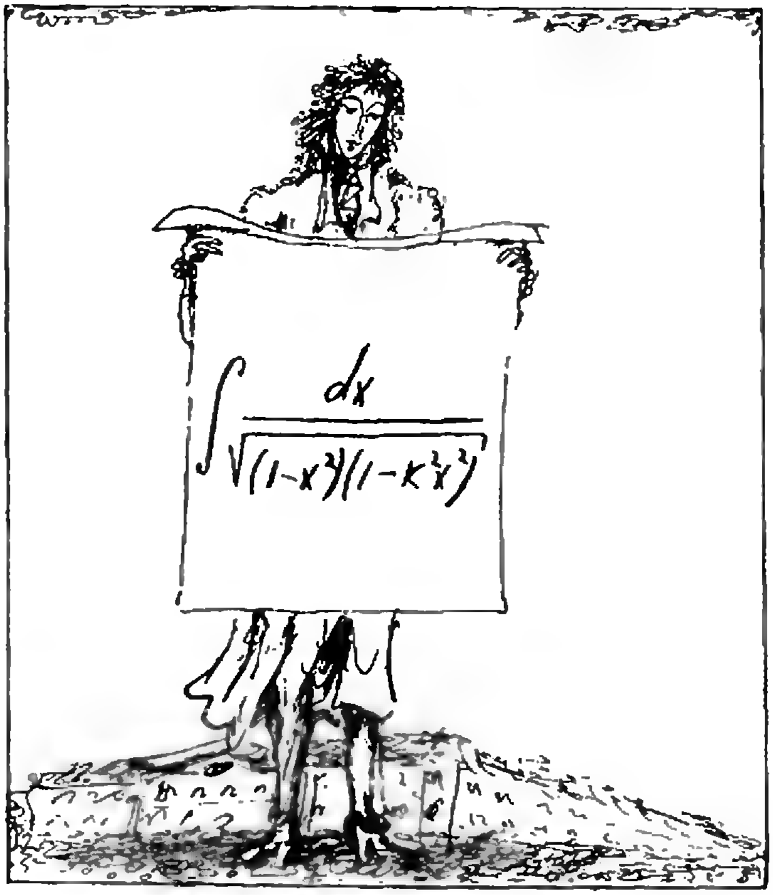
73 Задачи
74 *А. Розенталь* Встречи в океане
77 **Ответы, указания, решения**
**Смесь (с. 42, 61, 72)**

На 2-ой странице обложки воспроизведены записи, которые Нильс Хенрик Абель делал на своих математических рукописях (статью об Абеле см. на с. 2—10).

© *Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1976 год*

*Н. Виленкин,*
*В. Лишевский*

# НИЛЬС ХЕНРИК АБЕЛЬ



В центре Осло, в Королевском парке, установлен памятник выдающемуся норвежскому математику Нильсу Хенрику Абелю. Но сам Абель воздвиг себе более впечатляющий памятник. Теоремы Абеля, абелевы интегралы, уравнения Абеля, абелевы группы, преобразования Абеля навечно вошли в различные разделы математики, причем все свои результаты Абель получил за семь лет творчества: он умер, когда ему еще не было двадцати семи лет.

Абель родился 5 августа 1802 года в небольшой деревушке Финней на юге Норвегии, в семье пастора. Нильс был вторым сыном; он рос хрупким болезненным мальчиком.

Осенью 1815 года пастор Абель отправил двух своих старших сыновей в Христианию (так называлось тогда Осло), в Кафедральную школу. До тех пор он учил их сам.

Школа не оправдала ожиданий Нильса. Еще в 1811 году лучшие учителя ушли в только что организованный университет. Новые преподаватели не отличались глубокими знаниями. Зачастую они избивали учеников. Особенно жесток был преподаватель математики Бадер. Неудивительно, что вскоре Нильс охладел к учебе и перестал получать отличные отметки даже по математике. Только посещения театра, который Абель горячо полюбил, игра в шахматы и беседы с друзьями скрашивали жизнь подростка.

Все изменилось в один из дней 1818 года. Бадер так сильно избил одного ученика, что тот через несколько дней скончался. Бадера уволили, и в школу пришел новый учитель математики Бернт Микель Хольмбое. Сам Хольмбое почти ничего не сделал в математике, зато он первым заметил и выпестовал математический талант Нильса Абеля.

Основная цель Хольмбое заключалась в том, чтобы заинтересовать своих учеников математикой. Очень скоро Нильс искренне увлекся «королевой наук» и стал решать сложные задачи, недоступные его товарищам. В последствии Хольмбое писал: «Абель со всем пылом отдался занятиям математикой и продвигался вперед с быстротой, отличающей гения. Через короткий срок он совершенно освоился с элементарной математикой и попросил меня заняться с ним высшей. По собственной инициативе он глотал одну за другой книги Лакруа, Франкера, Пуассона, Гаусса, Гарнье и с особенным интересом — работы Лагранжа. Он уже начал самостоятельно разбираться в некоторых разделах математики».

Вскоре в отчете Хольмбое появился такой отзыв об Абеле: «Несомненный математический гений . . . Он сочетает безусловно гениальные математические способности с неистощимым интересом к науке. Если с ним ничего не случится, он станет большим математиком». В первоначальном варианте отчета стояло даже «самым выдающимся математиком мира»; но, по-видимому, школьное начальство решило, что такая оценка слишком высока для семнадцатилетнего юноши.

Еще не закончив школу, Абель начал самостоятельные исследования. Со свойственной юности самонадеянностью он принялся за задачу, не поддававшуюся усилиям многих выдающихся математиков XVII и XVIII веков — за решение уравнения пятой степени. После того, как в XVI веке Тарталья получил формулу для решения кубических уравнений, а Феррари — для решения уравнений четвертой степени, перед математиками встала задача: вывести формулу, выражающую корни уравнения пятой степени $a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$ через коэффициенты $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$ с помощью арифметических действий и извлечений корней. Хотя при исследовании этой задачи были получены многие важные результаты, ее окончательное решение никому не удавалось. После нескольких недель напряженной работы Абелю показалось, что задача решена — искомые формулы получены. Работу юного математика проверяли и Хольмбое, и многие профессора университета в Осло, и крупнейший из скандинавских математиков профессор Копенгагенского университета Деген. Никто из них не смог найти ошибки в его вычислениях. Но Деген дал юноше дельный совет: проверить полученные формулы на конкретных уравнениях. И тут оказалось, что ответы получаются неверными; формулы Абеля были ошибочными.

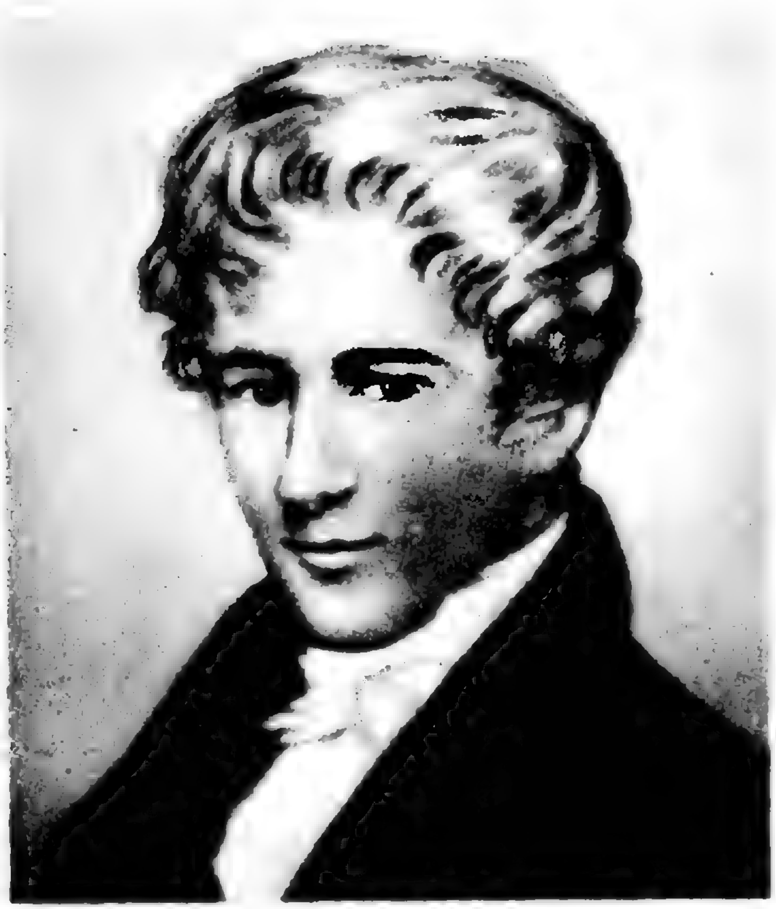
Закончив в 1821 году школу и выдержав экзамен в университет, Нильс обратился с просьбой предоставить ему бесплатное общежитие и стипендию. Стипендия была ему необходима: в 1820 году отец Абеля скончался, оставив семью без средств к существованию.

Университет не располагал средствами, но несколько профессоров, зная об исключительной одаренности молодого студента, «дабы сохранить для науки это редкое дарование» решили выплачивать ему стипендию из своих личных средств. «Эту заботу, — писал Хольмбое, — Нильс Хенрик вполне заслужил своим постоянным усердием и примерным поведением».

Получив стипендию, Абель выписал к себе младшего брата, чтобы облегчить жизнь других членов семьи. Небольшой стипендии, едва рассчитанной на одного, не могло хватить на двух молодых людей, и Нильсу пришлось подрабатывать репетиторством. С этого времени и до самой смерти Нильс был вынужден ежедневно думать о том, как заработать немного денег, чтобы не умереть с голоду и расплатиться с многочисленными долгами.

В июне 1822 года Абель успешно сдал экзамены за первый курс и получил звание кандидата философии. За время учебы в школе и университете он прочел все книги

N. H. Abel


**Нильс Хенрик Абель**
**(1802—1829)**

по математике, которые смог достать, и неустанно размышлял над математическими проблемами. Вскоре у него появились печатные работы. К несчастью, они остались незамеченными, так как были написаны на норвежском языке, а этого языка не знал никто из выдающихся математиков того времени. Одна из работ была посвящена нахождению линии, по которой материальная точка падает по заранее предписанному закону. Абель свел решение этой задачи к уравнению, в котором искомая функция находится под знаком интеграла. Теперь такие уравнения называют *интегральными*.

Никто до Абеля интегральных уравнений не решал: математики того времени интересовались дифференциальными уравнениями, т. е. уравнениями, содержащими производные от искомых функций. Лишь в конце XIX века стала развиваться общая теория интегральных уравнений, и тогда поняли, что Абель на многие десятилетия предвосхитил будущие математические исследования.

Зимой 1822—1823 годов Абель написал работу, посвященную интегрированию функций.

Если продифференцировать любую элементарную функцию, то снова получится элементарная функция. А вот с интегрированием дело обстоит сложнее. Проинтегрировать какую-то функцию — значит найти новую функцию, производная от которой равна данной. Поиски этой функции обычно велись, как писал сам Абель, на ощупь; ученый ждал озарения, позволявшего ему вычислить тот или иной интеграл. Результаты проведенных поисков были подытожены в фундаментальном сочинении одного из величайших математиков XVIII века Леонарда Эйлера «Интегральное исчисление». Но многие интегралы все же не поддавались вычислению. И непонятно было, в чем тут дело: в недостаточной прозорливости ученых или в том, что эти интегралы невозможно выразить через элементарные функции.

Абель подошел к вопросу с совершенно новой точки зрения. Он решил выяснить, при каких условиях интеграл от данной функции можно выразить через элементарные функции.

Его работа, по-видимому, содержала очень интересные математические идеи; дать же ей точную оценку невозможно: рукопись впоследствии бесследно исчезла, и мы можем судить о ней лишь по сухим строчкам протоколов ученого совета и намекам, разбросанным в других рукописях Абеля.

В жизни Абеля она сыграла важную роль: после девятимесячного изучения (видно, жива была еще память о неудаче Абеля с уравнениями пятой степени) профессора одобрили эту работу и решили, что Абель заслуживает материальной поддержки от государства. Кроме того, его послали провести каникулы в Копенгагене и обещали по окончании университета послать за границу для продолжения образования.

Копенгагенские каникулы (1823 год) были полны незабываемых впечатлений. Абель встречается с местными математиками и думает над Великой теоремой Ферма («Квант», 1972, № 8 и 1974, № 5, с. 29).

Хотя Абелю и не удалось доказать эту теорему (она не доказана и поныне!), он получил ряд интересных результатов. Например, он доказал, что если натуральные числа $a$, $b$, $c$ являются решением уравнения $a^n = b^n + c^n$ $(n > 2)$, то $a$ должно иметь одну из форм $\frac{1}{2}(x^n+y^n+z^n)$, $\frac{1}{2}(x^n+y^n+n^{n-1}z^n)$, где $x$, $y$, $z$ — взаимно простые числа. Эти результаты были опубликованы лишь после смерти Абеля.

Профессор Деген посоветовал Абелю заняться теорией так называемых эллиптических интегралов.

Математики уже давно разделили все функции на алгебраические и трансцендентные. *Алгебраическими* называют функции $y=f(x)$, которые удовлетворяют какому-нибудь уравнению вида

$$p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \ldots + p_n(x) = 0, \quad (1)$$

где $p_0(x), \ldots, p_n(x)$ — многочлены от $x$. Например, функция $y = \sqrt{x^3-1} + x$ алгебраична, так как удовлетворяет уравнению $(y-x)^2 = x^3-1$, т. е. $y^2-2xy-x^3+x^2+1=0$. Вообще, любая функция, получающаяся из чисел и переменной $x$ с помощью арифметических операций и извлечений корней, алгебраична, хотя существуют алгебраические функции, которые нельзя получить таким способом. Функции же, не удовлетворяющие никакому уравнению вида (1), называют *трансцендентными*. К ним относятся, в частности, изучаемые в школе показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

При дифференцировании некоторые трансцендентные функции превращаются в алгебраические, например

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Действие, обратное дифференцированию, называют *интегрированием*. Значит, при интегрировании из некоторых алгебраических функций получаются трансцендентные функции. Однако не для всех алгебраических функций их интегралы выражаются через элементарные функции, изучаемые в школе. Например, при вычислении длины дуги эллипса получается интеграл вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Если $k=0$, получается интеграл, равный $\arcsin x$ (дело в том, что случаю $k=0$ отвечает эллипс с равными полуосями, то есть окружность, а $\arcsin x$ связан с длиной дуги окружности). При других же значениях $k$ выразить этот интеграл через элементарные функции не удается. Пришлось ввести новый класс трансцендентных функций — *эллиптические интегралы*. Так назвали интегралы, содержащие квадратные корни из многочленов четвертой степени. Целый ряд замечательных результатов о таких интегралах получили Эйлер, Гаусс, Лежандр.

Абелю удалось получить весьма общую формулу, частными случаями которой были многие ранее известные соотношения для таких интегралов. Вскоре он пришел к идее, позволившей коренным образом изменить всю тематику этого направления: вместо эллиптических интегралов изучать обратные им функции. При $k=0$ это соответствует переходу от изучения функции $y=\arcsin x$ к изучению обратной ей функции $y=\sin x$. Новые функции получили название *эллиптических*. Так как $(\sin x)' = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, функция $y = \sin x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = \sqrt{1-y^2}$. Абель поставил перед собой задачу получения дифференциальных уравнений для эллиптических функций и блестяще справился с ней. Он доказал также, что эллиптические функции являются периодическими. Оказалось, что, в отличие от тригонометрических функций, эллиптические функции имеют два периода, причем один из них—действительный, а другой — комплексный. Это потребовало углубления в только что созданную в то время теорию функций комплексной переменной.

Вернувшись из Копенгагена, Абель снова занялся алгебраическими уравнениями. Анализируя свое решение уравнения пятой степени, он понял, что ложным было не только это решение, но и сам подход к задаче. Вот что написал он об этом позже:

«Одной из интереснейших проблем алгебры является алгебраическое решение уравнений. Почти все выдающиеся математики исследовали этот вопрос. Без труда были получены общие выражения для корней уравнений первых четырех степеней *). Для решения этих уравнений был открыт единый способ, и надеялись, что он применим к уравнениям любой степени; но, несмотря на все усилия Лагранжа и других выдающихся математиков, поставленная цель не была достигнута . . . Предполагали решать уравнения, не зная, возможно ли это решение. В случае существования решения могли его получить, ничего о нем предварительно не зная; но если, к несчастью, решения не существовало, то его могли бы тщетно искать целую вечность. Для того чтобы получить наверняка некоторые результаты по этому вопросу, надо было выбрать иную дорогу, придав проблеме такой вид, чтобы она была всегда разрешима, а это можно сделать с любой проблемой. Вместо того чтобы искать некоторое соотношение, не зная, существует оно или нет, надо спросить, возможно ли такое соотношение . . . Этот метод, который без сомнения является единственно научным, поскольку лишь он позволяет быть заранее уверенным в достижении поставленной цели, мало применяется в математике только потому, что его применение связано с исключительными трудностями . . . »

Абелю удалось преодолеть эти трудности: он доказал, что общее уравнение пятой степени неразрешимо в радикалах — решения такого уравнения нельзя выразить через его коэффициенты с помощью арифметических действий и извлечения корней.

Таким образом, проблема, над которой математики бились веками, к началу 1824 года была полностью решена. Чтобы скорее сделать полученный результат достоянием математиков, Абель отпечатал брошюру с доказательством на французском языке за свой счет; из-за отсутствия средств ему пришлось сократить изложение до 6 страниц и предоставить читателю додумать детали многих рассуждений. Неудивительно, что лишь немногие математики смогли полностью разобраться в содержании этой работы. Даже Гаусс, больше всех интересовавшийся теорией алгебраических уравнений, затерял брошюру Абеля среди своих бумаг. Впоследствии Абель опубликовал развернутое доказательство своей теоремы, занявшее несколько десятков страниц.

Вскоре выяснилось, что за несколько лет до Абеля аналогичный результат получил и итальянский ученый Паоло Руффини. И хотя доказательство Руффини было неполным, все же теорему о неразрешимости уравнения пятой степени в радикалах теперь называют теоремой Руффини — Абеля.

Но, хотя общее уравнение пятой степени и нельзя решить в радикалах, существует целый ряд частных случаев, в которых такое решение возможно. Например, разделить угол $\alpha$ на $n$ равных частей значит выразить $\cos\alpha$ через $\cos\frac{\alpha}{n}$ и решить получившееся уравнение относительно $\cos\alpha/n$. Так как $\cos\alpha = 4\cos^3\alpha/3 - 3\cos\alpha/3$, то при $n = 3$ получаем кубическое уравнение $4x^3 - 3x = \cos\alpha$, которое, как и всякое кубическое уравнение, решается в радикалах. Оказывается, такие уравнения решаются в радикалах при любых значениях $n$. Аналогичные уравнения получаются и при переходе от тригонометрических функций к эллиптическим. Абелю удалось написать эти уравнения, выразив эллиптические функции аргумента $x$ через функции аргумента $x/n$.

---

*) «Квант», 1971, № 11, с. 20 или 1973, № 3, с. 30.

Абель знал, что вопрос о разрешимости уравнения в радикалах связан с соотношениями между корнями уравнения. Например, все корни уравнения

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = 0, \qquad (2)$$

возникающего при делении круга на $n$ частей (поэтому уравнение (2) называется *уравнением деления круга*), можно выразить через один из них следующим образом:

$$x_2 = x_1^2, \ x_3 = x_1^3, \ \ldots, \ x_{n-1} = x_1^{n-1}.$$

Функции $y = x, y = x^2, \ldots, y = x^{n-1}$ рациональны. При этом они обладают следующим замечательным свойством: если взять любые две такие функции, заменить в одной из них $x$ другой функцией и вместо $x$ подставить $x_1$, то полученное число снова будет одним из корней уравнения. В самом деле, из уравнения (2) следует, что $x_1^n = 1$, а потому $(x_1^k)^l = x_1^{kl} = x_1^m$, где $m$ — остаток от деления $kl$ на $n$.

Абель понял, что именно с этим свойством связана разрешимость в радикалах уравнения деления круга. Поэтому он рассмотрел такие уравнения, что:

а) все корни каждого из них могут быть представлены в виде рациональных функций от одного из корней, например, от $x_1$:

$$x_1 = \theta_1(x_1), \ x_2 = \theta_2(x_1), \ \ldots, \ x_n = \theta_n(x_1);$$

б) функции $\theta_1(x), \ldots, \theta_n(x)$ таковы, что для любых $k$ и $l$ найдется такое $m$, что

$$\theta_l[\theta_k(x_1)] = \theta_m(x_1).$$

Оказалось, что для разрешимости уравнения в радикалах достаточно выполнения еще одного условия: для любых $k$ и $l$ $\theta_k[\theta_l(x_1)] = \theta_l[\theta_k(x_1)]$. Иными словами, нужно, чтобы не имело значения, подставим ли мы $\theta_k(x_1)$ в $\theta_l(x)$ или $\theta_l(x_1)$ в $\theta_k(x)$. С тех пор совокупности преобразований, результат последовательного выполнения которых не зависит от порядка выполняемых преобразований, называют абелевыми (или коммутативными).

При изучении эллиптических функций и интегралов Абель широко использовал теорию степенных рядов. (Степенным рядом называется выражение вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$)

Он доказал, что множество значений $x$, для которых сходится ряд *)

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

является или промежутком вида $(-l, l)$ (где $l$ может также равняться нулю или бесконечности), или таким же промежутком, к которому присоединены один или оба конца. Он доказал, что на промежутке сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать, и исследовал поведение суммы ряда при приближении $x$ к концам промежутка сходимости. Все эти результаты сразу после их опубликования стали классическими и вошли во все курсы высшей математики.

Описанный круг идей Абель разрабатывал на протяжении 1824—1826 годов, когда, окончив университет, отправился за границу для продолжения образования. Он побывал в Германии, Австрии, Италии, Швейцарии, Франции, Бельгии, познакомился с Якобом Штейнером, Андриеном Лежандром, Огюстеном Коши и многими другими математиками.

30 октября 1826 года на очередном заседании французской Академии наук ее бессменный секретарь Фурье представил собравшимся норвежского математика Нильса Хенрика Абеля и его «Мемуар об общих свойствах весьма широкого класса трансцендентных функций». Заключение о представленной работе было поручено дать Лежандру и Коши.

---

*) Это значит, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)$.

**Памятник Абелю в Осло**

Докладчиком утвердили Коши. Трудно было найти менее подходящую кандидатуру: Коши был настолько увлечен собственными исследованиями, что у него не оставалось времени ни на что другое. «Мемуар» Абеля затерялся среди рукописей, загромождавших кабинет Коши. Напрасно Абель ждал признания французских ученых: «Мемуар» нашелся только после его смерти *).

К сожалению, встречи с французскими математиками мало что дали Абелю. Некоторые из них, прекратив научные исследования, занимались собственной карьерой. Другие интересовались лишь прикладной математикой — исследования Абеля казались им совершенно неприменимыми на практике. Они не могли предвидеть, что через сто лет теоретико-групповые методы, ведущие свое начало от работ Лагранжа, Абеля и Галуа, станут основой всех расчетных методов квантовой механики.

Сохранились воспоминания одного математика о парижском периоде жизни Абеля: «Абель одинаково хорошо говорил на французском, немецком, датском и норвежском языках. Он был немного выше среднего роста, на его худощавом, болезненном лице лежала печать утомления и тревоги. Держался он с необычайной скромностью и легко терялся, проявляя удивительную мягкость характера. Судя по простоте, с которой он одевался, по тому, что он позволял покупать себе какую-нибудь еду не более одного раза в день и довольствовался весьма бедной квартирой на улице Сент-Маргерит, он располагал очень скудными средствами. Однажды Абель встретил какого-то человека, который показал ему следы побоев на своем теле и посоветовал остерегаться грабителей.

---

*) Такую же трагическую роль Коши сыграл в судьбе другого молодого гения — Эвариста Галуа («Квант», 1973, № 10, с. 5).

«Мне нечего бояться. Что могут отнять у меня грабители?» — с улыбкой ответил ему Абель.

Он в самом деле походил на того мудреца, все сокровища которого хранились в голове. Если говорить о таком богатстве, Абель действительно владел несметным состоянием».

Оставаясь в Париже, Абель продолжал работать над общей теорией эллиптических функций. В письме к Бернту Хольмбое он сообщал: «Я открыл столько замечательных теорем, что просто не верится».

Скоро Абель понял, что денег, отпущенных ему на заграничную командировку, не хватит на все время, и решил вернуться домой. На обратном пути он заболел туберкулезом. Эта болезнь впоследствии свела его в могилу.

20 мая 1827 года Абель вернулся в Осло. После восторженной встречи и торжественных приемов наступили разочаровывающие будни. Нильс понял, что он никому не нужен; ему даже не предоставили места с постоянным заработком, например, преподавателя в университете или хотя бы школьного учителя. Абель был вынужден обратиться с прошением в Коллегию: «В настоящий момент я не располагаю никакими средствами к существованию. В этом положении я нахожусь с момента возвращения на родину и буду оставаться до тех пор, пока не получу назначения. Для того чтобы как-то зарабатывать себе на жизнь, мне придется почти полностью отказаться от научных занятий . . . Вот почему я осмеливаюсь обратиться в высокоуважаемую Коллегию с просьбой оказать мне помощь в той форме, которая будет сочтена наиболее удобной». 4 сентября 1827 года Коллегия приняла решение выплачивать Абелю 200 далеров в год — ровно столько, сколько он получал в студенческие годы.

В марте 1828 года профессор Кристофер Ханстин, руководивший научными занятиями Абеля в университете, отправился в экспедицию в Сибирь. Своим заместителем на время научной командировки Ханстин рекомендовал Абеля.

Нильс начал вести занятия по механике и астрономии в университете и в Военной академии, где ранее преподавал Ханстин. Теперь Абель получал значительное по тем временам жалование: 533 далера в год, но жил по-прежнему очень бедно. Все деньги уходили на погашение накопившихся долгов.

В этом же году Нильса Хенрика Абеля избрали в Королевское научное общество Норвегии. Это было единственным официальным признанием заслуг Абеля, которого он удостоился при жизни.

Но март 1828 года принес Абелю не только радости: перелистывая журнал «Астрономические известия», он обнаружил, что его тематикой очень успешно занимается еще один ученый — немецкий математик Карл Густав Якоби.

Весь 1828 год прошел в соперничестве двух молодых ученых. За этим «состязанием» с большим интересом следил геттингенский отшельник Гаусс: ведь в его юношеских дневниках, написанных, когда ни Абеля, ни Якоби еще не было на свете, содержались многие совершаемые ими открытия. Но Гаусс не торопился печатать свои результаты: о них узнали только после посмертной публикации его дневников. Ни Абеля, ни Якоби в это время уже не было в живых. Они и не подозревали о работах своего великого предшественника, хотя не только их теоремы, но даже иногда и обозначения совпадали с гауссовскими. Все же в одной области Абель превзошел не только Якоби, но и Гаусса. Он разработал общую теорию интегралов от алгебраических функций, частным случаем которой являлась теория эллиптических функций. Именно этот мемуар лежал непрочитанным среди бумаг Коши.

Соперничество с Якоби было нелегким для Абеля. Он недосыпал, недоедал; все это сказывалось на его здоровье. Абеля часто лихорадило, усилился кашель.

В середине декабря 1828 года Абель решил поехать на рождественские праздники к своим друзьям во Фроланд. Хотя врач Абеля возражал против этого путешествия, Нильс все же решил ехать.

Он приехал во Фроланд 19 декабря. В дороге Абель сильно простудился. Его беспокоил кашель, озноб, но Нильс продолжал заниматься математикой.

Отъезд из Фроланда был назначен на 9 января. В этот день с утра Абеля ожидали запряженные сани. Но перед самым отъездом Нильсу стало плохо. Вызванный врач предписал постельный режим и полный покой.

Недели через две-три наступило улучшение, но оно оказалось недолгим. 21 февраля по просьбе Нильса врач написал в письме в Коллегию, что в связи с болезнью Абель не сможет приступить к исполнению своих обязанностей в университете ранее весны 1829 года.

Надеждам врача на выздоровление Абеля не суждено было сбыться. Нильс слабел все больше и больше. В марте он уже почти не вставал с постели. 6 апреля в 4 часа дня Абель умер.

Признание гения Абеля произошло лишь после его смерти. 11 июня 1829 года на заседании французской Академии наук Лежандр объявил о смерти Абеля. Теперь Коши потребовалась всего неделя, чтобы подготовить свое заключение. На очередном заседании Академия заслушала сообщение Коши и приняла решение опубликовать «Мемуар» Абеля в серии работ иностранных ученых и наградить Абеля вместе с Якоби Большой премией за выдающиеся математические открытия.

В заключение приведем несколько высказываний выдающихся математиков об Абеле.

Из письма Гаусса к Шумахеру: «...Я не видел в газетах ни одного сообщения о смерти Абеля. Это большая потеря для науки. Если где-нибудь будет опубликована биография этого в высшей степени замечательного человека и Вам попадется в руки экземпляр, дайте мне знать.»

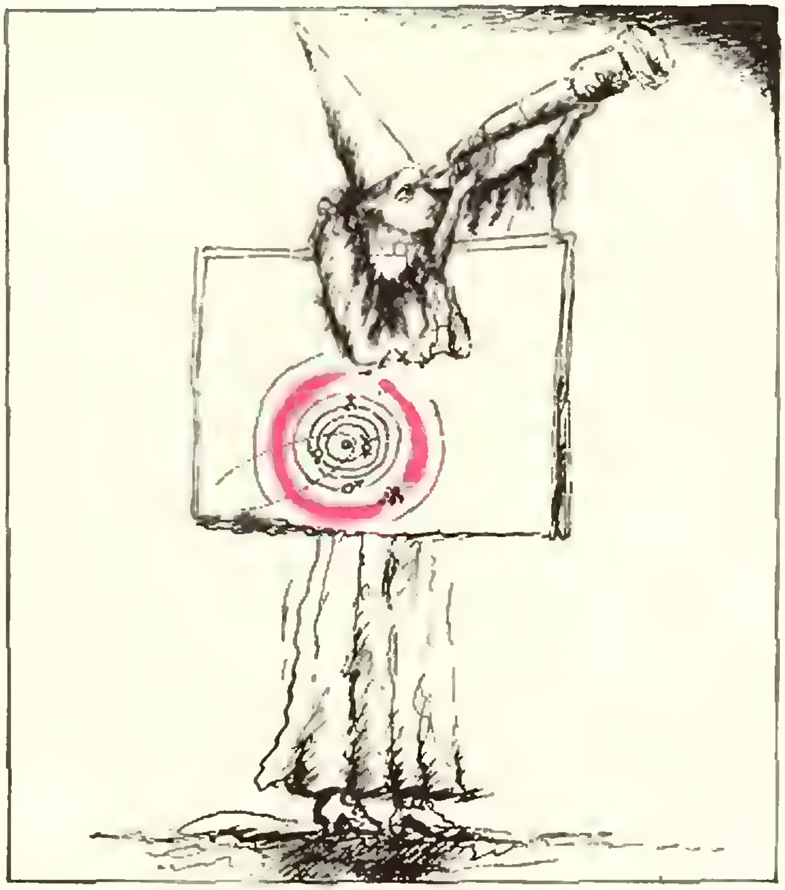
Из письма Лежандра к Якоби: «...К своему величайшему огорчению, получил известие, что Ваш достойный соперник, господин Абель, умер в Осло от болезни легких, которой он страдал уже некоторое время и которая обострилась из-за суровой зимы. Это тяжелая потеря для всех, кому дорого развитие высших разделов математического анализа. Прожив совсем короткую жизнь, он успел сделать так много, что этого вполне достанет на то, чтобы оставить о нем долгую память; легко представить себе, чего бы он достиг, если бы судьба решила иначе.»

Из письма Якоби к Лежандру: «...Пришла печальная весть о смерти Абеля... Как поразительно широк круг вопросов, которыми он занимался! Нахождение необходимого и достаточного условия, позволяющего определить, может ли данное алгебраическое уравнение быть разрешено в радикалах, подобное же условие для определения возможности выражения произвольного интеграла в замкнутом виде, замечательное открытие общего свойства всех функций, являющихся интегралами алгебраических функций и т. д. и т. п. Все эти проблемы крайне характерны для Абеля, до него их никто не осмеливался даже ставить. Он ушел от нас, но след, который он оставил, неизгладим.»

Об Абеле можно прочитать в книге О. Оре «Замечательный математик Нильс Хенрик Абель» (М., Физматгиз, 1961).

*И. Воробьев*

# ТРОЯНЦЫ



Можно ли разобраться, как движутся тела, взаимодействующие по закону всемирного тяготения? Например, как движутся планеты? Пусть в некоторый начальный момент времени нам известны точные координаты $n$ планет, их скорости и известно, что на каждую из планет действуют только силы притяжения со стороны остальных $(n - 1)$ планет. Исходя из данных начальных условий надо определить движение планет в дальнейшем.

Законы, управляющие этим движением, это знакомые нам второй закон Ньютона и закон всемирного тяготения. Пользуясь ими, можно предсказать движение планет. Для системы, состоящей из двух тел $(n = 2)$, эта задача впервые была решена Ньютоном. В этом случае можно, исходя из начальных условий, определить состояние системы (координаты тел, их скорости и т. п.) в любой момент времени с любой точностью.

Но когда ученые занялись системой, состоящей из нескольких тел, они натолкнулись на колоссальные трудности чисто математического характера. Уже для случая $n = 3$ получить точное решение задачи в общем случае не удалось. И до сегодняшнего дня, несмотря на двухсотпятидесятилетние усилия математиков всего мира, точно решить эту задачу с помощью известных математических средств не удалось. Именно поэтому «задача $n$ тел» — так называют эту проблему механики — привлекае внимание математиков.

Другим стимулом служит огромная важность задачи $n$ тел для небесной механики и космонавтики. Неудивительно поэтому, что общее число работ, посвященных ей, доходит до двух тысяч, и ежегодно появляются 15—20 новых исследований.

Сейчас существует целый ряд методов для приближенного решения задачи $n$ тел, позволяющих для каждой конкретной системы тел с заданными конкретными начальными условиями построить траектории движения с любой нужной для практики точностью для любого ограниченного отрезка времени.

Эффективность и надежность этих методов были неоднократно проверены, в частности, при расчетах траекторий космических кораблей и межпланетных станций.

Пользуясь именно такими методами, Адамс и Леверье сумели открыть планету Нептун «на кончике пера».

— Позвольте, но причем здесь троянцы? — удивится читатель. Да просто астрономы — большие любители мифологии, а группа астероидов с таким общим названием связана с темой статьи теснейшим образом. Но о троянцах — несколько позже, а пока продолжим разговор о задаче $n$ тел.

## Задача Лагранжа

Итак, точного решения задачи $n$ тел нет. Но для частного случая $n = 3$ при некоторых «специальных» начальных условиях точные решения были найдены 200 лет назад замечательным французским математиком Лагранжем.

Его решения — их называют лагранжевыми решениями задачи $n$ тел — единственные точные решения этой задачи, известные в настоящее время.

Мы в этой статье рассмотрим наиболее простой частный случай задачи Лагранжа.

Пусть три тела, не лежащие на одной прямой, вращаются по концентрическим окружностям, лежащим в одной плоскости, с одинаковыми угловыми скоростями. То есть эти тела можно рассматривать как точки воображаемого твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (очевидно, что эта ось проходит через центр концентрических окружностей — «орбит» тел).

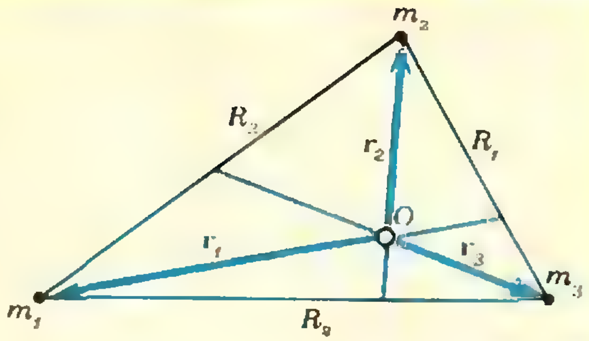


Рис. 1.

При каком расположении масс это возможно? С какой скоростью должно вращаться это воображаемое твердое тело, чтобы не «разлететься» по частям? Так поставил свою задачу Лагранж.

Итак, попытаемся вслед за Лагранжем решить эту задачу.

## Треугольник масс

Пусть три тела с массами $m_1$, $m_2$, $m_3$ вращаются по концентрическим окружностям, центр которых находится в точке $O$ (см. рис. 1). Радиусы орбит тел $r_1$, $r_2$ и $r_3$ соответственно, расстояния $R_1$, $R_2$, $R_3$ между телами много больше размеров самих тел. Центростремительное ускорение каждому телу сообщают силы притяжения, действующие на него со стороны соседей, т. е. сила, равная сумме (векторной!) этих сил. Запишем уравнения движения тел:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} = m_1\mathbf{a}_1, \\ \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} = m_2\mathbf{a}_2, \\ \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} = m_3\mathbf{a}_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $|\mathbf{F}_{ij}| = \gamma \dfrac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$ — значение силы ньютоновского притяжения, с которой тело $m_j$ действует на тело $m_i$. Поскольку все тела вращаются с одной и той же угловой скоростью $\omega$ (по условию задачи), то

$\mathbf{a}_1 = -\omega^2\mathbf{r}_1$, $\mathbf{a}_2 = -\omega^2\mathbf{r}_2$, $\mathbf{a}_3 = -\omega^2\mathbf{r}_3$,

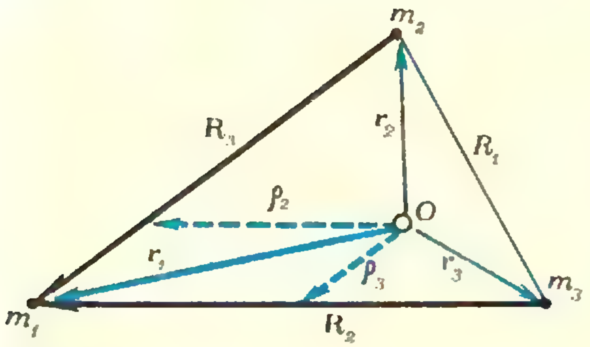


**Рис. 2.**

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор точки $m_i$ относительно центра вращения $O$. (Расстояния между телами много больше размеров тел, поэтому можно считать тела точками).

Все дальнейшие наши рассуждения будут чисто «арифметическими», и может показаться сначала, что они не имеют отношения к задаче. Но именно они и приведут нас к решению задачи (вернее, первой ее части) — позволят определить конфигурацию тел.

Сложим почленно равенства из системы (1):

$$\mathbf{F}_{12}+\mathbf{F}_{13}+\mathbf{F}_{21}+\mathbf{F}_{23}+\mathbf{F}_{31}+\mathbf{F}_{32}= m_1\mathbf{a}_1+m_2\mathbf{a}_2+m_3\mathbf{a}_3 = -\omega^2(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3).$$

Левая часть этого равенства равна нулю — ведь согласно III закону Ньютона сумма всех внутренних сил в замкнутой системе равна нулю. (Левую часть можно записать так: $\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{F}_{ij}+\sum_{i,j=1}^{3}\mathbf{F}_{ji}=0$, так как $\mathbf{F}_{ij}=-\mathbf{F}_{ji}$.)

Итак, имеем

$$m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3=0 \qquad (2)$$

(поскольку $\omega\neq 0$). Равенство (2) по существу задает положение центра вращения: он находится в такой точке $O$, что радиусы-векторы тел $m_1$, $m_2$, $m_3$ относительно этой точки должны удовлетворять условию (2).

Введем векторы $\mathbf{R}_2$ и $\mathbf{R}_3$ так, как показано на рисунке 2. Тогда

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{r}_1&=\mathbf{r}_2+\mathbf{R}_3,\\ \mathbf{r}_1&=\mathbf{r}_3+\mathbf{R}_2.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

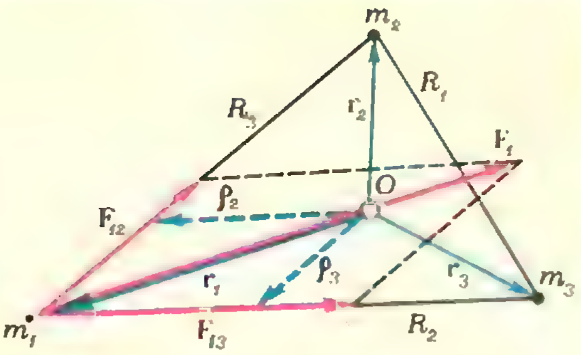


**Рис. 3.**

Выразим вектор $\mathbf{r}_1$ через векторы $\mathbf{R}_2$ и $\mathbf{R}_3$. Для этого умножим первое равенство из (3) на $m_2$, а второе — на $m_3$ и сложим получившиеся равенства почленно:

$$m_2\mathbf{r}_1+m_3\mathbf{r}_1= =m_2\mathbf{r}_2+m_2\mathbf{R}_3+m_3\mathbf{r}_3+m_3\mathbf{R}_2.$$

Учитывая, что $m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3=-m_1\mathbf{r}_1$ (это следует из (2)), имеем:

$$(m_1+m_2+m_3)\mathbf{r}_1=m_2\mathbf{R}_3+m_3\mathbf{R}_2.$$

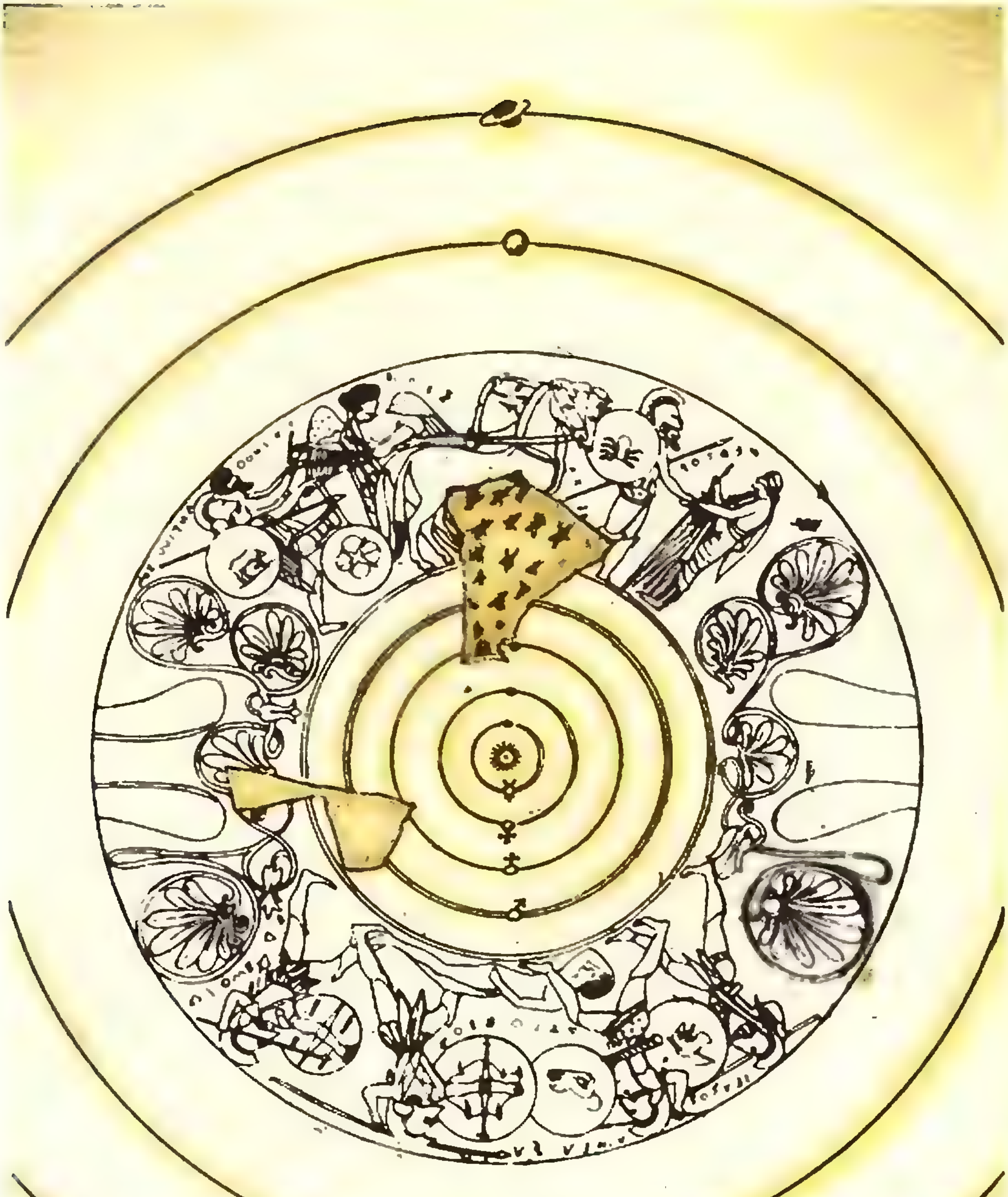
Отсюда

$$\mathbf{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}\mathbf{R}_3+\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\mathbf{R}_2.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{r}_1$ является суммой векторов $\boldsymbol{\rho}_2=\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\mathbf{R}_2$ и $\boldsymbol{\rho}_3=\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}\mathbf{R}_3$, параллельных сторонам $R_2$ и $R_3$ треугольника масс.

А теперь изобразим на схеме треугольника масс векторы сил, действующих на тело $m_1$ (см. рис. 3). $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая со стороны тела $m_2$, $\mathbf{F}_{13}$ — сила, действующая со стороны тела $m_3$. Эти силы направлены по сторонам $R_3$ и $R_2$ треугольника масс. Их результирующая направлена по вектору $\mathbf{r}_1$ к точке $O$ (вектор ускорения тела $m_1$ направлен к центру вращения). Но это означает, что параллелограмм сил и параллелограмм, построенный на векторах $\boldsymbol{\rho}_2$ и $\boldsymbol{\rho}_3$, подобны! Тогда

$$|\mathbf{F}_{12}|:|\boldsymbol{\rho}_3|=|\mathbf{F}_{13}|:|\boldsymbol{\rho}_2|,$$



или

$$\gamma\frac{m_1m_2}{R_3^2}:\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}R_3=$$
$$=\gamma\frac{m_1m_3}{R_2^2}:\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}R_2.$$

Отсюда, после сокращения, получим
$$R_2=R_3!$$

Проведя аналогичные выкладки, можно найти выражения для $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ через стороны треугольника масс (для этого нужно вводить соответствующим образом направленные векторы $\mathbf{R}_3$, $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_1$). Рассмотрев затем силы, действующие на тело $m_2$ (или $m_3$), мы придем к равенству $R_1=R_3$ (или $R_1=R_2$).

Следовательно,
$$R_1=R_2=R_3$$
— искомая конфигурация тел оказалась равносторонним треугольником!

Итак, на первый вопрос задачи мы ответили. А на второй попытайтесь ответить сами (см. упражнение 1). А теперь перейдем к троянцам.

## Троянцы в гравитационной ловушке

22 февраля 1906 года Макс Вольф открыл астероид Ахиллес. По первоначальным данным получалось, что он движется по почти круговой орбите со скоростью 13 *км/сек*. Но с такой же скоростью и тоже по почти круговой орбите обращается вокруг Солнца Юпитер. Получалось, что Ахиллес движется по орбите Юпитера.

Действительно, планете массы $m$, движущейся по орбите радиуса $r$, сила притяжения к Солнцу $F=\gamma\frac{mM}{r^2}$ ($M$ — масса Солнца) сообщает центростремительное ускорение $a=\frac{v^2}{r}$, где $v$ — линейная скорость планеты, т. е. $\gamma\frac{mM}{r^2}=\frac{mv^2}{r}$. Следовательно, радиус орбиты $r=\gamma\frac{M}{v^2}$ не зависит от массы планеты и определяется только ее скоростью.

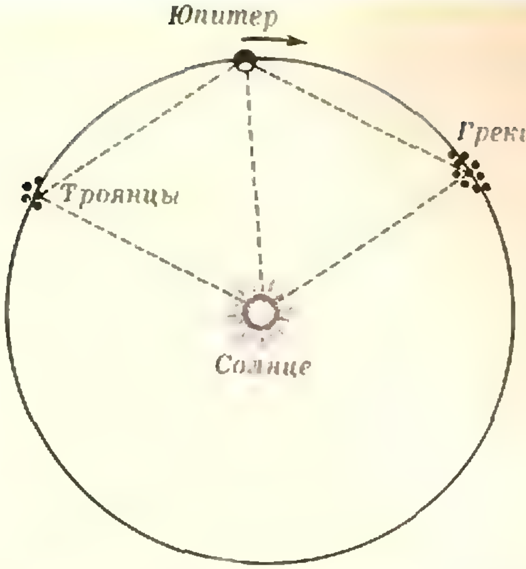


Рис. 4. «Греки» и «Троянцы» в гравитационной ловушке. Каждый из астероидов описывает весьма замысловатую траекторию в окрестности вершины лагранжева треугольника с основанием Солнце — Юпитер.

Может быть, плоскости орбит Юпитера и Ахиллеса наклонены друг к другу? — Нет, профессор Шалье быстро установил, что астероид действительно движется по орбите Юпитера, опережая его на 55,5°.

Тут вспомнили о работе Лагранжа. Солнце, Юпитер и Ахиллес образуют почти равносторонний треугольник, вращающийся вокруг одной из его вершин — вокруг Солнца.

Потом в вершинах равносторонних треугольников с основанием Солнце—Юпитер обнаружили еще несколько астероидов. Названия им давали по именам героев Троянской войны. Пять таких астероидов — это «семейство» называют «Троянцами» — «отстают» от Юпитера, а впереди него движутся десять астероидов — «Греки» (см. рис. 4).

Астероиды эти весьма крупные, самый большой из них — Патрокл с поперечником в 272 *км*, немногим уступает Гектор, поперечник которого 216 *км*; у восьми других поперечники превосходят сто километров.

В 1959 году польский астроном Кордылевский обнаружил в вершинах равносторонних треугольников с основанием Земля — Луна обширные облака космической пыли. Здесь в роли троянцев выступают мириады пылинок, захваченных совместным притяжением Земли и Луны.

Так решения, опубликованные Лагранжем в 1772 году и самому автору представлявшиеся лишь любопытной теоретической задачей, оказались связаны с позднейшими астрономическими открытиями.

## Устойчивость движения

Но все ли конфигурации трех тел мы нашли? Нет, мы не разобрали случай прямолинейного расположения тел; существует и подобная конфигурация трех тел, которая может вращаться как одно целое. Оказывается, такая конфигурация неустойчива. Стоит телам немного «сдвинуться» от прямой, как сразу согласование сил нарушится, и отклонение начнет возрастать.

Устойчива ли треугольная конфигурация? Не всегда. В 1843 году Гашо впервые определил условия устойчивости лагранжева треугольника. Он показал, что конфигурация будет устойчивой, если массы больших тел (лежащих в основании треугольника) таковы, что их отношение (отношение меньшей массы к большей) достаточно мало и выполняется условие

$$\frac{(m_1+m_2)^2}{m_1 m_2}>27.$$

Если космическая частица, масса которой много меньше $m_1$ и $m_2$, движущаяся с относительно небольшой скоростью, случайно попадет в вершину равностороннего треугольника, в основании которого лежат массы $m_1$ и $m_2$, то она окажется «в ловушке». При этом частица может описывать весьма замысловатую траекторию около вершины лангранжева треугольника, но вся конфигурация будет вращаться как одно целое.

Масса Юпитера в тысячу раз меньше массы Солнца. По сравнению с любым из них общая масса троянцев пренебрежимо мала. Условие устойчивости выполняется с большим запасом. Неравенство выполняется и для системы Земля — Луна: массы отличаются в 81 раз.

Как вывести это условие? Может быть, простой вывод и есть, но проблема эта все же сложная и, во всяком случае, требует особого разговора.

### Упражнения

1. В статье не вычислена угловая скорость вращения треугольника масс. Докажите, что $\omega^2=\gamma\frac{m_1+m_2+m_3}{R^3}$, где $R$ — расстояние между массами.

2. Мы рассматривали треугольник масс «жестким». Но оказывается, если векторы скорости по величине пропорциональны расстояниям до центра вращения и все направлены под одним и тем же углом к отрезкам, соединяющим тела с центром, то конфигурация тел остается подобной начальной в любой момент времени. Равносторонний треугольник, вращаясь, будет растягиваться или сжиматься. Попробуйте это доказать.

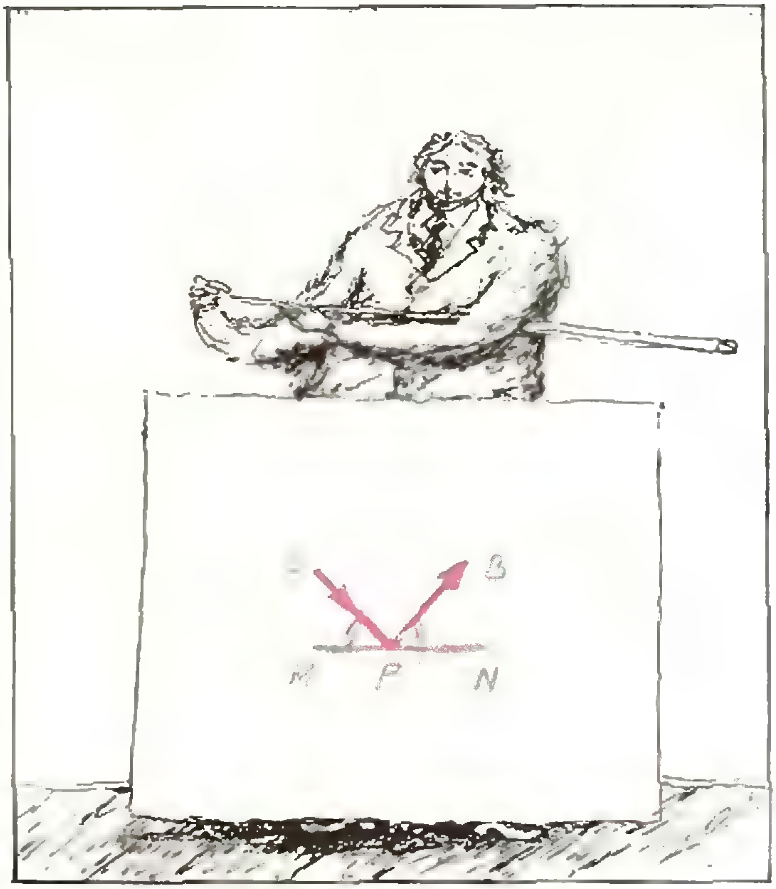
---

**От редакции**

Приносим извинения нашим читателям за оплошность, допущенную в третьем номере журнала. На фото на второй странице обложки за подписью Нильса Бора следует подпись не Феликса Клейна, а физика Огюста Клейна — большого друга Нильса Бора.

*А. Земляков*

# МАТЕМАТИКА БИЛЛИАРДА



*Посвящается
светлой памяти
Александра Абрамовича
Шершевского,
Учителя математики.*

**Биллиарды, о которых рассказывается в этой статье, не очень похожи на обычные. Отличий много: биллиардный стол не всегда прямоугольный, шар только один и нет ни луз, ни кия. Но не расстраивайтесь: мы постараемся показать, что и один шарик на биллиардном поле может задать немало головоломок любителям математики.**

## § 1. Общая проблема биллиарда

Согласно законам механики, при отражении абсолютно упругого биллиардного шара от прямолинейного борта $MN$ «угол падения» шара равен «углу его отражения» — более точно, угол $APM$ равен углу $BPN$. Ниже мы будем ссылаться на этот факт как на *закон упругого отражения*. Уже здесь мы предположили, что биллиардный шарик *точечный*, т. е., как говорят физики, «размерами шарика в данных рассмотрениях можно пренебречь». Таким образом, мы считаем, что биллиардный шар — это *движущаяся точка*, и поэтому можно говорить о *траектории* биллиардного шара — о ломаной линии, по которой движется шар в соответствии с законом упругого отражения (рис. 1). Точки излома этой ломаной лежат на «бортах биллиардного стола». Мы будем рассматривать биллиардные столы произвольной формы. В принципе борты биллиарда могут быть и криволинейными — тогда закон упругого отражения формулируется, как и раньше, только под углами падения и отражения следует понимать углы между соответствующими («падающим» и «отраженным») звеньями траектории и *касательной* $MN$ к криволинейному борту в точке $P$ соударения шара с бортом. Мы не даем общего определения касательной к кривой — достаточно интуитивно

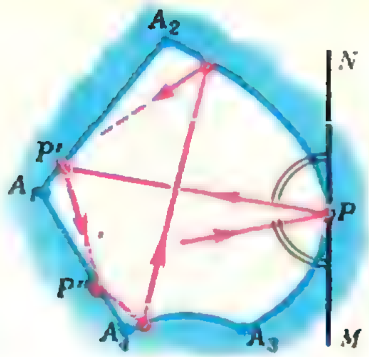


Рис. 1.

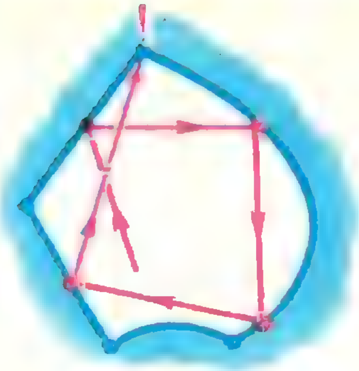


Рис. 2.

понимать, что такое касательная. В точке излома самого биллиардного борта (на рисунке 1 это точки $A_1$, $A_2$, ...) касательной к борту нет, и если биллиардный шар (точка!) попадает в точности в одну из таких точек, то закон упругого отражения не дает возможности выяснить, как траектория шара должна выходить из этой точки. Поэтому траектории, попадающие в одну из точек излома борта, будем считать *заканчивающимися* в этих точках (рис. 2).

Итак, пусть на плоскости задана произвольная область $Q$ (биллиардный стол), ограниченная некоторой кривой $\Gamma$ (бортом), возможно, с точками излома. Примеры биллиардных столов — круг, круговой сектор, многоугольник. Для простоты будем считать биллиардный стол *выпуклым*. Через заданную в области $Q$ точку $P$ в заданном направлении $\mathbf{v}$ можно провести единственную биллиардную траекторию — ломаную $PP_1P_2P_3\ldots$ (рис. 3). В общем случае эта траектория никогда не попадет точно в точки излома борта, и биллиардный шар будет двигаться по ней неограниченно долго. Может случиться так, что при построении траектории, проходящей через точку $P$ в направлении $\mathbf{v}$, через некоторое время эта траектория снова пройдет через ту же точку $P$ в *том же самом* направлении. Очевидно, что далее траектория опять пойдет по тому же пути. Такая ситуация соответствует повторяющемуся, периодическому движению биллиардного шарика. Отвечающие подобному движению траектории называются *периодическими*. Геометрически периодическая биллиардная траектория — это замкнутая вписанная в кривую $\Gamma$ ломаная, обладающая свойством «равенства углов падения и отражения». Примеры периодических траекторий в некоторых областях изображены на рисунке 4.

Большой интерес представляют собой не периодические бесконечные траектории, мы их будем называть просто *непериодическими*. Шарик движется по любой непериодической траектории неограниченно долго и при этом никогда не проходит через одну и ту же точку дважды в одинаковом направлении (разумеется, в разных направлениях шарик может проходить через одну и ту же точку и несколько раз). Примеры непериодических траекторий будут приведены ниже.

*Проблема биллиарда в области Q* заключается в том, чтобы найти ответы на такие вопросы: *существуют ли периодические траектории? много ли их? как они устроены? как узнать, будет ли траектория, выходящая из данной точки в данном направлении, периодической или непериодической? в каких частях области Q побывает шарик, двигаясь по конкретной непериодической траектории?* и т. д. В § 2 мы решим проблему биллиарда в круге — это простейший из биллиардов, поддающихся полному исследованию. Но сначала — несколько задач, над которыми полезно подумать до того, как читать дальше.

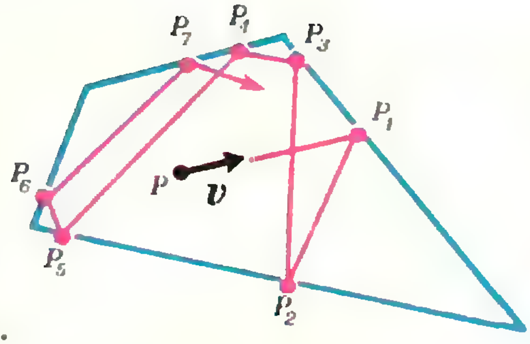


Рис. 3.

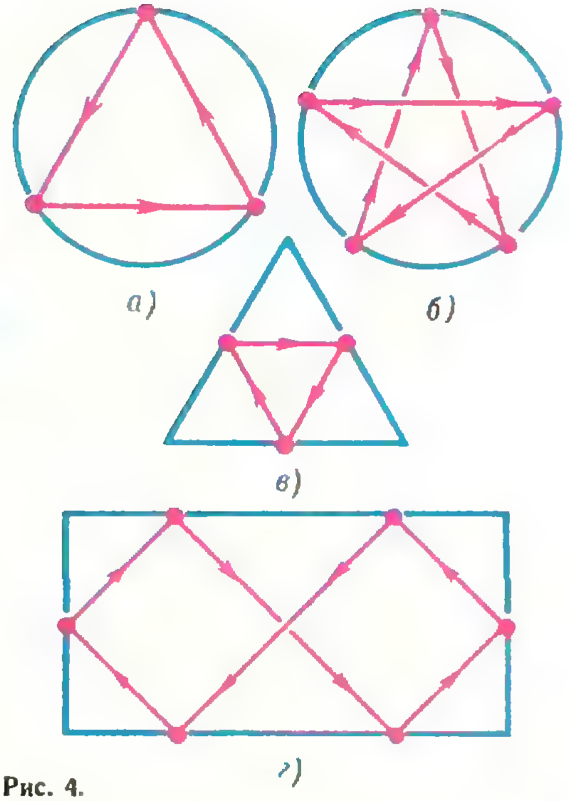


Рис. 4.

Задача 1. Пусть $Q$ — круг. Как узнать по начальному звену биллиардной траектории, будет ли эта траектория периодической или нет? Как близко может подойти к центру круга эта траектория? В каких частях круга побывает шарик, двигаясь по одной из непериодических траекторий?

Задача 2. Укажите хотя бы одну непериодическую траекторию биллиарда в прямоугольнике или в квадрате. Укажите несколько типов периодических траекторий биллиарда в квадрате. Как по углу $\alpha$, образованному начальным звеном траектории биллиарда в квадрате с одной из сторон квадрата, узнать, будет эта траектория периодической или нет?

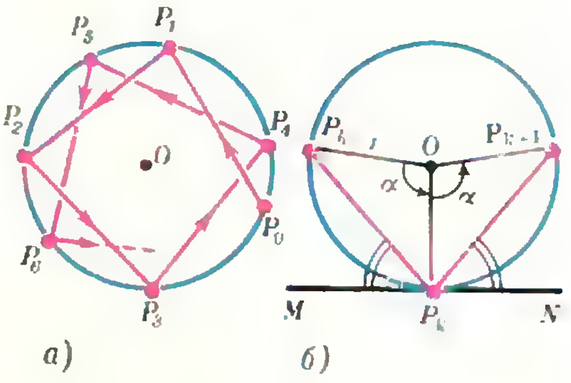
Задача 3. Укажите несколько периодических траекторий биллиарда в равностороннем треугольнике (не таких, как на рисунке 4, *в*).

## § 2. Биллиард в круге

Рассмотрим биллиард в круге $Q$, ограниченном окружностью $\Gamma$. Его траекториями являются вписанные в $\Gamma$ ломаные $P_0P_1P_2P_3\ldots$, обладающие свойством равенства углов падения и отражения. Из этого свойства следует, что все звенья траектории равны между собой, как равны друг другу и опирающиеся на них центральные углы $P_0OP_1$, $P_1OP_2$, $P_2OP_3$, ... (докажите это — например, с помощью рисунка 5). Пусть $\alpha$ — радианная мера этих углов. Ясно, что каждая вершина $P_k$ траектории $P_0P_1P_2P_3\ldots$ получается из предыдущей вершины $P_{k-1}$ поворотом на угол $\alpha$ радиан относительно центра окружности $\Gamma$, поэтому вершина $P_n$ получается из начальной вершины $P_0$ поворотом на угол $n\alpha$ радиан. Вид биллиардной траектории в круге полностью определяется числом $\alpha$.

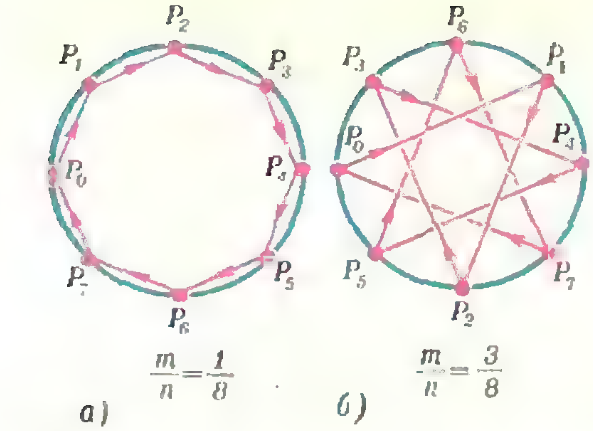
а) *Если число $\alpha$ соизмеримо с $2\pi$, то отвечающая $\alpha$ биллиардная траектория периодична.* (Напомним, что числа $a$ и $b$ называются *соизмеримыми*, если их отношение является рациональным числом, т. е. $a/b=m/n$, где $m$ и $n$ — целые числа.)

б) *Если отношение $\alpha/\pi$ иррационально (т. е. $\alpha$ и $\pi$ несоизмеримы), то отвечающая углу $\alpha$ траектория непериодична.*



а) б)

Рис. 5.



а) $\frac{m}{n}=\frac{1}{8}$ б) $\frac{m}{n}=\frac{3}{8}$

Рис. 6.

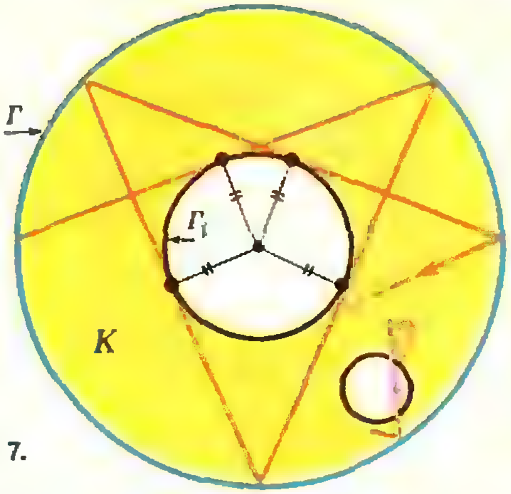


Рис. 7.

Доказательство.

а) Пусть $\alpha$ соизмеримо с $2\pi$; тогда $\alpha=(m/n)\cdot 2\pi$, где $m$ и $n$ — целые. Следовательно, $n\alpha=m\cdot 2\pi$, и поэтому при повороте около центра окружности на угол $n\alpha$ радиан каждая точка окружности переходит в себя. В частности, для вершин рассматриваемой траектории получаем: $P_n=P_0$, $P_{n+1}=P_1$, $P_{n+2}=P_2$, ... Таким образом, вершины траектории $P_0P_1P_2P_3$, ..., начиная с $n$-й, повторяются, т. е. траектория периодична.

Заметим, что если дробь $m/n=\alpha/2\pi$ несократима, то отвечающая $\alpha$ периодическая траектория — это замкнутая ломаная $P_0P_1P_2...P_{n-1}P_0$, состоящая в точности из $n$ звеньев. При $m=1$ это будет правильный $n$-угольник, вписанный в окружность $\Gamma$, а при $m\geqslant 2$ траектория представляет собой правильную самопересекающуюся замкнутую (звездчатую) ломаную, вписанную в $\Gamma$ (рис. 6).

б) Рассуждая от противного, видим, что достаточно доказать следующее: если траектория $P_0P_1P_2P_3...$ периодична, то $\alpha$ и $\pi$ соизмеримы. Из периодичности траектории вытекает, что, начиная с некоторого номера $n$, вершины траектории повторяются: $P_n=P_0$, $P_{n+1}=P_1$, $P_{n+2}=P_2$, ... Но это означает, что при повороте на угол $n\alpha$ радиан точка $P_0$ переходит сама в себя; следовательно, угол $n\alpha$ есть целое кратное полного угла: $n\alpha=m\cdot 2\pi$. Таким образом, $\alpha/\pi=2m/n$.

Итак, если $\alpha$ несоизмеримо с $\pi$, то отвечающая углу $\alpha$ биллиардная траектория есть незамкнутая ломаная $P_0P_1P_2P_3...$ с равными по длине звеньями, вписанная в окружность $\Gamma$. Поскольку звенья этой ломаной равны по длине, их середины удалены от центра окружности $\Gamma$ на одинаковое расстояние, т. е. лежат на некоторой окружности $\Gamma_1$, концентрической с $\Gamma$ (рис. 7). Все звенья рассматриваемой траектории касаются этой меньшей окружности $\Gamma_1$, и траектория никогда не заходит внутрь $\Gamma_1$, т. е. целиком лежит в кольце $K$ между окружностями $\Gamma_1$ и $\Gamma$.

Теорема 1. *Если $\alpha$ и $\pi$ несоизмеримы, то любая траектория биллиарда в круге, отвечающая углу $\alpha$, всюду плотно заполняет кольцо $K$.*

Совет. Прежде чем читать дальше, продумайте хорошенько формулировку теоремы, поймите ее и попробуйте доказать.

[Самое главное место в формулировке — слова *«траектория всюду плотно заполняет кольцо K»*. Их точный смысл можно пояснить так: биллиардный шарик, двигаясь по непериодической траектории, рано или поздно побывает в *любом* кусочке кольца $K$. Если считать, что шарик «чернильный» и оставляет после себя след, то он со временем *обязательно закрасит все кольцо целиком*, каким бы тонким ни был чернильный след (но имеющим все-таки ненулевую «толщину»). Периодическая траектория может заполнить кольцо «очень плотно», но не «всюду плотно» — на кольце обязательно останутся такие участки (например, кружки), которые периодическая траектория не пересечет никогда.]

Пусть $P_0P_1P_2P_3...$ — рассматриваемая непериодическая траектория.

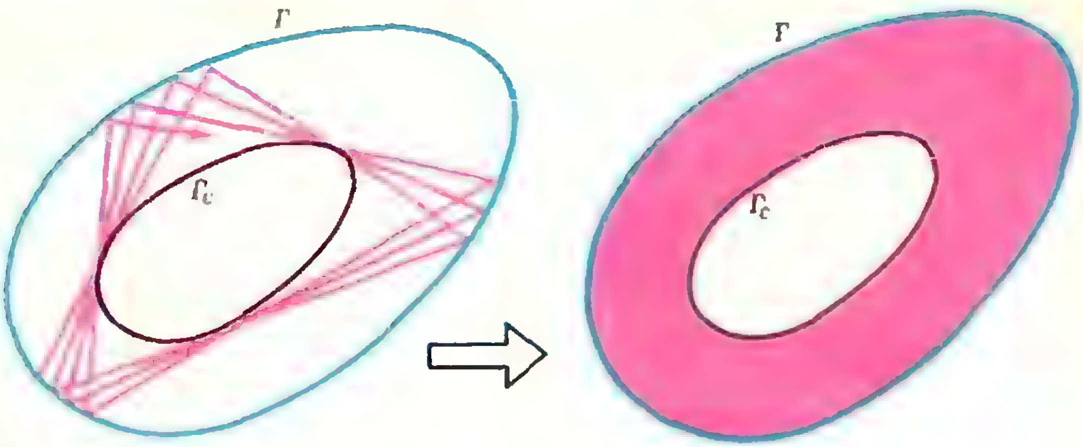


Рис. 8.

Утверждение теоремы следует из того факта, что точки $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ расположены на окружности Γ *всюду плотно*, а это, в свою очередь, вытекает из такого утверждения.

Теорема Якоби. *Пусть последовательность $\{P_k\} = \{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$ точек окружности Γ такова, что каждая следующая ее точка $P_{k+1}$ получается из предыдущей точки $P_k$ поворотом около центра окружности на один и тот же угол α радиан. Тогда, если α и π несоизмеримы, то последовательность точек $\{P_k\}$ заполняет окружность Γ всюду плотно, т. е. для любой дуги Δ окружности Γ найдется номер n такой, что точка $P_n$ с этим номером лежит на дуге Δ.*

Попробуйте доказать теорему Якоби самостоятельно. Проведите подробный вывод теоремы 1 из теоремы Якоби. Чтобы дать возможность подумать, мы этот вывод и доказательство теоремы Якоби вынесли в специальное дополнение к § 2.

Теперь биллиард в круге можно считать полностью исследованным. Резюмируем полученные результаты. *Траектория биллиарда в круге является либо периодической (если число α/π рационально), либо всюду плотной в некоторой области — в кольце K между бортом биллиарда Γ и концентрической с Γ окружностью $\Gamma_1$ (если число α/π иррационально).*

Задача 4. Исследуйте биллиарды в полукруге и в секторе с прямым центральным углом. (Попробуйте свести эти два биллиарда к биллиарду в круге!)

Возникает естественный вопрос: а как ведут себя траектории биллиарда в произвольной выпуклой области Q, ограниченной кривой Γ без точек излома? Такие биллиарды изучались многими математиками, в том числе известным американским математиком Дж. Биркгофом, советскими математиками В. Ф. Лазуткиным, Л. А. Бунимовичем. Эти исследования, мягко говоря, не совсем элементарны. Мы сформулируем два наиболее интересных факта, относящихся к таким биллиардам.

**I** (*Анри Пуанкаре, Дж. Биркгоф*). Биллиард в произвольной выпуклой области имеет бесконечно много периодических траекторий. Более того, для любого $n \geqslant 3$ существуют периодические траектории, состоящие в точности из n звеньев. (В конце § 3 мы приведем указанное Биркгофом изящное доказательство этого утверждения.)

**II** (*В. Ф. Лазуткин*). В общем случае внутри выпуклой области Q с границей Γ можно указать семейство кривых $\{\Gamma_c\}$, обладающих следующим свойством: если начальное звено какой-нибудь траектории касается одной из кривых $\Gamma_c$, то и все остальные звенья этой траектории касаются *той же* кривой $\Gamma_c$ (рис. 8). Кривые с такими свойствами называются *биллиардными каустиками в области Q*. Когда Q — круг, каустиками являются окружности, концентрические с Γ. Доказать существование каустик для произвольной области Q весьма сложно. [Попробуйте найти каустики для биллиарда в эллипсе (см. задачи 12 и 13).] Совсем трудно доказать в общем случае аналог теоремы 1: *почти любая непериодическая траектория, касающаяся каустики $\Gamma_c$, всюду плотно заполняет область между бортом биллиарда Γ и этой каустикой $\Gamma_c$* («кривое кольцо»).

Оказывается, что периодические траектории биллиарда в области Q

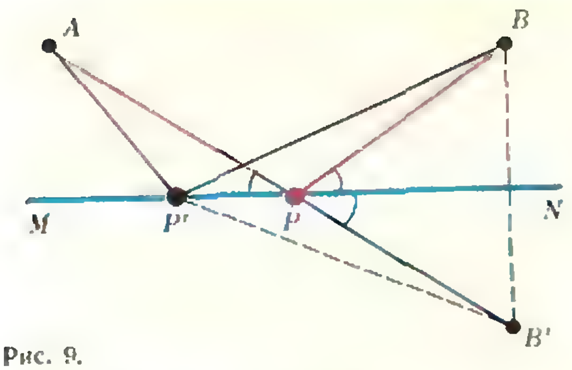


Рис. 9.

и его каустики тесно связаны с так называемыми собственными колебаниями упругой мембраны, имеющей форму области $Q$. Грубо говоря, если сделать барабан в форме области $Q$ (с каркасом в форме кривой $\Gamma$), то издаваемые этим барабаном музыкальные звуки как раз и связаны с соответствующим биллиардом! К сожалению, чтобы объяснить этот поразительный факт, нам пришлось бы углубиться в слишком серьезные для «Кванта» разделы математики. Заинтересовавшемуся читателю можно только посоветовать изучить математику в таком объеме, чтобы самому объяснить связь между биллиардом и барабаном.

## § 3. Экстремальные свойства траекторий биллиарда

Способ построения биллиардной траектории, ведущей из одной данной точки $A$ в другую данную точку $B$ после одного отражения от прямолинейного борта $MN$, вытекает из закона упругого отражения: строим точку $B'$, симметричную точке $B$ относительно прямой $MN$, и соединяем $A$ с $B'$ (рис. 9); точка $P$ пересечения прямых $AB'$ и $MN$ и будет точкой соударения шара с бортом $MN$, а ломаная $APB$ — это искомая траектория (поясните). Из построения очевидно, что биллиардная траектория $APB$ — *кратчайшая* из всех ломаных вида $AP'B$ с точкой $P'$ на прямой $MN$, ведущих из $A$ в $B$! (Дайте подробное доказательство.) Это утверждение есть частный и простейший случай фундаментального принципа классической механики — *принципа наименьшего действия* (в оптике он называется *принципом Ферма*)*). В нашей ситуации этот принцип можно сформулировать так: биллиардный шарик «умный» и из всех возможных путей выбирает самый короткий. Пока «принцип наикратчайшего пути» установлен нами лишь в случае одного отражения от прямолинейного борта. В задачах 5—7 предлагается проверить его в тех случаях, когда шар отражается не один раз, а несколько, но от прямолинейных бортов.

Задача 5. Внутри острого угла $MON$ даны точки $A$ и $B$. Постройте кратчайшую ломаную $AP_1P_2B$ с вершинами $P_1$ на $[OM)$ и $P_2$ на $[ON)$. Докажите, что эта ломаная является траекторией биллиарда внутри угла $MON$, ведущей из $A$ в $B$.

Задача 6. (А). В данный острый угол $MON$ впишите треугольник $ABC$ наименьшего периметра, вершина $A$ которого находилась бы в данной внутри угла точке, а две другие лежали бы на сторонах угла.

(Б). *«Задача Фаньяно»*. В данный остроугольный треугольник $MLN$ впишите треугольник $ABC$ наименьшего периметра. Докажите, что этот треугольник $ABC$ дает периодическую траекторию биллиарда внутри треугольника $MLN$.

Задача 7. На прямоугольном биллиардном столе $KLMN$ лежат два шара $A$ и $B$. В каком направлении нужно толкнуть шар $A$ для того, чтобы после четырех последовательных отражений от бортов $KL$, $LM$, $MN$, $NK$ он ударился бы в шар $B$? При любых ли положениях шаров $A$ и $B$ задача имеет решение? Будет ли эта траектория $AP_1P_2P_3P_4B$ кратчайшей из всех ломаных такого вида (начинающихся в точке $A$, заходящих на борты стола в указанной последовательности и кончающихся в точке $B$)?

Оказывается, что замена прямолинейного борта криволинейным настолько «сбивает с толку» биллиардный шарик, что он иногда движется не самым коротким, а, напротив, самым длинным путем! Рассмотрим эту ситуацию подробно.

Теорема 2. *Если ломаная $APB$ с концами $A$ и $B$ и с точкой из-*

---

*) Подробно об этом см. в статье С. Г. Верова *«Брахистохрона, или еще одна тайна циклоиды»*, «Квант», 1975, № 12.

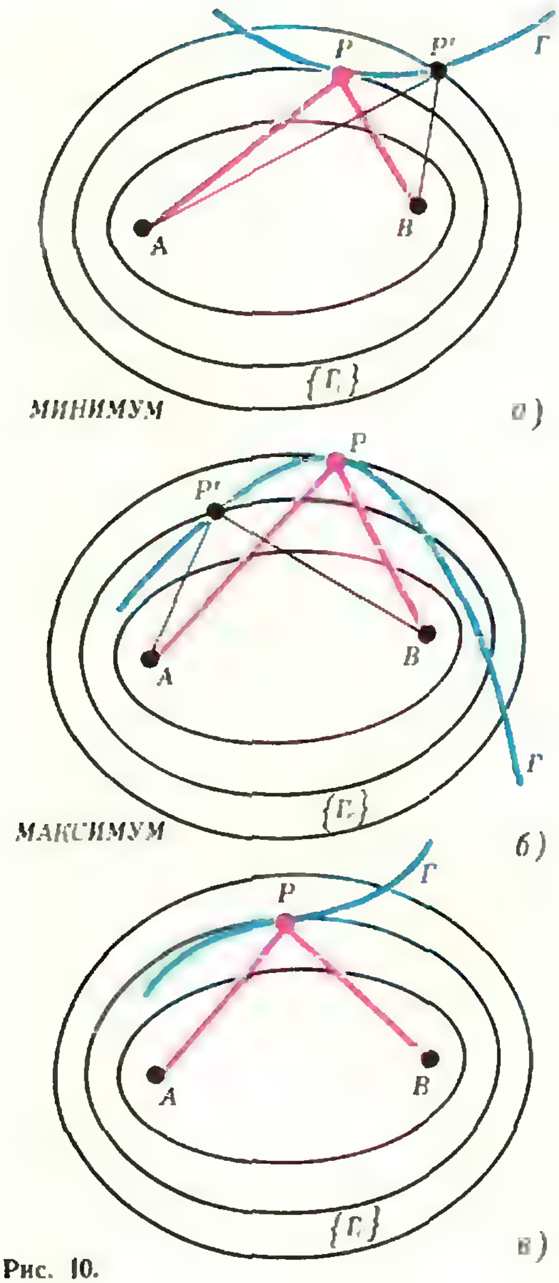


Рис. 10.

*лома $P$ на гладкой кривой $\Gamma$ является* ***локально минимальной*** *или* ***локально максимальной****, т. е. имеет наименьшую или наибольшую длину среди тех ломаных $AP'B$, вершины $P'$ которых лежат на кривой $\Gamma$ в некоторой* ***окрестности*** *точки $P$, то эта ломаная $APB$ является биллиардной траекторией, ведущей из $A$ в $B$ после отражения от кривой $\Gamma$ в точке $P$ (т. е. звенья $PA$ и $PB$ образуют равные углы с касательной к кривой $\Gamma$ в точке $P$).*

**Замечание.** Далее для краткости слово «локальный» мы опускаем. При доказательстве сформулированного «принципа экстремального (т. е. минимального или максимального) пути для биллиардных траекторий» мы воспользуемся распространенным приемом исследования задач на максимум и минимум; его описание в общем случае можно найти в книжке Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые», § 7, или в статье В. Г. Болтянского и И. М. Яглома «Геометрические задачи на максимум и минимум» в V томе «Энциклопедии элементарной математики».

**Доказательство теоремы 2.** Для каждого числа $c > |AB|$ рассмотрим множество $\Gamma_c$, состоящее из тех точек $M$, для которых $|AM| + |MB| = c$. Как известно (см., например, упомянутую выше книгу «Прямые и кривые», § 5, или статью И. Н. Бронштейна «Эллипс», «Квант» № 1 за 1975 год), множества $\Gamma_c$ — это *эллипсы* с *фокусами* в точках $A$ и $B$; они образуют *семейство софокусных эллипсов* $\{\Gamma_c\}$. Нетрудно видеть, что если ломаная $APB$ минимальна или максимальна, то точка $P$ является *точкой касания* кривой $\Gamma$ с одним из эллипсов семейства $\{\Gamma_c\}$ — докажите это с помощью рисунков 10, *а* и *б*. (Отметим, что не все точки касания дают максимум или минимум — см. рис. 10, *в*.) В такой точке $P$ кривая $\Gamma$ и касающийся ее эллипс $\Gamma_c$ имеют *общую* касательную $MN$. Согласно *оптическому свойству эллипса* *), отрезки $PA$ и $PB$, соединяющие точку $P$ с фокусами эллипса $\Gamma_c$, образуют равные углы с касательной $MN$ к $\Gamma_c$ в точке $P$ (рис. 11). Поскольку прямая $MN$ одновременно является и касательной к кривой $\Gamma$ в точке $P$, ломаная $APB$ — биллиардная траектория, идущая из $A$ в $B$ после отражения от $\Gamma$ в точке $P$! Теорема 2 доказана.

**Обращение к придирчивым читателям.** Если наши рассуждения показались вам слишком нестрогими — например, из-за отсутствия точных опреде-

---

*) См., например, статью В. Г. Болтянского в «Кванте» № 12 за 1975 год.

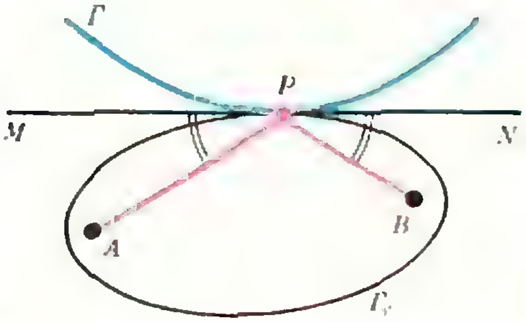


**Рис. 11.**

лений касания кривых, локальных экстремумов и т. д., — то мы советуем обратиться к упоминавшейся выше статье В. Г. Болтянского и И. М. Яглома в V томе «Энциклопедии элементарной математики» (с. 270—346). В свое оправдание заметим, что строгое обсуждение всех этих понятий увело бы нас слишком далеко от биллиардов.

Пример. Пусть $Г$ — окружность, $A$ и $B$ — точки внутри $Г$. Рассматривая семейство $\{Г_c\}$ софокусных эллипсов с фокусами $A$ и $B$, можно показать, что существует ровно четыре траектории, ведущих из $A$ в $B$ после одного отражения от $Г$, причем две из них отвечают минимумам, а две другие — максимумам суммы $|AP| + |PB|$ (см. рис. 12).

Задача 8. Утверждение, обратное принципу экстремального пути, гласит: *биллиардная траектория $APB$, идущая из точки $A$ в точку $B$ после отражения от кривой $Г$, является либо минимальной, либо максимальной ломаной.* Приведите пример, показывающий, что для невыпуклых кривых $Г$ это утверждение неверно. Будет ли оно верно для выпуклых кривых $Г$ (т. е. для кривых, лежащих целиком по одну сторону от любой своей касательной)? Докажите этот «обратный принцип» в том случае, когда кривая $Г$ выпуклая и обращена своей выпуклостью к точкам $A$ и $B$ (как на рисунке 10, *а*).

Применим теперь принцип экстремального пути к упомянутой в § 2 теореме Биркгофа:

*если $Q$ — выпуклая область, ограниченная кривой $Г$ без точек излома, то для произвольного $n \geqslant 3$ существует хотя бы одна периодическая траектория биллиарда в области $Q$, состоящая ровно из $n$ звеньев.*

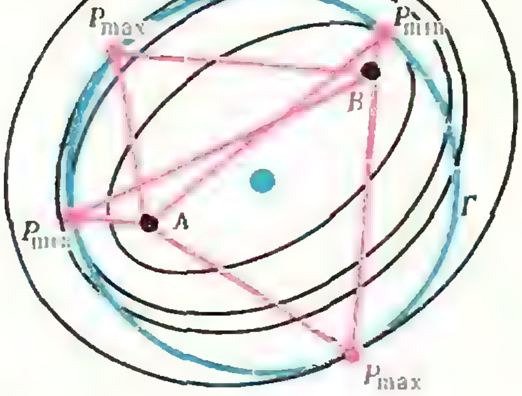


**Рис. 12.**

Доказательство. Рассмотрим всевозможные несамопересекающиеся замкнутые $n$-звенные ломаные $P_1P_2 \ldots P_nP_1$, вписанные в область $Q$ (т. е. с вершинами $P_i$ на кривой $Г$). Выберем среди них ломаную наибольшей длины (подумайте, почему такая ломаная существует?).

Задача 9. Докажите с помощью принципа экстремального пути, что эта самая длинная ломаная является биллиардной траекторией в области $Q$.

Из задачи 9 следует, что «наидлиннейшая» ломаная $P_1P_2 \ldots P_nP_1$ и будет замкнутой периодической траекторией, и теорема Биркгофа доказана (мы не хотим лишать читателя удовольствия от самостоятельного решения задачи 9).

Задача 10. (А) Проанализируйте утверждение теоремы Биркгофа при $n=2$.

(Б). Подумайте, будет ли настоящей *$n$-звенной* периодической траекторией ломаная, «наидлиннейшая» *среди всех* (в том числе и самопересекающихся) $n$-звенных ломаных, вписанных в кривую $Г$? (Рассмотрите случаи $n=4$ и $n=5$.)

(В). Какие затруднения возникнут при доказательстве теоремы Биркгофа, если вместо *самой длинной* ломаной $P_1P_2 \ldots P_nP_1$ взять *самую короткую*?

Задача 11. Какой из вписанных в окружность $n$-угольников имеет наибольший периметр?

Сформулируем две задачи про биллиард внутри эллипса $Г$ с фокусами $A$ и $B$. Согласно оптическому свойству эллипса (см. выше), если выпустить биллиардную траекторию из фокуса, то ее звенья будут поочередно проходить через фокусы $A$ и $B$, причем эта траектория будет неограниченно приближаться к большой

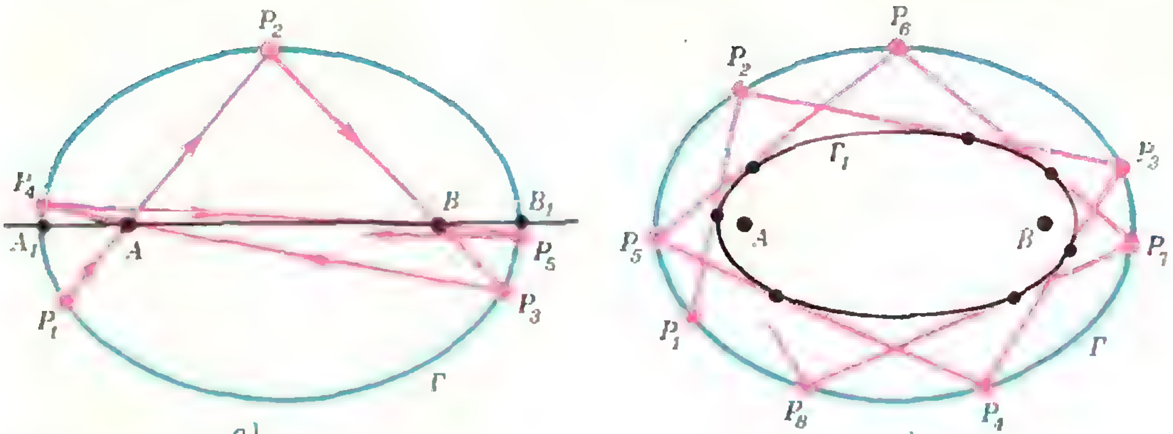


Рис. 13. *а*) *б*)

оси эллипса — к отрезку $A_1B_1$ (рис. 13, *а*).

Задача 12. Пусть начальное звено биллиардной траектории в эллипсе $\Gamma$ *не пересекает* отрезок $AB$ между фокусами. Докажите, что и все следующие звенья этой траектории не будут пересекать отрезок $AB$. Более того, если построить меньший эллипс $\Gamma_1$ с теми же фокусами, касающийся начального звена траектории, то $\Gamma_1$ будет касаться и всех остальных звеньев *) (см. рис. 13, *б*).

Задача 13. Докажите, что если начальное звено биллиардной траектории в эллипсе $\Gamma$ *пересекает* отрезок $AB$ между фокусами, то и все следующие ее звенья пересекают отрезок $AB$. Более того, если построить гиперболу с теми же фокусами $A$ и $B$, касающуюся начального звена $P_1P_2$ (или прямой $P_1P_2$), то ветви этой гиперболы будут касаться и всех остальных звеньев $P_kP_{k+1}$ (или их продолжений — прямых $P_kP_{k+1}$)**).

Задачи 12 и 13 показывают, что для биллиарда в эллипсе с фокусами $A$ и $B$ *каустиками* (см. § 2) являются гиперболы и меньшие эллипсы с теми же фокусами $A$ и $B$.

В заключение приведем две замечательные задачи, относящиеся к общей проблеме биллиардов в многоугольниках.

Задача 14. Докажите, что любая непериодическая траектория биллиарда в прямоугольнике всюду плотно заполняет весь (!) прямоугольник (сравните с задачей 2; отметим, что отнюдь не всегда непериодическая траектория всюду плотно заполняет некоторую область — например, траектория биллиарда в эллипсе, проходящая через фокусы, этим свойством не обладает!).

Задача 15. Докажите то же самое для биллиарда в равностороннем треугольнике.

## Дополнение к § 2

(А) Теорема Якоби.
Напомним, как она формулируется.

*Пусть $\alpha$ — несоизмеримое с $\pi$ число, $\{P_0, P_1, P_2, \ldots\} = \{P_k\}$ — последовательность точек окружности $\Gamma$ такая, что каждая следующая точка последовательности $P_{k+1}$ получается из предыдущей ее точки $P_k$ поворотом на угол $\alpha$ радиан. Тогда для любой дуги $\Delta$ окружности $\Gamma$ хотя бы одна точка последовательности $\{P_k\}$ лежит на этой дуге $\Delta$.*

Доказательство. Пусть $\Delta$ — произвольная дуга, $\varepsilon$ — ее радианная мера. Выберем натуральное число $N$ такое, что $2\pi/N < \varepsilon$. Разобьем окружность $\Gamma$ на $N$ равных по длине дуг $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$; радианная мера каждой из них равна $2\pi/N$ и меньше $\varepsilon$. Рассмотрим первые $N+1$ точек последовательности $\{P_k\}$, т. е. точки $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_N$. Согласно принципу Дирихле, хотя бы на одной из $N$ дуг $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ лежат по крайней мере две из этих точек. Пусть, например, точки $P_n$ и $P_m$, где $m = n + l > n$, лежат на дуге $\Delta_l$. Так как $\alpha$ несоизмеримо с $\pi$, то $P_m \neq P_n$ (поясните!). Пусть радианная мера дуги $P_nP_m$ равна $\delta$; тогда $\delta < 2\pi/N$ и тем более $\delta < \varepsilon$.

---

*) Задача 12 уже была опубликована в «Кванте» — см. № 12 за 1975 год, в разделе «Задачник «Кванта». Ее решение, а также решения остальных задач мы приведем в следующем номере журнала.

**) Определение и нужные свойства гиперболы см. в статье И. Н. Бронштейна «Гипербола», «Квант», 1975, № 3, а также в вышеупомянутой статье В. Г. Болтянского.

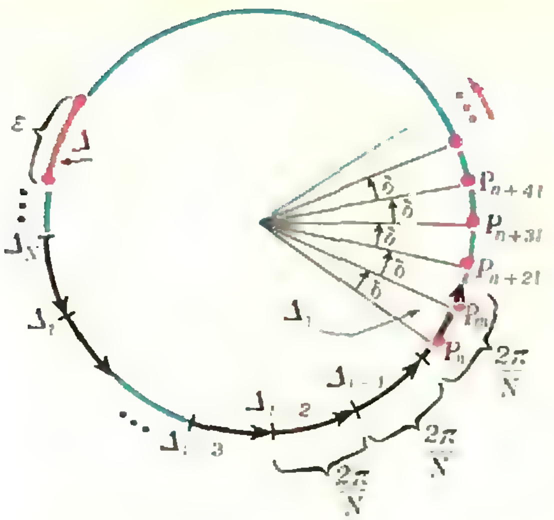


Рис. 14.

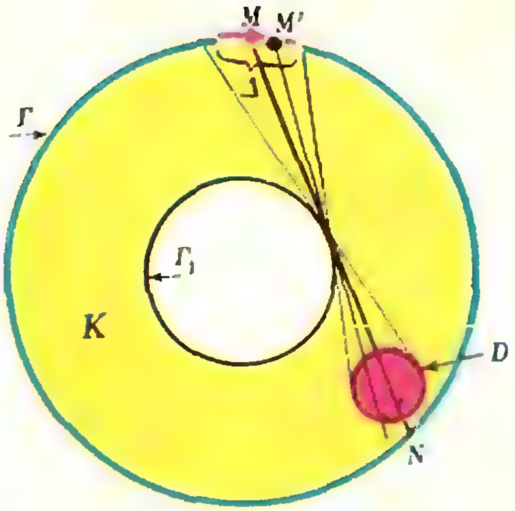


Рис. 15.

Рассмотрим теперь точки последовательности $\{P_k\}$ с номерами $n, n+l, n+2l, \ldots$ (рис. 14). Они образуют подпоследовательность $\{P_n, P_{n+l}, P_{n+2l}, P_{n+3l}, \ldots\}$, каждая следующая точка которой $P_{n+(r+1)l}$ получается из предыдущей точки $P_{n+rl}$ поворотом на угол $l\alpha$, т. е. точно так же, как точка $P_{n+l}=P_m$ получается из точки $P_n$. Таким образом, соседние точки выделенной подпоследовательности отстоят друг от друга на дугу радианной меры $\delta$. Так как $\delta<\varepsilon$, хотя бы одна из точек $P_n, P_{n+l}, P_{n+2l}, \ldots$ обязана попасть на дугу $\Delta$. Тем самым теорема Якоби доказана.

(Б) Вывод теоремы 1 из теоремы Якоби.

Пусть $\alpha$ — несоизмеримое с $\pi$ число, $\Gamma_1$ — окружность, которой касаются звенья каждой отвечающей углу $\alpha$ траектории биллиарда внутри окружности $\Gamma$. Пусть $K$ — кольцо между $\Gamma_1$ и $\Gamma$, а $D$ — произвольный кружок внутри кольца $K$. Проведем через его центр хорду $MN$ окружности $\Gamma$, касающуюся окружности $\Gamma_1$ (рис. 15). Очевидно, что если взять достаточно малую дугу $\Delta$ окружности $\Gamma$ с серединой в точке $M$, то для любой другой точки $M'$ дуги $\Delta$ касательная к окружности $\Gamma_1$, проведенная из точки $M'$ по ту же сторону от $\Gamma_1$, что и $MN$, обязательно пересекает кружок $D$ (поясните!).

Рассмотрим теперь любую траекторию $P_0P_1P_2\ldots$ биллиарда внутри окружности $\Gamma$, отвечающую углу $\alpha$. Требуется доказать, что хотя бы одно из ее звеньев пересекает кружок $D$. Согласно теореме Якоби, точки $P_0, P_1, P_2, \ldots$ всюду плотно заполняют окружность $\Gamma$, и поэтому хотя бы одна из них, скажем, $P_n$, лежит на выбранной выше дуге $\Delta$. В силу выбора этой дуги $\Delta$ одно из двух звеньев траектории, выходящих из точки $P_n$, обязательно пересекает кружок $D$. Тем самым теорема 1 доказана.

Кроме теоремы 1 теорема Якоби имеет и много других интересных следствий*). Мы сформулируем два из них как задачи.

**Задача 16.** Докажите, что если число $d$ иррационально, то для любого числа $a$ последовательность дробных частей членов арифметической прогрессии $a, a+d, a+2d, \ldots$, т. е. последовательность чисел $a_n=\{a+nd\}$, *всюду плотно* заполняет отрезок $0\leqslant x\leqslant 1$ на числовой оси. ($\{x\}$ — обозначение для дробной части числа $x$: $\{x\}=x-[x]$).

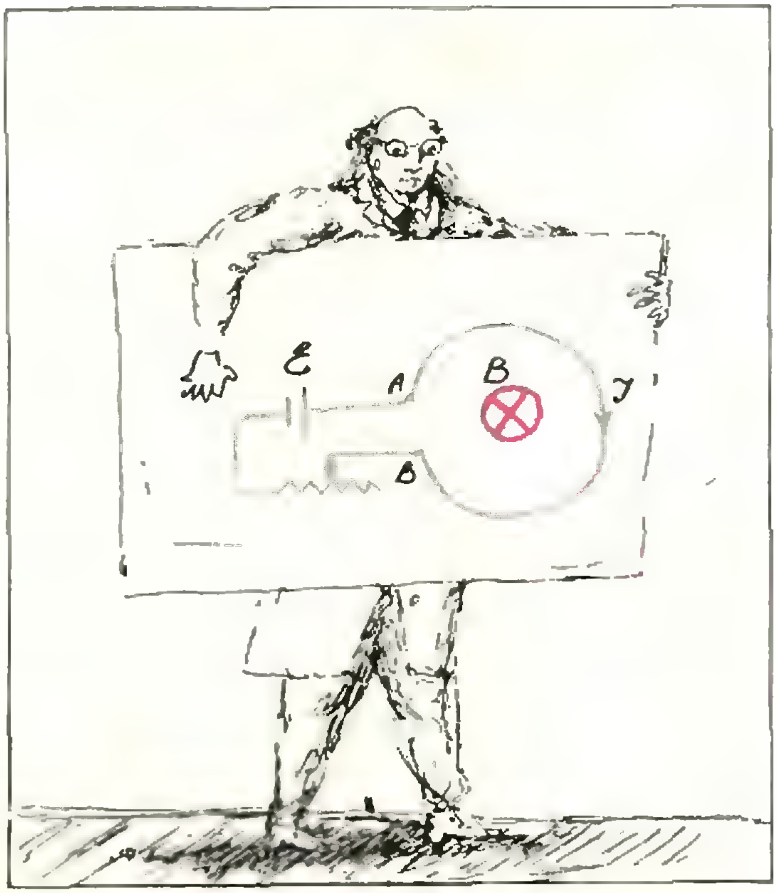
**Задача 17.** Докажите, что если десятичный логарифм числа $c$ иррационален, то десятичная запись натуральных степеней $c$, т. е. чисел $c, c^2, c^3, \ldots, c^n, \ldots$, может начинаться с любого наперед заданного набора цифр. (Например, найдется такая натуральная степень числа 17, которая начинается с семнадцати идущих подряд наборов цифр 1976!)

---

*) Некоторые приложения теоремы Якоби можно найти в статье А. А. Егорова «Решетки и правильные многоугольники». «Квант», 1974, № 12.

*В. Новиков*

# ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ КОНТУРА С ТОКОМ



К пониманию того, что магнитное поле электрического тока обладает энергией, легко прийти, анализируя явление электромагнитной индукции. Будем мысленно проводить опыт со схемой, изображенной на рисунке. Если перемещать движок реостата так, чтобы сопротивление реостата уменьшалось, то должен возрастать электрический ток в цепи. Чем больше значение тока, тем больше значение индукции магнитного поля, создаваемого этим током. С увеличением магнитного поля растет поток вектора магнитной индукции через площадку, ограниченную контуром с током. Но согласно закону Фарадея при изменении потока магнитной индукции в контуре возникает электродвижущая сила самоиндукции, равная

$$\mathcal{E}_{is} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, \qquad (1)$$

где $\Delta \Phi$ — изменение потока магнитной индукции за время $\Delta t$. Вызываемый этой э. д. с. индукционный ток создает магнитное поле, направление индукции которого противоположно направлению индукции магнитного поля основного тока. Таким образом, магнитный поток создаваемого поля стремится компенсировать изменение магнитного потока основного поля, т. е. фактически стремится удержать постоянной величину основного тока. Чтобы противодействовать этому эффекту, необходимо совершать некоторую работу против электродвижущей силы самоиндукции. Подсчитаем эту работу.

Если ток за время $\Delta t$ увеличился от значения $I$ до значения $I + \Delta I$ и при этом возникла $\mathcal{E}_{is}$, то работа источника тока против этой э. д. с. равна

$$\Delta A = -\mathcal{E}_{Is} I \Delta t.$$

Подставив сюда выражение (1) для э. д. с. самоиндукции, получим

$$\bullet \quad \Delta A = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} I \Delta t = I \Delta \Phi. \qquad (2)$$

Теперь вспомним, что каждый контур может быть охарактеризован некоторой величиной $L$, называемой коэффициентом самоиндукции или индуктивностью. Значение $L$ обычно определяют как коэффициент пропорциональности в формуле, связывающей магнитный поток $\Phi$ с величиной силы того тока $I$, который вызывает этот поток, т. е.

$$\Phi = LI. \qquad (3)$$

Поэтому, если ток изменяется на величину $\Delta I$, то поток магнитной индукции изменяется на величину

$$\Delta\Phi = L\Delta I. \qquad (4)$$

Таким образом, выражение (2) для работы мы можем записать так:

$$\Delta A = LI\Delta I = \Phi\Delta I. \qquad (5)$$

На рисунке 1 изображена зависимость магнитного потока $\Phi$ от силы тока $I$. Работа $\Delta A$ численно равна площади трапеции $ABCD$.

Если ток в цепи изменился от значения $I = 0$ до некоторого значения $I_0$, то работу источника тока против э. д. с. самоиндукции можно получить, суммируя все элементарные работы $\Delta A$. Эта полная работа численно равна площади прямоугольного треугольника $OEF$ на рисунке 1:

$$A = \frac{LI_0^2}{2}. \qquad (6)$$

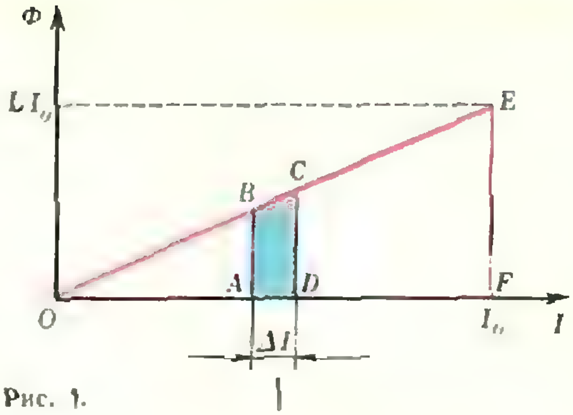


Рис. 1.

Убедимся теперь в том, что в контуре не происходило дополнительного выделения тепла, связанного с возникновением э. д. с. самоиндукции.

Представим себе, что перед началом опыта мы деформировали контур так, что ограниченная им площадь стала равной нулю (рис. 2). В этом случае при увеличении тока в цепи от нуля до $I_0$ э. д. с. самоиндукции не возникает. Сопротивление проволоки, из которой изготовлен контур, не изменилось. Поэтому и в деформированном контуре при увеличении тока от нуля до $I_0$ выделяется такое же количество тепла, как и в недеформированном. (Конечно, при условии, что в обоих случаях скорости увеличения тока до значения $I_0$ одинаковы. Напомним, что в первом эксперименте мы должны были увеличивать ток, т. е. уменьшать сопротивление, достаточно медленно, для того чтобы при каждом значении $R_i$ в цепи устанавливался ток $I_i = \frac{\mathscr{E}}{R_i}$ (если внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало).)

Итак, выделение тепла в контуре не зависит от того, совершает источник дополнительную работу (6) или нет.

Поскольку мы знаем, что энергия не исчезает и не возникает вновь, а лишь переходит из одного вида в другой, а совершаемая работа численно равна изменению энергии системы, мы вправе поставить вопрос: во что перешла совершенная источником дополнительная работа (6)? Причиной того, что необходимо было совершить эту работу, является способность контура «сопротивляться» попыткам увеличить магнитный поток через площадь, ограниченную контуром. Поэтому естественно назвать энергию, в которую перешла совершенная работа, энергией магнитного поля контура с током. В том, что именно магнитное поле контура с током обладает указанной энергией, можно убедиться, если провести опыт, который показал бы, что эта энергия может быть переведена в какие-либо другие виды энергии (например, в тепловую). Такой опыт мог бы состоять в следующем. Пред-

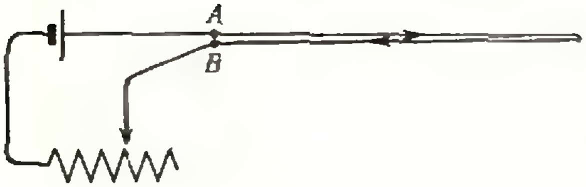


Рис. 2.

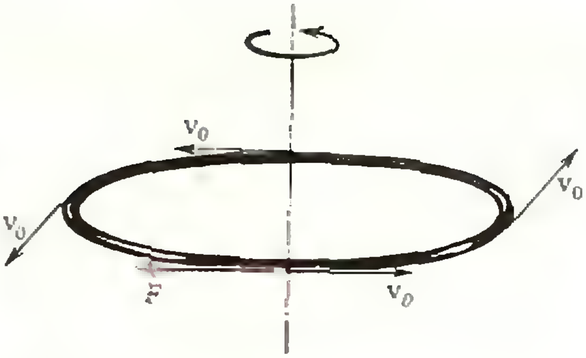


Рис. 3.

ставим себе, что между точками $A$ и $B$ наших контуров мгновенно произошло короткое замыкание. Разность потенциалов между точками $A$ и $B$, создаваемая внешним источником тока, стала равной нулю. В деформированном контуре ток немедленно прекратится. В случае недеформированного контура уменьшение тока до нуля не может произойти мгновенно, так как согласно закону электромагнитной индукции при уменьшении тока возникает э. д. с. самоиндукции, которая стремится поддержать ток на прежнем уровне. В результате уменьшение тока от значения $I_0$ до нуля будет происходить в течение некоторого времени. За это время в контуре выделится некоторое количество тепла. Энергия, за счет которой будет происходить выделение тепла, черпается из энергии магнитного поля, «запасенной» контуром. Попробуйте самостоятельно показать, что при коротком замыкании между точками $A$ и $B$ в цепи выделится количество тепла, равное найденной выше энергии магнитного поля контура с током, т. е. $LI_0^2/2$.

Итак, мы приходим к выводу, что контур, характеризуемый индуктивностью $L$, при протекании по нему тока $I$ создает вокруг себя магнитное поле, энергия которого равна

$$W_м = \frac{LI^2}{2}. \qquad (7)$$

Рассмотренный пример иллюстрировал случай, когда энергия магнитного поля тока создавалась внешним источником тока. Очевидно, что энергия магнитного поля тока не должна зависеть от способа получения тока, подобно тому как $\frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия движущегося тела — не зависит от того, каким путем телу была сообщена скорость. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим еще один пример, который будет иллюстрировать возможность непосредственного перехода кинетической энергии движущегося тела в энергию магнитного поля. Этот пример поможет нам также понять механизм возникновения магнитного поля тока на, так сказать, «микроскопическом» уровне. Под словами на «микроскопическом» уровне мы понимаем то, что возникновение электрического тока будет прослежено путем анализа уравнений движения электронов и ионов.

Рассмотрим металлическое кольцо длины $l$, равномерно вращающееся вокруг оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости (рис. 3). Будем считать, что кольцо достаточно тонкое, так что линейная скорость всех его участков постоянна и равна $v_0$. Предположим, что в момент времени $t = 0$ на кольцо начинает действовать постоянная тормозящая сила $F$, направленная по касательной к окружности. В результате процесса торможения кольцо останавливается. Однако этим не исчерпывается роль силы $F$.

Нетрудно видеть, что в кольце должен возникнуть электрический ток. Чтобы убедиться в этом, вспомним в общих чертах, как устроены твердые металлы. Атомы вещества металла находятся в ионизованном состоянии и, располагаясь в узлах кристаллической решетки, совершают лишь небольшие колебания около положений равновесия. Можно считать, что кристаллическая решетка образует как бы твердый каркас металлического тела. В противоположность ионам электроны проводимости в металле могут довольно свободно перемещаться в промежутках между узлами решетки, образуя своего рода электронный газ.

Обратимся теперь вновь к нашему металлическому кольцу. Мы можем его представить как совокупность двух вдетых одно в другое колец, подобно тому, как это изображено на рисунке 4. Синий цвет здесь относится к кристаллической решетке, красный — к электронному газу. Вначале, когда кольцо вращалось с постоянной скоростью, в этом движении принимали одинаковое участие как кристаллическая решетка, так и электронный газ. При торможении сила $F$ прикладывается, так сказать, к твердому каркасу кольца, т. е. к кристаллической решетке. Электронный же газ должен был бы начать тормозиться лишь в результате непосредственного взаимодействия электронов с ионами решетки. Это взаимодействие обусловливает электрическое сопротивление металла. Поэтому простоты ради мы можем им вовсе пренебречь, считая, например, что наше кольцо охладили перед торможением до таких низких температур, что металл перешел в сверхпроводящее состояние, т. е. его сопротивление стало равным нулю.

Таким образом, при торможении кольца электроны проводимости в металле начнут в своем движении опережать кристаллическую решетку. Это различие в скоростях движения ионов и электронов и приводит к появлению электрического тока. Подсчитаем величину тока.

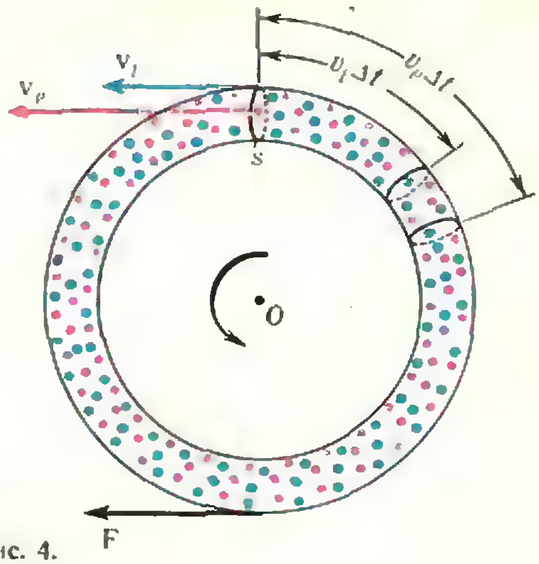


Рис. 4.

Обозначим через $v_i$ скорость ионов кристаллической решетки, а через $v_e$ — скорость направленного движения электронов проводимости. Тогда полный заряд, протекающий через сечение $s$ кольца за время $\Delta t$, складывается из заряда кристаллической решетки, заключенной в дуге длиной $v_i\Delta t$, и заряда электронного газа, заключенного в дуге длиной $v_e\Delta t$ (см. рис. 4). Если обозначить полный заряд всех ионов в кристаллической решетке через $Q$, то полный заряд электронов проводимости в кольце будет равен $-Q$ (так как в целом металлическое кольцо электронейтрально). Поэтому заряды в соответствующих дугах равны $Q\frac{v_i\Delta t}{l}$ и $-Q\frac{v_e\Delta t}{l}$, где $l$—длина кольца. Теперь мы можем найти полное количество электричества, протекающего через сечение металлического кольца за единицу времени, т. е. вычислить электрический ток в кольце:

$$I=\frac{1}{\Delta t}\left[Q\frac{v_i\Delta t}{l}-Q\frac{v_e\Delta t}{l}\right]=$$
$$=\frac{Q}{l}(v_i-v_e). \qquad (8)$$

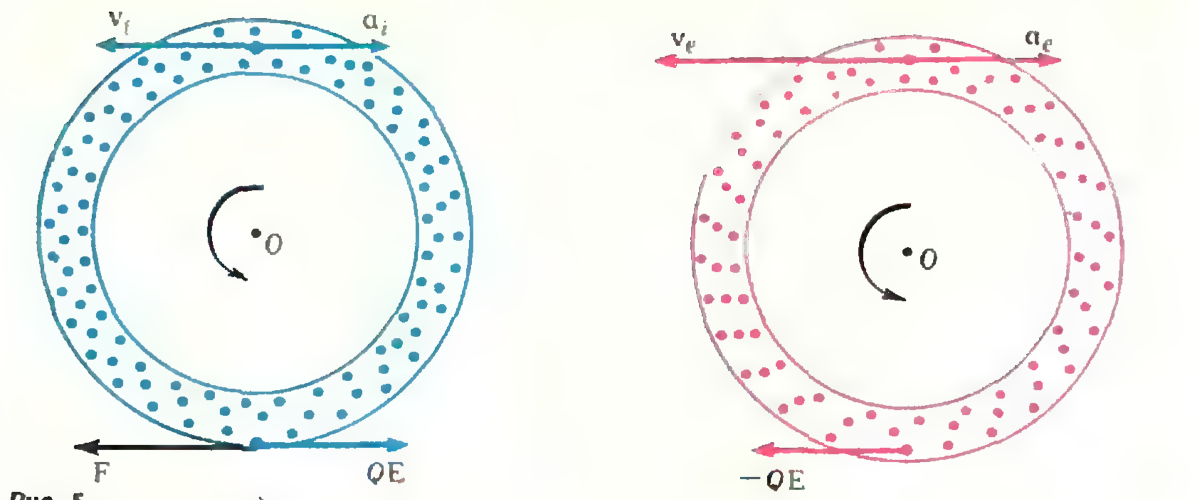


**Рис. 5.** а) б)

Мы договорились пренебрегать непосредственным взаимодействием электронов проводимости с ионами кристаллической решетки. Однако в процессе торможения в игру вступают силы, которые все-таки будут тормозить и электроны. Это силы вихревого электрического поля.

При возникновении тока в кольце индуцируется магнитное поле. Поскольку сила тока меняется, это поле не постоянно. Следовательно, оно порождает в металле кольца вихревое электрическое поле. Силы, действующие на заряды со стороны вихревого поля, препятствуют изменению тока в кольце, т. е. стремятся уменьшить относительную скорость электронов и ионов (см. (8)). Следовательно, эти силы тормозят электроны и ускоряют ионы кристаллической решетки. Работа этих сил по перемещению единичного положительного заряда вдоль кольца и представляет собой э. д. с. индукции (напомним, что работа вихревого поля на замкнутом пути не равна нулю).

Чтобы более наглядно представить себе динамику движения кристаллической решетки и электронов проводимости (электронного газа), удобно мысленно их разделить и рассматривать порознь. На рисунке 5, *а* изображено отдельно все относящееся к динамике движения кристаллической решетки (синее кольцо), а на рисунке 5, *б* — все относящееся к динамике движения электронного газа (красное кольцо). Теперь мы уже легко сможем записать II закон Ньютона в применении к кристаллической решетке и электронам. Пусть массы синего и красного колец равны соответственно $M$ и $m$, а ускорения их $a_i$ и $a_e$. Тогда

$$
\begin{aligned}
Ma_i &= QE - F, \\
ma_e &= -QE,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $E$ — напряженность вихревого электрического поля. Вычислим значение этой напряженности.

Так как работа сил вихревого поля по перемещению единичного заряда вдоль кольца равна э. д. с. самоиндукции, т. е. $El = \mathscr{E}_{is}$, то

$$
E = \frac{\mathscr{E}_{is}}{l} = -\frac{1}{l}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{L}{l}\frac{\Delta I}{\Delta t} =
$$

$$
= -\frac{QL}{l^2}\left(\frac{\Delta v_i}{\Delta t} - \frac{\Delta v_e}{\Delta t}\right) = -\frac{QL}{l^2}(a_i - a_e.)
$$

Таким образом, уравнения (9) движения кристаллической решетки и электронного газа примут следующий вид:

$$
\begin{aligned}
Ma_i &= -\mu\,(a_i - a_e) - F, \\
ma_e &= \mu\,(a_i - a_e),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где для краткости мы ввели обозначение $\mu = \frac{Q^2L}{l^2}$. Решая систему (10) относительно $a_i$ и $a_e$, находим ускорения торможения наших колец:

$$
a_i = -\frac{F}{M + \frac{m\mu}{m+\mu}}; \quad a_e = \frac{\mu}{m+\mu}a_i. \tag{11}
$$

Знак минус означает, что в процессе торможения происходит замедление как кристаллической решетки, так и электронного газа.

Зная ускорения, мы можем найти время, прошедшее от начала торможения до момента остановки кристаллической решетки кольца:

$$t=-\frac{v_0}{a_l}=\frac{v_0}{F}\left(M+\frac{m\mu}{m+\mu}\right). \qquad (12)$$

Теперь легко найти скорость $v_e=v$, которую будут иметь электроны в конце торможения:

$$v=v_0+a_e t=\frac{m}{m+\mu}v_0. \qquad (13)$$

Следовательно, конечное значение силы тока в кольце (при $v_e=v$, $v_l=0$) равно

$$I=-\frac{Q}{l}v=-\frac{Q}{l}\frac{m}{m+\mu}v_0. \qquad (14)$$

Вот теперь мы можем перейти к решению поставленной в начале задачи: определить энергию магнитного поля тока, возникающего в кольце в результате его торможения. Для этого удобно воспользоваться законом сохранения энергии.

В начальный момент времени ($t=0$) вся энергия кольца складывалась из кинетической энергии электронов и кристаллической решетки, т. е.

$$E_0=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{Mv_0^2}{2}.$$

За время торможения часть энергии пошла на работу против силы $F$. Эта «потеря» энергии равна, очевидно, $\Delta E=A=FS$, где $S$ — путь, пройденный любой точкой кольца (кристаллической решетки) за время торможения:

$$S=v_0t+\frac{a_lt^2}{2}=\frac{v_0^2}{2F}\left(M+\frac{m\mu}{m+\mu}\right).$$

Так что

$$A=\frac{v_0^2}{2}\left(M+\frac{m\mu}{m+\mu}\right).$$

Возникающий в процессе торможения электрический ток в кольце индуцировал магнитное поле. Следовательно, к концу торможения, когда скорость кристаллической решетки равна нулю, энергия кольца складывается из кинетической энергии электронов $K_e=\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{m}{m+\mu}\right)^2$ и энергии магнитного поля $W_\text{м}$. Согласно закону сохранения энергии

$$E_0=K_e+W_\text{м}+A,$$

откуда

$$W_\text{м}=E_0-A-K_e=\frac{Mv_0^2}{2}+\frac{mv_0^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}\left(M+\frac{m\mu}{m+\mu}\right)-\frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{m}{m+\mu}\right)^2=\frac{mv_0^2}{2}\,\frac{m\mu}{(m+\mu)^2}. \qquad (15)$$

Подставив в это выражение значение $\mu$ и учтя, что $\frac{mv_0}{m+\mu}=-I\frac{l}{Q}$ (см. (14)), получим

$$W_\text{м}=I^2\frac{l^2}{Q^2}\,\frac{Q^2L}{2l^2}=\frac{LI^2}{2}.$$

Итак, мы вновь пришли к полученному ранее выражению для магнитной энергии контура с током $I$.

Отметим в заключение любопытное обстоятельство. Как известно, среднее арифметическое двух положительных чисел не может быть меньше среднего геометрического этих чисел, т. е. $m+\mu\geqslant 2\sqrt{m\mu}$, и следовательно, $\frac{m\mu}{(m+\mu)^2}\leqslant\frac{1}{4}$. Поэтому из выражения (15) можно заключить, что

$$W_\text{м}\leqslant\frac{1}{4}\,\frac{mv_0^2}{2}.$$

Таким образом, мы приходим к выводу: при торможении первоначально раскрученного контура в энергию магнитного поля тока может перейти не более 25% исходной кинетической энергии направленного движения электронов проводимости. Это ограничение не зависит от величины индуктивности контура.

*В. Саннинский*

# АРТИЛЛЕРИЯ И МАТЕМАТИКА

**В этой статье ветеран Великой Отечественной войны рассказывает о математических задачах, которые ему приходилось решать, командуя батареей 120-мм минометов, стрелявших на дальность до 6 км. С той поры прошло уже более 30 лет. Многие задачи, связанные с управлением стрельбой, решают теперь вычислительные машины. Однако их математическая сущность осталась прежней.**

**Предполагается, что читателю известно, что такое географическая карта, географические координаты точки земной поверхности, географические и магнитные полюсы, экватор, меридианы, параллели и азимуты.**

Стрельбе артиллерийской батареи по объектам в лагере противника предшествует подготовка данных — *определение дальности и направления стрельбы*. Чтобы найти эти величины, нужно прежде всего «привязать» батарею и цель — а именно: определить их *топографические координаты*.

Объясним, что это значит. Введем некоторые понятия, они понадобятся нам в дальнейшем.

## Топографические карты

*Топографической картой* (топокартой) называется крупномасштабная географическая карта. На листах топокарт изображаются относительно небольшие участки земной поверхности, поэтому кривизна Земли не учитывается (ниже мы всюду считаем Землю шаром).

Основной топокартой является карта масштаба 1:1000000; ее именуют международной *миллионной топокартой*. Листы миллионной топокарты представляют собой равнобочные трапеции, которые получаются так. Сначала земную поверхность покрывают параллелями через каждые 4° от экватора к полюсам — получают *ряды*. Затем поверхность Земли покрывают меридианами через каждые 6° от меридиана, противоположного *гринвичскому*, в восточном направлении — получают *колонки*. Пересекаясь, ряды и колонки образуют трапеции, которые и изображаются на листах миллионной топокарты.

Каждый лист миллионной топокарты имеет «географический адрес», состоящий из двух символов — *номенклатуру*. Первый символ номенклатуры указывает на принадлежность листа к определенному ряду, второй — к определенной колонке. При этом ряды нумеруются буквами латинского алфавита ($A, B, C, D, \ldots$) от экватора к полюсам, а колонки — числами (1, 2, 3, 4, ...) от меридиана, противоположного гринвичскому, в направлении на восток. Таким образом, точка $M$ земной поверхности с географическими координатами 75°54′ восточной долготы и 13°12′ северной широты принадлежит листу миллионной топокарты с номенклатурой $D$-43 ($[13^\circ 12' : 4^\circ] + 1 = 4$ — четвертый от экватора ряд — буква $D$, и 43-я колонка от указанного меридиана:

$$\left[\frac{180^\circ + 75^\circ 54'}{6^\circ}\right] + 1 = 43^{*)}\Big).$$

Для дальнейших расчетов примем длину дуги земного шара в 1° по экватору и по меридиану равной 111,0 *км*. Тогда размеры участка земной поверхности, изображенного на листе $D$-43, будут такими: основания трапеции — 653,6 *км* и 640,2 *км*, высота трапеции — 444,0 *км* (первые две величины вычисляются как 6-градусные дуги 12° и 16° параллелей:

$$653{,}6 = 6 \cdot 111 \cdot \cos 12^\circ,$$
$$640{,}2 = 6 \cdot 111 \cdot \cos 16^\circ,$$

а третья величина — $4 \cdot 111$ — как 4-градусная дуга большого круга земного шара).

Последовательным делением листов миллионных топокарт на равные по долготе и по широте части получают топокарты более мелких масштабов: 1:100000, 1:50000, 1:25000 и 1:10000. Чтобы получить топокарту 1:100000, лист миллионной топокарты

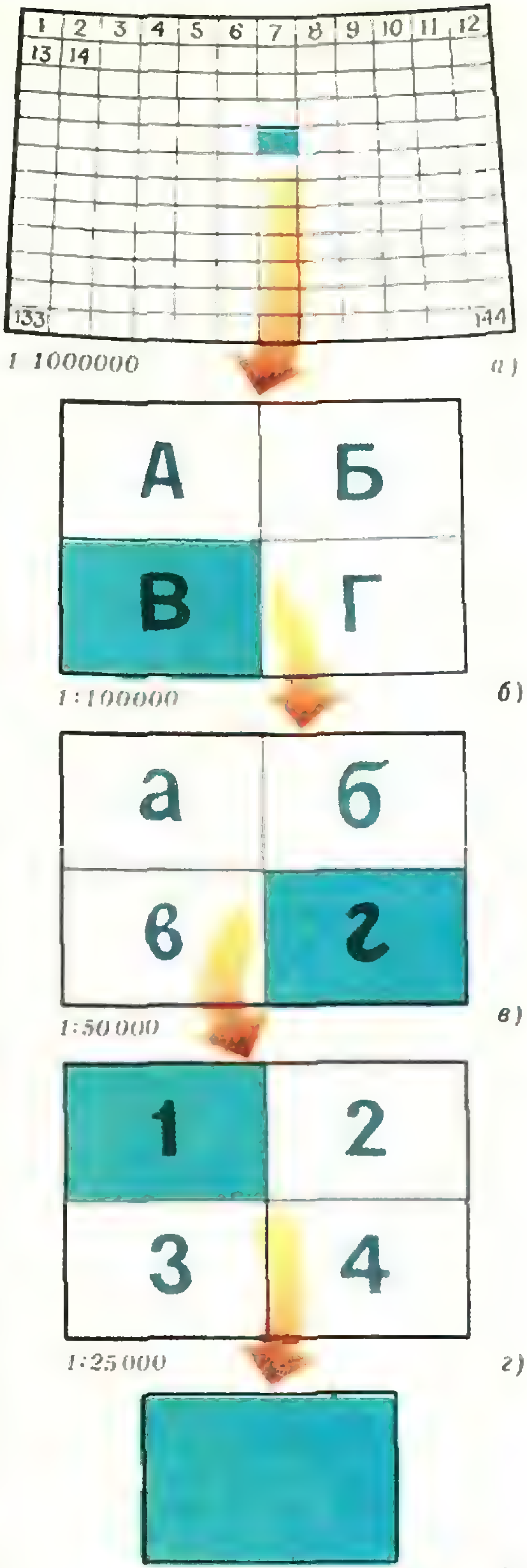


Рис. 1.

---

*) Здесь $[x]$ — это *целая часть* числа $x$ — ближайшее к $x$ целое число, не превосходящее $x$ (см. статью «Антье», с. 43).

делят на 12 частей по долготе и 12 частей по широте: получают 144 «кусочка». Чтобы получить топокарту 1:50000, нужно один из получившихся 144 кусочков разделить еще на 2 равные по долготе и на 2 равные по широте части (см. рис. 1). Если один из получившихся кусочков снова разделить на 2 равные по долготе и 2 равные по широте части, получим топокарту 1:25000. Повторив ту же самую операцию (деления на четыре «кусочка») с этой топокартой, получим топокарту 1:10000.

Части каждого листа топокарты при делении нумеруются: «слева — направо — вниз» (рис. 1). Для обозначения частей к номенклатуре исходной миллионной топокарты каждый раз добавляется новый индекс: один — если карта 1:100000: число от 1 до 144 (рис. 1, *а*); два — если карта 1:50000: индекс листа стотысячной топокарты, из которого она получилась, плюс одна из первых четырех заглавных букв русского алфавита А, Б, В, Г (рис. 1, *б*); три — если карта 1:25000: индекс соответствующей пятидесятитысячной карты, плюс одна из букв а, б, в, г (рис. 1, *в*), и наконец, четыре — если карта 1:10000: индекс соответствующей карты 1:25000 плюс одна из цифр 1, 2, 3, 4 (рис. 1, *г*).

При подготовке исходных данных для стрельбы обычно пользуются топокартами масштаба 1:10000. Лист карты такого масштаба, содержащий упомянутую выше точку $M$ (заданную географическими координатами), имеет номенклатуру $D$-43-104-Б-г-3; проверьте это. Можно подсчитать, что этот лист изображает участок земной поверхности формы трапеции со средней линией 6,8 *км* и высотой 4,6 *км*.

## Топографические координаты

Система координат, употребляемая в топографии, отлична от декартовой. В этой системе за ось $X$ принят серединный географический миридиан каждой колонки, параллельно снесенный на 500 *км* к западу, а за ось $Y$ принят экватор. Найдем, к примеру, в этой системе отсчета координаты нашей точки $M$ — они называются *топографическими координатами*, и измеряются в метрах. Точка $M$ находится на расстоянии 1465,2 *км* от экватора и на расстоянии 97,26 *км* вправо от серединного меридиана колонки с номером 43. Поэтому для нее

$$\begin{cases} X_M = 1\,465\,200, \\ Y_M = 597\,260. \end{cases}$$

На территории каждой страны установлены специальные, видимые издалека пункты *государственной триангуляции*. Все они, как и другие высокие сооружения на земной поверхности, имеют точно определенные топографические координаты; эти координаты занесены в особые каталоги, которые используются лишь в служебных целях.

В учебных целях довольствуются *условными координатами*. Координаты первого, отправного пункта местности задаются произвольно. К нему «привязываются» нужные пункты. Получается плоская система точек, определенных координатами, соответствующая действительной системе точек на местности. Узнав в случае необходимости топографические координаты одной из точек этой системы, мы можем найти действительные координаты всей сети точек.

Встанем теперь в какую-нибудь точку в северном полушарии с соответствующей топокартой и попробуем сориентировать ее по странам света. Через каждую такую точку проходят три меридиана: магнитный, географический и топографический (параллельный серединному географическому меридиану для основного листа соответствующей топокарты). Упомянутые меридианы, вообще говоря, не совпадают. Они пересекаются под некоторыми углами. Углы эти относительно малы, и мы ими пренебрежем. Будем считать все меридианы в точке совпадающими с магнитным, то есть с направлением на север магнитной стрелки компаса.

Каждый умеет пользоваться компасом. Поэтому можно считать, что мы умеем сориентировать нужную топокарту по направлению на север.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$X_A$ и $Y_A$ — *топографические координаты* пункта $A$ на местности;

$|AB|$ — *расстояние* между пунктами $A$ и $B$ (в метрах);

$[AB]$ — *азимут* направления из $A$ на $B$, то есть угол между лучом $AB$ и направлением на север, отсчитываемый по часовой стрелке.

## Задачи

Рассмотрим теперь *основные задачи на координаты*, которые приходится решать в процессе подготовки исходных данных для стрельбы.

Задача I. *(Прямая задача на координаты.) Дано:* $X_A$, $Y_A$, $|AB|$ *и* $[AB]$. *Найти:* $X_B$, $Y_B$.

Имеется в виду, что расстояние $|AB|$ (в метрах) найдено при помощи мерной ленты, угол $[AB]$ — при помощи буссоли или теодолита (без учета поправок на углы между меридианами).

Из рисунка 2 находим

$$X_B = X_A + \Delta X$$

и

$$Y_B = Y_A + \Delta Y,$$

где $\Delta X = |AB| \cdot \cos\ [AB]$ и $\Delta Y = |AB| \cdot \sin\ [AB]$.

Задача I позволяет нам «привязать» пункт $B$ местности (определить топографические координаты точки $B$) по «привязанной» точке $A$.

При решении конкретных задач на координаты принято пользоваться 5-значными математическими таблицами*). Решите, например, такую задачу:

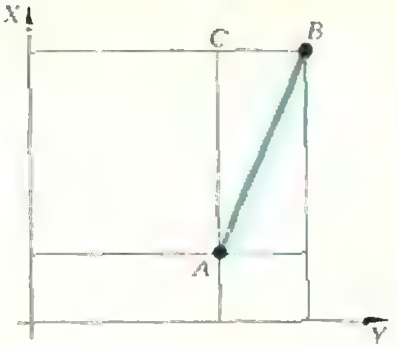


Рис. 2.

1. Найти $X_B$ и $Y_B$, если $X_A = 53\,817$, $Y_A = 38\,629$, $|AB| = 2182$ и $[AB] = 321°14'$.

Задача II. *(Обратная задача на координаты.) Дано:* $X_A$, $Y_A$, $X_B$, $Y_B$. *Найти:* $[AB]$, $|AB|$.

Из того же рисунка 2 находим $\Delta X = X_B - X_A$ и $\Delta Y = Y_B - Y_A$. Далее имеем

$$\operatorname{tg}[AB] = \frac{\Delta Y}{\Delta X}.$$

По вычисленной величине $\operatorname{tg}[AB]$ с учетом знака находим угол $[AB]$.

Наконец, из $\Delta ABC$ имеем

$$|AB| = \frac{|\Delta Y|}{\sin [AB]} = \frac{|\Delta X|}{\cos [AB]}.$$

Вычисление $|AB|$ производится по обеим формулам. Совпадение результатов — некоторая гарантия безошибочности произведенных подсчетов.

Решите теперь конкретную задачу:

2. Найти $[AB]$ и $|AB|$, если $X_A = 12\,850$, $Y_A = 98\,713$, $X_B = 13\,519$ и $Y_B = 97\,314$.

Решив ее, вы сможете подать на батарею команду: «Батарея, к бою! Дальность ..., азимут ...!» Наводчик каждого орудия батареи, получив такую команду, при помощи прицельного приспособления нужным образом наведет свое орудие по вертикали (одно деление прицела составляет — 50 *м*) и по горизонтали (одно деление угломера составляет 3,6').

У читателя может возникнуть недоумение. В точке $A$ находится первое орудие, другие — на некотором расстоянии от него, левее. Значит попадет в $B$ только первое орудие. На самом деле, если цель $B$ по площади значительна, то все будет в порядке (почему?). А как же быть, когда цель мала — сконцентрирована в точке $B$? В этом случае упомянутая команда дополняется указанием: *«веер сосредоточенный»* (если же цель $B$ по площади велика, то командуется: *«веер параллельный»*), и командиры орудий, в зависимости от их удаления от первого, вычисляют и вносят поправки в указанный батарее азимут.

---

*) Вы можете воспользоваться таблицами Брадиса.

Читатель может сам проделать соответствующую вычислительную работу за командира второго орудия, считая его удаление от первого, например, равным 50 *м* (в условиях той же конкретной задачи II). Можно допустить, что фронт батареи перпендикулярен направлению стрельбы первого орудия.

Итак, мы уже поработали и за командира батареи, и за командира орудия. Однако мы пока не учли самого главного: ведь чтобы стрелять из $A$ в $B$, надо эти пункты предварительно «привязать». В условиях войны пункт $A$ находится на нашей территории, а пункт $B$ на территории противника: туда с мерной лентой не пройдешь. Отсюда возникает новая задача — *задача «привязки» недоступного пункта местности.*

Задача III. *(Прямая засечка с двух пунктов.) Дано:* $X_A$, $Y_A$, $X_B$, $Y_B$, *углы* $\alpha$ и $\beta$ (см. рис. 3). *Найти:* $X_C$, $Y_C$.

Имеется в виду, что пункты $A$ и $B$ местности уже «привязаны». Надо «привязать» пункт $C$ при условии, что величины $\alpha$ и $\beta$ могут быть найдены непосредственным измерением.

Если знать величины $[AC]$ и $|AC|$, или $[BC]$ и $|BC|$, то наша задача сведется к задаче I. Определим эти величины.

Для $\Delta ABC$ (см. рис. 3) по теореме синусов имеем

$$\frac{|AC|}{\sin\beta}=\frac{|BC|}{\sin\alpha}=\frac{|AB|}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

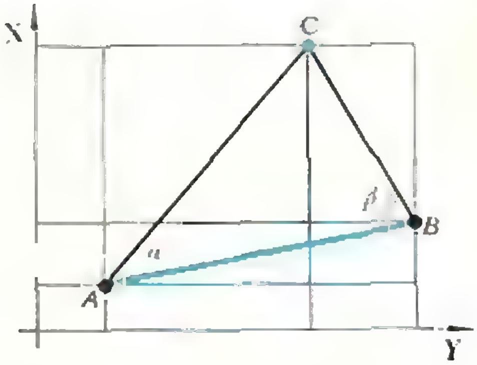


Рис. 3.

Отсюда

$$|AC|=\frac{|AB|}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot\sin\beta$$
$$\text{и } |BC|=\frac{|AB|}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot\sin\alpha.$$

Кроме того, $[AC]=[AB]-\alpha$ и $[BC]=[AB]+\beta$.

Величины $|AB|$ и $[AB]$ находятся так же, как в задаче II.

Координаты для контроля вычисляют двумя способами: и по точке $A$, и по точке $B$.

Решите теперь конкретную задачу:

3. Найти $X_C$ и $Y_C$, если $X_A=12\,850$, $Y_A=98\,713$, $X_B=13\,519$, $Y_B=97\,314$, $\alpha=39°43'$, $\beta=82°25'$.

Задачу III приходится решать в следующей ситуации. Пусть $A$ и $B$ — пара наблюдательных пунктов, расположенных на расстоянии 1,5—2,5 *км* друг от друга, недалеко от переднего края обороны. Эти пункты заранее «привязаны», с них ведется наблюдение за противником. При появлении в лагере противника цели $C$ наблюдатели ее «засекают», то есть любым способом замеряют углы $\alpha$ и $\beta$. Остается только решить треугольник $ABC$ по стороне $AB$ и двум прилежащим к ней углам $\alpha$ и $\beta$: аналитически, как было описано выше, или графически — на планшете.

Наконец, еще одна задача на координаты.

Задача IV. *(Обратная засечка с трех пунктов.) Дано:* $X_A$, $Y_A$, $X_B$, $Y_B$, $X_C$, $Y_C$, $\widehat{ADC}=\alpha$, $\widehat{BDC}=\beta$

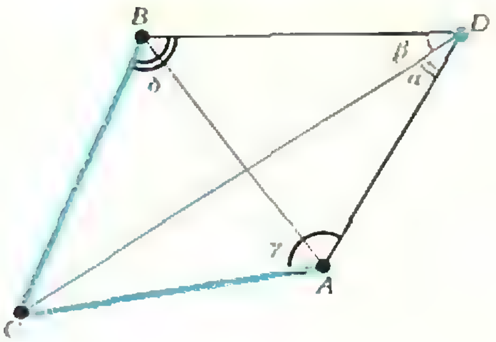


Рис. 4.

(см. рис. 4). *Найти*: $X_D$, $Y_D$.*)

Координаты точки $D$ могут быть вычислены через приращения координат любой из точек: $A$, $B$ или $C$. Во избежание ошибок их принято находить через приращения от двух точек, например, точек $A$ и $B$.

Мы уже знаем, как вычислить величины $\{AC\}$ и $|AC|$, $\{BC\}$ и $|BC|$. Сделав это, мы сможем найти угол $\widehat{ACB}$:

$$\widehat{ACB} = \{AC\} - \{BC\}.$$

Положим $\widehat{CAD} = \gamma$ и $\widehat{CBD} = \delta$. Определим эти углы.

Из четырехугольника $ACBD$ имеем

$$\frac{\gamma+\delta}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha+\beta+\widehat{ACB}}{2}.$$

Из треугольников $ACD$ и $BCD$ по теореме синусов находим

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{|CD|}{|BC|} = \frac{\sin\delta}{\sin\beta}.$$

Исключив из этих равенств величину $|CD|$, получим

$$\frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{|AC|\sin\beta}{|BC|\sin\alpha}.$$

Положим здесь

$$\frac{|AC|\sin\beta}{|BC|\sin\alpha} = \operatorname{tg}\lambda.$$

Вычислив по этой формуле $\operatorname{tg}\lambda$, мы найдем вспомогательный угол $\lambda$. Теперь

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\lambda},$$

откуда

$$\frac{\sin\gamma+\sin\delta}{\sin\gamma-\sin\delta} = \frac{1+\operatorname{tg}\lambda}{1-\operatorname{tg}\lambda},$$

то есть

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma-\delta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\operatorname{ctg}(45+\lambda).$$

Все величины, стоящие в правой части, известны. Поэтому мы можем найти полуразность нужных углов $\gamma$ и $\delta$.

Зная же их полусумму и полуразность, легко находим сами эти углы.

Затем из треугольников $ACD$ и $BCD$ по теореме синусов находим

$$|AD| = \frac{|AC|\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha} \quad \text{и}$$

$$|BD| = \frac{|BC|\sin(\beta+\delta)}{\sin\beta}.$$

Азимуты $[AD]$ и $[BD]$ находят по формулам

$$[AD] = [AC] + \gamma$$

и

$$[BD] = [BC] - \delta.$$

Далее, как и в задаче I, находят $X_D$ и $Y_D$.

Вот конкретная задача:

4. Найти $X_D$ и $Y_D$, если $X_A = 12\,850$, $Y_A = 98\,713$, $X_B = 13\,519$, $Y_B = 97\,314$, $X_C = 12\,406$, $Y_C = 96\,956$, $\alpha = 72^\circ 28'$, $\beta = 31^\circ 46'$.

Обратной засечкой с трех пунктов обычно «привязывают» наблюдательные пункты и батареи. Можно таким способом «привязать» и цель. Но для этого надо иметь своего представителя на территории противника. Как и предыдущие, последнюю задачу можно решить графически: для этого нужно построить точку, из которой данные два отрезка видны под данными углами.

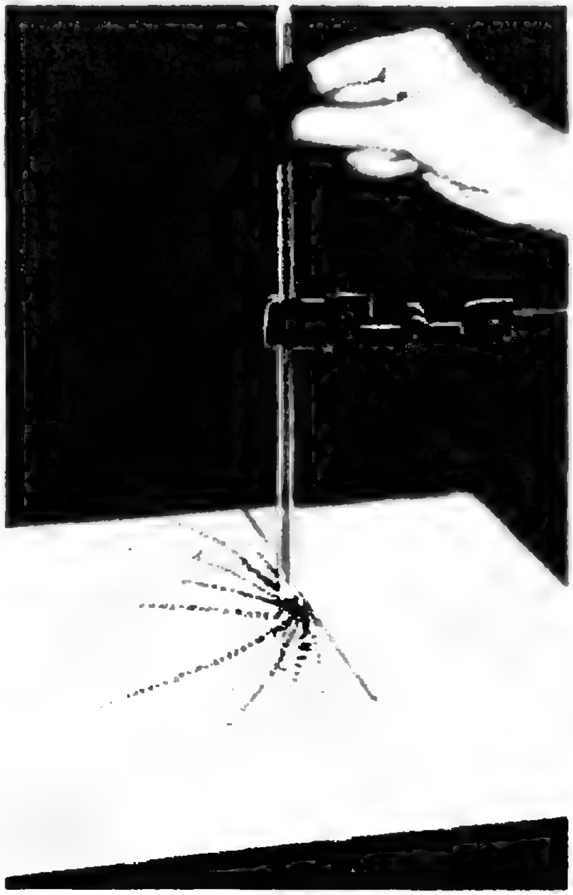
На этом мы кончаем наш рассказ о задачах, которые приходится решать артиллеристам. Добавим только, что разобранными задачами далеко не исчерпывается «математика в артиллерии».

---

*) Эта задача известна под названием *задачи Потенота*. О ней уже рассказывалось в «Кванте» — см. статью Л. С. Хренова, «Квант», 1973, № 4, с. 30.

В. Майер

# ВОЛНЫ НА БУМАГЕ



Возьмите стеклянную трубку длиной около полуметра и диаметром 4—7 *мм*. Одной рукой держите ее за середину, а другой рукой плавно без особого нажима проведите от конца трубки к ее середине полотняной тряпочкой, смоченной спиртом или одеколоном. При этом вы услышите довольно сильный чистый звук.

Этот опыт по своей идее очень прост, но чтобы он получился, следует немного потренироваться. Сила и длительность звука, издаваемого стеклянной трубкой, полностью определяются тем, насколько удачно вы сумеете возбудить трением колебания трубки, поскольку именно трение является источником энергии колебаний трубки в данном случае *).

Изучение таких колебаний начал еще в прошлом веке знаменитый английский физик Дж. Рэлей, второй (вслед за Дж. Максвеллом) директор не менее знаменитой «веревочно-сургучной» Кавендишской лаборатории *).

Любопытно отметить также, что в 1903 году один из учеников П. Н. Лебедева — тогда еще студент — сконструировал звуковой генератор, построенный по описанному принципу. Этот источник звуковых колебаний использовался при исследованиях звукового давления. В приборе незатухающие колебания стеклянной трубки, вызывающие столь сильный звук, «что вынести его можно было не иначе, как затыкая уши стеклянными шариками», возбуждались специально устроенным вращающимся шкивом при его трении.

---

*) Более подробно о роли силы трения при возникновении колебаний можно прочитать, например, в статье Л. Асламазова «Почему звучит скрипка», «Квант», 1975, № 10.

*) В этом неофициальном названии физической лаборатории при Кембриджском университете отражено восхищение целыми поколениями английских физиков, которые, пользуясь примитивнейшими средствами, вроде сургуча, картона, веревочек, умудрялись получать важнейшие научные результаты. Правда, перечисляя оборудование лаборатории, мы забыли упомянуть . . . интеллект исследователя.

С помощью звучащей трубки можно поставить немало красивых и поучительных опытов. Рассмотрим один из них. Покройте стол слоем поролона толщиной не менее 1 *см*, а сверху положите лист плотной белой бумаги. В наших опытах мы использовали лист толщиной 0,3 *мм* и размерами 200×290 *мм*. Равномерно посыпьте лист мелкораздробленными кристалликами марганцовокислого калия. Взяв посередине стеклянную трубку длиной 30—40 *см*, расположите ее вертикально и слегка прикоснитесь ее концом к листу бумаги на расстоянии нескольких сантиметров от его края. Трением возбудите колебания трубки. При этом, как только вы услышите звук, кристаллики марганцовокислого калия придут в движение и соберутся вместе, образуя некие линии.

Опыт очень красив, и на всех, кто видит его первый раз, производит большое впечатление. Но нужно сказать, что успешная постановка опыта требует определенного экспериментального искусства. Трубку необходимо держать так, чтобы она только чуть-чуть касалась бумажного листа. Может быть, лучше, обернув трубку посередине несколькими слоями бумаги, закрепить ее в штативе. При возбуждении колебаний не следует сильно давить на трубку, иначе между ее концом и листом получится слишком хороший «акустический контакт», и опыт не удастся. Трубка и тряпочка должны быть чистыми. Одним словом, на первых порах от вас потребуется немало изобретательности и настойчивости, чтобы получить нужный результат.

А результат этот достоин изучения! В самом деле, разве не интересно, почему равномерно насыпанный на бумагу порошок закономерным образом собирается в определенных местах, лишь только трубка начинает звучать? Почему появляющийся на листе рисунок зависит от длины трубки? Отчего картина меняется в зависимости от расстояния между концом трубки и краем листа (рис. 1)?

Даже беглый взгляд на лист с перераспределившимися кристалликами марганцовокислого калия позволяет высказать предположение, что линии, где собираются кристаллики, представляют собой семейство гипербол. Проверьте, так ли это. Остро отточенным карандашом обозначьте на листе исследуемые линии и положение конца трубки. Убрав марганцовокислый калий, наложите лист бумаги на другой, иглой «переколите» экспериментальные точки, а карандашом отметьте положение края листа. Соединив точки плавными линиями, вы получите чертеж, подобный тому, который изображен на рисунке 2. Постройте на этом чертеже точку $S'$, симметричную относительно края листа точке $S$ касания трубки.

По определению гипербола — это геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная. Если предположение, что полученные в эксперименте линии есть гиперболы, верно, то очевидно, что точки $S$ и $S'$ — фокусы семейства гипербол. На любой из линий чертежа выберите произвольную точку. Измерьте расстояния от нее до точек $S$ и $S'$. Вычислите разность этих расстояний. Теперь на той же линии возьмите любую другую точку и для нее проделайте то же самое. Вы получите результат, в пределах ошибок опыта совпадающий с первым. Взяв еще несколько точек на выбранной линии, нетрудно убедиться, что эта линия действительно является гиперболой.

Теперь подсчитайте разности расстояний от фокусов до точек, принадлежащих различным линиям чертежа. Вы заметите, что при переходе от первой линии ко второй эта разность увеличивается в 3 раза, от первой к третьей — в 5 раз и т. д. Поэтому для разностей расстояний — обозначим ее через $\delta$ — можно записать экспериментальную формулу

$$\delta = (2k+1)\,a, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (1)$$

Здесь $a$ — некоторая постоянная, имеющая размерность расстояния. Опытным путем нетрудно убедиться, что значение этой постоянной не зависит от положения точки касания трубкой листа бумаги, а определяется только длиной трубки: чем длиннее трубка, тем больше значение $a$. С другой стороны, длиной трубки задается частота ее собственных колебаний (аналогично свободным колебаниям шнура или струны; см. учебное пособие для 10 класса), а трубка возбуждает колебания в бумажном листе. Что же это за величина, зависящая от частоты колебаний и имеющая размерность расстояния? Очевидно, это ни что иное, как длина волны или, по крайней мере, величина, пропорциональная ей.

Таким образом, мы приходим к предположению, что в листе бумаги распространяется какая-то волна. Но какая? Бегущая волна не может дать неподвижного распределения порошка на листе, а в опыте оно получается. Следовательно, если здесь и есть волна, то она не бегущая, а стоячая, которая образуется в результате интерференции двух бегущих волн.

Источником одной волны является конец колеблющейся трубки. Откуда берется вторая волна, когерентная первой? Разумно предположить, что она появляется в результате отражения бегущей волны краем листа бумаги. Если это в самом деле так, то можно считать, что имеется как бы два источника волн: действительный источник, расположенный в точке $S$ (см. рис. 2), и

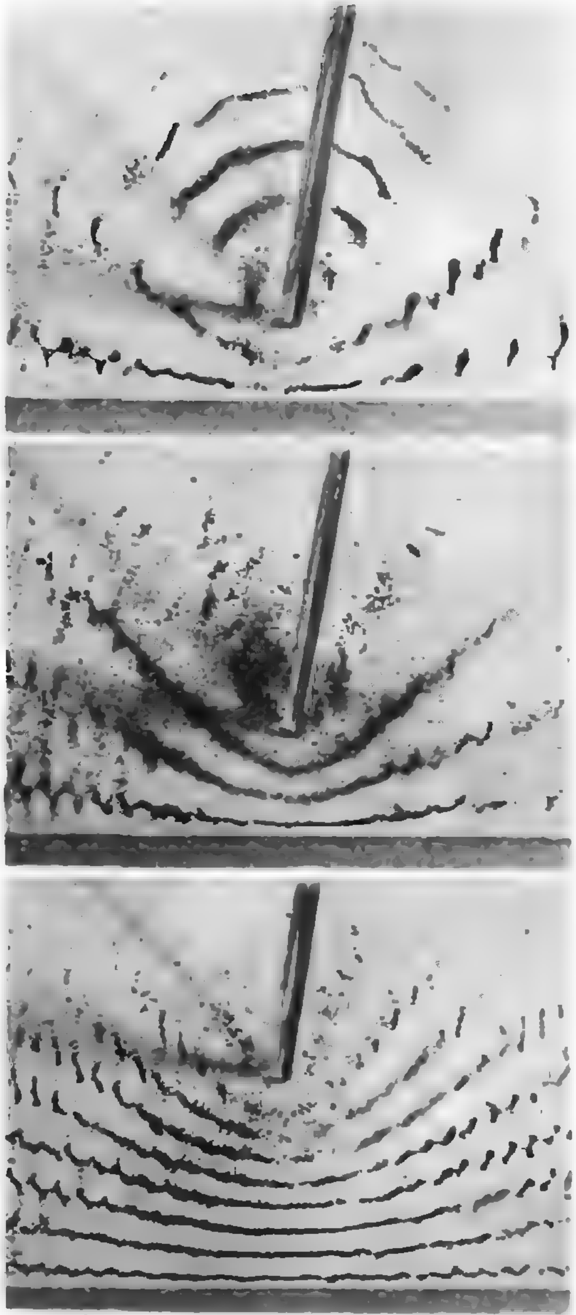


Рис. 1.

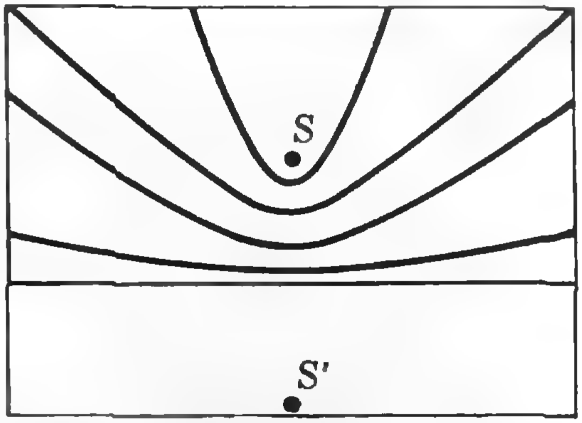


Рис. 2.

мнимый, совпадающий с точкой $S'$. Мнимый источник — это построенное в крае листа как в зеркале изображение действительного источника. Эти два источника когерентны. Предполагая, что они излучают волны в фазе, можно записать условие минимумов интерференционной картины:

$$\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Здесь $\delta$ — разность хода между волнами и $\lambda$ — длина волны. Сопоставляя это выражение с экспериментальной формулой (1), можно видеть, что постоянная $a$ — это половина длины волны, распространяющейся в бумажном листе!

Итак, опыт объяснен: от конца колеблющейся трубки по бумаге распространяется круговая волна, которая без изменения фазы отражается краем листа; падающая и отраженная волны когерентны и поэтому интерферируют; кристаллики марганцовокислого калия сбрасываются с максимумов интенсивности колебаний (пучностей стоячей волны) и собираются в минимумах (узлах), совокупность которых представляет собой семейство гипербол.

В заключение предлагаем вам не совсем обычное задание: найдите в статье те утверждения, которые даны без доказательства, и попробуйте доказать их экспериментально.

---

*Ю. Шиханович*

# ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

$$p_n = \sum_{m=0}^{n^2+1} \mathrm{sg}\left( n+1-\sum_{k=2}^{m}\left([(k-1)!]^2-k\cdot E\left(\frac{[(k-1)!]^2}{k}\right)\right)\right)$$

Обозначим через $p_n$ $(n+1)$-е в порядке возрастания простое число: $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 11$, $p_5 = 13$ и т. д.

Широко распространено мнение, что не существует формулы, выражающей $p_n$ через $n$ при помощи арифметических операций. Оказывается, стоит только добавить к арифметическим операциям функции «факториал» ($n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$; $1! = 1$), «целую часть» (см. с. 43) и простенькую «логическую» функцию sg (читается «сигнум» – «знак» по-латыни):

$$\mathrm{sg}(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n > 0, \\ 0, & \text{если } n \leqslant 0, \end{cases}$$

как такую формулу уже можно написать (справа сверху, здесь $E(x)$ — «целая часть» числа $x$). Аналогичную формулу прислал в редакцию московский десятиклассник В. Гугнин.

Беда в том, что от подобных формул мало толку. Во-первых, вычисление по ним — не короче вычисления при помощи алгоритма «решето Эратосфена» («Квант», 1973, № 4, с. 72 и 1974, № 1, с. 77). Во-вторых, при их помощи затруднительно исследовать «поведение» множества простых чисел «на бесконечности» (т. е. при $n \to +\infty$) или, как говорят математики, «асимптотическое поведение» множества простых чисел.

Тем не менее, по-видимому, приведенная формула удовлетворит потребность некоторой части читателей «Кванта».

Как доказать предложенную формулу? В теории чисел через $\pi(m)$ обозначается число простых чисел, не превосходящих $m$. Легко сообразить, что

$$\mathrm{sg}(n+1-\pi(m)) = \begin{cases} 1, & \text{если } m < p_n, \\ 0, & \text{если } m \geqslant p_n. \end{cases}$$

Пусть теперь $\mu$ — произвольная «оценка сверху» для $p_n$, т. е. такая функция, что при всех $n$ имеем $p_n \leqslant \mu(n)$. Тогда

$$p_n = \sum_{m=0}^{\mu(n)} \mathrm{sg}(n+1-\pi(m)).$$

Пусть далее $\chi$ — *характеристическая функция* множества простых чисел, т. е. такая функция, что

$$\chi(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ — простое число,} \\ 0, & \text{если } k \text{ — составное число.} \end{cases}$$

Очевидно,

$$\pi(m) = \sum_{k=2}^{m} \chi(k).$$

Тогда

$$p_n = \sum_{m=0}^{\mu(n)} \mathrm{sg}\left(n+1-\sum_{k=2}^{m}\chi(k)\right). \qquad (1)$$

Чтобы из формулы (1) получить конкретную формулу, надо подставить в нее какие-нибудь выражения для функций $\chi$ и $\mu$.

Наша формула как раз и получается из формулы (1) при $\mu(n) = n^2+1$ (в теории чисел доказано, что $p_n \leqslant n^2+1$ для всех $n$) и

$$\chi(k) = [(k-1)!]^2 - k\cdot E\left(\frac{[(k-1)!]^2}{k}\right). \qquad (2)$$

Формула (2) получается при помощи *теоремы Вильсона*: если $k$ — простое число, то $(k-1)!+1$ делится на $k$.

*А. Мордкович,*
*В. Смышляев*

# АНТЬЕ

*«Антье? — Это французский математик».*
(Из ответа студента на экзамене)

## 1. Определение

Во многих задачах алгебры, теории чисел, математического анализа, теории вероятностей приходится рассматривать наибольшее целое число, не превосходящее данного числа (вспомните, например, определение *характеристики* десятичного логарифма). Такое целое число получило специальное название: «целая часть числа».

Итак, *целой частью действительного числа $x$ называется наибольшее целое число $n$, не превосходящее $x$*; целая часть числа $x$ обозначается символом $[x]$ или (реже) $E(x)$ (от французского *Entier* («антье») — «целый»). Например, $[2{,}3]=2$, $[-2{,}3]=-3$, $[2]=2$, $[-3]=-3$.

Если $n\leqslant x<n+1$, а $n$ — целое, то $[x]=n$. Поскольку $[x]\leqslant x<[x]+1$, имеем $0\leqslant x-[x]<1$. Число $\alpha=x-[x]$ называют дробной частью числа $x$ и обозначают $\{x\}$. Итак, $0\leqslant\{x\}<1$. Очевидно, $x=[x]+\{x\}$.

График функции $y=[x]$ изображен на рисунке 1, а функции $y=\{x\}$ — на рисунке 2.

## 2. Некоторые свойства

1°. Если $p$ — целое число, то $[x+p]=[x]+p$.

2°. Для любых действительных чисел $x$ и $y$: $[x+y]\geqslant[x]+[y]$.

Доказательство. Имеем $x=[x]+\alpha, 0\leqslant\alpha<1$; $y=[y]+\beta, 0\leqslant\beta<1$. Тогда $x+y=[x]+\alpha+[y]+\beta=[x]+[y]+\gamma$, где $\gamma=\alpha+\beta$. Значит, $0\leqslant\gamma<2$. Если $0\leqslant\gamma<1$, то $[x+y]=[x]+[y]$. Если же $1\leqslant\gamma<2$, т. е. $\gamma=1+\gamma'$, где $0\leqslant\gamma'<1$, то $x+y=[x]+[y]+1+\gamma'$ и $[x+y]=[x]+[y]+1>[x]+[y]$.

Замечание. Свойство 2° распространяется на любое *конечное* число слагаемых: $[x_1+x_2+\ldots+x_n]\geqslant[x_1]+[x_2]+\ldots+[x_n]$.

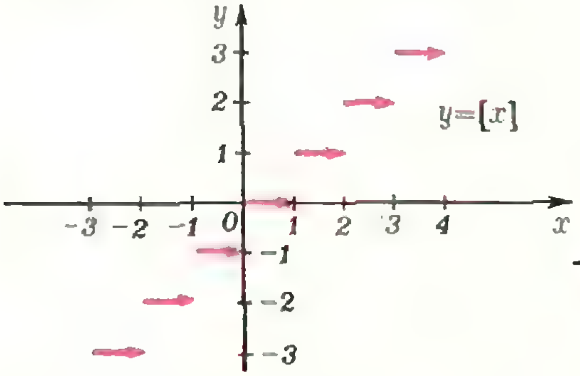


Рис. 1.

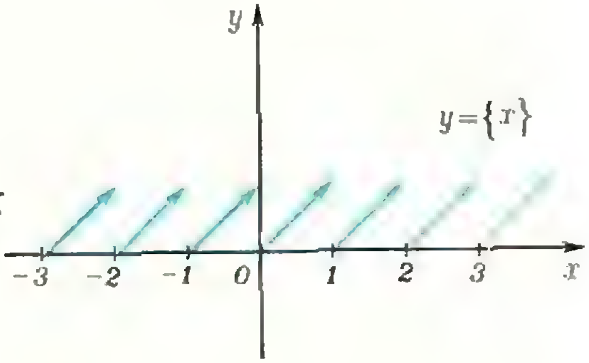


Рис. 2.

3°. Если $[x]=[y]$, то $|x-y|<1$.

4°. Если $n$ — натуральное число, то $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$.

Доказательство. Положим $\left[\frac{[x]}{n}\right]=a$. Тогда $a\leqslant\frac{[x]}{n}<a+1$, или $an\leqslant[x]<n\,(a+1)$.

Поскольку числа $an$ и $n\,(a+1)$ — целые, число $x$ также должно удовлетворять неравенствам $an\leqslant x<n\,(a+1)$, откуда $a\leqslant\frac{x}{n}<a+1$, т. е. $\left[\frac{x}{n}\right]=a$.

### 3. Антье в уравнениях

Решение уравнений с переменной под знаком «целой части» обычно сводится к решению неравенств или систем неравенств.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. *Решить уравнение*

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}.$$

Решение. Положим $\frac{15x-7}{5}=t$. Тогда $x=\frac{5t+7}{15}$, и уравнение принимает вид

$$\left[\frac{10t+39}{40}\right]=t.$$

Из определения целой части следует, что $0\leqslant\frac{10t+39}{40}-t<1$. Решив эти неравенства, находим

$$-\frac{1}{30}<t\leqslant 1{,}3.$$

Так как $t$ — целое число, то оно может быть либо нулем, либо единицей. При $t=0$ получаем $x_1=\frac{7}{15}$, при $t=1$ будет $x_2=\frac{4}{5}$.

Задача 2. *Решить уравнение*

$$[x-1]=\left[\frac{x+2}{2}\right].$$

Построив графики функций $y=[x-1]$ и $y=\left[\frac{x+2}{2}\right]$ (см. рис. 3), видим, что они совпадают при $3\leqslant x<5$. (На рисунке 3 график функции $y=[x-1]$ изображен синим цветом, а функции $y=\left[\frac{x+2}{2}\right]$ — красным.)

Задача 3. *Решить уравнение*

$$x^3-[x]=3.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду $x^3-3=[x]$ и построим графики функций $y=x^3-3$ и $y=[x]$ (см. рис. 4). Так как графики этих функций пересекаются в единственной точке, наше уравнение тоже имеет единственный корень. Этот корень заключен между числами 1 и 2. Но если $1<x<2$, то $[x]=1$, и уравнение принимает вид $x^3-1=3$. Отсюда $x=\sqrt[3]{4}$ — корень данного уравнения.

### 4. Антье и задачи на делимость

Всякое натуральное число $m$ можно, и притом единственным способом,

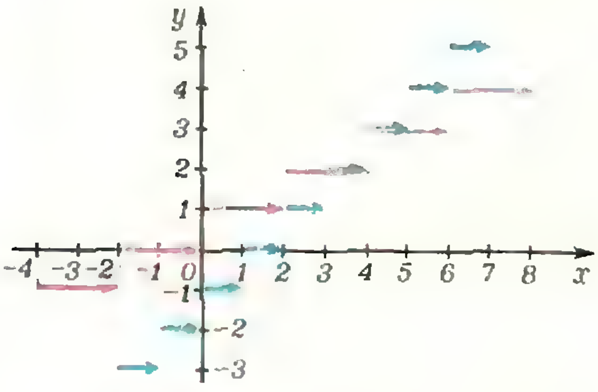


Рис. 3.

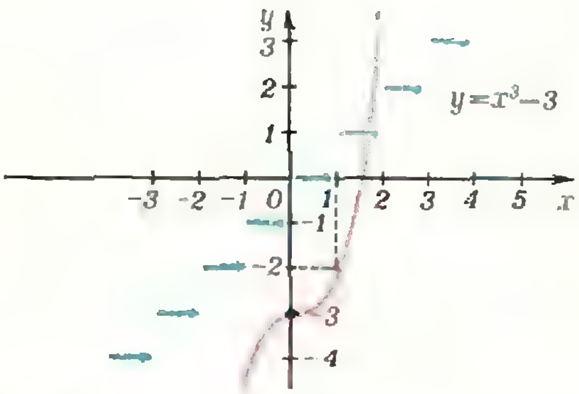


Рис. 4.

*разложить на простые множители**). Очевидно, показатель степени $\alpha$, с которым простое число $p$ входит в разложение числа $m$ на простые множители: $m = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, равен максимальной степени числа $p$, на которую делится $m$.

Возьмем число $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. Пусть $p$ — некоторое простое число. Как узнать: на какую максимальную степень числа $p$ делится $n!$?

Посчитаем, сколько в последовательности $1, 2, \ldots, n$ чисел, кратных $p$. Если таких чисел $k$, то число $kp$ среди них — наибольшее, и поэтому $kp \leqslant n < (k+1)p$, т. е. $k \leqslant \frac{n}{p} < k+1$. Значит, $k = \left[\frac{n}{p}\right]$.

Итак, среди чисел $1, 2, \ldots, n$ кратными $p$ будут числа $p$, $2p$, $3p$, $\ldots$, $\left[\frac{n}{p}\right]p$, и мы можем записать $n!$ так:

$$n! = p\cdot 2p\cdot 3p\cdot\ldots\cdot\left[\frac{n}{p}\right]p\cdot M_1 = p^{\left[\frac{n}{p}\right]}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot\left[\frac{n}{p}\right]\cdot M_1 = p^{\left[\frac{n}{p}\right]}\cdot\left[\frac{n}{p}\right]!\cdot M_1,$$

где число $M_1$ на $p$ уже не делится. Если $\left[\frac{n}{p}\right] < p$, то максимальная степень числа $p$, на которую делится $n!$, равна $\left[\frac{n}{p}\right]$. Если же $\left[\frac{n}{p}\right] \geqslant p$, то выделим числа, кратные числу $p$, среди чисел $1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{p}\right]$. Их будет $\left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right]$, или (см. свойство 4°) — $\left[\frac{n}{p^2}\right]$. Таким образом,

$$\left[\frac{n}{p}\right]! = p\cdot 2p\cdot\ldots\cdot\left[\frac{n}{p^2}\right]p\cdot M_2 = p^{\left[\frac{n}{p^2}\right]}\cdot\left[\frac{n}{p^2}\right]!\cdot M_2,$$

где число $M_2$ уже не делится на $p$. Если при этом мы получили $\left[\frac{n}{p^2}\right] < p$, то задача решена, и $\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right]$. Если же $\left[\frac{n}{p^2}\right] \geqslant p$, то, повторив предыдущие рассуждения, найдем

$$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots \quad (*)$$

Через конечное число шагов мы получим степень $p^s$, большую $n$; иными словами, получим, что $\left[\frac{n}{p^s}\right] = 0$. Следовательно, в сумме $(*)$ число слагаемых — конечное, и мы можем дать окончательный ответ: простое число $p$ входит в разложение числа $n!$ с показателем

$$\alpha = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^{s-1}}\right],$$

где $s$ таково, что $p^{s-1} \leqslant n < p^s$.

Замечание. На практике $\alpha$ удобно вычислять так. Положим $\alpha_1 = \left[\frac{n}{p}\right]$, $\alpha_2 = \left[\frac{\alpha_1}{p}\right]$, $\alpha_3 = \left[\frac{\alpha_2}{p}\right]$, $\ldots$ Тогда $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$

Применим теперь полученную формулу к решению задач.

Задача 4. *Сколькими нулями оканчивается число 1976!?*

Решение. Задача будет решена, если мы найдем, чему равна максимальная степень числа 10, на которую делится 1976!. Но поскольку $10 = 2\cdot 5$, нам достаточно подсчитать, в какой степени входит число 5 в разложение на простые множители числа 1976! (ясно, что 2 войдет в 1976! сомножителем большее число раз, чем 5). Число 1976 меньше, чем $5^5$, но больше, чем $5^4$, и мы получаем ответ: число 1976! оканчивается $\left[\frac{1976}{5}\right] + \left[\frac{1976}{5^2}\right] + \left[\frac{1976}{5^3}\right] + \left[\frac{1976}{5^4}\right] = 395 + 79 + 15 + 3 = 492$ нулями.

---

*) О разложении на простые множители см., например, статью В. Вагутена «Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики», «Квант», 1972, № 6.

**Задача 5.** *Доказать, что число $C_{1976}^{976}$ делится на $76^2$.*

**Решение.** Поскольку $76 = 2^2 \times 19$, то для делимости на $76^2$ необходимо и достаточно, чтобы $C_{1976}^{976}$ делилось на $2^4$ и $19^2$.

Имеем $C_{1976}^{976} = \frac{1976!}{976!\,1000!}$. Найдем, чему равны показатели степеней $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ и $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, с которыми входят числа 2 и 19 в разложения на простые множители чисел 1976!, 976! и 1000!. Имеем

$$\alpha_1 = \left[\frac{1976}{2}\right] + \left[\frac{1976}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{1976}{2^{10}}\right] = 1969,$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{976}{2}\right] + \left[\frac{976}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{976}{2^{9}}\right] = 971,$$

$$\alpha_3 = \left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{1000}{2^{9}}\right] = 994$$

и $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 4$, то есть $C_{1976}^{976}$ делится на $2^4$.

Аналогично

$$\beta_1 = \left[\frac{1976}{19}\right] + \left[\frac{1976}{19^2}\right] = 109,$$

$$\beta_2 = \left[\frac{976}{19}\right] + \left[\frac{976}{19^2}\right] = 53$$

$$\beta_3 = \left[\frac{1000}{19}\right] + \left[\frac{1000}{19^2}\right] = 54$$

и $\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = 2$, то есть $C_{1976}^{976}$ делится и на $19^2$.

Таким образом, $C_{1976}^{976}$ делится на $76^2$.

## 5. «Целые точки»

Под *целыми точками* мы будем понимать точки $(x, y)$ координатной плоскости с целочисленными координатами $x$ и $y$. Спрашивается, как подсчитать число целых точек, лежащих внутри данной плоской фигуры?

**Задача 6.** *Сколько целых точек расположено на сторонах и внутри треугольника, образованного прямыми $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$, $x = 10$ и осью абсцисс (рис. 5)?*

**Решение.** Найдем значения функции $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$ при целых $x = 1, 2, \ldots, 10$ (заметим, что $y = 0$ при $x = \frac{3}{4}$); получим ординаты $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{17}{6}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, $\frac{11}{2}$ и $\frac{37}{6}$. Легко сообразить, что общее число целых точек, лежащих в данном треугольнике (считая и на границе), равно сумме целых частей этих ординат плюс десять точек, лежащих на оси абсцисс:

$$\left[\frac{1}{6}\right] + \left[\frac{5}{6}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{13}{6}\right] + \left[\frac{17}{6}\right] + \left[\frac{7}{2}\right] + \left[\frac{25}{6}\right] + \left[\frac{29}{6}\right] + \left[\frac{11}{2}\right] + \left[\frac{37}{6}\right] + 10 = 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 10 = 37.$$

**Ответ:** 37 целых точек.

Заметим, что **внутри** данного треугольника лежит всего лишь 37—10—6=21 целая точка.

Оказывается, целые точки могут быть полезны при доказательстве тождеств!

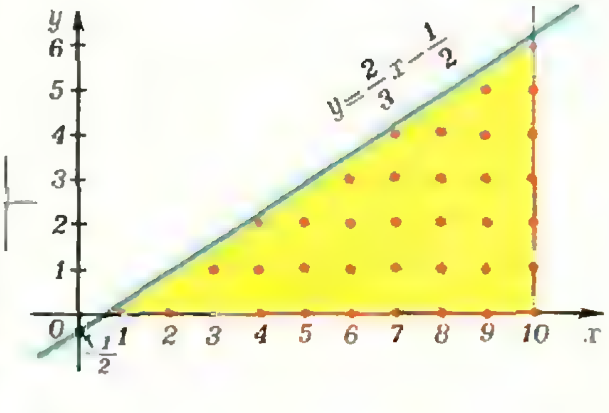


Рис. 5.

**Задача 7.** *Доказать тождество*

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\left[\frac{3q}{p}\right]+\ldots\\ \ldots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2};$$

*($p$ и $q$ — взаимно простые натуральные числа).*

**Решение.** Рассмотрим прямоугольник с вершинами $O=(0;\ 0)$, $A=(p;\ 0)$, $B=(p;\ q)$, $C=(0;\ q)$ (рис. 6). Отметим внутри прямоугольника все целые точки $(x, y)$: $1 \leqslant x \leqslant p-1$, $1 \leqslant y \leqslant q-1$ (красные точки на рисунке). Число этих точек равно произведению $(p-1)(q-1)$.

Проведем диагональ $OB$ нашего прямоугольника; ее уравнение — $y=\frac{q}{p}x$. Так как $p$ и $q$ взаимно просты, а $x=1, \ldots, p-1$, то числа вида $\frac{q}{p}x$ — не целые, т. е. на диагонали $OB$ нет целых точек, и таким образом в треугольнике, лежащем под диагональю $OB$, будет $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ красных (целых) точек. С другой стороны, способом, описанным в задаче 6, получаем, что число этих точек равно сумме $\left[\frac{q\cdot 1}{p}\right]+\left[\frac{q\cdot 2}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{q\cdot(p-1)}{p}\right]$, и, значит, нужное тождество доказано.

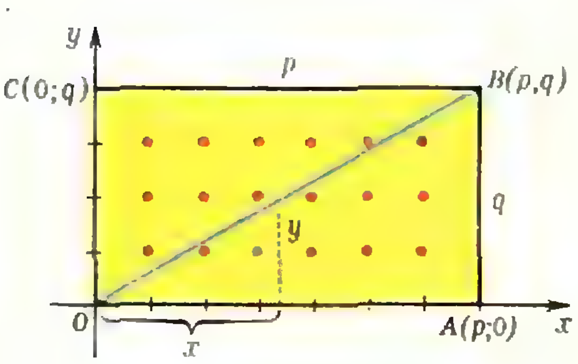


Рис. 6.

**Упражнения**

**1.** Постройте графики функций $y=[-x]$, $y=[2x]$, $y=[\sin x]$.

**2.** Докажите тождества:

а) $$\left[\frac{n}{k}\right]+\left[\frac{n+1}{k}\right]+\left[\frac{n+2}{k}\right]+\ldots\\ \ldots+\left[\frac{n+k-1}{k}\right]=n,$$

где $n$ и $k$ — натуральные числа.

б) $$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]=\\ =\tau(1)+\tau(2)+\ldots+\tau(n),$$

где $\tau(k)$ обозначает число натуральных делителей числа $k$.

в) $(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(2n-1)2n=2^n\cdot(2n-1)!!$.

(Через $S!!$ обозначается произведение натуральных чисел от 1 до $S$ одинаковой четности с $S$: например, $8!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot 8$; $9!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9$.)

**3.** Пусть $a, b, \ldots, l$ — натуральные числа, $a+b+\ldots+l=n$. Докажите, что дробь $\frac{n!}{a!\,b!\ldots l!}$ — целое число.

**4.** Докажите, что если $[nx]+[ny]=[n(x+y)]$ при всех натуральных $n$, то либо $x$, либо $y$ — число целое.

**5.** С каким показателем простое число $p$ входит в разложение числа

а) $(2n)!!$; б) $(2n-1)!!$.

**6.** Решите уравнения:

а) $\left[\frac{8x+19}{7}\right]=\frac{16(x+1)}{11}$;

б) $\left[\frac{x^2-2}{3}\right]=[x]$; в) $x^4-[x+1]=2$.

**7.** Пешеход идет со скоростью 5 *км час*, останавливаясь на отдых каждые 4 *км*. Продолжительность каждой остановки, кроме четвертой, 10 *мин*, и продолжительность четвертой остановки 1 *час*. Какое расстояние прошел пешеход, если, отправившись в путь в 4 часа утра, он пришел на место в полдень?

**8.** Сколько целых точек заключено в криволинейной трапеции $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, где $a$ и $b$ — натуральные числа, а $y=f(x)$ — функция, непрерывная и положительная на отрезке $[a, b]$ (целые точки, лежащие на границе трапеции, тоже считаются)?

**9.** Сколько целых точек лежит в круге радиуса 6,5 с центром в начале координат?

**10.** В урне находится 500 шаров, пронумерованных от 1 до 500. Какова вероятность того, что вынутый наугад шар будет иметь номер, кратный какому-нибудь из чисел 10, 14, 21?

# задачник Кванта

**Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 июля 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, Журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М381, М382» или «... Ф393». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.**

## М381—М385; Ф393—Ф397

**М381**. 6 активистов класса образовали 30 различных комиссий. Каждые две комиссии различаются составом, но обязательно «пересекаются», т. е. имеют общего члена. Докажите, что можно образовать еще одну комиссию, пересекающуюся с каждой из этих 30 комиссий.

*С. Фомин*

**М832**. Дан полином

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

с целыми коэффициентами и натуральные числа $k$ и $p$. Докажите, что если ни одно из чисел $f(k)$, $f(k+1)$, ..., $f(k+p)$ не делится на $p+1$, то уравнение $f(x) = 0$ не имеет рациональных корней.

*Т. Райков*

**М383**. Пусть $a$ и $b$ — два натуральных числа. Докажите, что если $ab$ четно, то найдутся такие натуральные числа $c$ и $d$, что $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, а если $ab$ нечетно, то таких $c$ и $d$ найти нельзя.

*М. Гервер*

**М384**. Два одинаково ориентированных квадрата $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ имеют общую вершину $O$. Докажите, что прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ проходят через одну точку.

*З. Скопец*

**М385**. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник с вершинами в узлах (в углах клеток). Выберем какую-нибудь вершину $O$ многоугольника $F$ и обозначим через $nF$ многоугольник, полученный из $F$ растяжением в $n$ раз относительно этой вершины (рис. 1) ($n$ — натуральное число). Будем обозначать через $N(nF)$ число узлов, которые лежат внутри и на границе $nF$, и через $N(\overline{nF})$ будем обозначать число узлов, которые лежат на границе $nF$. Через $S(F)$ обозначим площадь $F$ (площадь одной клетки равна 1). Докажите, что

а) $N(nF)$ является многочленом от $n$;

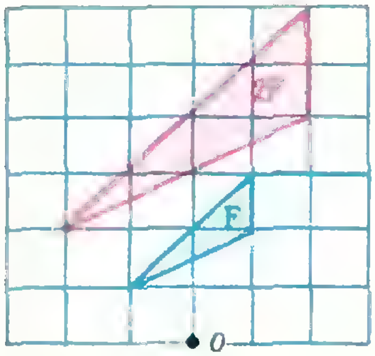


Рис. 1.

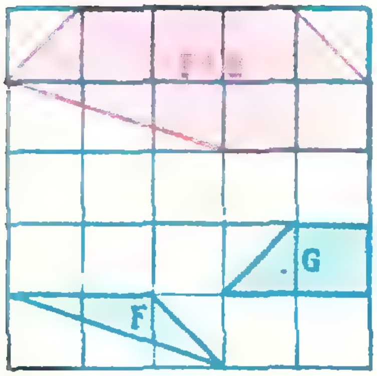


Рис. 2.

б) $2S(F) = N(2F) - 2N(F) + 1$;

в) $S(F) = N(F) - \frac{1}{2}N(\overline{F}) + 1$;

г) для любых двух выпуклых многоугольников $F$ и $G$ с вершинами в узлах $N(nF+mG)$ является многочленом от $n$ и $m$ *).

В трехмерном пространстве задан выпуклый многогранник $F$, все вершины которого являются *целыми* точками (точка называется целой, если все три ее координаты являются целыми числами). Предположим, что начало координат $O$ является вершиной $F$, и обозначим через $nF$ многогранник, полученный из $F$ растяжением в $n$ раз относительно начала координат (каждая точка $nF$ получается из некоторой точки $F$ умножением всех координат на $n$, где $n$ — натуральное число). Будем обозначать через $N(nF)$ число целых точек в многограннике $nF$ и на его границе, а через $N(\overline{nF})$ будем обозначать число целых точек на границе $nF$. Через $V(F)$ обозначим объем многогранника.

д) Докажите, что не существует формулы, которая была бы верна для любого описанного выше многогранника $F$ и выражала бы $V(F)$ через $N(F)$ $N(\overline{F})$.

е) Придумайте формулу, которая (для некоторого $k$) выражает $V(F)$ через $N(F)$, $N(2F)$, . . . . . . , $N(kF)$.

ж) Придумайте формулу, которая выражает $V(F)$ через

$$N(F),\ N(2F),\ N(\overline{F}),\ N(2\overline{F}).$$

з)* Докажите формулы, полученные при решении е) и ж).

и)* Докажите, что $N(nF)$ является многочленом от $n$.

*А. Кушниренко*

Последняя задача **М385** — тема для настоящего математического исследования, и мы не хотим ограничивать срок присылки ее решений обычными полутора месяцами. Заметку, посвященную задаче **М385**, мы предполагаем подготовить в сентябре — октябре, и к этому времени хотелось бы получить ваши письма.

**Ф393**. Известно, что частота излучения атомов, летящих со скоростью $v$ в направлении наблюдателя, изменяется на величину $\Delta f = \frac{v}{c} f_0$, где $c$ — скорость света, $f_0$ — частота излучения покоящего-

---

*) Имеется в виду *сумма Минковского* (см. статью Н. Васильева «Сложение фигур» в № 4 нашего журнала и рис. 2).

ся атома (это явление называется явлением Доплера). Вследствие этого из-за теплового движения атомов спектральные линии оказываются уширенными. Оцените температуру атомов Ne, зная, что в спектре его излучения обнаружена красная линия частоты $f_0 = 4{,}8 \cdot 10^{14}$ *гц*, ширина которой $\Delta f = 1{,}6 \cdot 10^{9}$ *гц*.

*С. Козел*

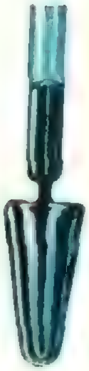


Рис. 3.

**Ф394**. Устройство ртутного медицинского термометра показано на рисунке 3. К баллончику со ртутью припаян тонкий капилляр, внизу которого имеется «перетяжка» — участок с диаметром примерно 30 микрон. Какую роль играет эта перетяжка? Оцените, какое ускорение нужно сообщить термометру для того, чтобы его «стряхнуть» после измерения температуры.

**Ф395**. Почему измерение температуры медицинским термометром продолжается долго (около 10 минут), а «стряхнуть» термометр можно практически сразу же после измерения температуры?

*Г. Косоуров*

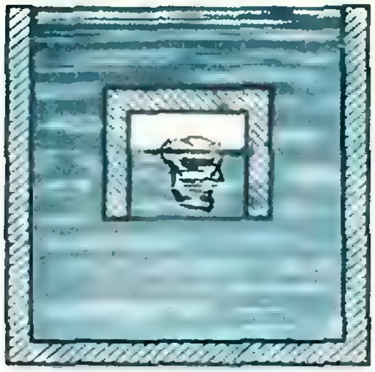


Рис. 4.

**Ф396**. В наполненный водой сосуд погружен вверх дном сосуд меньшего диаметра, неподвижно скрепленный с большим сосудом и частично заполненный водой (рис. 4). На поверхности воды внутри меньшего сосуда плавает кусок льда. Что произойдет с уровнями воды в сосудах, когда лед растает? Как изменится ответ, если меньший сосуд не скреплен с большим и плавает на поверхности воды?

*А. Глинский*

**Ф397**. Имеется следующий проект летающего аппарата. Верхняя поверхность большой плоской пластинки поддерживается при постоянной температуре 0 °С, а нижняя — при температуре 100 °С. Изобретатель утверждает, что такая пластинка будет висеть в воздухе подобно дирижаблю. Объясните, почему? Оцените по порядку величины подъемную силу такой пластинки с площадью 1 *м*² при температуре воздуха 20 °С.

# Решения задач

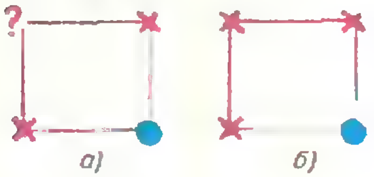
## М340—М342

**М340**. *В каждую клетку прямоугольной таблицы записано вещественное число. Некоторая клетка таблицы называется ее седловой клеткой, если стоящее в ней число не меньше остальных чисел в своем столбце и не больше ос-*

а) Пусть таблица имеет размеры $m \times n$ и $m \geq n$ (строки не длиннее столбцов). Выберем в каждом столбце максимальный элемент. Среди всех таких элементов выберем минимальный. Возможно, что таким способом мы определим не один элемент, а несколько (равных между собой). Отметим их крестиками. Рассмотрим любой из отмеченных крестиком элемент $c_{ij}$, стоящий в $i$-й строке и $j$-м столбце. Если он минимален в своей строке, то клетка $(i, j)$ — искомая. В противном случае *тальных чисел в своей строке.*

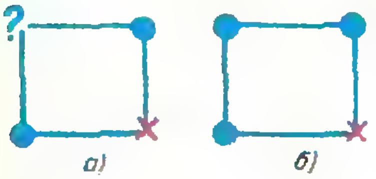
*а) Пусть про таблицу $T$ известно, что любая таблица $2\times 2$, получающаяся в пересечении двух строк и двух столбцов таблицы $T$, имеет седловую клетку. Докажите, что тогда таблица $T$ также имеет седловую клетку.*

*б) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — произвольные числа, $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n$ — положительные числа. Докажите, что таблица $m\times n$, на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца которой стоит число $\frac{a_i+b_j}{p_i+q_j}$, имеет седловую клетку.*



а) б)

Рис. 1.



а) б)

Рис. 2.

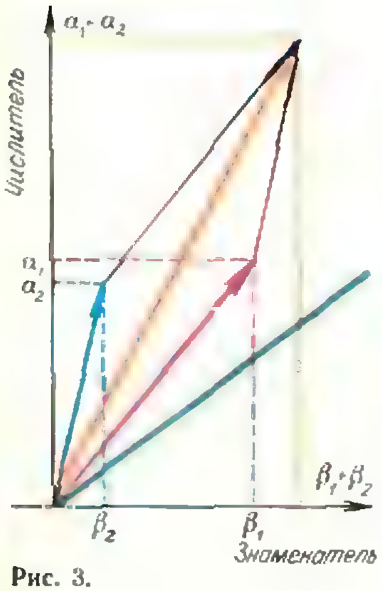


Рис. 3.

найдется элемент $c_{ij_1}$ в $i$-й строке, строго меньший элемента $c_{ij}$, — отметим его точкой. (В дальнейшем мы всегда элементы, не меньшие нашего элемента $c_{ij}$, будем помечать крестиками, а элементы, строго его меньшие, — точками.)

Возьмем любой из максимальных элементов, стоящих в $j_1$ столбце, например, $c_{i_1j_1}$. В силу выбора элемента $c_{ij}$ имеем: $c_{i_1j_1}\geqslant c_{ij}$. Поэтому $c_{i_1j}\geqslant c_{ij}$, иначе в таблице $(i, j)$, $(i, j_1)$, $(i_1, j_1)$, $(i_1, j)$ нет седловой клетки. [Здесь и ниже мы пользуемся свойством любой таблицы $2\times 2$ «иметь седловую клетку». Поэтому, если у нас есть таблица «*крестик — точка — крестик — ?*» (см. рис. 1 *а*), то на месте «?» должен быть крестик (рис. 1 *б*), а если есть таблица «точка — крестик — точка —?», (рис. 2 *а*), то на месте «?» должна быть точка (рис. 2 *б*).] С другой стороны, $c_{i_1j}\leqslant c_{ij}$ $(c_{ij}=\max\limits_k c_{kj})$. Следовательно, $c_{i_1j}=c_{ij}$ *). Если $c_{i_1j}$ не является искомым элементом, то в $i_1$-й строке найдется элемент $c_{i_1j_2}<c_{i_1j}$. Из таблицы $(i_1, j_2)$, $(i_1, j_1)$, $(i, j_1)$, $(i, j_2)$ ясно, что $c_{ij_2}<c_{ij}$. Поэтому максимальный элемент в $j_2$-м столбце не лежит ни в $i$-й, ни в $i_1$-й строках — пусть это элемент $c_{i_2j_2}$. Но $c_{i_2j_2}\geqslant c_{ij}$, поэтому $c_{i_2j_1}>c_{ij}$, $c_{i_2j}=c_{ij}$. Чтобы убедиться в этом, можно рассмотреть таблицы $(i_1, j_2)$, $(i_1, j_1)$, $(i_2, j_1)$, $(i_2, j_2)$ и $(i_1, j_2)$, $(i_1, j)$, $(i_2, j)$, $(i_2, j_2)$ соответственно. Повторим наше рассуждение, применив его к элементу $c_{i_2j}$. Получим, что либо он удовлетворяет условию задачи, либо найдется элемент $c_{i_3j}=c_{ij}$, причем $c_{i_3j_1}, c_{i_3j_2}$ не меньше $c_{ij}$. Рассмотрим тогда элемент $c_{i_3j}$ и т. д. до тех пор, пока мы либо придем к искомому элементу, либо дойдем до числа $c_{i_{n-1}j}$ такого, что все числа $c_{i_{n-1}j_1}, c_{i_{n-1}j_2}, \ldots, c_{i_{n-1}j_n}$ не меньше $c_{i_{n-1}j}=c_{ij}$. Таким образом, мы получим число, удовлетворяющее нашим требованиям.

Если же $n<m$, то рассмотрим максимальный элемент среди всех минимумов по строкам и применим аналогичные рассуждения.

б) Сведем эту задачу к задаче а) — покажем, что любая таблица $2\times 2$, получающаяся в пересечении двух строк и двух столбцов таблицы $\{i, j\}$ из чисел $\frac{a_i+b_j}{p_i+q_j}$, имеет седловую клетку.

Предположим, что это не так, то есть что есть таблица $2\times 2$ без седловой клетки. Пусть это таблица $(i_1, j_1)$, $(i_1, j_2)$, $(i_2, j_2)$, $(i_2, j_1)$. Это значит, что числа $a_{i_1}, a_{i_2}, b_{j_1}, b_{j_2}, p_{i_1}, p_{i_2}, q_{j_1}, q_{j_2}$ таковы, что два наибольших числа стоят на диагонали:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{a_{i_1}+b_{j_1}}{p_{i_1}+q_{j_1}} & > & \dfrac{a_{i_1}+b_{j_2}}{p_{i_1}+q_{j_2}} \\ \vee & & \wedge \\ \dfrac{a_{i_2}+b_{j_1}}{p_{i_2}+q_{j_1}} & < & \dfrac{a_{i_2}+b_{j_2}}{p_{i_2}+q_{j_2}}. \end{array} \qquad (1)$$

Однако легко сообразить, что для дробей с положительными знаменателями выполняются следующие соотношения: 1°) из $\frac{\alpha_1}{\beta_1}>\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}>\frac{\alpha}{\beta}$ следует, что $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2}>$

---

*) Если все числа в таблице разные, то мы получаем противоречие, и задача решена. Основная же трудность возникает тогда, когда в таблице много одинаковых чисел.

$> \frac{\alpha}{\beta}$; 2°) из $\frac{\alpha_1}{\beta_1} < \frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2} < \frac{\alpha}{\beta}$ следует, что $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} < \frac{\alpha}{\beta}$ (см. рис. 3). Поэтому

$$\frac{a_{i_1} + b_{j_1}}{p_{i_1} + q_{j_1}} > \frac{a_{i_1} + a_{i_2} + b_{j_1} + b_{j_2}}{p_{i_1} + p_{i_2} + q_{j_1} + q_{j_2}},$$

$$\frac{a_{i_2} + b_{j_2}}{p_{i_2} + q_{j_2}} > \frac{a_{i_1} + a_{i_2} + b_{j_1} + b_{j_2}}{p_{i_1} + p_{i_2} + q_{j_1} + q_{j_2}},$$

и, значит

$$\frac{a_{i_1} + a_{i_2} + b_{j_1} + b_{j_2}}{p_{i_1} + p_{i_2} + q_{j_1} + q_{j_2}} > \frac{a_{i_1} + a_{i_2} + b_{j_1} + b_{j_2}}{p_{i_1} + p_{i_2} + q_{j_1} + q_{j_2}},$$

что невозможно. Получено противоречие. Следовательно, в любой таблице 2×2 есть седловая клетка, и утверждение задачи б) следует из пункта а).

*Л. Лиманов*

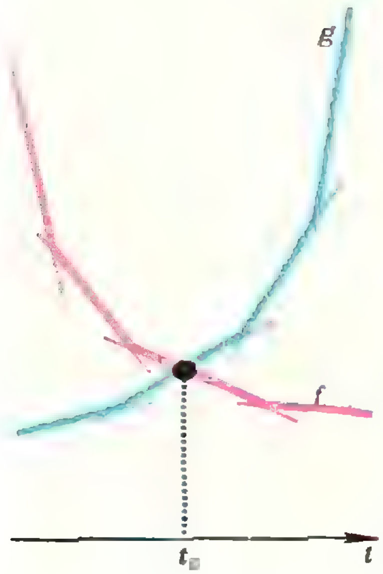


Рис. 4.

Приведем еще одно доказательство пункта б), независимое от а).

Рассмотрим две функции:

$$f(t) = \max_i (a_i - p_i t)$$

и

$$g(t) = \max_j (q_j t - b_j),$$

определенные для всех $t$. (Такие функции называются *кусочно-линейными*; их графики представляют собой ломаные.)

Функция $f$ строго убывает, а функция $g$ — строго возрастает (так как числа $p_i$ и $q_j$ положительны). Поэтому найдется такое число $t_0$, что $f(t_0) = g(t_0)$ — рис. 4.

Покажем, что это число $t_0$ есть элемент нашей таблицы. Действительно, для каких-то индексов $i_0$, $j_0$ имеем:

$$a_{i_0} - p_{i_0} t_0 = q_{j_0} t_0 - b_{j_0},$$

откуда

$$t_0 = \frac{a_{i_0} + b_{j_0}}{p_{i_0} + q_{j_0}}.$$

Докажем, что этот элемент $t_0$ является *седловым* для нашей таблицы. Из определения функции $f$ следует, что

$$a_i - p_i t_0 \leqslant a_{i_0} - p_{i_0} t_0 = q_{j_0} t_0 - b_{j_0},$$

и, значит, $$t_0 \geqslant \frac{a_i + b_{j_0}}{p_i + q_{j_0}},$$

т. е. элемент $t_0$ не меньше чисел, стоящих с ним в одном столбце (с номером $j_0$). А из определения функции $g$ следует, что

$$q_j t_0 - b_j \leqslant q_{j_0} t_0 - b_{j_0} = a_{i_0} - p_{i_0} t_0,$$

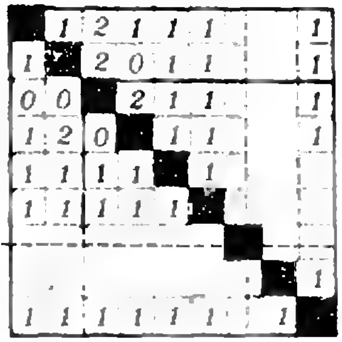
откуда $t_0 \leqslant \frac{a_{i_0} + b_j}{p_{i_0} + q_j}$, т. е. элемент $t_0$ не больше чисел, стоящих с ним в одной строке (с номером $i_0$). Доказательство закончено.

*Н. Васильев*

**М341.** *В чемпионате мира участвуют 20 команд. Среди них $k$ европейских команд, результаты встреч между которыми на чемпионате мира идут в зачет чемпионата Европы. Чемпионат проводится в один круг. При каком наибольшем $k$ может оказаться, что европейская команда, набравшая строго наибольшее количество очков в чемпионате Европы, наберет строго наименьшее количество очков в чемпионате мира, если это*

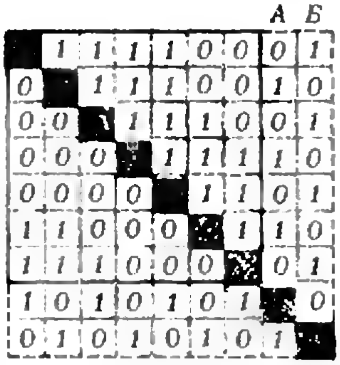
*а) чемпионат по хоккею (допускаются ничьи),*

*б) чемпионат по волейболу (ничьих не бывает)? Какими будут ответы на эти вопросы, если команд не 20, а $n$?*



| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ■ | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | | | 1 |
| 2 | 1 | ■ | 2 | 0 | 1 | 1 | | | 1 |
| 3 | 0 | 0 | ■ | 2 | 1 | 1 | | | 1 |
| 4 | 1 | 2 | 0 | ■ | 1 | 1 | | | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | ■ | 1 | | | |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ■ | | | |
| | | | | | | | ■ | | |
| | | | | | | | | ■ | 1 |
| $n$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | ■ |

Рис. 5. Чемпионат по хоккею; $n$ команд, $k=n-2$. Команды 3 ,..., $n$ — европейские, команда 3 — чемпион Европы.



| | | | | | | | | А | Б |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | ■ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | ■ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | ■ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | ■ | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | ■ | 0 | 1 |
| А | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | ■ | 0 |
| Б | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | ■ |

Рис. 6. Чемпионат по волейболу; $n=7$, $k=3$. Команды 5, 6, 7 — европейские; команда 5 — чемпион Европы. Добавлены команды *А* и *Б*.

Мы будем рассматривать сразу случай $n$ команд — участников чемпионата мира.

а) Ответ: $k=n-2$, если $n \geqslant 3$ (в частности, при $n=20$ получим $k=18$). Пусть в хоккейном чемпионате мира участвуют $n$ команд, из которых $k$ — европейские. Как обычно, считаем, что за победу команда получает 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.

Общее количество очков, разыгрываемых в чемпионате, равно $n(n-1)$. Европейские команды в играх между собой разыгрывают $k(k-1)$ очков.

Пусть $x$ — количество очков, набранных чемпионом Европы в играх чемпионата мира, а $y$ — количество очков, полученных им в играх с европейскими командами (ясно, что $x \geqslant y$).

Так как каждая из остальных $n-1$ команд набрала в играх чемпионата мира больше, чем $x$ очков, т. е. не меньше, чем $x+1$ очков, то $x+(n-1)(x+1) \leqslant n(n-1)$, или

$x \leqslant n-2+\frac{1}{n}$, а так как $x$ — целое число, то $x \leqslant n-2$.

Так как каждая из остальных европейских команд набрала меньше $y$ очков в чемпионате Европы, то $y+(y-1)(k-1) \geqslant k(k-1)$, или $ky \geqslant k^2-1$, $y \geqslant k-\frac{1}{k}$, а так как $y$ — целое число, то, значит, $y \geqslant k$.

Итак, $k \leqslant y \leqslant x \leqslant n-2$, т. е. $k \leqslant n-2$.

На рисунке 5 приведен пример турнирной таблицы, показывающий, что при $k=n-2$ чемпион Европы может занять последнее место в чемпионате мира.

б) Ответ: при четном $n \geqslant 8$, $k=n-5$ (в частности, при $n=20$, $k=15$); при нечетном $n \geqslant 7$, $k=n-4$; при $n=6$ и $n=5$ будет $k=2$.

В чемпионате по волейболу победившая команда получает 1 очко, потерпевшая поражение 0 очков, так что общее количество очков, разыгрываемых в чемпионате, равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Рассуждая, как и выше, получаем ($x$ и $y$ — те же, что и в случае а))

$$x+(n-1)(x+1) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}, \tag{1}$$

$$y+(k-1)(y-1) \geqslant \frac{k(k-1)}{2}. \tag{2}$$

Из (1) получим $x \leqslant \frac{n}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{n}$. Если $n=2l$ ($l \geqslant 2$) четно, то $x \leqslant l-\frac{3}{2}+\frac{1}{2l}$, или $x \leqslant l-2$ ($x$ — целое!).

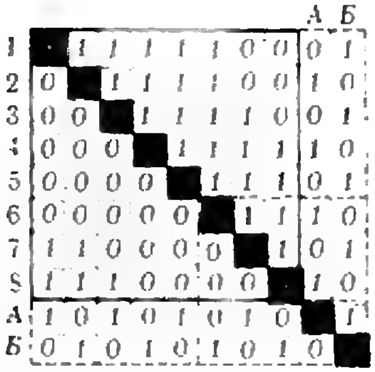
Если $n=2l-1$ ($l \geqslant 2$) нечетно, то $x \leqslant l-2+\frac{1}{2l-1}$, т. е. снова $x \leqslant l-2$.

Из неравенств $x \geqslant y$, $x \leqslant l-2$ и неравенства (2) получим

$$l-2 \geqslant x \geqslant y \geqslant \frac{(k-1)(k+2)}{2k}, \tag{2'}$$

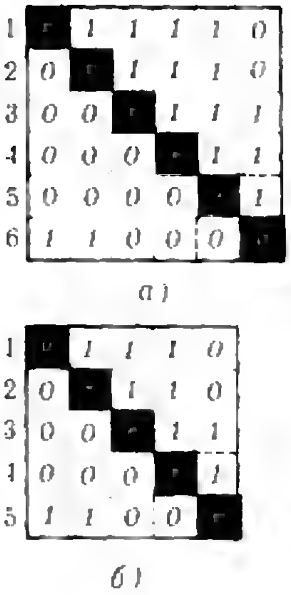
или

$$k^2+(5-2l)k-2 \leqslant 0. \tag{3}$$



|  |  |  |  |  |  |  |  |  | A | Б |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | ■ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ■ | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ■ | 1 | 0 | 1 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ■ | 1 | 0 |
| A | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | ■ | 1 |
| Б | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | ■ |

Рис. 7. Чемпионат по волейболу $n=8$, $k=3$. Команды 6, 7, 8 — европейские; чемпион Европы — команда 6. Добавлены команды *А* и *Б*.



|  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ■ | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | ■ | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | ■ | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | ■ | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | ■ | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | ■ |

*а)*

|  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ■ | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | ■ | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | ■ | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | ■ | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | ■ |

*б)*

Рис. 8. *а*) Европейские команды — 5 и 6. Чемпион Европы — команда 5. *б*) Европейские команды — 4 и 5. Чемпион Европы — команда 4.

При $l \geqslant 4$ наибольшее целое значение $k$, удовлетворяющее неравенству (3), равно $2l-5$; в самом деле, при $k=2l-5$ неравенство справедливо, а при $k \geqslant 2l-4$ его левая часть положительна (убедитесь в этом).

Если же $l=3$, то из (3) получим $k^2-k-2 \leqslant 0$, т. е. $k \leqslant 2$.

Если $l=2$, то $k^2+k-2 \leqslant 0$ и $k \leqslant 1$.

Так как $2l-5=n-5$ при четном $n$ и $2l-5=n-4$ при нечетном $n$, то получившиеся результаты мы можем записать так:

1) $k \leqslant n-4$, если $n \geqslant 7$ и $n$ нечетно;
2) $k \leqslant n-5$, если $n \geqslant 8$ и $n$ четно;
3) $k \leqslant 2$, если $n=6$ и $n=5$;
4) $k \leqslant 1$, если $n=4$ и $n=3$.

Теперь докажем, что во всех полученных неравенствах возможно достижение равенства.

Начнем со случаев 1) и 2).

На рисунках 6 и 7 приведены примеры турнирных таблиц для случаев $n=7$ и $k=3$; $n=8$ и $k=3$; эти таблицы будут служить началом индукции.

Дальнейшие построения проводим по индукции, последовательно добавляя по две европейские команды.

Заметим, прежде всего, что при $k=2l-5$ непременно

$$x=y=l-2.$$

В самом деле (см. (2')), $y \geqslant \frac{(k-1)(k+2)}{2k}$, т. е.

$$y \geqslant \frac{k}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}, \qquad \text{или} \qquad y \geqslant l-2-\frac{1}{2(2l-5)},$$

а так как $l \geqslant 4$ и $y$ — целое число, то $y \geqslant l-2$, откуда $y=x=l-2$.

Значит, наш чемпион Европы обязательно проигрывает всем неевропейским командам.

Пусть в турнире из $n=2l$ команд первые 5 команд неевропейские, остальные $n-5$ — европейские, и чемпион Европы занял последнее место.

Добавим еще две европейские команды — $(n+1)$-ю команду *А* и $(n+2)$-ю команду *Б*.

Будем считать, что команда *А* выигрывает у 1-й, 3-й, ..., ..., $(n-1)$-й команд, проигрывает остальным и *выигрывает* у *Б*.

Команда *Б* выигрывает у 2-й, 4-й,..., $n$-й и проигрывает остальным.

В итоге каждая из $n$ первых команд получает еще по одному очку, так что их взаимное положение в турнирной таблице не меняется.

У чемпиона Европы теперь $l-1$ очков, у команды *А* — $l+1$ очков; у команды *Б* — $l$ очков, так что «старый» чемпион Европы остается на последнем месте.

В играх с европейскими командами команда *А* получает $l-2$ очка ($l-3$ очка в играх со «старыми» командами и одно очко — в игре с командой *Б*).

Команда *Б* в играх с европейскими командами наберет $l-2$ очка, так что «старый» чемпион Европы сохранит свое звание.

При нечетном $n=2l-1$ рассуждения вполне аналогичны, только нужно считать, что команда *Б выигрывает* у *А* (проведите доказательство самостоятельно).

При $n=6$ и $n=5$ легко построить примеры с $k=2$ (рис. 8, *а* и *б*). Случаи $n=4$ и $n=3$ тривиальны.

*А. Егоров*

**М342.** *а) Докажите, что из цифр 1 и 2 можно составить $2^{n+1}$ чисел, каждое из которых $2^n$-значно и каждые два из которых различаются не менее, чем в $2^{n-1}$ разрядах,*

*б) Докажите, что больше чем $2^{n+1}$ таких $2^n$-значных чисел составить нельзя.*

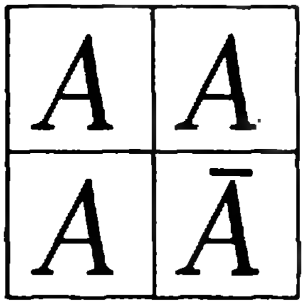


Рис. 9.

а) Будем решать эту задачу методом математической индукции. **База индукции.** При $n = 1$ каждые два из четырех двухзначных чисел 11, 12, 21, 22 различаются, по крайней мере, в одном разряде.

**Шаг индукции** Допустим, что из единиц и двоек уже составлены $2^{n+1}$ чисел, каждое из которых $2^n$-значно и каждые два из которых различаются не менее чем в $2^{n-1}\times$ разрядах. Составим из этих чисел таблицу $A$ размерами $2^{n+1}\times\times 2^n$ (по строкам таблицы — сами числа, по столбцам — разряды чисел). Припишем каждому числу $a$ таблицы $A$ справа то же самое число $a$; получившиеся $2^{n+1}$ чисел, каждое из которых уже $2^{n+1}$-значно, образуют таблицу $AA$. Затем к каждому числу $a$ таблицы $A$ припишем справа противоположное число $\overline{a}$ (единицы заменим двойками, а двойки — единицами).

Рассмотрим таблицу размерами $2^{n+2}\times 2^{n+1}$ (см. рис. 9), по строкам которой вписаны $2^{n+2}$ чисел, каждое из которых $2^{n+1}$-значно. Докажем, что каждые два из этих чисел различаются по крайней мере в $2^n$ разрядах.

В самом деле, по предположению индукции, любые два числа, взятых из верхней «половины» нашей таблицы (части $AA$), различаются не менее чем в $2\cdot 2^{n-1}=2^n$ разрядах. Точно так же различаются и любые два числа, взятые из «нижней» половины таблицы (из части $A\overline{A}$, так как числа из таблицы $\overline{A}$ различаются ровно в тех же разрядах, что и соответствующие им числа из таблицы $A$). Если же мы возьмем два числа из разных «половин» таблицы — $aa$ из верхней и $b\overline{b}$ — из нижней, то они будут различаться ровно в $2^n$ разрядах: если числа $a$ и $b$ отличаются в $k$ разрядах, то числа $a$ и $\overline{b}$ отличаются в остальных $2^n-k$ разрядах.

б) Предположим противное: пусть удалось составить $2^{n+1}+1$ число так, как требуется в задаче. Тогда среди них найдется $2^n+1$ чисел с одной и той же первой цифрой. Рассмотрим эти числа.

В каждом из оставшихся $2^n-1$ разрядов совпадает по крайней мере $2^{2n-2}$ пар этих чисел. Действительно, если в каком-то разряде (по всем этим числам) $2^{n-1}-k$ единиц ($k\geqslant 0$) и $2^{n-1}+k+1$ двоек (всего чисел $2^n+1$), то число совпадений равно

$$C^2_{2^{n-1}-k}+C^2_{2^{n-1}+k+1}=2^{2n-2}+k^2+k\geqslant 2^{2n-2}.$$

Таким образом, количество $N$ совпадений во всех разрядах не меньше

$$C^2_{2^n+1}+(2^n-1)2^{2n-2}=2^{3n-2}+2^{n-2}+2^{n-1}. \qquad (1)$$

С другой стороны, если каждые из рассматриваемых $2^n+1$ чисел отличаются не менее чем в $2^{n-1}$ разрядах, то совпадений не более

$$C^2_{2^n+1}\cdot 2^{n-1}=2^{3n-2}+2^{2n-2}. \qquad (2)$$

Поскольку (1) больше (2), мы пришли к противоречию, что и требовалось.

Для тех, кто знаком с понятием многомерного евклидова пространства, приведем план другого доказательства. Заменим в условии «двойки» на «минус единицы». Теперь утверждение задачи следует из общего факта, который легко доказать индукцией по $k$: среди $(2k+1)$ $k$-мерных векторов найдутся два с неотрицательным скалярным произведением.

*И. Клумова,*
*С. Фомин*

**В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М336-М345 и Ф348—Ф352 (жирные цифры после фамилии — *последние* цифры номеров решенных задач).**

### Математика

В большинстве писем содержалось верное решение задачи М336. Остальные задачи решили: *Д. Азов* (Челябинск) 8, 0а), б); *А. Алексеев* (Пермь) 1а), 2а), 4, 5; *О. Аполонский* (Жуковский) 7а), 8, 9а), б), в), 4; *А. Бер* (Ташкент) 7а), 9а), б), в); *И. Беркис* (Балвы) 7а), 8, 9а), б), 4, 5; *О. Болтенков* (Днепропетровск) 7а), 9а), 2а), 4, 5; *В. Бугаенко* (Киев) 1а), 3, 4, 5; *К. Гаджиев* (с. Ганшила Даг. АССР) 2а), 3; *В. Гакиров* (Куйбышев) 4; *И. Гасско* (Москва) 2а), 4; *В. Гензер* (Киев) 7а), 5; *В. Гишларкаев* (с. Урус-Мартан ЧИАССР) 7а); *Е. Глезин* (Ленинград) 3—5; *О. Глушко* (Москва) 4, 5; *С. Гринштун* (Одесса) 7а); *М. Грищенко* (ГСВГ) 4; *В. Гроссман* (Одесса) 7а), 2а), 3; *С. Губанов* (Ворошиловград) 1а), 4; *А. Гумилевский* (Рига) 7а); *В. Гусейнов* (Нахичевань) 7а), 1а), б), 2а), 3—5; *А. Диденко* (Краснодар) 7а), 9а), б), 5; *Ю. Жиленко* (Харьков) 4; *А. Завриев* (Москва) 5; *С. Исаков* (Пермь) 5; *С. Калашников* (Белово) 7а); *И. Калика* (Киев) 7а), б), 8, 9а), б), 2а), 3, 4; *А. Камалян* (Иджеван) 7а), 9а), б), 1а), б), 2а), 5; *А. Князюк* (Киев) 7а), б), 9а), б), в), 1а), б), 2а), 3—5; *Р. Красаускас* (Вильнюс) 1а), б), 4; *К. Купалов-Ярополк* (Москва) 7а), 8, 9а), 5; *В. Купцов* (Аша) 5; *М. Кутернин* (Алма-Ата) 2а), 5; *Ш. Кухалейшвили* (Тбилиси) 1а), 5; *Я. Ланцман* (Ташкент) 7а); *С. Лифиц* (Харьков) 1а), б), 2а), 4, 5; *О. Лищенко* (Киев) 7а); *В. Медведь* (Молодечно) 7а), 9а), б), в), 2а), 5; *С. Мелихов* (Донецк) 7а), 9а); *М. Морайнэ* (ПНР) 7а), 8, 9а), б), в), 3—5; *И. Морозов* (Горький) 9а), б), в), 3—5; *В. Нейман* (Ленинград) 7а), 9, 9а), б), 3, 5; *О. Окунев* (Казань) 1а), б), 2а), 4, 5; *Л. Островецкий* (с. Держановка Чериниговской обл.) 7а), б); *Д. Папуш* (Харьков) 7а), 1а), 3, 4; *А. Петухов* (Новокузнецк) 4; *С. Попов* (Москва) 1а), 2а), 3—5; *С Пославский* (Харьков) 7а), б), 8, 9а), б), в), 2а), 3—5; *Ю. Пошехонов* (Энгельс) 7а), 9а), б), в), 1а), 2а), 4, 5; *С. Путинцев* (Краснодар) 7а), б), 8, 9а), б), в), 0а), б); *А. Радул* (Кишинев) 2а), 5; *А. Рейбольд* (с. Соколовка Северо-Казахстанской обл.) 8; *В. Рогава* (Тбилиси) 7а); *А. Романов* (Ташкент) 1а), б), 2а), 3—5; *И. Рудаков* (Брянск) 7а), б), 8; *В. Слепой* (Томск) 7а), 8; *С. Трегуб* (Ташкент) 8, 9а), б), в), 1а), б), 2а), 3—5; *Н. Тренев* (Москва) 7а), 8, 9б), 1а), 2а), 4, 5; *В. Трофимов* (Москва) 4, 5; *И. Тураева* (Кемь) 4; *В. Фалько* (Харьков) 4; *Ю. Философов* (Саратов) 1а), 4, 5; *Д. Френкель* (Москва) 3, 5; *О. Хаит* (Москва) 2а), 3, 5; *Ш. Хухалейшвили* (с. Зеда-Эцери ГрССР) 7а); *А. Чурилов* (Харьков) 4; *Ю. Чистяков* (Москва) 7а), б, 8, 9а), б), в); *В. Шейхет* (Москва) 4, 5; *В. Шпильрайн* (Москва) 2а), 5; *В. Шубин* (Пермь) 1б), 3—5; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) 7а), 8, 9а), б), в), 1а), 2а), 4, 5.

### Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф349** и **Ф352**. Остальные задачи правильно решили: *Х. Абдуллин* (Алма-Ата) 8, 0, 1; *Г. Айзин* (Брест) 8, 0, 1; *Ф. Багдасарян* (Баку) 1; *В. Бакиров* (Куйбышев) 8, 1; *И. Бондарцев* (Люберцы Московской обл.) 1; *В. Вайчайтис* (Куршенай) 0, 1; *Б. Васиев* (Самарканд) 8, 0; *Б. Виноградова* (Великие Луки) 0, 1; *Н. Выскварко* (п/о Лешня Минской обл.) 0, 1; *В. Гаврилов* (Камень-Каширский) 1; *М. Гедалин* (Тбилиси) 8, 0, 1; *А. Гейм* (Нальчик) 8, 0, 1; *Р. Гибадуллин* (Бугульма) 1; *И. Гиззатуллин* (д. Старый Ашит ТАССР) 0, 1; *О. Годин* (Симферополь) 8, 0, 1; *Ю. Гоник* (Брянск) 0, 1; *С. Гранин* (Таллин) 8, 1; *А. Гумилевский* (Рига) 1; *Д. Данильчин* (Рязань) 1; *В. Демидович* (Гадяч) 1; *В. Деминенко* (Черкассы) 8, 0, 1; *И. Еникеев* (с. Ютаза ТАССР) 8; *А. Измайлов* (Зеленодольск ТАССР) 1; *А. Казаков* (Белая Церковь) 8; *М. Калайчева* (п. Цалка ГрССР) 1; *А. Калинин* (Великие Луки) 0, 1; *П. Капитанец* (Петропавловск-Камчатский) 1; *С. Кирюшин* (Рыбинск) 0, 1; *Ю. Кленов* (Целиноград) 0, 1; *К. Копейкин* (Ленинград) 8, 1; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) 8, 1; *И. Корытный* (Львов) 0, 1; *О. Костенко* (Кировск Ворошиловградской обл.) 0, 1; *Н. Костенко* (с. Гатное Киевской обл.) 8, 1; *А. Криканов* (Лыткарино) 8, 0, 1; *П. Крупкин* (Димитровград) 8, 0; *В. Кунстман* (Гатчина) 8; *А. Лебедь* (Днепропетровск) 8, 0, 1; *М. Лещенко* (Часов Яр) 8, 1; *П. Лещенко* (с. Юца Ставропольского кр.) 8, 1; *А. Листовничий* (Киев) 8, 1; *О. Лищенко* (Киев) 8; *А. Лющенко* (Киев) 1; *М. Магид* (Даугавпилс) 1; *Е. Мартынова* (Курск) 0; *Е. Мартынова* (Нежин) 8; *Е. Машеров* (Ананьев) 8, 0, 1; М. Меладзе (Тбилиси) 1; *О. Мирзеабасов* (Черновцы) 8; *И. Морозов* (Горький) 8, 0, 1; *А. Морозовский* (Киев) 0, 1; *Э. Мустадхаев* (Сумгаит) 1; *Ю. Мухарский* (Киев) 8, 0, 1; *П. Мухин* (Симферополь) 8, 0, 1; *И. Насонов* (Ташкент) 8; *А. Некрасов* (Мирный) 1; *В. Николаев* (Тула) 1; *Н. Никифоров* (Великие Луки) 1; *А. Носик* (Харьков) 1; *Е. Нургалиев* (Алма-Ата) 8, 1; *Е. Огневицкий* (Днепропетровск) 1; *А. Островский* (Алма-Ата) 1; *В. Петров* (Великие Луки) 8; *В. Позняк* (Барановичи) 8, 1; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 8; *А. Проценко* (Спасск-Дальний) 8; *С. Пятернев* (Саратов) 8, 1; *М. Райхман* (Виниица) 1; *Л. Расин* (Даугавпилс) 8, 0, 1; *С. Распономарев* (Оренбург) 8, 1; *А. Рубель* (Ставрополь) 8; *А. Рудерман* (Ленинград) 8, 0, 1; *И. Рудой* (Харьков) 8, 1; *А. Савельев* (Киев) 8, 1;

*(Окончание см. на с. 79)*

С. Белый

# «КЛЮЧ» К РЕШЕНИЮ — ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Любая задача (не только математическая!) кажется нам более или менее трудной лишь до тех пор, пока не удается найти «ключ» к решению. При решении геометрических задач таким «ключом» часто являются подобные треугольники. В одних задачах подобные треугольники заданы в условии, в других они «замаскированы» и поэтому сразу не бросаются в глаза; встречаются и такие задачи, в которых подобных треугольников вообще нет, чтобы их получить, нужно сделать некоторые дополнительные построения.

«Научиться «видеть» подобные треугольники очень полезно — обычно они облегчают решение задачи.

Прежде чем читать решения рассматриваемых ниже задач, постарайтесь каждую из них решить самостоятельно.

З а д а ч а 1. *Внутри треугольника ABC взята произвольная точка O и через нее проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят треугольник ABC на шесть частей, три из которых являются треугольниками. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны $r_1$, $r_2$, $r_3$; радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен r. Доказать, что $r=r_1+r_2+r_3$.*

Сразу видно, что построенные треугольники подобны треугольнику $ABC$ (см. рис. 1), поэтому

$$\frac{r_1}{r}=\frac{FO}{AC};\quad \frac{r_2}{r}=\frac{ED}{AC};\quad \frac{r_3}{r}=\frac{OH}{AC}.$$

Сложив эти равенства почленно, получим

$$\frac{r_1+r_2+r_3}{r}=\frac{FO+ED+OH}{AC}=$$

$$=\frac{AE+ED+DC}{AC}=1,$$

откуда $r_1+r_2+r_3=r$.

З а д а ч а 2. *Доказать, что высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами треугольника, образованного отрезками, соединяющими основания высот.*

Из подобия треугольников $AB'B$ и $AC'C$ (см. рис. 2) следует, что $\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC}{AB}$, поэтому и треугольники $AC'B'$ и $ABC$ подобны, так как угол $A$ у них общий, а стороны, заключающие этот угол, пропорциональны. Аналогично можно доказать, что подобны треугольники $CA'B'$ и $ABC$, $BA'C'$ и $ABC$. Следовательно, $\sphericalangle AB'C'=\sphericalangle CB'A'=\sphericalangle ABC$, откуда $\sphericalangle C'B'B=\sphericalangle A'B'B$. Аналогично доказывается, что $A'A$ и $C'C$ являются биссектрисами треугольника $A'B'C'$.

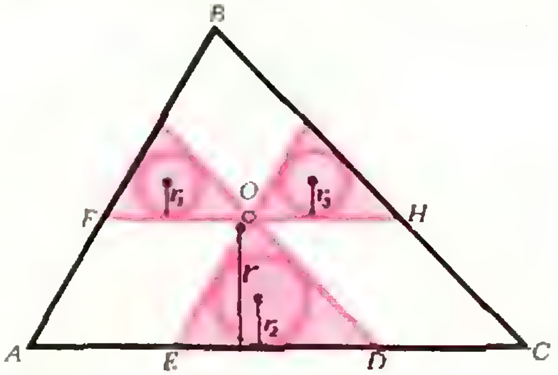


Рис. 1.

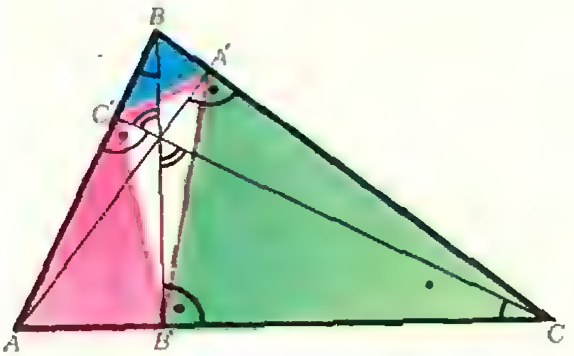


Рис. 2.

Задача 3 (МФТИ, 1973). *Окружность радиуса $R$ проходит через вершину $B$ равнобедренного треугольника $ABC$, касается основания $AC$ в точке $A$ и пересекает боковую сторону $BC$ в точке $D$. Найти длину боковой стороны $AB$, если $\frac{BD}{DC}=k$.*

Пусть $AB=x$. Заметим, что треугольники $ABC$ и $EOB$ подобны (см. рис. 3). Действительно, оба они равнобедренные, а углы при основаниях измеряются половиной одной и той же дуги $BDA$. Поэтому $\frac{x}{R}=\frac{CA}{BE}$. Учитывая, что $BE^2=4R^2-x^2$ по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника $ABE$, $CA^2=CD\cdot CB$ по теореме о касательной и секущей и $x=BC=BD+CD=(k+1)\ CD$, получаем уравнение

$$\frac{x^2}{R^2}=\frac{\frac{x}{k+1}x}{4R^2-x^2},$$

из которого находим $x=R\sqrt{\frac{4k+3}{k+1}}$.

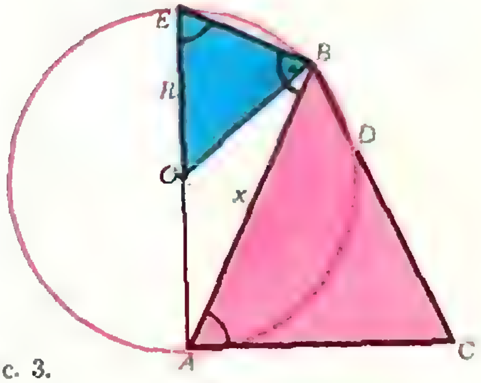


Рис. 3.

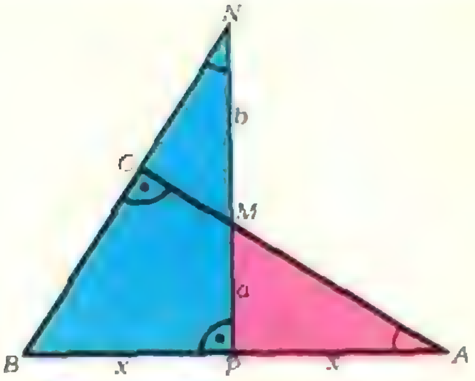


Рис. 4.

Прямоугольные треугольники подобны, если острый угол одного из них равен острому углу другого. Это часто используется при решении задач.

Задача 4. *Срединный перпендикуляр к гипотенузе $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$ пересекает катет $AC$ в точке $M$, а продолжение катета $BC$ — в точке $N$. Определить $AB$, если $MP=a$, $MN=b$.*

Пусть $AB=2x$. Легко видеть, что треугольники $AMP$ и $NBP$ подобны (см. рис. 4), поэтому $\frac{a}{x}=\frac{x}{a+b}$, откуда $x=\sqrt{a(a+b)}$, $AB=2\sqrt{a(a+b)}$.

Задача 5 (МФТИ, 1970). *Найти площадь ромба $ABCD$, если радиусы окружностей, описанных около треугольников $ABC$ и $ABD$, равны соответственно $R$ и $r$.*

Прежде всего заметим, что центрами окружностей будут точки $O_1$ и $O_2$ пересечения срединного перпендикуляра к стороне $AB$ с диагоналями ромба (см. рис. 5). Теперь нетрудно видеть, что треугольники $AO_2E$, $O_1BE$ и $ABO$ (или $CBO$) подобны. Пусть $AO=x$, $BO=y$ и $AB=z$, тогда

$$\frac{z}{2r}=\frac{x}{z},\quad \frac{z}{2R}=\frac{y}{z}.$$

Выразив из этих равенств $x$ и $y$ и воспользовавшись теоремой Пифагора, найдем

$$z^2=\frac{4r^2R^2}{r^2+R^2}$$

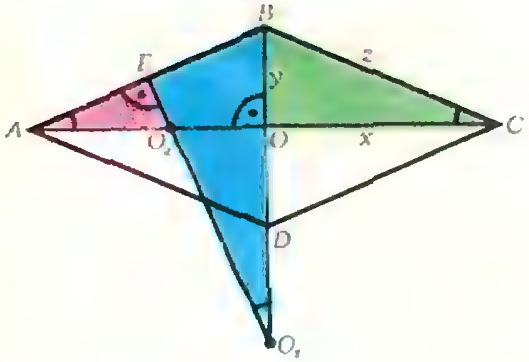


Рис. 5.

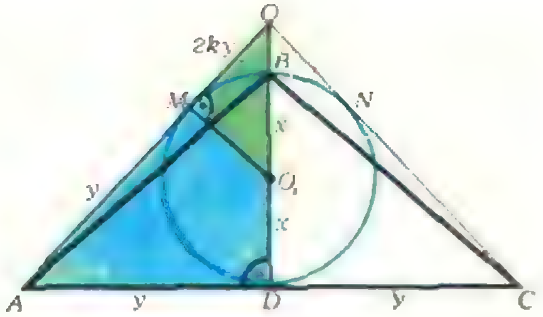


Рис. 6.

и площадь ромба

$$S = 2xy = \frac{z^4}{2rR} = \frac{8r^3R^3}{(r^2+R^2)^2}.$$

Задача 6 (МФТИ, 1972). *В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = BC$) на высоте $BD$ как на диаметре построена окружность. Через точки $A$ и $C$ к окружности проведены касательные $AM$ и $CN$, продолжения которых пересекаются в точке $O$. Определить отношение $\frac{AB}{AC}$, если $\frac{OM}{AC} = k$ и высота $BD$ меньше основания $AC$.*

По условию задачи $BD < AC$, т. е. диаметр окружности меньше основания треугольника, поэтому точка $O$ лежит на продолжении $BD$ (почему?) за точку $B$ (см. рис. 6). Пусть $BD = 2x$, $AC = 2y$. Тогда

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{BD^2 + AD^2}}{2AD} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{BD^2}{AD^2} + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{4\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}.$$

Далее, треугольники $O_1OM$ и $AOD$ подобны, поэтому $\frac{O_1M}{AD} = \frac{OO_1}{OA}$, т. е. $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{x^2 + 4k^2y^2}}{y + 2ky}$, откуда $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{k}{k+1}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5k+1}{k+1}}$.

Задача 7 (МФТИ, 1973). *В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB = BC$) высота $AF$ пересекает высоту $BD$ в точке $O$, причем $\frac{BO}{OD} = n$. В каком отношении биссектриса $AE$ делит высоту $BD$?*

По свойству биссектрисы $\frac{BG}{GD} = \frac{AB}{AD}$, а по теореме Пифагора $AB = \sqrt{BD^2 + AD^2}$, поэтому

$$\frac{BG}{GD} = \frac{\sqrt{BD^2 + AD^2}}{AD} = \sqrt{\frac{BD^2}{AD^2} + 1}$$

(см. рис. 7; точка $O$ может лежать и между $B$ и $G$). Теперь заметим, что $\angle ABD = \angle CBD = \angle FAC$, следовательно, треугольники $AOD$ и $BAD$ подобны. Поэтому $\frac{AD}{OD} = \frac{BD}{AD}$, откуда $AD^2 = OD \cdot BD$ и

$$\frac{BG}{GD} = \sqrt{\frac{BD}{OD} + 1} = \sqrt{\frac{BO + OD}{OD} + 1} = \sqrt{n+2}.$$

Равные углы (и подобные треугольники) нередко появляются в задачах, в которых есть параллельные прямые. Если же таких прямых нет, то их можно провести.

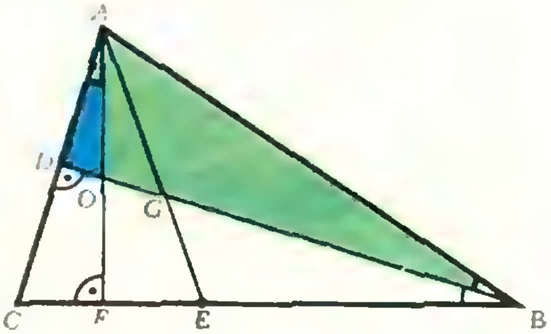


Рис. 7.

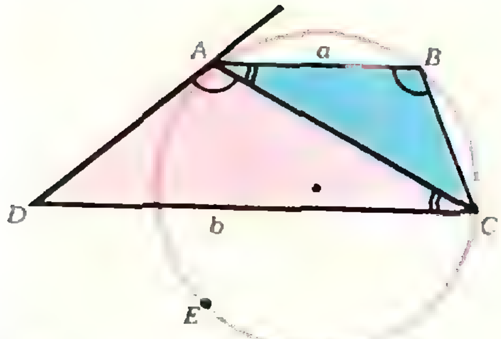


Рис. 8.

**Задача 8** (МФТИ, 1970). *В трапеции $ABCD$ ($AB$ и $CD$ — основания) $AB = a$, $CD = b$ $(a < b)$. Окружность, проходящая через вершины $A$, $B$ и $C$, касается стороны $AD$. Найти диагональ $AC$.*

Заметим, что $\angle ACD = \angle BAC$ (как накрест лежащие), $\angle ABC = \angle CAD$ (оба они измеряются половиной дуги $AEC$, см. рис. 8). Следовательно, треугольники $ABC$ и $CAD$ подобны. Поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DC}$, откуда $AC = \sqrt{ab}$.

**Задача 9** (МАИ, 1972). *В трапеции $ABCD$ проведены диагонали $AC$ и $BD$, пересекающиеся в точке $F$. Из вершины $C$ проведена прямая $CK$, параллельная боковой стороне $AD$, которая пересекает $BD$ в точке $L$ так, что $DF = BL$. Найти отношение $AB:CD$.*

Обозначим искомое отношение через $x$. Тогда из подобия треугольников $AFB$ и $CFD$ (см. рис. 9) получим

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AF}{CF} = \frac{FB}{DF} = \frac{FL + LB}{DF} = \frac{FL + DF}{DF},$$

откуда $\frac{FL}{DF} = x - 1$. С другой стороны, из подобия треугольников $ADF$ и $CLF$

$$\frac{FL}{DF} = \frac{FC}{AF} = \frac{1}{x}.$$

Следовательно, для определения $x$ получаем квадратное уравнение $x^2 - x - 1 = 0$, откуда $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (поскольку $x > 0$).

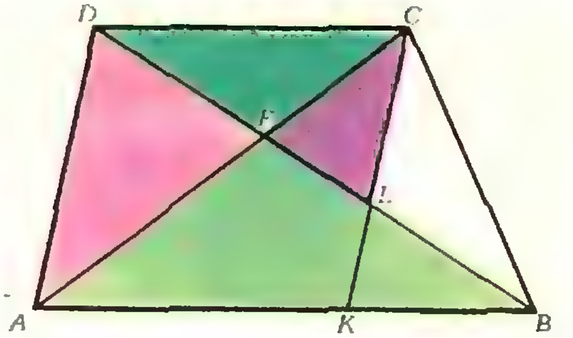


Рис. 9.

**Задача 10** (МФТИ, 1973). *В треугольнике $ABC$ через основание $D$ высоты $BD$ проведена прямая параллельно стороне $AB$ до пересечения со стороной $BC$ в точке $K$. Найти отношение $BK:KC$, если площадь треугольника $BDK$ составляет $\frac{3}{16}$ площади треугольника $ABC$.*

Обозначим искомое отношение через $x$. Проведем $DL \parallel BC$ (см. рис. 10) и заметим, что $x = \frac{BK}{KC} = \frac{AD}{DC}$. Далее решаем задачу, пользуясь подобием треугольников $ABC$, $ALD$ и $DKC$: с одной стороны, $S_{\triangle ALD} + S_{\triangle DKC} = S_{\triangle ABC} - 2S_{\triangle BDK} = \frac{5}{8} S_{\triangle ABC}$, а с другой $S_{\triangle ALD} + S_{\triangle DKC} = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2}$, отсюда получаем уравнение $\frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} = \frac{5}{8}$, или $3x^2 - 10x + 3 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

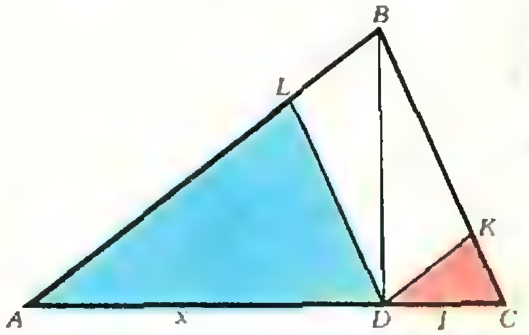


Рис. 10.

Подумайте над такими вопросами: *какова геометрическая интерпретация двух полученных ответов и какую роль играет условие «BD — высота»?*

Упражнения

1 (НГУ, 1969). Через некоторую точку внутри треугольника проведены три прямые, соответственно параллельные сторонам треугольника. Эти прямые разделяют треугольник на шесть частей, из которых три — треугольники с площадями $S_1$, $S_2$, $S_3$. Найти площадь данного треугольника.

2. В треугольник $ABC$ вписана окружность радиуса $r$. К этой окружности проведены три касательные, соответственно параллельные сторонам треугольника $ABC$. В образовавшиеся при этом три новых треугольника вписаны окружности радиусов $r_1$, $r_2$, $r_3$. Доказать, что $r=r_1+r_2+r_3$.

3 (МАИ, 1972). Из произвольной точки $D$, взятой на основании $AB$ треугольника $ABC$, проведены две прямые, параллельные сторонам $BC$ и $AC$, пересекающие их соответственно в точках $F$ и $K$. Найти сумму длин окружностей, описанных около треугольников $ADK$ и $DBF$, если радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, равен 2.

4 (МАИ, 1972). В треугольнике $ABC$ сторона $AC$ равна $b$, сторона $AB$ равна $c$, а биссектриса внутреннего угла $A$ пересекается со стороной $BC$ в точке $D$ такой, что $DA=DB$. Найти длину стороны $BC$.

5 (МФТИ, 1972). В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB=BC$) на высоте $BD$ как на диаметре построена окружность. Через точки $A$ и $C$ к окружности проведены касательные $AM$ и $CN$, продолжения которых пересекаются в точке $O$. Определить отношение $\frac{AB}{AC}$, если $\frac{OM}{AC}=k$ и высота $BD$ больше основания $AC$.

6 (МФТИ, 1972). На сторонах $AB$, $AC$ и $BC$ правильного треугольника $ABC$ расположены соответственно точки $C'$, $B'$, $A'$ так, что треугольник $A'B'C'$ является правильным. Отрезок $BB'$ пересекает сторону $C'A'$ в точке $O$, причем $\frac{BO}{OB'}=k$. Определить отношение площади треугольника $ABC$ к площади треугольника $A'B'C'$.

7 (МФТИ, 1972). На сторонах $AB$, $AC$ и $BC$ правильного треугольника $ABC$ расположены соответственно точки $C_1$, $B_1$ и $A_1$ так, что треугольник $A_1B_1C_1$ является правильным. Высота $BD$ треугольника $ABC$ пересекает сторону $A_1C_1$ в точке $O$. Найти отношение $\frac{BO}{BD}$, если $\frac{A_1B_1}{AB}=k$.

8 (МФТИ, 1973). В треугольнике $ABC$ через точку $M$, лежащую на стороне $BC$, проведены прямые, параллельные сторонам $AB$ и $AC$. Площадь образованного при этом параллелограмма составляет $\frac{5}{18}$ площади треугольника $ABC$. Найти отношение $\frac{BM}{MC}$.

9 (МФТИ, 1973). В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AB=BC$) биссектриса $AE$ пересекает высоту $BD$ в точке $O$, причем $\frac{OB}{OD}=3$. В каком отношении высота $AF$ делит высоту $BD$?

## Забавная геометрия

Уравнение «запятой», изображенной на рисунке 1, в полярных координатах $\rho$, $\varphi$ имеет вид (при $\varphi>0$)

$$\rho=\frac{(c_1+c_2)\pm(c_1-c_2)}{2}\times$$

$$\times\frac{l_1-|l_1|}{2l_1}+$$

$$+c_2\frac{l_1+|l_1|}{2l_1}\cdot\frac{l_2-|l_2|}{2l_2},$$

где $c_1=\frac{a\varphi}{\alpha}$, $c_2=\frac{a\varphi}{2\pi+\alpha}$, $l_1=\varphi-\alpha$, $l_2=\varphi-\alpha-2\pi$ (на рисунке $\alpha=\frac{3\pi}{2}$). Его прислал в редакцию Ю. Даудрих (г. Пермь).

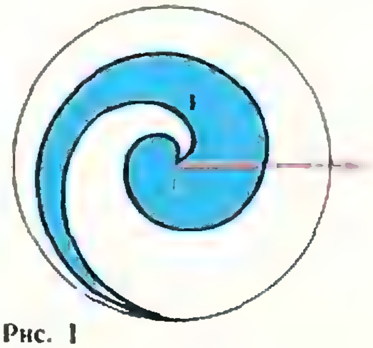


Рис. 1

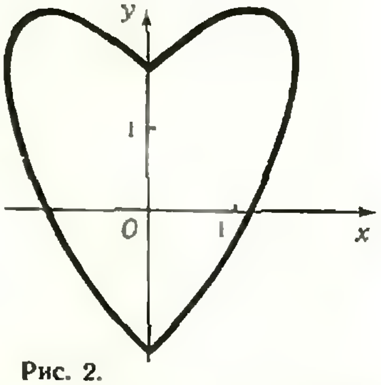


Рис. 2.

«Сердце» (рис. 2) тоже можно задать уравнением. Оно имеет вид $(y-|x|)^2=3-x^2$ или

$$y=\pm\sqrt{3-x^2}+|x|.$$

Это уравнение нам прислала Т. Фисенко (г. Грозный).

# МОСКОВСКИЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ СВЯЗИ

Московский ордена Трудового Красного Знамени электротехнический институт связи (МЭИС) был основан в 1921 году. Сейчас в институте 6 факультетов, на которых обучается более 6 тысяч студентов.

*Факультет автоматической электросвязи* готовит инженеров по специальности «Автоматическая электросвязь» — специалистов по разработке, проектированию и эксплуатации автоматических систем коммутации для передачи различных видов информации. Они направляются на работу в научно-исследовательские, учебные и проектно-конструкторские институты, занимающиеся разработкой и внедрением систем коммутации сигналов, а также строительно-монтажные, эксплуатационные предприятия и вычислительные центры.

*Факультет многоканальной электросвязи* готовит инженеров по проектированию, разработке и эксплуатации новейшей электронной аппаратуры для многоканальных систем связи — сложных электронных устройств, предназначенных для передачи на большие расстояния телефонных и телеграфных сообщений, радиовещательных и телевизионных программ, данных для вычислительных центров автоматизированных систем управления и др.

*Факультет радиосвязи и радиовещания* готовит инженеров широкого профиля по специальности «Радиосвязь и радиовещание». Инженеры, окончившие этот факультет, работают в проектных институтах, конструкторских бюро, научно-исследовательских институтах и на различных действующих объектах радиосвязи и радиовещания, занимаясь разработкой, настройкой и эксплуатацией радиоэлектронной аппаратуры и антенных устройств, систем коротковолновой радиосвязи, радиорелейной и космической связи, систем звукового и телевизионного вещания, а также вопросами распространения радиоволн и акустики.

*Факультет автоматики, телемеханики и электроники* готовит инженеров по специальности «Радиотехника». За два последних десятилетия с помощью радио было осуществлено управление космическими кораблями и луноходами, фотографирование поверхности Венеры, передача телепрограмм во все уголки планеты и многое другое. Инженеры, окончившие институт по специальности «Радиотехника», владеют всеми применениями радио для нужд народного хозяйства, развития культуры и обороны нашей Родины и направляются на работу в научно-исследовательские институты и промышленные предприятия, разрабатывающие и изготовляющие радиотехническую аппаратуру.

*Инженерно-экономический факультет* готовит инженеров по специальности «Организация механизированной обработки экономической информации». Выпускники факультета направляются в НИИ, проектные организации, в вычислительные центры и планово-финансовые управления и отделы министерств, где разрабатывают автоматизированные системы управления, занимаются их эксплуатацией и руководят техническим процессом обработки экономической информации (в вычислительных центрах).

*Факультет автоматизации предприятий связи* — единственный в СССР факультет, готовящий инженеров-электромехаников по специальности «Машины и оборудование предприятий связи». Современные почтообрабатывающие машины — сложные электромеханические агрегаты, содержащие электронные устройства управления. В Москве, столицах союзных республик и крупных городах страны вводится в действие широкая сеть высокомеханизированных почтамтов, оснащенных поточными линиями автоматизированной обработки почтовых отправлений. Технический прогресс в области почтовой связи обусловил потребность в высококвалифицированных специалистах по автоматизации производственных процессов в предприятиях почтовой связи, хорошо знающих электронику и механику.

Выпускники факультета работают в проектно-конструкторских организациях, научно-исследовательских институтах и организациях, осуществляющих монтаж, наладку и испытание оборудования предприятий связи.

Вступительные экзамены в МЭИС проводятся в августе. Ниже приведены варианты письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике 1975 года.

## Математика

В связи со спецификой института при составлении вариантов (и в дальнейшем при устном опросе абитуриентов) особое внимание обращается на знание тригонометрии, умение решать уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств (иррациональных, показательных, логарифмических и т. д.). Много примеров и задач дается на прогрессии.

### Факультет автоматики, телемеханики и электроники

1. Решить уравнение

$$8\cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}.$$

2. Решить уравнение

$$2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1.$$

3. Доказать, что выражение $20n^2 - 16n + 1$ положительно при всех целых $n$.

4. Доказать, что

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = -2\operatorname{tg}\alpha,$$

если $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \pi$.

5. Знаменатель дроби меньше квадрата ее числителя на единицу; если к числителю и знаменателю прибавить по два, то значение дроби будет больше 1/4; если от числителя и знаменателя отнять по три, то значение дроби будет меньше 1/10. Найти эту дробь.

### Факультет автоматической электросвязи

1. Решить уравнение

$$\left[\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - \sin(x - \pi)\right]^2 + 1 = \frac{2\sin^2(\pi + x)}{\sec^2 x - 1}.$$

2. Решить неравенство

$$x - \sqrt{4 - 2x} < 0.$$

3. Преобразовать в произведение

$$2\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ - 2\cos 30^\circ + \sin 40^\circ.$$

4. Решить уравнение

$$9^{\log_{25} x^4} + \log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(9^{\log_{25} x + 1} - 9^{\log_{25} x}\right).$$

5. Под каким углом наклонена образующаяся конуса к основанию, если полная поверхность конуса в два раза больше поверхности вписанного в него шара?

### Факультет автоматизации предприятий связи

1. Решить уравнение

$$\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{3}{2}.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{1/3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right] < \log_{1/3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x - 5\right].$$

3. Упростить

$$\operatorname{tg}\alpha - 1 + \sin\alpha(1 - \operatorname{tg}\alpha) + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

4. Решить уравнение

$$3^{\log_3^3 x} = x^{\log_3 x}.$$

5. Произведение первых четырех членов знакопостоянной геометрической прогрессии равно 4, а сумма кубов первых трех членов, деленная на первый член, равна 73/4. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

### Факультет радиосвязи и радиовещания

1. Решить уравнение

$$2\log_2\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}\log_2(2\sqrt{2}\,x) = 1.$$

2. Определить натуральное $x$, если

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \ldots + \frac{1}{x} = 3.$$

3. Решить уравнение

$$\sin x - \cos x - 4\cos^2 x \cdot \sin x = 4\sin^3 x.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{2^x + x^2 - 10}{2^x - 8} \leqslant 1.$$

5. Найти радиус шара, вписанного в правильную $n$-угольную пирамиду, зная сторону основания $b$ и плоский угол при вершине $\alpha$.

### Факультет многоканальной электросвязи

1. Найти все значения $x$, при которых определено выражение $\sqrt{x^2 - 5x + 4} + \lg(x + 2)$.

2. Решить уравнение

$$\cos^2 4x + \sin^2 3x = 1.$$

3. Упростить

$$\frac{a^{\frac{4}{3}} - 8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{ab} + 4b^{\frac{2}{3}}} : \left(1 - 2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) - a^{\frac{2}{3}}.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 625^3. \end{cases}$$

5. Конус, у которого образующая наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$, вписан в шар. Объем конуса равен $V$. Определить поверхность шара.

### Инженерно-экономический факультет

1. Решить уравнение

$$\cos x - \cos 17x = 1 + 2\sin 8x \cdot \sin x - \cos 16x.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{2\log_2 x - 2} = 4.$$

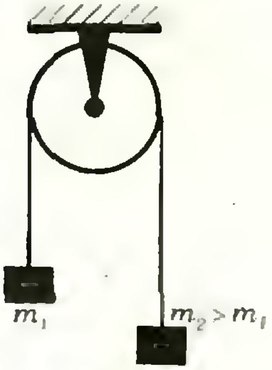


Рис. 1.

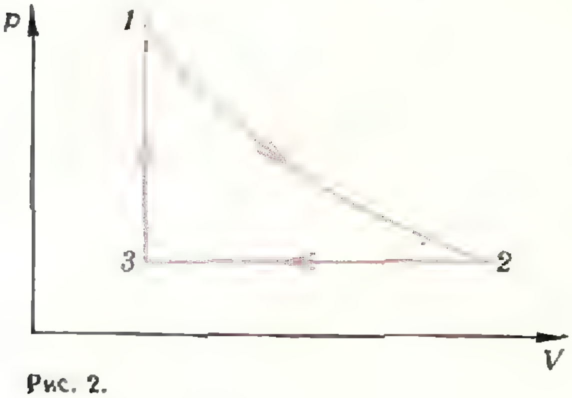


Рис. 2.

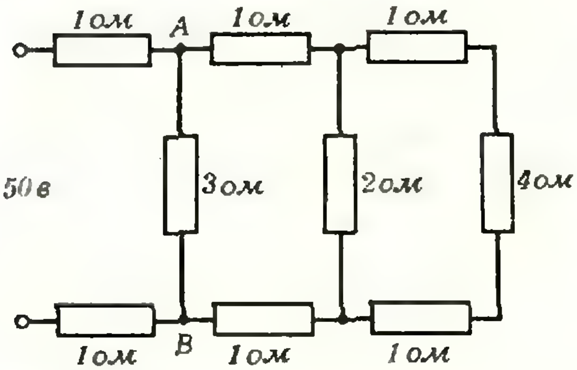


Рис. 3.

3. При каких значениях параметра $a$ система уравнений

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a + 6)y = a + 3 \end{cases}$$

не имеет решений?

4. Доказать тождество

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \sin \alpha.$$

5. Найти два двухзначных числа $A$ и $B$ по следующим условиям: если число $A$ написать впереди числа $B$ и полученное четырехзначное число разделить на число $B$, то в частном получится 121. Если же число $B$ написать впереди числа $A$ и полученное четырехзначное число разделить на $A$, то в частном получится 84 и в остатке 14.

## Физика

В каждом экзаменационном билете по физике имеются два теоретических вопроса и одна задача. Формулировки теоретических вопросов такие же, как в программе вступительных экзаменов в вузы. Поэтому здесь мы предлагаем лишь несколько задач из различных разделов курса физики.

1. Камень брошен со скоростью $v_0$ под углом $\alpha$ к линии горизонта. Пролетев по горизонтали расстояние $s$, он попал в столб. Определить, на какой высоте от земли это произошло? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. На рисунке 1 изображена механическая система. Определить силу, с которой невесомый блок действует на ось. Нить невесома. Трением в оси блока можно пренебречь.

3. С идеальным газом производится циклический процесс, представленный на $(p, V)$-диаграмме (рис. 2). Изобразить этот процесс на $(p, T)$- и $(V, T)$-диаграммах.

4. Капля ртути, лежащая на стекле, имеет потенциал $\varphi_0$. Эту каплю разбивают на $n$ одинаковых капелек. Определить потенциал образовавшихся капелек.

5. Какое напряжение покажет вольтметр, присоединенный к точкам $A$ и $B$ цепи, изображенной на рисунке 3?

6. Капля масла диаметром 0,1 *мм* поднимается с постоянным ускорением 0,3 *м/сек*$^2$ в однородном вертикальном электрическом поле. Чему равна напряженность поля, если заряд капли $10^{-12}$ *к*, а плотность масла 0,8 *г/см*$^3$?

7. Анодное напряжение двухэлектродной электронной лампы 180 *в*. С какой скоростью электрон подлетает к аноду, если его начальная скорость (вблизи катода) равна нулю? Заряд и масса электрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к* и $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг* соответственно.

*Н. Бурмистрова,*
*Н. Евграфова*

# Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Ленинградский ордена Ленина электротехнический институт имени В. И. Ульянова (Ленина) ведет свое начало от Технического училища почтово-телеграфного ведомства, открытого в Петербурге в 1886 году. Это было первое специализированное электротехническое высшее учебное заведение в России и одно из первых в мире. В 1889 году оно переименовывается в Электротехнический институт. Первым выборным директором ЭТИ был Александр Степанович Попов.

В настоящее время ЛЭТИ является одним из крупнейших в стране электротехнических институтов и ведет подготовку 12 тысяч студентов по различным направлениям.

Радиотехнический факультет готовит инженеров по специальностям «Радиоэлектронные устройства», «Радиотехника» и «Конструирование и производство радиоаппаратуры», которые направляются на радиозаводы, в НИИ и КБ, ведущие разработку и изготовление современных радиотехнических комплексов различного назначения.

Факультет электронной техники готовит инженеров-исследователей, конструкторов, технологов по разработке новых электронных приборов для различных областей науки и техники. Студенты факультета обучаются по специальностям «Электронные приборы», «Промышленная электроника» и «Оптико-физические приборы» и после окончания института занимаются разработкой и внедрением приборов и установок в таких направлениях, как лазерная техника, ионные процессы, электронно-лучевая обработка, электронная оптика, физика плазмы и ряд других.

Факультет автоматики и вычислительной техники готовит инженеров-электриков широкого профиля по средствам и системам технической кибернетики. Особое внимание на факультете уделяется математической подготовке будущих инженеров. Подготовка инженеров ведется по специальностям «Автоматика и телемеханика», «Автоматизированные системы управления», «Электронно-вычислительная техника». Выпускники факультета работают в областях проектирования вычислительных машин, разработки средств и языков общения с ними, создания на базе ЭВМ автоматизированных систем управления и автоматических устройств, работающих на расстоянии от оператора и без участия человека.

Факультет электрификации и автоматизации готовит инженеров-электриков по специальностям: «Электропривод и автоматизация промышленных установок», «Электротермические установки», «Системы автоматического управления». Разработка и исследование систем автоматического управления с применением вычислительной техники, электронных, полупроводниковых, магнитных, логических и цифровых устройств автоматики, а также создание на базе этих устройств комплексных систем характеризует направленность подготовки молодых специалистов этого факультета.

Электрофизический факультет готовит студентов по специальностям: «Электроакустика и ультразвуковая техника», «Полупроводники и диэлектрики», «Полупроводниковые приборы» и «Электронно-медицинская аппаратура». Отличительной особенностью факультета является углубленная физико-математическая подготовка его выпускников, которые распределяются в НИИ, КБ и на заводы.

Факультет корабельной электрорадиотехники и автоматики — самый молодой факультет ЛЭТИ. Он был организован в 1967 году. На факультете ведется подготовка инженеров по специальностям: «Электрооборудование судов», «Гироскопические приборы и устройства» и «Радиотехника» со специализацией «Корабельная радиотехника и связь». Выпускники факультета принимают участие в проектировании, монтаже и наладке корабельных электрических станций, электродвигателей кораблей, систем автоматического управления, комплексной автоматизации кораблей с применением цифровых вычислительных машин, сложных радиотехнических и гироскопических устройств.

Студенты дневных факультетов широко привлекаются к научно-исследовательской работе в студенческом научном обществе.

Вечерние факультеты радиоэлектроники и автоматики ведут подготовку студентов-производственников по специальностям: «Радиотехника», «Конструирование и производство радиоаппаратуры», «Электронные приборы», «Промышленная электроника», «Полупроводники и диэлектрики», «Электроакустика и ультразвуковая техника», «Автоматика и телемеханика», «Автоматизированные системы управления», «Электронные вычислительные машины», «Информационно-измерительная техника», «Электропривод и автоматизация промышленных установок» и «Электрооборудование судов».

При ЛЭТИ имеется подготовительное отделение и подготовительные курсы.

Ниже публикуются варианты письменного экзамена по математике и примеры задач устного экзамена по физике, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в ЛЭТИ в 1975 году.

## Математика

### Вариант 1

1. Ученику надо было найти произведение числа 136 на некоторое двузначное число, в котором цифра единиц вдвое больше цифры десятков. По рассеянности он поменял местами цифры двузначного числа и получил произведение на 1224 больше истинного. Чему равно истинное произведение?

2. Решить уравнение

$$(\operatorname{ctg} x - 1)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{ctg} x.$$

3. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)(1 - \sin 2x) = \cos 2x.$$

4. Решить уравнение

$$x^{2-\lg^2 x-\lg x^2} - \frac{1}{x} = 0.$$

5. Доказать, что число $k^3 + 5k$ делится на 3 при любом натуральном $k$.

### Вариант 2

1. Из порта одновременно вышли два теплохода, причем один из них пошел на юг, а другой на восток. Через 2 часа расстояние между ними составило 174 *км*. Найти среднюю скорость каждого теплохода, если известно, что один из них в среднем за каждый час проходит на 3 *км* больше, чем второй.

2. Решить уравнение

$$2\cos 2x + 2\operatorname{tg}^2 x = 5.$$

3. Решить уравнение

$$2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5(\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0.$$

4. Доказать тождество

$$1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x + \cos 2x = \cos^2 x + \cos^4 x.$$

5. При каких $\alpha$ и $x$ имеет место неравенство

$$\log_2 x + \log_x 2 + 2\cos\alpha \leqslant 0?$$

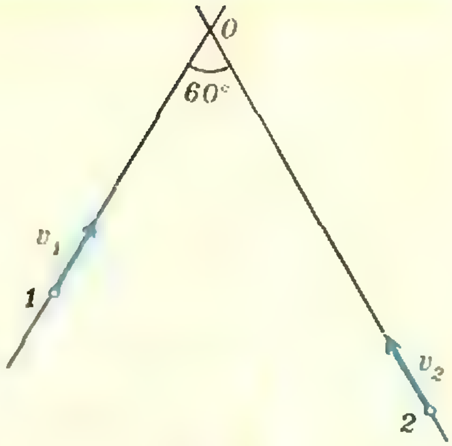


Рис. 1.

## Физика

1. Два теплохода движутся курсами, пересекающимися в точке $O$ под углом 60°, с одинаковыми по величине скоростями по 20 узлов (миль в час) каждый (рис. 1). Определить минимальное расстояние (в милях) между теплоходами в процессе движения, если в начальный момент они находились на расстоянии 20 и 30 миль соответственно от точки $O$.

2. Пушка, стоящая на экваторе, выстреливает ядро вдоль экватора на восток, а затем точно такое же ядро — на запад. Величины пороховых зарядов и углы возвышения ствола пушки одинаковы в обоих случаях. Сравнить расстояния от пушки до места падения на Землю для обоих ядер.

3. Какую работу нужно совершить, чтобы перевести спутник с круговой орбиты радиусом $8 \cdot 10^3$ *км* на круговую орбиту радиусом $10^4$ *км*, если полная механическая энергия спутника на первой орбите равна — 25 *Гдж*?

Указание. Воспользоваться аналогией между законом Кулона и законом всемирного тяготения, что позволит вычислить потенциальную энергию спутника на круговой орбите.

4. Два маленьких шарика с радиусами $r_1 = 1$ *см* и $r_2 = 2$ *см*, находящиеся на расстоянии $l = 100$ *см* друг от друга, присоединены к батарее с э. д. с. $\mathscr{E} = 3000$ *в*. Найти силу электростатического взаимодействия шариков. Влиянием соединительных проводов пренебречь. До подключения к батарее шарики не имели зарядов.

5. Точечный источник света и наблюдатель расположены по разные стороны прозрачной пренебрежимо тонкой перегородки на прямой, перпендикулярной к плоскости этой перегородки. Изменится ли для наблюдателя сила света источника, если пространство слева от перегородки (там, где находится источник света) заполнить средой с относительным показателем преломления $n$? Ответ подтвердить расчетом.

*В. Коноваленко,*
*Т. Стельмахович,*
*А. Чернявский*

А. Митрофанов

# ЭКЗАМЕНЫ ПО ФИЗИКЕ В АНГЛИИ

В середине 60-х годов в Англии Группа по вопросам образования при Институте физики и Физическом обществе провела эксперимент, цель которого состояла в том, чтобы сравнить американский и английский экзамены по физике на повышенном уровне. В этом эксперименте 600 английских школьников сдавали не только свой экзамен, но и примерно такой же по трудности американский экзамен, текст которого был составлен в Принстонском университете.

У англичан успешная сдача экзаменов на аттестат на повышенном уровне дает учащимся право на поступление в университет. В США экзамен повышенного типа по физике сдает сравнительно небольшая группа учащихся, поступивших в некоторые университеты. От результатов экзаменов зависит, надо ли студенту первокурснику прослушать подготовительный курс по физике полностью или же только его часть.

Экспериментальный экзамен состоял из двух частей. Первая часть включала 44 вопроса, на которые надо было ответить в течение одного часа, используя американскую экзаменационную технику типа «многочисленный выбор» («multiple-choice» type). На каждый вопрос машина предлагала 5 разных ответов, из которых нужно было выбрать один правильный. Вторая часть более похожа на традиционный английский экзамен на повышенном уровне. На решение десяти задач отводилось два часа. За правильные решения разных задач давалось разное количество очков. Задачи 1 и 2 (надо было решить одну из этих задач по выбору) оценивались 25% от общего количества очков, за решение задачи 3 давалось 20%, задачи 10 — 25%, а вопросы 4—9, на которые требовалось дать краткие ответы, оценивались все вместе 30%.

Ниже приводится текст проводимого экзамена, точнее, второй его части. Попробуйте и вы свои силы в решении этих задач.

1. Внутренняя поверхность цилиндра радиуса 1,5 *м* является гладкой, за исключением небольшого участка *BC* (рис. 1). Тело массой 4 *кг* удерживается в положении *A* нитью, которая перпендикулярна радиусу цилиндра, проходящему через центр тела. а) Укажите силы, действующие на тело в положении *A*.

Нить удаляется, и тело соскальзывает вниз, достигая положения *E*, которое является точкой поворота. б) Какие силы действуют на тело в положении *D*? в) Определите потерю энергии на участке *BC*. г) Чему равна сила реакции цилиндра на тело в положении *D*?

2. Небольшое тело массой *m* удерживается в вязкой жидкости в состоянии покоя. В момент времени $t = 0$ тело отпускают. Считая, что сила сопротивления обтекающей тело жидкости пропорциональна скорости тела, получите зависимость от времени одной из трех величин: а) положения, б) скорости, в) ускорения тела, и объясните, как определить две другие величины. Положение тела в момент времени $t = 0$ принять за начало отсчета.

3. Положительно заряженное проводящее кольцо радиусом *R* лежит в плоскости *YZ*, центр кольца находится в начале координат (рис. 2, *а*). На рисунке 2, *б* показана

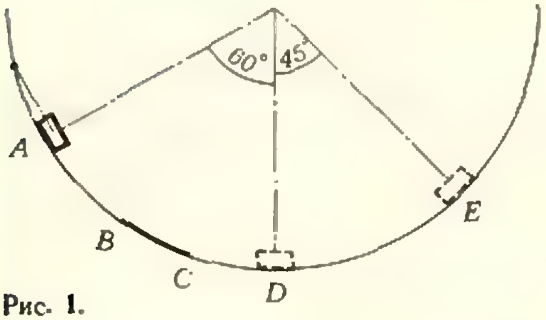


Рис. 1.

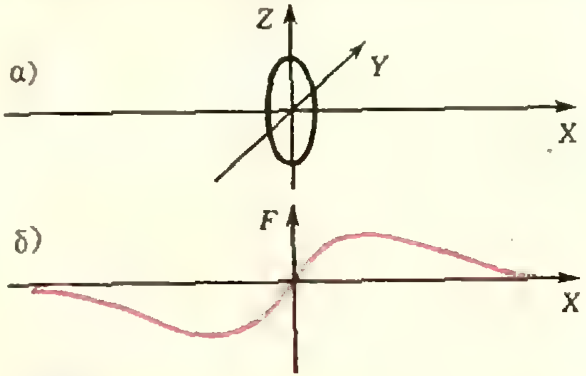


Рис. 2.

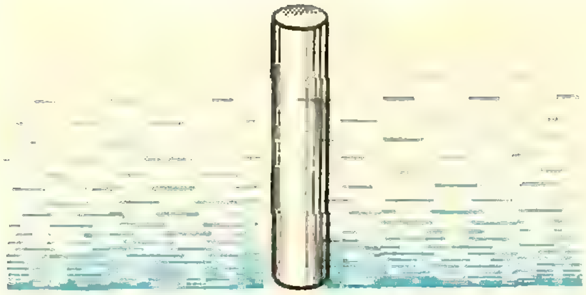


Рис. 3.

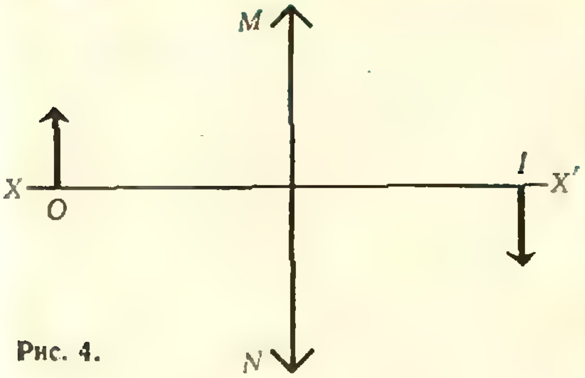


Рис. 4.

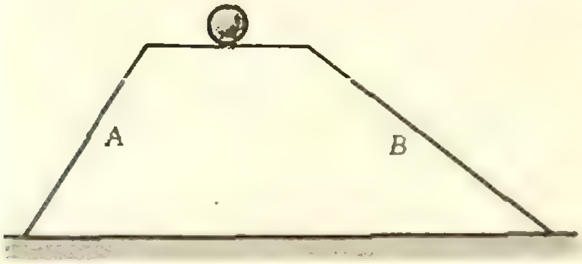


Рис. 5.

зависимость силы $F$, действующей на пробный положительный заряд, от его положения на оси $OX$. а) Объясните, почему в начале координат сила равна нулю. б) Приведите доводы, подтверждающие, что кривая $F(x)$ соответствует действительности. Оцените максимальное и минимальное значения $F(x)$ (как положительные, так и отрицательные).

4. Цилиндрический сосуд высотой несколько сантиметров плавает в спокойной воде, выступая над ее поверхностью (рис. 3). Цилиндр погружают на некоторую глубину, а затем предоставляют самому себе. Не приводя численных данных, изобразите на графике зависимость положения цилиндра от времени.

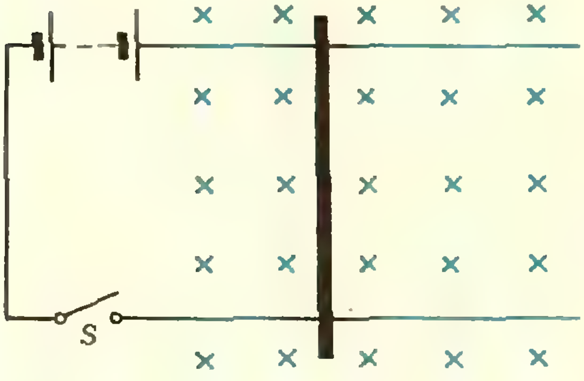


Рис. 6.

5. Дана двояковыпуклая тонкая линза $MN$ с главной оптической осью $XX'$; $O$ — объект, $I$ — его изображение (рис. 4). а) Постройте ход четырех лучей, идущих от вершины объекта. б) Определите построением, где находятся фокусы линзы.

6. Мальчик сидит на вращающемся с угловой скоростью ω стуле и держит на вытянутых руках две одинаковые гантели. В некоторый момент времени мальчик роняет гантели, не опуская рук. а) Что случится с угловой скоростью вращения? б) Сохранится ли момент импульса системы? Объясните.

7. Два спектроскопа $A$ и $B$ используются при исследовании одного и того же источника света. Дисперсионным элементом в $A$ является дифракционная решетка, в $B$ — призма. Опишите три различия в спектрах, наблюдаемых с помощью приборов $A$ и $B$.

8. Твердый шарик скатывается сначала по наклонной плоскости $A$, а затем по наклонной плоскости $B$ (рис. 5). Будет ли он скатываться по одному наклону дольше, чем по другому? Объясните. Считайте, что шарик начинает двигаться из состояния покоя и что проскальзывания нет.

9. На рисунке 6 вы видите два горизонтальных провода, находящихся в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости чертежа. Сопротивление проводов пренебрежимо мало. Металлический стержень-перемычка с сопротивлением $R$ может двигаться без трения вдоль проводов. Ключ $S$ замыкается. а) В какую сторону станет двигаться стержень? б) Почему ускорение стержня не постоянно?

10. Здесь требуется подумать и применить ваши знания к решению задачи. Оценка, которую вы получите, будет зависеть от того, как хорошо вы сумеете использовать ваши теоретические и практические знания в ответах на поставленные вопросы. Ваше воображение и умение научно обосновать ваши идеи тоже повлияют на окончательную оценку.

Железная проволока длиной около 2 м висит на двух вертикальных опорах. Концы проволоки подсоединены к электрической сети, так что ток в проволоке можно по желанию увеличить от 0 до большой величины. а) Перечислите пять или более параметров проволоки, которые будут изменяться по мере увеличения тока. б) Выберите любые три из этих величин, которые можно измерить независимо друг от друга. Для каждого случая опишите подробно методику эксперимента, позволяющего измерять нужные характеристики проволоки при увеличении тока в ней, и какие результаты вы ожидаете получить в этих опытах.

*А. Халамайзер*

# ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В ГДР

Единая социалистическая система образования, осуществляемая в ГДР, по праву считается одной из лучших в мире. Даже далекие от симпатий западногерманские комментаторы часто говорят о «чуде в системе народного образования ГДР».

— Одним из величайших достижений Германской Демократической Республики является создание Единой социалистической системы образования, — сказал Министр просвещения СССР М. А. Прокофьев, выступая на VII Педагогическом конгрессе в Берлине.

Чудом можно назвать и успехи Республики в развитии экономики: за 25 лет существования ГДР объем промышленной продукции вырос в 5,7 раз *). Высокий уровень культуры, науки, промышленности в значительной мере обязан весьма эффективной системе образования.

В ГДР осуществлено всеобщее обязательное десятилетнее политехническое образование. Наиболее прилежные школьники, которые учатся на хорошо и отлично, получают право поступить в 12-летнюю школу, дающую аттестат зрелости и возможность поступления без экзаменов в вуз.

Объем курса математики обязательной десятилетней школы невелик, он не содержит сложных доказательств, исследований, не включает числовых последовательностей и пределов, логарифмов, преобразований тригонометрических выражений и многого другого, что стало традиционным в советской школе. Все эти разделы признаны необязательными для всеобщего изучения и перенесены в 12-летнюю школу, в которой изучаются также векторная алгебра и аналитическая геометрия, основы дифференциального и интегрального исчисления и их применение. Однако уже в десятилетней школе обращается серьезное внимание на технику преобразований и вычислений с учетом необходимой степени точности и округления, применение логарифмической линейки и числовых таблиц. Кроме того, в VII классе изучается начертательная геометрия — способы построения проекций, изображение пространственных тел, умение «читать» чертежи.

Выпускники десятилетки сдают 4 письменных экзамена: по математике (без разделения на алгебру и геометрию), по немецкому языку и литературе, по русскому языку и либо по физике, либо по химии, либо по биологии — по усмотрению педагогического совета школы. Кроме того, проводится два устных экзамена, один из которых естественно-математического цикла, другой — общественно-гуманитарного. Аналогичные экзамены сдают и выпускники двенадцатилетней школы — на получение аттестата зрелости.

Ниже приводится содержание экзаменационных заданий за курс 10-летней и 12-летней школ (все школьники Республики сдают письменный экзамен по математике в один и тот же день и час решая одни и те же задачи).

## Письменный выпускной экзамен по математике за 10 классов (1974/75 учебный год)

### Задачи для обязательного решения

1. В 1973 году в соответствии с программой жилищного строительства в ГДР построено 80 700 новых квартир.

а) 60% этих квартир предоставлено семьям рабочих. Сколько квартир составляет это количество?

б) В 1972 году было построено 69 500 новых квартир. Вычислите, на сколько процентов возросло строительство квартир в 1973 году по сравнению с 1972 годом.

2. В треугольнике $ABC$ дано: $|AB| = 16{,}4$ *см*; $|BC| = 19{,}0$ *см*; $\widehat{BAC} = 58{,}8°$.

а) Постройте треугольник $ABC$ в масштабе 1 : 2.

б) Вычислите величину двух других углов.

в) Вычислите длину стороны $AC$.

3. Линейные функции заданы уравнениями:

1) $y = 3x - 2$;

2) $y + x = 4$.

а) Постройте графики обеих функций на одном и том же чертеже и найдите координаты точки их пересечения.

---

*) С 22 млрд. марок в 1949 до 126 млрд. марок в 1974 году (в сопоставимых ценах).

б) Рассмотрите данные уравнения как систему и решите ее.

4. Деталь состоит из цилиндрической и конусообразной частей (см. рис. 1).

а) Вычислите объем детали (в $см^3$).

б) Деталь отлита из стали ($\rho = 7{,}80$ $г/см^3$); вычислите массу детали.

5. В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($[AC] \cong [BC]$) точка $D$ — середина $[AC]$, $E$ — середина $[BC]$.

а) Постройте фигуру и обозначьте названные точки.

б) Из точки $D$ опустите перпендикуляр на $[AB]$, основание перпендикуляра обозначьте через $F$; из точки $E$ опустите перпендикуляр на $[AB]$, основание перпендикуляра обозначьте через $G$.

в) Докажите, что треугольники $AFD$ и $BGE$ конгруэнтны.

6. а) Упростите выражение *) $(m^2n^5)^3$.

б) Запишите числа 628 000 000 и 0,0037 в стандартной форме, то есть в форме $a \cdot 10^k$, где $1 < a < 10$, $k$ — целое.

в) Постройте график функции $y = \sin 0{,}5x$ в интервале $0 \leqslant x \leqslant 4\pi$.

г) На рисунке 2 изображены две прямые $e$ и $f$, пересеченные третьей прямой $g$. Каково должно быть взаимное расположение прямых $e$ и $f$, чтобы углы $\alpha$ и $\beta$ были конгруэнтны?

### Задачи по выбору

Из задач 7.1, 7.2, 7.3 решите только одну.

7.1. Дано неравенство

$$2x - (8 - x) < 8(2x + 3) - 5x.$$

а) Решите это неравенство (проверки не требуется).

б) Пусть $M$ — множество решений этого неравенства; для каждого из чисел —8; 3; 0; —0,5; —4; 5,2 укажите, входит ли оно в множество $M$.

7.2. Функция задана уравнением $y = \frac{1}{x^2}$.

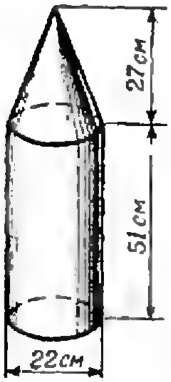


Рис. 1.

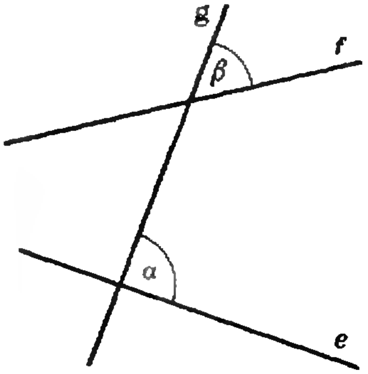


Рис. 2.

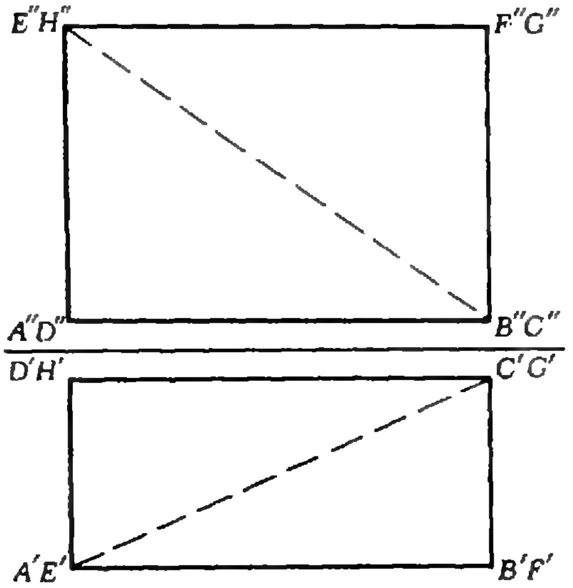


Рис. 3.

а) Вычислите значения этой функции для данных значений аргумента (заполните таблицу; «трехэтажные» дроби замените обыкновенными).

Таблица

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\frac{1}{2}$ | $+1$ | $+2$ | $+\frac{5}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | |

б) Постройте график этой функции.

в) Постройте на этом же чертеже график функции $y = x^2$.

г) Найдите координаты точек, принадлежащих и тому, и другому графикам.

7.3 *). На рисунке 3 показано некоторое тело в двух проекциях; пунктирные линии изображают одну из диагоналей, $|AB| = 6{,}5$ см; $|BC| = 4{,}2$ см; $|BF| = 8{,}2$ см.

а) Постройте данное тело в перспективе и обозначьте все вершины.

б) Изобразите на перспективном чертеже данную диагональ.

в) Вычислите длину данной диагонали.

Решение каждой задачи расценивается баллами — учитель получает из Министерства специальную инструкцию по оценке работы. Приведенные задачи 1, 5, 6 и каждая из задач по выбору «расценены» пятью баллами; задачи 2 и 3 — семью баллами, задача 4 — шестью. Например, при решении задачи 3 полагается:

---

*) То есть раскройте скобки.

*) Задача по начертательной геометрии.

а) За построение графика первой функции . . . . . . . . . . . . 1 балл,
за выражение второй функции в явной форме . . . . . . . . . 1 балл,
за построение графика второй функции . . . . . . . . . . . . 1 балл,
за нахождение координат точки пересечения . . . . . . . . 1 балл;
б) за исключение одной переменной . . . . . . . . . . . . . . 1 балл,
за определение значения одной переменной . . . . . . . . . 1 балл,
за определение значения второй переменной . . . . . . . . . 1 балл.

---

Итого за задачу 7 баллов

В инструкции дана и таблица, по которой ставится оценка за всю работу:

39—40 баллов — оценка 1 (очень хорошо);
32—38 баллов — оценка 2 (хорошо);
24—31 балла — оценка 3 (удовлетворительно);
14—23 баллов — оценка 4 (достаточно)*);
0—13 баллов — оценка 5 (недостаточно).

## Письменный экзамен по математике на аттестат зрелости (за курс 12-летней школы, 1974/75 учебный год)

### Задачи для обязательного решения

1. В системе декартовых прямоугольных координат в пространстве задан треугольник с вершинами в точках $O$ (0; 0; 0), $A$ (2; 2; 1), $B$ (1; 4; —1).

а) Докажите, что длины сторон $OA$ и $AB$ равны.

б) Докажите, что треугольник $OAB$ прямоугольный.

в) Вычислите площадь этого треугольника.

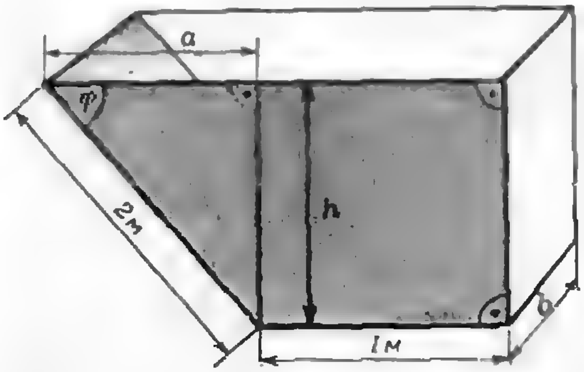


Рис. 4.

г) Через точки $A$ и $B$ проведена прямая $g$: составьте ее уравнение и вычислите координаты точки $P_0$, в которой эта прямая пересекает плоскость $yOz$.

2. Функция задана своим уравнением

$$y = \frac{4}{x^2} + 1.$$

а) Вычислите ординаты $y_1$ и $y_2$ точек $P_1$ (1; $y_1$) и $P_2$ (4; $y_2$), принадлежащих графику этой функции.

б) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком данной функции, осью $Ox$ и прямыми $x = 1$ и $x = 4$.

в) Найдите первую производную этой функции; вычислите координаты точки $P_0$, в которой «наклон» кривой имеет коэффициент $k = -1$ *).

г) Найдите уравнение касательной к кривой (к графику функции) в точке $P_0$.

3. Эллипс задан своим уравнением $x^2 + 4y^2 = 25$.

а) Вычислите длину осей и эксцентриситет в эллипса.

б) Постройте не менее 12 точек этого эллипса (не считая вершин) и начертите эллипс.

в) Прямая $x + y - 5 = 0$ пересекает данный эллипс в точках $P_1$ и $P_2$: вычислите координаты этих точек.

г) Отрезок $P_1P_2$ служит диаметром некоторой окружности; определите координаты центра этой окружности и составьте ее уравнение.

4. На рисунке 4 изображен контейнер для мусора. Чтобы он имел возможно больший объем, передняя стенка (при заданной ширине $b$) должна иметь максимально возможную площадь.

а) Выразите высоту $h$ и отрезок $a$ в виде функции угла $\varphi$.

б) Выразите площадь $S$ передней стенки в виде функции угла $\varphi$.

в) Определите угол $\varphi$ так, чтобы площадь $S$ этой стенки была максимальной (доказательство максимальности не обязательно).

5. а) Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$) образуют острый угол $\varphi$. Определите угол $\varphi$ так, чтобы выполнялось следующее условие (на модуль векторного произведения): $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0,5 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

б) Дана функция $y = f(x) = x \ln x$.

Составьте первую производную $f'(x)$ и вычислите $f'(1)$.

в) Укажите все действительные числа $x$, для которых определено выражение $\sqrt{0,1 - 2x}$.

---

*) В школах ГДР оценка 4 — «достаточно» — считается положительной.

*) То есть точку, в которой производная принимает значение — 1.

г) Вычислите

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-5n+1}{4n^3-7}.$$

### Задачи по выбору

Из задач 6.1, 6.2, 6.3 решите только одну.

**6.1.** Дана функция $y=f(x)=e^{0,5x}$.

а) Составьте три первые производные этой функции: $f'(x)$; $f''(x)$; $f'''(x)$.

б) Докажите методом математической индукции, что $n$-я производная выражается формулой $f^{(n)}(x)=\frac{1}{2^n}e^{0,5x}$.

в) Вычислите $f'(0)$; $f''(0)$; $f'''(0)$ и $f^n(0)$. Эти значения составляют числовую последовательность

$a_1=f'(0)$, $a_2=f''(0)$,..., $a_n=f^n(0)$. (*)

Докажите, что отношение последующего члена последовательности (*) к предыдущему постоянно.

г) Из членов последовательности (*) можно составить бесконечный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Вычислите сумму этого ряда (бесконечной геометрической прогрессии) $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

**6.2.** Дана функция

$$y=f(x)=\cos 0,5x$$

$(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

а) Определите корни этой функции (т. е. значения аргумента, при которых функция обращается в нуль) и постройте схематически ее график.

б) Докажите, что точка $P_0(x_0;\ 0)$ является точкой перегиба.

в) График этой функции и оси координат ограничивают некоторую плоскую фигуру; определите площадь этой фигуры.

г) Оси координат, график функции и прямая, параллельная оси $Oy$ и отстоящая от нее на расстояние $d$ $(0<d<\pi)$, ограничивают некоторую плоскую фигуру; определите $d$ так, чтобы площадь этой фигуры равнялась единице.

**6.3.** Парабола $y^2=2px$ проходит через точку $P_1(12;\ 12)$.

а) Определите параметр $p$ этой параболы; вычислите угловой коэффициент $k_1$ касательной, проведенной к этой параболе в точке $P_1$.

б) Постройте схематически эту параболу и касательную к ней в точке $P_1$.

в) Существует ровно одна касательная к этой параболе, угловой коэффициент которой $k_2=\frac{-1}{k_1}$. Определите координаты точки $P_2$, в которой она касается параболы.

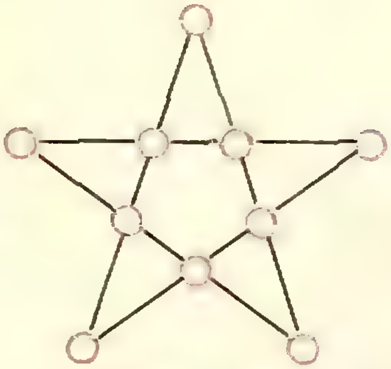
г) Докажите, что если касательные, проведенные к параболе $y^2=2px$ в точках $P_1(x_1;\ y_1)$ и $P_2(x_2;\ y_2)$, взаимно перпендикулярны, то $y_1\cdot y_2=-p^2$.

И к этому варианту для учителя прилагается инструкция, в которой каждую задачу рекомендуется расценить определенным числом баллов. Максимально возможное количество баллов за всю работу — 40. Отметка выставляется в соответствии с таблицей, приведенной выше.

# ЗАДАЧИ НАШИХ ЧИТАТЕЛЕЙ

**1.** Можно ли расставить в десяти кружках на рисунке числа 0, 1, 2, ..., 9 так, чтобы суммы четырех чисел на каждой из прямых были равны?

*М. Караджян*
(г. Степанаван)



**2.** Можно ли расставить на шахматной доске

а) 5 ладей и 5 коней,

б) 6 ладей и 6 коней

так, чтобы ни одна фигура не била другую?

*С. Охитин* (г. Оренбург)

**3.** Жильцы многоэтажного дома пользуются лифтом и для спуска, и для подъема. Если нет вызова и лифт свободен, то он автоматически направляется на некоторый определенный этаж. На какой этаж надо направлять лифт, чтобы среднее время ожидания лифта всеми жильцами было наименьшим?

*Б. З. К.*

**4.** Найти простое число $p$, если известно, что числа $p^2-2$, $2p^2-1$ и $3p^2+4$ также простые.

**5.** В множестве первых десяти тысяч натуральных чисел возьмем подмножество чисел, оканчивающихся на 1 и которые могут быть представлены в виде $8^m+5^n$ ($m$, $n$ — натуральные). Сколько элементов содержит это подмножество?

*К. Курбанов* (с. Цугни
Дагестанской АССР)

## «Квант» для младших школьников

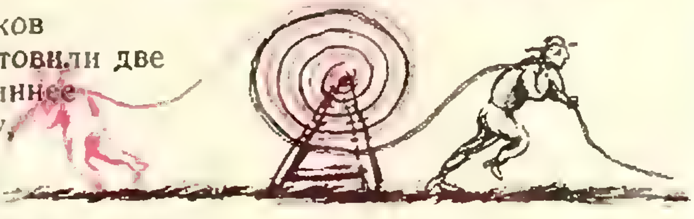
# Задачи

1. Три гангстера украли из сейфа 10 бриллиантов общей стоимостью 4 000 000 долларов. При этом они рассчитывали разделить бриллианты так, чтобы каждому досталось не меньше 1 000 000 долларов. При погоне один из бриллиантов стоимостью 600 000 долларов потерялся, и такой раздел стал невозможен. Мог ли он быть возможен вначале, или гангстеры заведомо ошибались?

2. Известно, что вес тела на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле. Представьте себе, что вам предложили отправиться на Луну и проверить этот факт экспериментально. Какое оборудование вы возьмете с собой?

3. Про три точки $A$, $B$ и $C$ известно, что для любой четвертой точки $M$ плоскости расстояние от $A$ до $M$ не превосходит хотя бы одного из расстояний: от $B$ до $M$ или от $C$ до $M$. Доказать, что точка $A$ лежит на отрезке $BC$.

4. Из двух одинаковых кусков одного и того же металла изготовили две проволоки, одна из которых длиннее другой в 4 раза. Как по-вашему, одинаковы или различны сопротивления этих проволок?



5. Имеются 6 одинаковых по виду монет. Четыре из них настоящие, по 4 *г* каждая, а две фальшивые общим весом 8 *г*, одна чуть более тяжелая, другая чуть более легкая. Хватит ли четырех взвешиваний, чтобы с помощью чашечных весов (без гирь) найти обе фальшивые монеты?

*А. Розенталь*

# ВСТРЕЧИ В ОКЕАНЕ

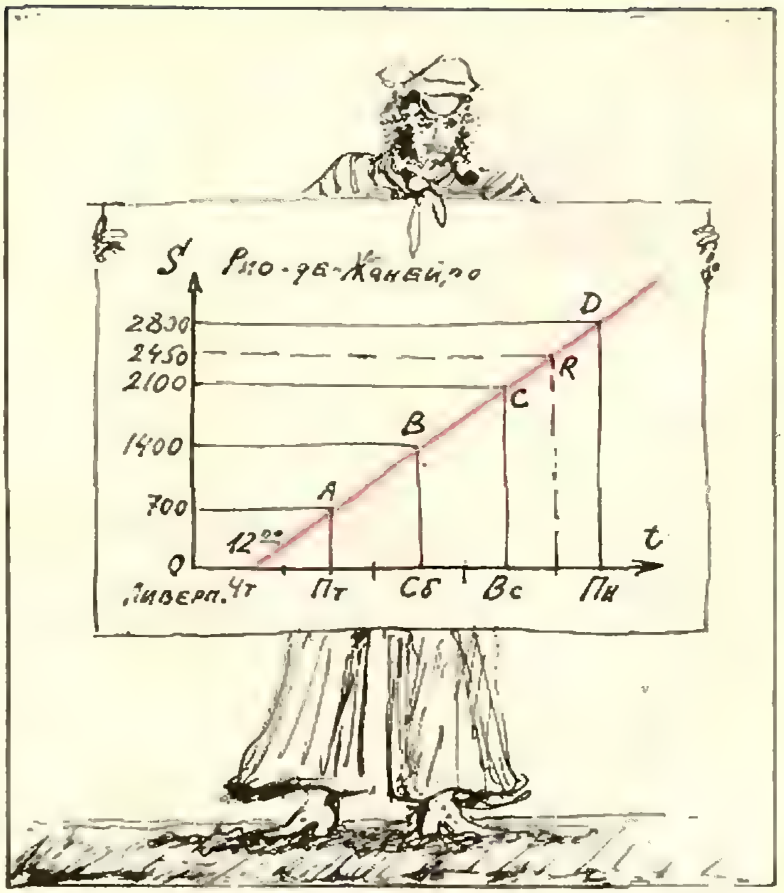


Рис. 1.

*Из Ливерпульской гавани*
*Всегда по четвергам*
*Суда уходят в плаванье*
*К далеким берегам.*
*Плывут они в Бразилию,*
*Бразилию,*
*Бразилию.*
*И я хочу в Бразилию,*
*К далеким берегам.*

Р. Киплинг
(перевод С. Я. Маршака)

## Из Ливерпульской гавани

Итак, из Ливерпульской гавани всегда по четвергам суда уходят в плаванье к далеким берегам. Плывут они в Бразилию ..., в город Рио-де-Жанейро. Ровно за 14 дней судно покрывает весь путь — 9800 *км* (по 700 *км* в день) и прибывает в Рио-де-Жанейро в четверг в 12 часов дня. После 4-дневной стоянки судно идет обратным курсом, и через 14 дней в понедельник ровно в полдень оно прибывает в Ливерпуль. Еще через 3 дня (заметьте — опять в четверг!) оно снова уходит в Бразилию. И я хочу в Бразилию ... — вот я и сел в Ливерпуле в четверг на судно и поплыл. А вы узнайте:

а) сколько судов, идущих обратным рейсом, я увижу в открытом океане;

б) в какие дни недели я их увижу;

в) на каком расстоянии от Ливерпуля они в этот момент будут?

## Обсуждение

На примере решения этой задачи познакомимся с одним графическим способом решения широкого круга задач, включающего, в частности, так называемые «задачи на движение».

Изобразим на графике движение судов между двумя портами. Этот график будет похож на график движения поездов, с которым многие, вероятно, знакомы.

Начинаем строить график. Через точку *O* проводим вертикальную и горизонтальную прямые (см. рис. 1).

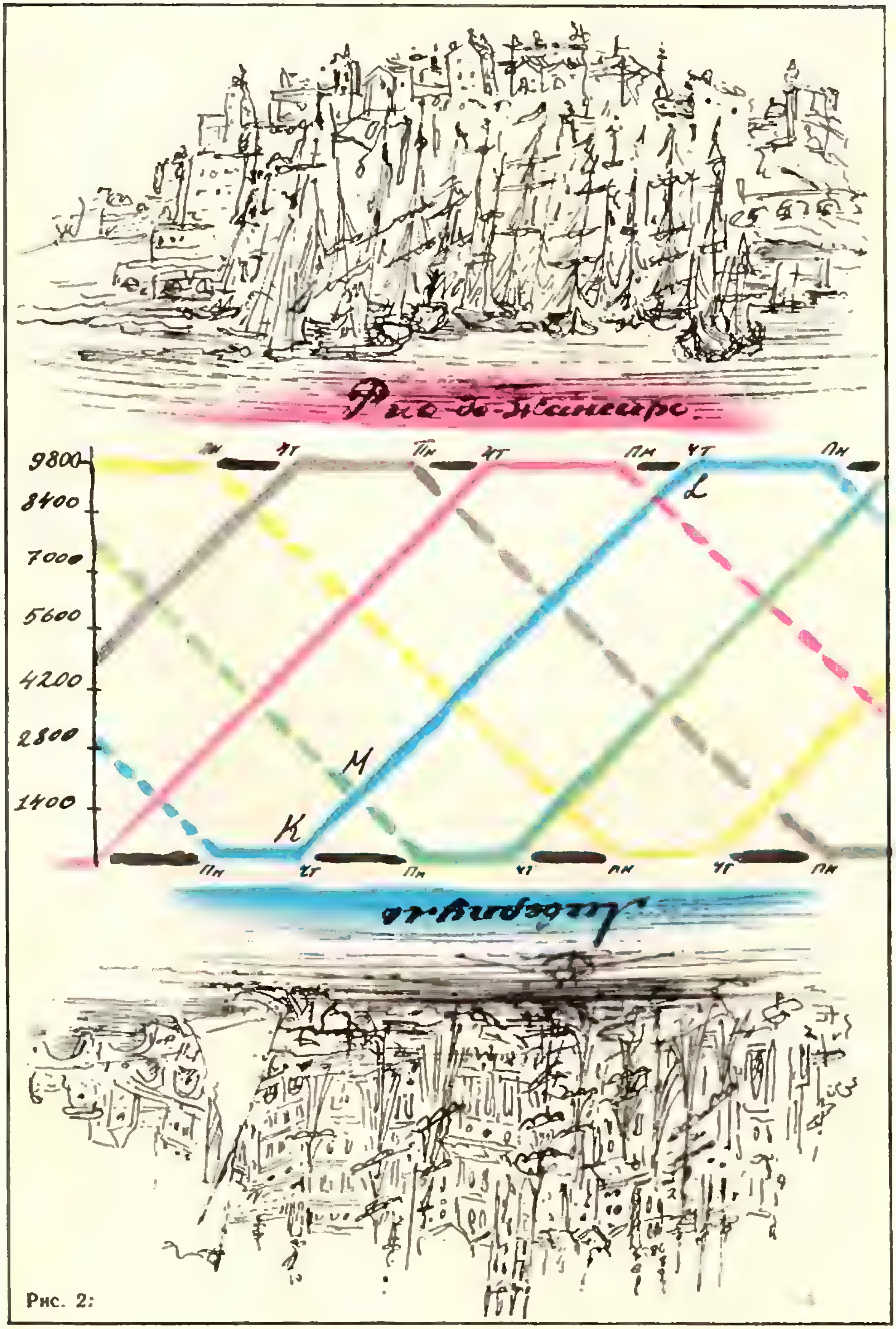

Рио-де-Жанейро
9800
8400
7000
5600
4200
2800
1400
Пн
Чт
Пн
Чт
Пн
Чт
Пн
L
M
K
Пн
Чт
Пн
Чт
Пн
Чт
Пн

Рис. 2:

На вертикальной оси (вверх от точки $O$) будем откладывать путь, пройденный судном, а на горизонтальной отметим дни недели (эту ось называют *осью времени*, Пн обозначает понедельник, Вт — вторник и т. д.).

Как будет выглядеть на графике движение судов? В полдень пятницы судно будет находиться в 700 *км* от Ливерпуля. Ставим точку $A$ на пересечении вертикали, проходящей через полдень пятницы, и горизонтали, идущей на высоте «700». К субботнему полудню судно пройдет уже 1400 *км*. На рисунке 1 это изображается точкой $B$. Аналогично строятся точки $C$, $D$ и т. д. Они показывают положение судна в последующие дни (в полдень). Судно движется равномерно, и потому все эти точки будут лежать на одной прямой. Кстати, каждая точка этой прямой изображает положение судна в некоторый момент времени. Например, точка $R$ показывает, что на расстоянии 2450 *км* судно будет, когда Биг Бен пробьет полночь и в Ливерпуле начнется воскресенье.

Точно так же строятся графики движения судов, выходящих по понедельникам из Рио-де-Жанейро.

А теперь изобразим движение всех судов на одном графике (см. рис. 2). Тогда каждая точка пересечения двух прямых будет соответствовать встрече двух судов.

Рассмотрим, например, рейс $KL$ из Ливерпуля в Рио-де-Жанейро. Этот отрезок 4 раза пересекает отрезки, изображающие движение встречных судов. Значит, ответ на первый вопрос задачи — 4 судна.

Далее, из графика видно, что до первой встречи в точке $M$ пройдет столько же времени, сколько понадобится встречному судну, чтобы проплыть от места встречи до Ливерпуля. Отсюда следует, что первая встреча произойдет в полдень в субботу, вторая — в полночь со вторника на среду и т. д., а расстояния от мест встречи до Ливерпуля будут 1400 *км*, 3850 *км* и т. д.

А теперь сами ответьте еще на три вопроса.

г) В некоторый момент в океане встретились два судна. Верно ли, что в тот же момент в другой части океана встречаются еще два судна? Если да, то на каком расстоянии друг от друга происходят эти две встречи?

д) Сколько судов курсируют между Ливерпулем и Рио-де-Жанейро?

е) Ответьте на первый вопрос задачи, если известно, что суда отправляются не еженедельно, а ежедневно.

### Стрелки обходят циферблат

Ровно в 12 часов дня минутная и часовая стрелки часов совпадают. Затем минутная стрелка вырывается вперед и через некоторое время, обойдя часовую на целый круг, вновь накрывает ее. В какой момент это происходит? В какие моменты между 12 часами дня и 12 часами ночи стрелки образуют: а) развернутый угол; б) прямой угол; в) угол в 120°?

### Джентльмены на прогулке

Два джентльмена одновременно отправились на прогулку по аллее длиной 100 метров. Мистер Смит за час проходит 1 километр, мистер Джонс идет помедленнее — всего 600 метров в час. Дойдя до конца аллеи, каждый из них поворачивает и с прежней скоростью идет обратно. Встречаясь, джентльмены каждый раз снимают шляпы и раскланиваются. Сколько раз они раскланиваются на протяжении первых 25 минут прогулки? Сколько минут (из этих 25) они шли в одном направлении?

### Задача Исаака Ньютона

Два почтальона $A$ и $B$, которых разделяет расстояние в 59 миль, выезжают утром навстречу друг другу. $A$ проезжает за 2 часа 7 миль, а $B$ за 3 часа — 8 миль, при этом $B$ отправляется в путь часом позже $A$. Найти, сколько миль проедет $A$ до встречи с $B$.

### К статье «Троянцы»

1. Вектор $\mathbf{r}_1$, проведенный из точки $m_1$ в центр вращения, есть сумма двух векторов, направленных от $m_1$ к $m_2$ и от $m_1$ к $m_3$. Модули этих векторов равны

$$\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}R \text{ и } \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}R$$

(см. рис. 1).

Параллелограмму с такими сторонами подобен параллелограмм сил $F_{12}=\gamma\frac{m_1m_2}{R^2}$ и $F_{13}=\gamma\frac{m_1m_3}{R^2}$, ибо сумма этих сил $F_1$ должна быть направлена к центру вращения. Из рассмотрения подобия

$$F_1:r_1=\gamma\frac{m_1m_2}{R^2}:\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}R=$$

$$=\gamma\frac{m_1m_3}{R^2}:\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}R.$$

Отсюда

$$\omega^2=\frac{a_1}{r_1}=\frac{F_1}{m_1r_1}=\gamma\frac{m_1+m_2+m_3}{R^3}.$$

2. При заданном в условии соотношении скоростей и их направлениях за малый промежуток времени треугольник масс перейдет в подобный начальному. Если и для нового треугольника соотношение скоростей удовлетворяет условию, то все будет доказано. Но так как ускорение пропорционально расстоянию до центра вращения (см. упражнение 1), то и приращение скоростей, и новые скорости пропорциональны этим расстояниям, а направления скоростей изменятся на один и тот же угол (см. рис. 2).

### К статье «Артиллерия и математика»

1. (55 518; 37 263).
2. 295°33′, 1551.
3. (12 406; 96 956).
4. (13 772, 98 154).

### К статье «Антье»

5. а) Если $p\neq 2$, то $\alpha=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{p^i}\right]$, где $k$ таково, что $p^k\leqslant n<p^{k+1}$.

Если же $p=2$, то $\alpha=n+\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{2^i}\right]$, где $2^k\leqslant n<2^{k+1}$.

б) $\alpha=\left[\frac{2n+1}{p}\right]-\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{2n+1}{p^2}\right]-\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{2n+1}{p^k}\right]-\left[\frac{n}{p^k}\right]$, где $p^k\leqslant 2n+1<p^{k+1}$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $(2n+1)!!=\frac{(2n+1)!}{(2n)!!}$.

6. а) $1\frac{1}{16}$; $1\frac{3}{4}$; $2\frac{7}{16}$; $3\frac{1}{8}$; $3\frac{13}{16}$.

б) $-1\leqslant x<0$; $\sqrt{8}\leqslant x<3$; $\sqrt{11}\leqslant x<\sqrt{14}$; $4\leqslant x<\sqrt{17}$.

в) $\sqrt{2}$.

7. 30 *км*.

8. $[f(a)]+[f(a+1)]+[f(a+2)]+\ldots+[f(b)]+b-a+1$.

9. 137. Указание. Координаты точек, лежащих в данном круге, удовлетворяют неравенству $x^2+y^2\leqslant 6{,}5^2$.

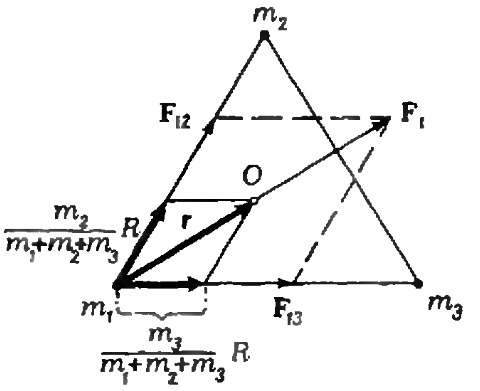


Рис. 1.

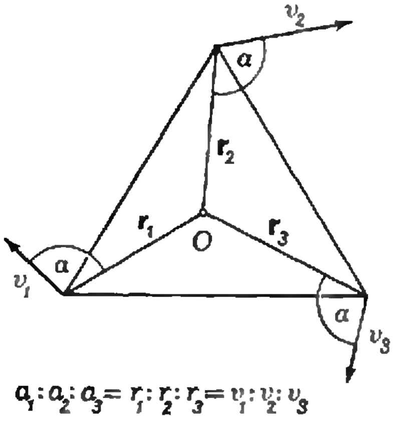


Рис. 2.

10. 0,18. Указание. Воспользуйтесь формулой

$$P(A_{10}\cup A_{14}\cup A_{21}) = P(A_{10}) + P(A_{14}) + P(A_{21}) - P(A_{10}\cap A_{14}) - P(A_{10}\cap A_{21}) - P(A_{14}\cap A_{21}) + P(A_{10}\cap A_{14}\cap A_{21}),$$

где $P(A_N)$ — вероятность того, что номер вынутого шара делится на $N$, $P(A_M\cup A_N\cup A_L)$ — вероятность того, что номер вынутого шара делится либо на $M$, либо на $N$, либо на $L$, $P(A_M\cap A_N)$ — вероятность того, что номер вынутого шара делится и на $M$, и на $N$, $P(A_M\cap A_N\cap A_L)$ — вероятность того, что номер вынутого шара делится на $M$, на $N$ и на $L$. Докажите эту формулу.

### К статье «Ключ» к решению — подобные треугольники»

1. $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$. 2. Указание. В подобных треугольниках радиусы вписанных окружностей относятся, как соответствующие периметры. 3. $4\pi$. 4. $\sqrt{b(b+c)}$. 5. $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5k-1}{k-1}}$, $k > 1$. 6. $1 + 3k$. Указание. Провести $BM \perp A'C'$ и $B'M' \perp A'C'$ и подсчитать отношения площадей треугольников $A'B'C'$, $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$. 7. $\frac{BO}{BD} = \frac{2}{3}(1-k^2)$.

8. 5:1; 1:5. 9. 7:1.

### К задачам «Квант» для младших школьников»

*(см. «Квант» № 4)*

1. Начинающий должен двигать ферзя в проигрышные поля, их семь: a1, b3, c2, d6, e8, f4, h5. Из любого другого поля доски можно передвинуть ферзя в одно из этих полей, а из одного проигрышного поля попасть в другое нельзя (потому они и проигрышные). Находятся эти поля так: a1 — проигрышное; любое поле, с которого можно за один ход попасть в a1, — выигрышное; поля b3 и c2, с которых можно попасть только в уже отмеченные выигрышные, — проигрышные; любое поле, с которого можно попасть в b3 или c2, — выигрышное и т. д. Число ходов определите самостоятельно.

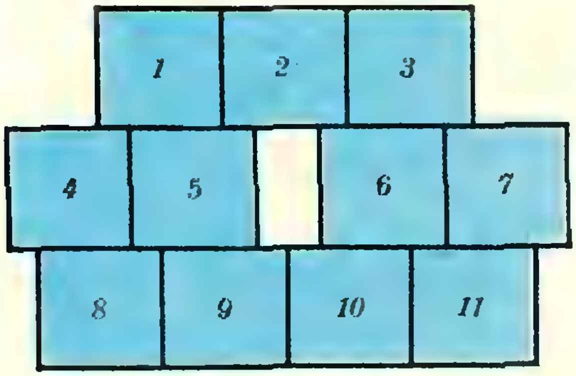


Рис. 3.

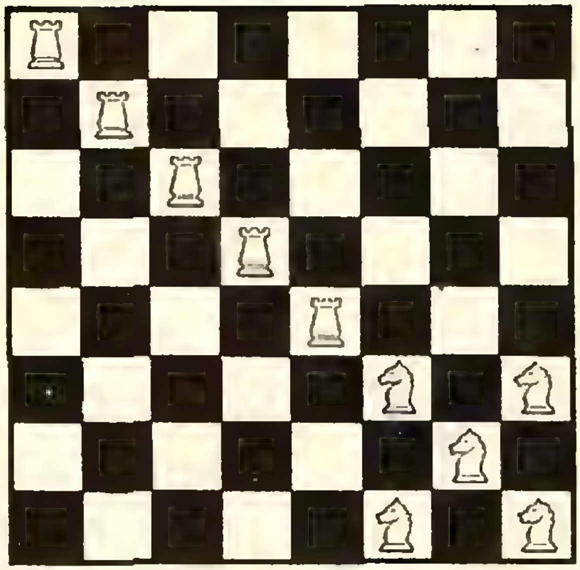


Рис. 4.

2. Почва на участке была влажная, а на том месте, где стояла палатка, почва была сухая. При замерзании воды в почве выделялось тепло, которое «обогревало» влажные участки и замедляло их промерзание. А сухой участок под палаткой промерз сильнее.

3. Весь класс разбивается на 4 непересекающихся множества: «чистых математиков», «математиков-умельцев», «чистых умельцев» и «бездельников». «Бездельников» по условию 10, не «бездельников» 35—10 = 25, среди них 20 математиков, поэтому «чистых умельцев» будет 25—20 = 5, а «математиков-умельцев» будет 11 — 5 = 6.

4. См. рис. 3.

### К задачам *(см. с. 72)*

1. Нельзя. 2. а) См. рис. 4. б) Нельзя.

3. На первый или на второй. Если выбран какой-либо другой этаж, то уменьшение его не скажется на среднем времени ожидания жильцов этого и более высоких этажей (поскольку они ездят не только вниз, но и вверх), но уменьшит время ожидания для жильцов более низких этажей.

### К статье «Читатели советуют»

*(см. «Квант» № 4)*

1. 393 *мл.* 2. 453 *мл.*

3. Указание. Доказать, что $ME \times MF = h^2$, где $h$ — расстояние от центра окружности $O$ до прямой $m$. Решение. Проведем прямые $m'$ и $m''$, касающиеся окружности в точках $C$ и $D$ соответственно. Пусть $M'$ — точка пересечения прямых $m'$ и $KM$, $M''$ — прямых $m''$ и $KM$, $F'$ — прямых $m'$ и $KF$ (почему эти прямые пересекаются?). Так как $M'C = M'T$, $M'F' = M''D = M''T$ (откуда получаются эти равенства?), то

$$M'C \cdot M'F' = M''T \cdot M''T. \tag{1}$$

Но $\angle M'OM'' = 90^\circ$ (докажите!), а потому

$$M'T \cdot M''T = r^2, \tag{2}$$

где $r$ — радиус окружности (откуда это следует?). С другой стороны,

$$M'C = \frac{r}{h} ME, \quad M'F' = \frac{r}{h} MF \qquad (3)$$

(как доказать эти равенства?). Теперь из (1) — (3) следует, что $ME \cdot MF = h^2$.

4. $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6}$, $x_3 = 2$, $x_4 = -1$. Указание. Переписать уравнение в виде

$$x^4 + 4 = 5x^3 - 10x$$

и разделить обе части этого уравнения на $x^2$:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5\left(x - \frac{2}{x}\right).$$

Затем сделать замену неизвестного $x - \frac{2}{x} = t$, в результате которой получается квадратное уравнение $t^2 + 4 = 5t$.

5—7. Указание. Воспользоваться выражением для площади треугольника через сторону (лежащую на $AC$) и высоту (опущенную из вершины $B$ или $D$) или через две стороны и угол между ними (здесь — с вершиной $O$).

8. $\frac{S_1S_3}{S_2S_4} = \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_3}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_4}$, где $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ — углы, под которыми видны стороны $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4$, $A_4A_1$ из точки $O$.

9. Справедливо.

10. $$\frac{S_1S_3\ldots S_{2n-1}}{S_2S_4\ldots S_{2n}} = \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_3 \ldots \sin\alpha_{2n-1}}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_4 \ldots \sin\alpha_{2n}}.$$

11. $0{,}31 \leqslant x < 5 + 2\sqrt{6}$. Указание. Неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{x^2 - 10x + 31}{30} < 1, \\ 5x - \dfrac{11}{20} \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 10x + 31}{30} > 1, \\ 0 < 5x - \dfrac{11}{20} \leqslant 1. \end{cases}$$

12. $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

13. $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Указание. Данное уравнение в ОДЗ равносильно уравнению

$$1 - \cos x - \sin x = \cos 2x - \sin 2x, \qquad (4)$$

которое приводится к виду

$$(\cos x + \sin x)(2\sin x - 1) = 0.$$

Корни уравнения $\cos x + \sin x = 0$ не входят в ОДЗ исходного уравнения: для каждого из них в силу соотношения (4) имеем $\cos 2x - \sin 2x = 1 - (\cos x + \sin x) = 1$, а в ОДЗ должно выполняться условие $\cos 2x - \sin 2x \neq 1$. Если $\sin x = 1/2$, то либо $\cos x = \sqrt{3}/2$, либо $\cos x = -\sqrt{3}/2$. В первом случае

$$1 - \cos x - \sin x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0,$$

тогда как в ОДЗ должно выполняться условие $1 - \cos x - \sin x > 0$. Во втором случае определяющие ОДЗ условия выполняются.

14. $NF : FM = \sqrt{3}$. Указание. Продолжить среднюю линию за точку $M$ до пересечения в точке $L$ с одной окружностью и за точку $N$ до пересечения в точке $K$ с другой окружностью. Доказать, что $CLKB$ — прямоугольник. Использовать равенства, вытекающие из теоремы об отрезках пересекающихся хорд: $PF \cdot FQ = LF \cdot FN$, $PF \cdot FQ = MF \cdot FK$.

15. $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle ABC} = (9 + \sqrt{3}) : 26$.

Указание. Провести высоты: $SD$ — боковой грани $ASC$, $SF$ — боковой грани $CSB$, $SE$ — боковой грани $ASB$; соединить точки $D$, $F$, $E$ с точкой $O$. Доказать, что $SD = SF = SE$ и точка $O$ — центр круга, вписанного в треугольник $ABC$. Доказать, что $\triangle SDC = \triangle SFC$, $\triangle SFB = \triangle SEB$, $\triangle SEA = \triangle SDA$, и вычислить все плоские углы всех боковых граней. Выразить отрезки $AE = AD$, $BE = BF$, $CF = CD$ через длину высоты боковой грани. Составить выражения для площадей треугольников $AOB$ и $ABC$, обозначив через $r$ радиус круга, вписанного в треугольник $ABC$.

16. $MN = {}^1/_7$. Указание. Заметить, что $MN = DM - DN$. Для вычисления $DM$ и $DN$ использовать следующий геометрический факт: если в треугольник $PQR$ вписан круг, касающийся сторон $PQ$, $QR$, $RP$ треугольника соответственно в точках $A$, $B$, $C$, то $AQ = QB = p - PR$, $BR = RC = p - PQ$, $CP = PA = p - QR$, где $p$ — полупериметр треугольника $PQR$.

---

*(Начало см. на с. 56)*

*И. Саргазаков* (Новосибирск) 8, 0, 1; *В. Серебряный* (Харьков) 8, 1; *С. Сковорода* (Ленинград) 8; *В. Старшенко* (Запорожье) 8, 0, 1; *И. Теплицкий* (Чирчик) 8, 1; *А. Третьяков* (п. Тайцы Ленинградской обл.) 1; *К. Третьяченко* (Киев) 1; *А. Трищенко* (Комон-на-Дону) 1; *В. Тужилкин* (Зеленодольск ТАССР) 8, 1; *Н. Федин* (Омск) 8, 1; *А. Фрумкин* (Курск) 0, 1; *Ю. Хабаров* (Павловский Посад) 8, 0, 1; *Н. Хорев* (Барнаул) 8, 0, 1; *И. Цацкис* (Кременчуг) 8, 1; *И. Цуркис* (Калининград Московской обл.) 8, 0; *Р. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) 8, 0, 1; *С. Шатуров* (Жданов) 1; *Н. Шеремет* (Люберцы Московской обл.) 8, 1; *И. Шиян* (Киев) 8, 1; *Е. Яненко* (Киев) 8, 1; *В. Ясинский* (с. Мазуровка Винницкой обл.) 0, 1.

# Их было семеро

Семь джентльменов удачи Джо, Джон, Джоб, Джекоб, Джим, Джерри и Джефф, высадившись на остров Сокровищ, после долгих поисков набрели на клад (слитки серебра), зарытый еще старым Флинтом и не вывезенный экспедицией сквайра Трелони. Решив предлагаемый ниже «кросснамбер», вы узнаете, как разделили между собой добычу семеро пиратов после яростной потасовки, которой завершилась сходка, созванная для выяснения размеров добычи, причитающейся каждому члену экипажа.

**По вертикали**

**1.** Квадрат числа слитков, доставшихся Джону. **2.** Наименьшее двузначное число. **3.** Число, делящееся на 3 и не превосходящее 200. **4.** Произведение числа слитков, доставшихся Джеффу, и простого числа, последняя цифра которого совпадает с числом слитков, доставшихся Джеффу. **5.** Число-палиндром *). **6.** Куб. **8.** Число, стоящее под номером 9 по горизонтали, записанное от конца к началу. **9.** Число слитков, доставшихся Джону. **11.** Число слитков, доставшихся Джону, записанное от конца к началу. **16.** Число, куб которого начинается с той же цифры, что и число слитков, доставшихся Джеффу. **18.** Наименьшее общее кратное чисел слитков, доставшихся Джо и Джону. **19.** Наименьшее общее кратное суммы числа слитков, доставшихся Джобу и Джиму, и квадратного корня из числа слитков, доставшихся Джеффу. **20.** Квадрат суммы числа слитков, доставшихся Джерри и Джиму, записанный от конца к началу. **21.** Квадрат. **22.** Число, стоящее под номером 3 по вертикали, записанное от конца к началу. **23.** Произведение чисел слитков, доставшихся Джобу, Джиму и Джону. **29.** Произведение чисел слитков, доставшихся Джобу и Джеффу. **30.** Число, записанное теми же цифрами, что и число, стоящее под номером 4 по горизонтали. **32.** Сумма чисел слитков Джоба и Джеффа. **33.** Куб-палиндром, две первые цифры которого образуют сумму числа слитков, доставшихся Джерри, Джиму и Джекобу. **34.** Куб. **36.** Число, записанное теми же цифрами, что и число, стоящее под номером 4 по горизонтали. **37.** Куб суммы числа слитков, доставшихся Джекобу, Джиму и Джобу. **40.** Куб суммы числа слитков, доставшихся Джекобу, Джиму и Джо. **41.** Квадрат числа слитков, доставшихся Джиму. **43.** Простое число. **44.** Куб. **47.** Число слитков, доставшихся Джерри и Джиму.

**По горизонтали**

**4.** Число слитков, доставшихся Джерри и Джиму. **5.** Произведение числа людей, некогда приходившихся (согласно известной пиратской песне) на сундук мертвеца, и числа слитков, доставшихся Джерри. **7.** Простое число-палиндром. **9.** Число-палиндром, средняя цифра которого совпадает с числом слитков, доставшихся Джерри. **10.** Число-палиндром, делящееся на 9. **12.** Число, получающееся при перестановке цифр числа, стоящего под номером 8 по вертикали. **13.** Число слитков, которые получил бы Джон, если бы Джефф отдал ему всю свою добычу. **14.** Число слитков в кладе. **15.** Число, делящееся на 9. **17.** Наименьшее общее кратное числа слитков, доставшихся Джону, и суммы чисел слитков, доставшихся Джерри и Джиму. **20.** Куб. **22.** Число-палиндром. **24.** Число слитков, доставшихся Джо и Джону. **25.** Наименьшее общее кратное чисел слитков, доставшихся Джерри и Джеффу. **26.** Произведение числа слитков, полученных Джеффом, и суммы числа слитков, доставшихся Джо, Джиму и Джекобу. **27.** Сумма чисел слитков, доставшихся Джерри, Джеффу, Джобу и Джекобу. **28.** Число-палиндром. **31.** Наименьшее общее кратное числа слитков, доставшихся Джону, и квадрата суммы числа слитков, доставшихся Джерри и Джо. **33.** Число, которое получится, если к числу слитков, доставшихся Джону, приписать справа число слитков, доставшихся Джекобу. **35.** Куб числа слитков, доставшихся Джо и Джобу. **38.** Число, стоящее под номером 18 по вертикали, записанное от конца к началу. **39.** Наименьшее общее кратное чисел слитков, доставшихся Джерри и Джону. **40.** Квадрат суммы числа слитков, доставшихся Джону, Джерри и Джеффу. **42.** Число-палиндром. **44.** Куб числа слитков, доставшихся Джиму. 45. Наименьшее общее кратное числа слитков, доставшихся Джобу, и суммы числа слитков, доставшихся Джо, Джерри и Джекобу. **46.** Произведение числа слитков, доставшихся Джобу, и простого числа. **48.** Сумма числа слитков, доставшихся всем пиратам, кроме Джеффа.

*Ю. Данилов*

---

*) Число, которое читается одинаково от начала к концу и от конца к началу.

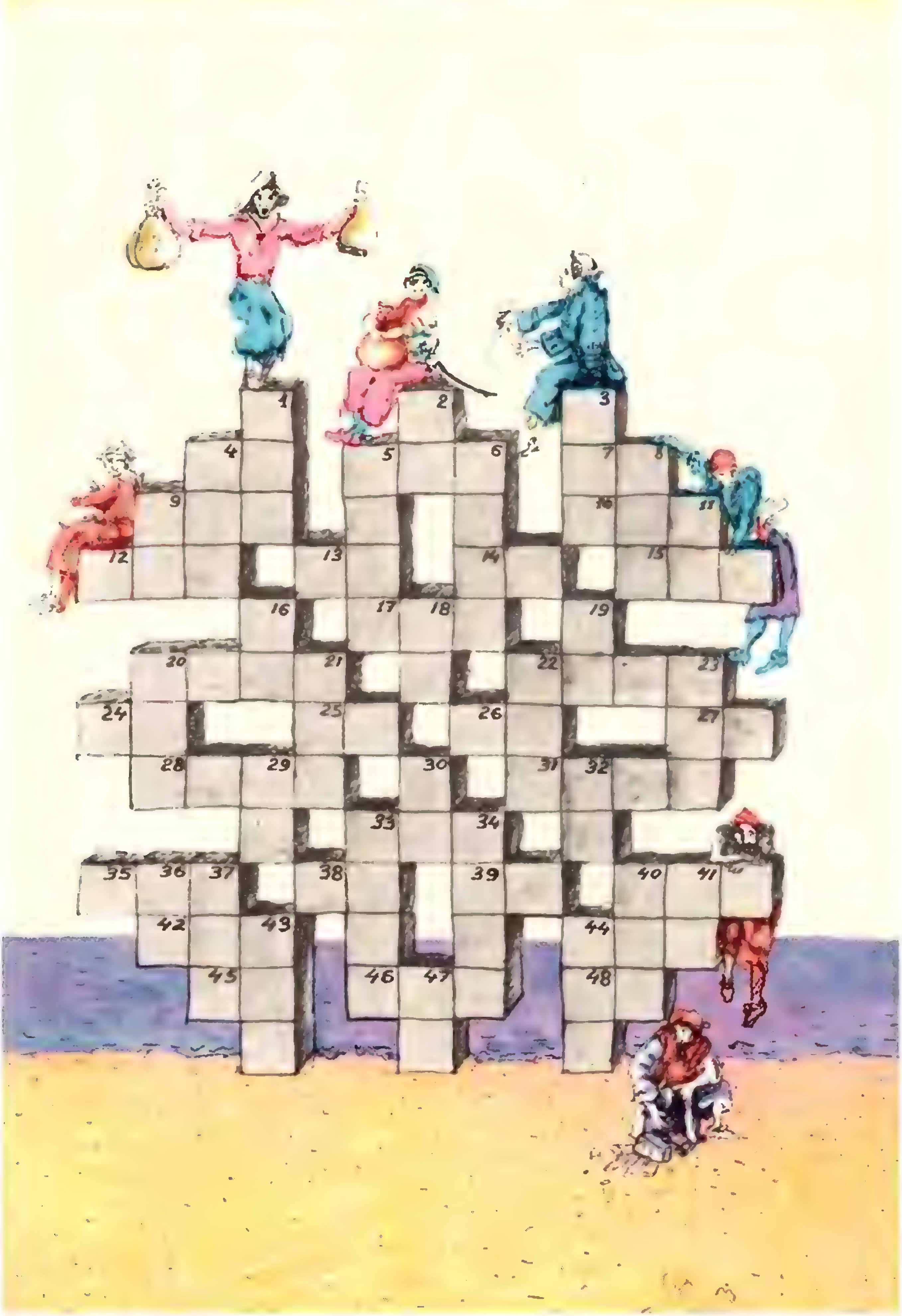
Номер оформили: Ю. Ващенко, С. Верховский, В. Карцев, Г. Красиков, Э. Назаров

Корректор *В. П. Сорокина*

113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 20/II-1976 г.
Подписано в печать 8/IV-1976 г.
Бумага $70\times100^1/_{16}$. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,28 Т-05657
Цена 30 коп. Заказ 275 Тираж 330000 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

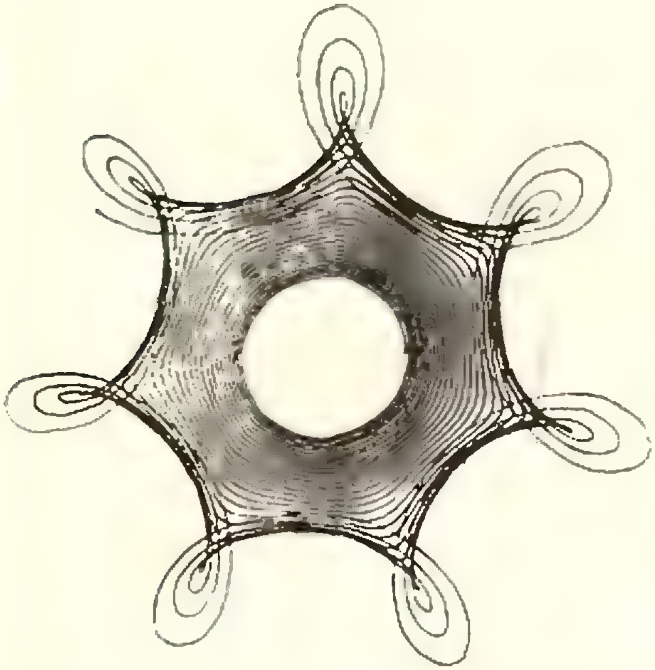
*Рукописи не возвращаются*

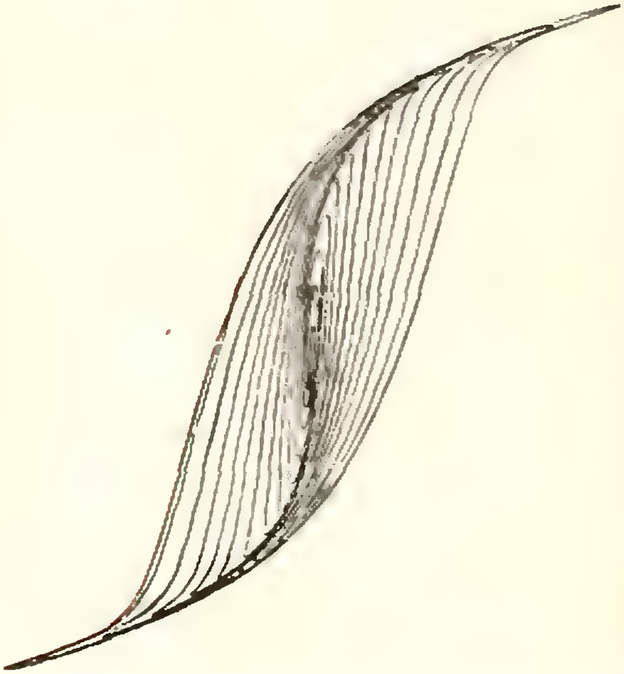

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48

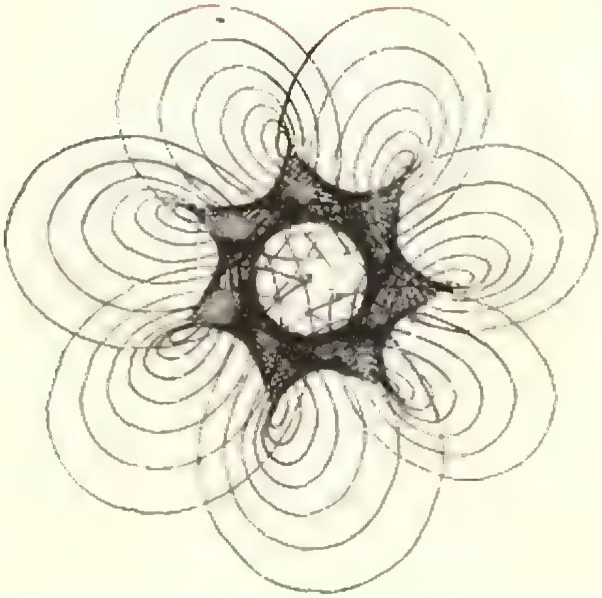
**Цена 30 коп.**
**Индекс 70465**

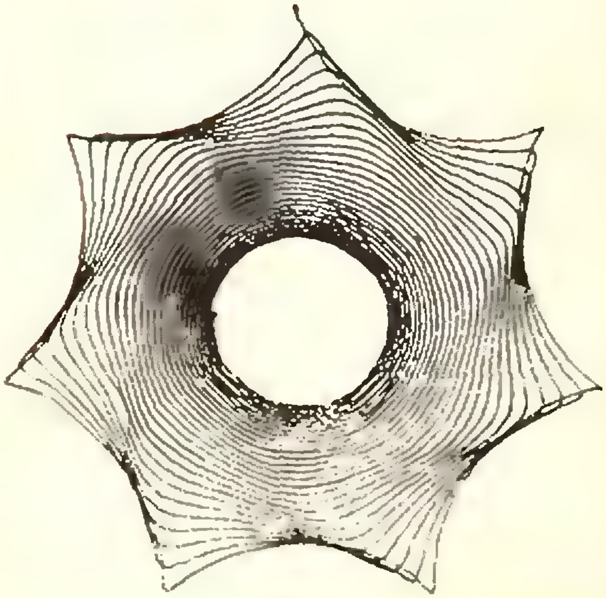
Рисунки для обложки этого номера выполнены не художником, а электронно-вычислительной машиной. Такие машины, умеющие рисовать, помогают студентам Московского института стали и сплавов при изучении курса теоретической физики и теоретической механики. Они позволяют «наблюдать» некоторые довольно сложные закономерности и процессы. Замысловатая линия, нарисованная на первой странице обложки,— это траектория заряженной частицы, движущейся внутри электростатически заряженного цилиндра в постоянном однородном магнитном поле, направленном вдоль оси цилиндра. Среда, заполняющая цилиндр, оказывает сопротивление движению, что приводит к рассеиванию энергии частицы.

На четвертой странице нарисованы еще три такие траектории, получающиеся при разных начальных условиях, и хорошо знакомая вам петля гистерезиса.









# НОМЕР
# 6

*Основан в 1970 году*

# КВАНТ

1976
6

*Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Издательство „Наука“
Главная редакция
физико-математической
литературы*

Главный редактор
*академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
*академик* А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
*(главный художник)*
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
*(зам. главного редактора)*
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
*(зам. главного редактора)*
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

**Редакция:**
В. Н. Березин
А. Н. Виленкин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова
*(художественный редактор)*
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чернова
*(зав. редакцией)*

## В НОМЕРЕ:

2 *Леонард Бекс.* Мини-геометрия
13 *А. Кикоин.* Температура, теплота, термометр

**Лаборатория «Кванта»**

23 *В. Майер.* Беспокойная дуга

**Математический кружок**

24 *А. Тоом.* Решения задач ВЗМШ

**Задачник «Кванта»**

28 Задачи М386—М390; Ф398—Ф402
29 Решения задач М343—М350; Ф353—Ф357

**Практикум абитуриента**

41 *А. Мышкис, Л. Садовский.* Прикладная математика
49 *Г. Дорофеев, Н. Розов.* Чертеж в геометрической задаче

**Варианты вступительных экзаменов в вузы**

57 *И. Горев.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
58 *А. Саржевский, С. Галко.* Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина
59 *Е. Беговатов, Р. Галиуллин, Б. Лаптев.* Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова (Ленина)
61 *Э. Голубов, Р. Емлин.* Уральский государственный университет им. А. М. Горького
62 *А. Назаретов.* Московский технологический институт

**Рецензии, библиография**

64 *В. Лешковцев.* Над чем думают физики?

**«Квант» для младших школьников**

66 Задачи
67 *А. Бендукидзе.* О двоичной системе счисления
70 **Ответы, указания, решения**
**Смесь** *(с. 12, 27, 40, 56)*

Красивые стеклянные приборы, которые вы видите на второй странице обложки, это термометры, сделанные во флорентийской Академии опытов в середине XVII века. Об истории создания термометров рассказывается в статье А. Кикоина (с. 14)

© *Главная редакция физико-математической литературы издательство «Наука», «Квант», 1976 год*

Леонард Беве

# МИНИ-ГЕО-МЕТРИЯ

## КОМБИНАТОРНО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ОТЧАСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ТРАКТАТ

Известна притча об умной сороконожке, которая разучилась ходить, размышляя о том, в каком порядке ей следует переставлять свои многочисленные ножки. Восемьдесят-девяносто лет тому назад похожая история произошла с математиками: они задумались над тем, насколько обоснованны их умозаключения при доказательстве теорем. После почти двадцати лет волнений и напряженных трудов были выработаны те нормы математической строгости, по которым строится любая «уважающая себя» теория и в наши дни, и стало, наконец, ясно, что математика избежит участи несчастной сороконожки.

Тогда же было спасено от разрушения и реставрировано величественное и вместе с тем стройное здание евклидовой геометрии; с тех пор ее вечным фундаментом стали 20 аксиом, описанных Давидом Гильбертом в его «Основаниях геометрии»*). Евклидову геометрию можно сравнить со знаменитым Кельнским собором (который строился, достраивался и перестраивался многими поколениями строителей, навсегда селившихся рядом с соборной площадью и передававших детям свое ремесло и рабочее место).

Совсем иначе устроены *конечные геометрии*: минимум строительного материала — конечное число точек, прямых и плоскостей, минимум правил обращения с этим материалом — три-четыре аксиомы, регулирующие отношения между точками, прямыми и плоскостями.

Может показаться, что в этом царстве «стекла и алюминия» нет ни тайн, ни загадок. Это далеко не так, и вот пример: несмотря на усилия трех поколений математиков, до сих пор неизвестно, существует ли *аф-*

---

*) Эта замечательная книга учит нас скромности и точности: даже просто полистав ее, нельзя не понять, что мы умеем доказывать кое-какие теоремы планиметрии, не зная, однако, из чего мы при этом исходим.

*финная конечная плоскость* (см. § 1) из 100 точек.

## § 1. Мини-евклидова, а точнее — конечная аффинная плоскость

Элементы, из которых строится мини-плоскость — «точки» и «прямые». (Это всего лишь названия, которые, как увидит читатель, далеки от привычного значения этих слов. Д. Гильберт говорил, что «точки», «прямые» и «плоскости» можно было бы с тем же успехом называть «стульями», «столами» и «кружками».) Точка $A$ может лежать на прямой $a$; то же можно выразить иначе: точка $A$ принадлежит прямой $a$, прямая $a$ проходит через точку $A$, прямая $a$ содержит точку $A$. О точках и прямых допустимы любые другие высказывания, которые можно выразить через это основное отношение: утверждение «прямые $a$ и $b$ *пересекаются*» означает, что существует единственная точка, которая лежит как на прямой $a$, так и на прямой $b$; «прямые $a$ и $b$ *параллельны*», если они не пересекаются, и т. д.

Конечную совокупность точек и прямых с отношением «лежать на» или «принадлежать» мы будем называть *конечной аффинной плоскостью*, если выполнены следующие три аксиомы:

Аксиома A1. *Через любые две точки плоскости проходит единственная прямая.*

Аксиома A2. *Через всякую точку, не лежащую на прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.*

Аксиома A3. *Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.*

**Пояснения к аксиомам A1—A3**

1. Первая аксиома перенесена сюда из евклидовой геометрии без изменений, вторая соответствует аксиоме о параллельных в евклидовой геометрии (знаменитый Пятый Постулат), третья аксиома избавляет нас от вырожденных геометрий, вроде той, которая изображена на рис. 1, *а*).

2. В нашей мини-планиметрии лишены смысла высказывания: «точка $A$ принадлежит отрезку $BC$», отрезок $AB$ конгруэнтен отрезку $CD$», «точка $A$ лежит внутри угла $BCD$», «углы $ABC$ и $DEF$ конгруэнтны» и многие, многие другие привычные нам понятия и утверждения.

3. Вся информация о любой прямой содержится в перечне точек, которые лежат на этой прямой; поэтому вполне допустим (хотя совсем и не обязателен) такой взгляд на вещи: плоскость — это конечное множество точек, прямые — разные наборы из этих точек.

Минимальная из мини-плоскостей, удовлетворяющих нашим трем аксиомам, содержит четыре точки и шесть прямых; ее условное изображение приведено на рис. 1, *б*). Условность этого рисунка и многих других рисунков в нашем трактате в том, что на нем обычные точки соответствуют точкам конечной плоскости, обычные прямые — прямым конечной плоскости, а обычное отноше-

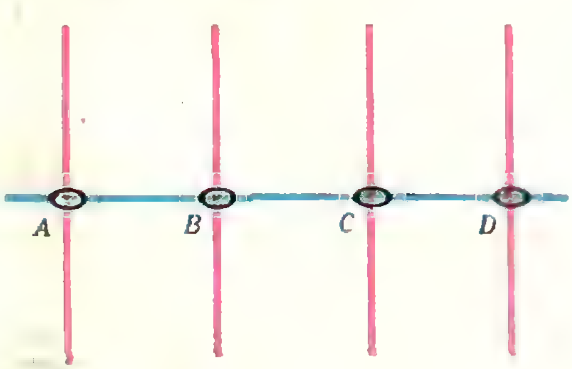


Рис. 1. а) «Вырожденная» геометрия (нарушена Аксиома A3!).

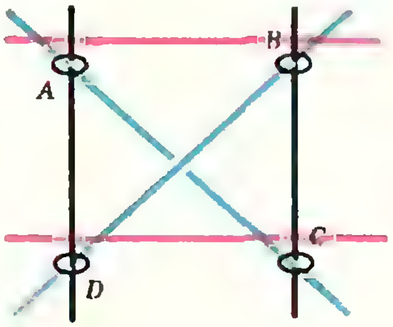


Рис. 1. б) Плоскость с четырьмя точками и шестью прямыми. Прямые AC и BD параллельны!

ние принадлежности («лежать на» или «принадлежать») отвечает отношению принадлежности конечной плоскости. Но не всегда конфигурации конечной плоскости вкладываются в обычную плоскость без каких-либо, иногда забавных, нарушений ее евклидовой структуры. Например, на рисунке 1, *б* диагонали «квадрата» $ABCD$ параллельны друг другу!

Задача 1. Докажите, что любая конечная аффинная плоскость содержит не менее четырех точек и шести прямых. (Вот почему плоскость на рисунке 1, *б*) минимальна.)

Итак, фундамент заложен. Построение геометрии на конечной аффинной плоскости мы начнем с нескольких очевидных теорем; прочитав условие очередной теоремы, попытайтесь доказать ее сами, и лишь потом проверьте себя, просмотрев наше доказательство (начало доказательства помечено значком □, а конец — ■).

Теорема А4. *Если параллельные прямые имеют общую точку, то они совпадают.*

□ По определению параллельные прямые не могут иметь единственную общую точку. Поэтому у них не меньше двух общих точек и по аксиоме А1 они должны совпадать ■

Теорема А5. *Существуют три прямые, попарно пересекающиеся в трех разных точках.*

□Пусть три точки $A$, $B$ и $C$ не лежат на одной прямой (Аксиома А3; рис. 2 ); тогда три прямых $a$, $b$ и $c$, проходящих по Аксиоме А1 через пары точек $(B, C)$, $(A, C)$ и $(A, B)$ соответственно, попарно пересекаются: прямые $a$ и $b$ — в точке $C$, прямые $a$ и $c$ — в точке $B$, прямые $b$ и $c$ — в точке $A$.■

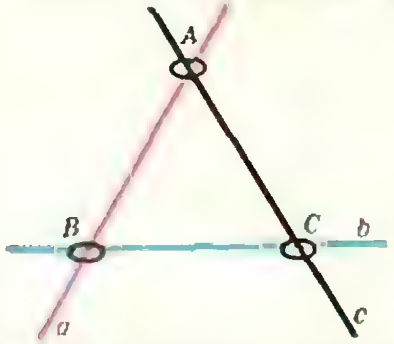


Рис. 2. Три прямые $a$, $b$ и $c$ пересекаются в трех точках.

Теорема А6. *Если прямая $a$ параллельна прямой $b$, а прямая $b$ — прямой $c$, то $a$ и $c$ параллельны.*

□Если какие-то две из прямых $a$, $b$ и $c$ совпадают, то утверждение очевидно. Если же все они попарно различны и прямые $a$ и $c$ пересекаются в точке, скажем $A$, то прямая $b$ не проходит через точку $A$ (иначе прямые $a$ и $b$ не параллельны). Тогда по аксиоме А2 через точку $A$ может проходить только одна прямая, параллельная прямой $b$, что приводит к противоречию ■

Доказательства этих трех простеньких теорем служат, с одной стороны, хорошим примером того, как проводятся в нашей геометрии доказательства, а с другой стороны — основой более сложных доказательств теорем из § 2. Теоремы А7 и А8 дальше не используются, и читателю предлагается доказать их самостоятельно.

Теорема А7. *На каждой прямой любой конечной аффинной плоскости лежит не менее двух различных точек.*

Теорема А8. *В любой точке конечной аффинной плоскости пересекаются не менее трех прямых.*

Мы сравнивали Аксиомы А1—А3 с фундаментом конечной аффинной геометрии — теоремы А4—А8 образуют ее «первый этаж».

## § 2. Порядок аффинной плоскости

*Из 16 космонавтов нужно выбрать 4 — экипаж космического корабля. Тренировки проводятся с 4 экипажами по 4 человека в каждом. Можно ли составить расписание тренировок таким образом, чтобы любые два космонавта побывали в одном экипаже ровно один раз?*

Можно ожидать, что все прямые на нашей плоскости неотличимы друг от друга; по крайней мере так обстоит дело в евклидовой геометрии, где

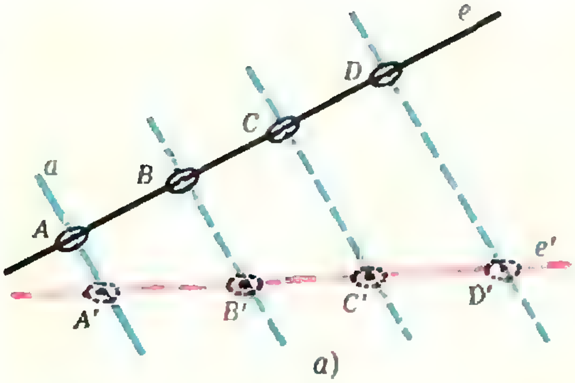


**Рис. 3а.** Пучок параллельных прямых.

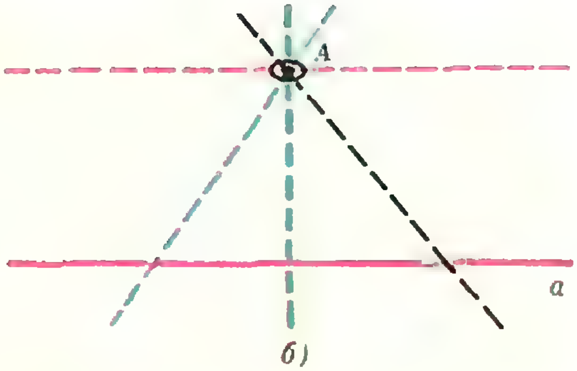


**Рис. 3б. Через точку $A$ проходит столько прямых, сколько точек лежит на прямой $a$, плюс одна.**

существует возможность наложения одной прямой на другую. В конечной аффинной геометрии такой возможности у нас нет. Поэтому попытаемся обойтись тем, что имеется в нашем распоряжении: проводить прямые, искать точки пересечения прямых и т. п.

Теорема А9. *Любые две прямые $e$ и $e'$ конечной аффинной плоскости содержат одинаковое число точек.*

□Каждая из прямых $e$ и $e'$ пересекается по крайней мере с двумя из прямых $a$, $b$ и $c$ Теоремы А5. Поэтому одна из этих трех прямых, скажем $a$, пересекается как с прямой $e$, так и с прямой $e'$. Установим теперь с помощью этой прямой $a$ взаимно однозначное соответствие между точками прямых $e$ и $e'$.

Для этого каждой точке $A$ на $e$ сопоставим ту точку $A'$ на $e'$, которая получается от пересечения $e$ с прямой $a'$ (А2)*), проходящей через $A$ и параллельной $a$. При этом разным точкам на $e$ будут соответствовать разные точки на $e'$ (А2); очевидно, также, что любая точка $B'$ на $e'$ будет отвечать некоторой точке $B$ на $e$ (см. рис. 3а). ■

Определение. *Порядком конечной аффинной плоскости называется число точек на любой прямой этой плоскости.*

*Порядок* — самая важная числовая характеристика аффинной плоскости. Как мы увидим, нетрудно построить плоскость, порядок которой равен любому заранее указанному простому числу; сложнее (и мы не сможем уделить этому места в нашем трактате) построить плоскость, порядок которой равен степени простого числа. Известно, что не существует плоскости порядка 6, и неизвестно, существует ли плоскость порядка 10.

Теорема, к которой мы сейчас перейдем, является, в каком-то смысле, перевернутым изображением А9: в ней поменялись местами точки и плоскости. Такие теоремы называются *двойственными* друг другу.

Теорема А10. *Через любую точку плоскости проходит одинаковое число прямых: для плоскости порядка $n$ это число равно $n-1$.*

□Пусть $a$ — произвольная прямая, и пусть точка $A$ не принадлежит прямой $a$ (А3). Тогда существует единственная прямая, проходящая через точку $A$ и параллельная прямой $a$ (А2), а любая другая прямая, проходящая через точку $A$, пересекается с прямой $a$ в единственной точке (А4), причем разные прямые пересекаются (см. рис. 3б) в разных точках (А1). Отсюда следует, что число прямых, проходящих через точку $A$, равно числу точек на прямой $a$, т. е. порядку аффинной геометрии (см. А9), увеличенному на единицу ■

Задача 2. Докажите, что условие задачи М364 («Квант», 1976, № 1, см. также эпиграф) эквивалентно утверждению: существует конечная аффинная плоскость порядка 4.

Теорема А11. *Если порядок плоскости равен $n$, то любая прямая плоскости принадлежит семейству (пучку), состоящему из $n$ различных попарно параллельных прямых.*

---

*) Мы и дальше будем для краткости писать А2, А5 и т. д. вместо «Аксиома А2», «Теорема А5».

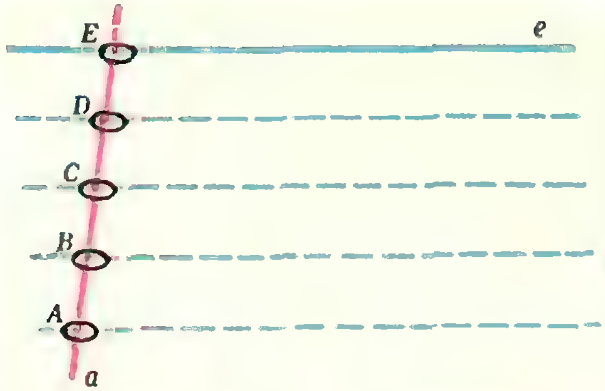


**Рис. 4. Пучок прямых, параллельных $e$, строится по точкам прямой $a$.**

□Пусть $e$ — произвольная прямая, тогда одна из трех прямых, скажем $a$, теоремы А5 пересекается с прямой $e$ в точке $E$. Очевидно, что через любую точку на прямой $a$, исключая точку $E$, проходит единственная прямая, параллельная прямой $e$ (А2), и наоборот (рис. 4), любая прямая, параллельная прямой $e$, пересекает прямую $a$ в некоторой точке (см. А6). Мы установили взаимно однозначное соответствие между точками прямой $a$ и прямыми пучка параллельных прямых, которому принадлежит прямая $e$ ■

Теорема А12. *Любая плоскость порядка $n$ содержит $n^2$ точек и $n^2+n$ прямых.*

□Любой пучок прямых, параллельных данной прямой, будет содержать все точки конечной плоскости: в противном случае, по Аксиоме А2 это семейство можно было бы дополнить еще одной прямой, параллельной данной прямой и проходящей через еще «не охваченную» пучком точку. Но в любом таком семействе $n$ прямых (А11), а на каждой прямой $n$ точек (А9), т. е. всего $n^2$ точек (рис. 5).

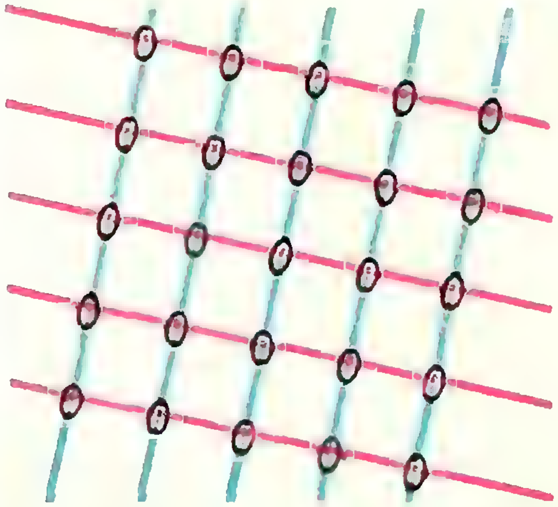


**Рис. 5. Два пучка параллельных прямых, пересекаясь, дают все точки плоскости.**

Подсчитаем теперь число прямых на конечной плоскости порядка $n$. Так как через каждую точку плоскости проходит $n+1$ прямых (А10), и так как каждое семейство попарно параллельных прямых имеет среди этих $n+1$ прямых своего «представителя» (А2), то общее число таких семейств равно $n+1$, а каждое семейство содержит $n$ прямых (А11), причем всякая прямая попадает ровно в одно такое семейство (А6). Следовательно, общее число прямых на плоскости равно $n(n+1)=n^2+n$■

## § 3. О пользе военных парадов, когда их наблюдает великий математик

Свою знаменитую головоломку о 36 офицерах Леонард Эйлер придумал, по-видимому, скучая на одном из многочисленных петербургских дворцовых парадов. Вот ее формулировка: среди 36 офицеров поровну уланов, драгунов, гусаров, кирасиров, кавалергардов и гренадеров, и, кроме того, поровну генералов, полковников, майоров, капитанов, поручиков, и подпоручиков, причем полк каждого из «родов войск» представлен офицерами всех шести рангов. Можно ли выстроить этих офицеров в каре 6×6 так, чтобы в любой колонне и любой шеренге встречались офицеры всех полков и всех рангов? (Решение этой задачи, когда требуется по тем же правилам построить каре из 25 офицеров, изображено на обложке журнала.)

Проницательный читатель уже связал головоломку Эйлера с задачей построения конечной аффинной плоскости порядка 6, в которой точки будут офицерами, а прямые объединяют офицеров либо одного полка, либо одного ранга. Читатель, разумеется, прав, но с одной оговоркой: мы покажем, что если для некоторого $n$ $(n>2)$ существует конечная аффинная плоскость порядка $n$, то существует и требуемое расположение $n^2$ офицеров в каре $n\times n$ (у Эйлера $n=6$); однако обратное, вообще говоря, неверно. Например, при $n=14$ плоскости порядка 14 не существует (см. ниже Теорему 2), а задача Эйлера имеет решение.

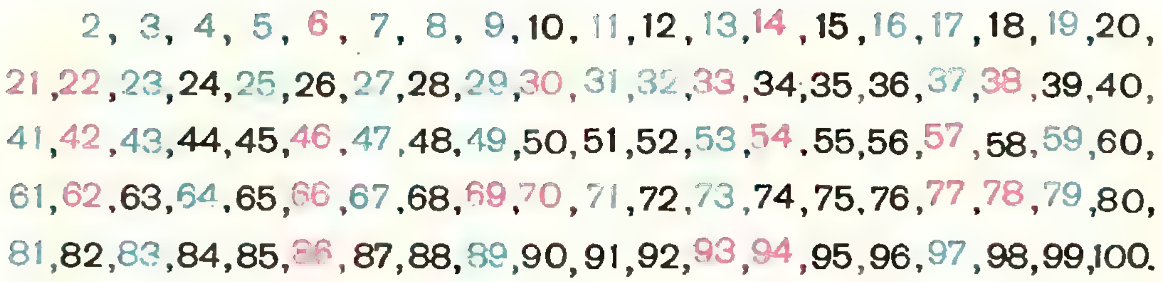

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,
21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40,
41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60,
61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80,
81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

**Рис. 6. Таблица «хороших», «плохих» и «еще не проявивших себя» чисел.**

Задача 3. Постройте 196 офицеров (по 14 офицеров всех 14 рангов из 14 полков) в каре Эйлера $14 \times 14$

Согласно Теореме А12 плоскость порядка $n$ содержит $n^2$ точек — они-то и будут нашими офицерами. Из $n+1$ семейства параллельных прямых (см. А10 и А11) выберем четыре различных семейства (для этого должно выполняться неравенство $n+1 \geqslant 4$, т. е. $n > 2$). Чтобы различать эти семейства прямых, присвоим одному из них номер один, другому номер два и т. д. Так же в произвольном порядке занумеруем прямые в каждом из этих четырех семейств. Все точки, принадлежащие первой прямой первого семейства, назовем гусарами, второй прямой этого семейства — уланами и т. д. — всего $n$ названий полков. Все точки из первой прямой второго семейства мы назовем генералами, второй прямой этого семейства — полковниками и т. д. — всего $n$ рангов.

Задача 4. Докажите, что среди гусаров встречаются офицеры всех рангов; то же с уланами, драгунами и т. д.

Для построения каре мы рассмотрим третье семейство параллельных прямых и сформируем первую колонну каре из «офицеров» первой прямой третьего семейства, вторую колонну — второй прямой и т. д., причем порядок офицеров в каждой колонне будет определяться прямыми четвертого, последнего семейства: в первой шеренге нашего каре разместятся «участники» первой прямой четвертого семейства, вторую шеренгу составят офицеры из второй прямой и т. д.

Задача 5. Докажите, что описанный способ построения каре приводит к цели.

## § 4. Красное, черное и синее

Головоломка Эйлера привела нас к одному из самых интересных вопросов теории конечных геометрий: *какие бывают конечные аффинные плоскости?* Для нас, начинающих мини-геометров, было бы достаточно найти ответ на более узкий вопрос: *для каких $n$ существует конечная аффинная плоскость порядка $n$?*

Полного решения этой проблемы до сих пор нет. Все, что известно, исчерпывается двумя замечательными теоремами.

Теорема 1. *Если число $n$ простое или степень простого, то плоскость порядка $n$ существует.*

Мы докажем эту теорему в § 5 для всех простых чисел $n$ *).

Теорема 2. *Если число $n$ при делении на 4 дает в остатке 1 или 2 и если в разложении этого числа на простые множители встречается в нечетной степени хотя бы одно простое число $p$ вида $p = 4k+3$, то конечной аффинной плоскости порядка $n$ не существует.*

Первое из чисел, удовлетворяющих условию теоремы 2, — число $n=6$: $6=4+2$ и $6=2 \cdot 3$. Итак, плоскости из 36 точек не существует! (Замечательная интуиция Эйлера

---

*) Для степеней простых чисел доказательство сложнее. (См., например, книгу М. Холла «Комбинаторика», «Мир», 1970. Эту великолепную книгу можно читать выборочно, «обходя» непонятные места.)

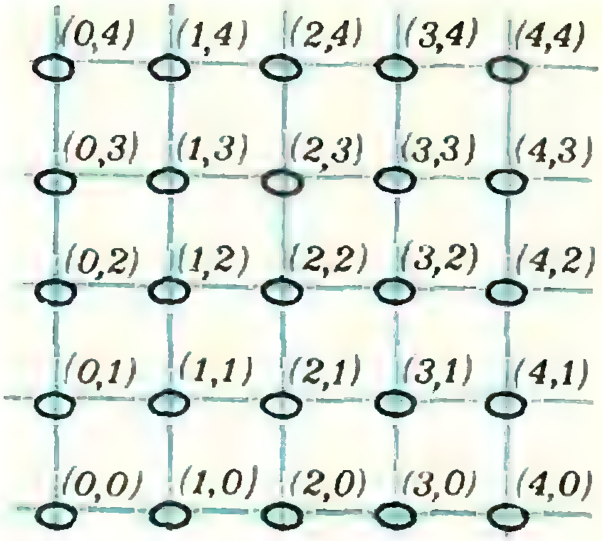


**Рис. 7. Так вводятся координаты на аффинной плоскости (например, точка A имеет координаты (2,2)). Наоборот, из набора $n^2$ точек ($n = 5$), заданных координатами, можно построить аффинную плоскость.**

позволила ему выбрать единственный «сомнительный» случай из большого числа близких: $n^2=9$, 16, 25, 49, 64; когда плоскость по Теореме 1 благополучно существует *).

Как уже известно читателю, это еще не доказывает неразрешимости головоломки Эйлера (см., например, задачу 3). Однако она действительно неразрешима! Это было доказано в 1900 году скрупулезным перебором всех возможных вариантов построения каре.

Трудная Теорема 2 была доказана сравнительно недавно (1949 год); она позволяет исключить из рассмотрения бесконечно много чисел, например числа 77 и 78. На рисунке 6 приведены первые сто натуральных чисел, раскрашенные в три цвета: синие — это те числа, для которых по Теореме 1 существует плоскость соответствующего порядка, красные — числа, для которых по Теореме 2 такой плоскости не существует, а для черных чисел открыта пока как первая, так и вторая возможности.

Terra incognita *) черных чисел начинается с числа 10 (хотя $10=2\cdot4+2$, но $10=2\cdot5$, причем ни 2, ни 5 при делении на 4 не дают в остатке 3). С момента открытия конечных аффинных геометрий (начала XX века) было немало попыток построить плоскость такого порядка, в том числе и совсем недавних — с помощью самых современных вычислительных машин, но все они окончились неудачно: никому не удалось построить больше шести семейств параллельных прямых разыскиваемой плоскости, хотя по (A12) таких семейств должно быть ровно одиннадцать!

## § 5. Координатный метод

Пусть $n$ — целое число, большее единицы. Мы попытаемся построить конечную аффинную плоскость порядка $n$, введя на нашем множестве координаты. Действуя так, мы подражаем великому примеру Рене Декарта, систематически сводившего именно геометрические задачи на евклидовой плоскости к соответствующим алгебраическим задачам.

Итак, расположим $n^2$ точек в виде квадрата $n\times n$ в узлах разграфленной в клетку бумаги, как это сделано на рисунке 7 для $n=5$. Перенумеруем вертикальные и горизонтальные ряды узлов целыми числами от 0 до $n-1$ и сопоставим каждой точке на будущей конечной плоскости пару координат $(x, y)$, где $y$ — это номер горизонтального, а $x$ — номер вертикального из тех двух рядов, на пересечении которых лежит эта точка.

---

*) Заслуживает быть отмеченным удивительное, хотя и не столь уж редкое в истории математики совпадение: именно Эйлеру принадлежит термин «аффинный» (на латыни «affine» означает *смежный, соседний*; аффинная геометрия — это геометрия смежности, соседства, геометрия, лишенная расстояния, но сохранившая параллельность), и Эйлером же была сформулирована (пусть в «развлекательной» форме) первая проблема, имеющая прямое отношение к теории конечных аффинных плоскостей.

*) *Неведомая земля* (лат.).

Что же считать прямыми плоскости? Разумеется, любой горизонтальный или вертикальный ряд узлов. Кроме того, любой набор (не менее двух) узлов, лежащих на одной евклидовой прямой в пределах квадрата $n \times n$. Условимся только «возвращать» всякую такую прямую так, как это показано на рисунке 8.

**Задача 6.** Докажите, что после некоторого числа таких «скачков» мы вновь попадем на исходную прямую и что число узлов, через которые мы при этом «пройдем», не превосходит $n$.

Набор «пройденных» нами вдоль одной «скачущей» прямой узлов мы и будем считать прямой.

Эта идея действительно позволяет построить плоскость порядка $n$, когда $n$ — простое число. Мы рассмотрим арифметический вариант такого определения плоскости, оставив читателю аккуратное проведение намеченной нами геометрической конструкции.

**Задача 7.** Покажите, что если $n$ — произвольное натуральное число (не обязательно простое), то таким способом можно определить $\varphi(n)+1$ семейств параллельных прямых, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера (!) ($\varphi(n)$ = количеству натуральных чисел, меньших $n$ и взаимно простых с $n$).

Итак, пусть $n=p$ — простое число. Очевидно, что для любого целого числа $m$ найдется единственное число из набора чисел $\mathrm{F}_p=\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, равное остатку от деления $m$ на $p$; обозначим это число через $\{m\}_p$. Теперь для любых двух чисел $a$ и $b$ из набора $\mathrm{F}_p$ мы определим две операции: *p-сложение* и *p-умножение*, *положив*:

$$a \oplus_p b=\{a+b\}_p, \quad a \otimes_p b=\{a \cdot b\}_p,$$

где $a+b$ и $a \cdot b$ — обычные сумма и произведение чисел $a$ и $b$. Очевидно, что для любых двух чисел $a$ и $b$ из набора $\mathrm{F}_p$ *p-сумма* и *p-произведение* снова принадлежат $\mathrm{F}_p$. Столь же очевидны простые свойства этих операций, сформулированные ниже в Теоремах П1—П9 (пожалуй, лишь Теорема П8 потруднее остальных).

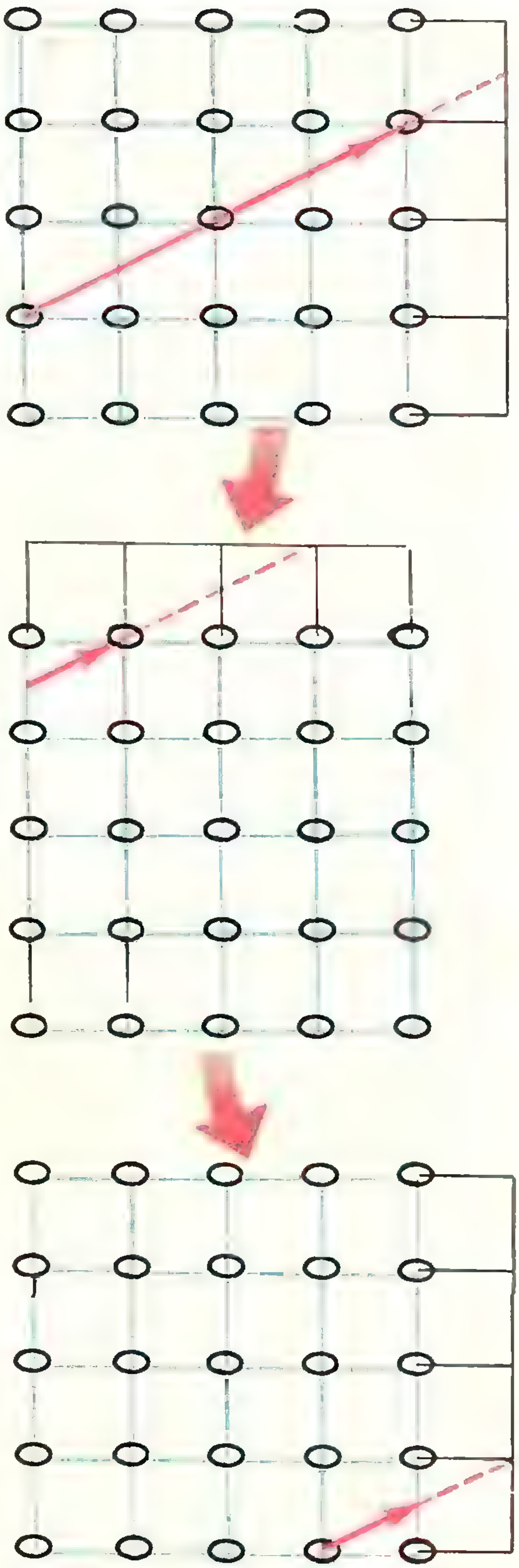


Рис. 8.

Трудолюбивому читателю следует воспринимать их как упражнения.

Теорема П1. (*Свойство нуля.*) *$a\oplus_p 0=0\oplus_p a=a$ для любого $a\in F_p$.*

Теорема П2. (*Свойство единицы.*) *$a\otimes_p 1=1\otimes_p a=a$ для любого $a\in F_p$.*

Теорема П3. (*Ассоциативность сложения.*) *$(a\oplus_p b)\oplus_p c=a\oplus_p(b\oplus_p c)$ для любых $a, b, c\in F_p$.*

Теорема П4. (*Ассоциативность умножения.*) *$(a\otimes_p b)\otimes_p c=a\otimes_p(b\otimes_p c)$ для любых $a, b, c\in F_p$.*

Теорема П5. (*Коммутативность сложения.*) *Для любых $a, b\in F_p$ $a\oplus_p b=b\oplus_p a$.*

Теорема П6. (*Коммутативность умножения.*) *Для любых $a, b\in F_p$ $a\otimes_p b=b\otimes_p a$.*

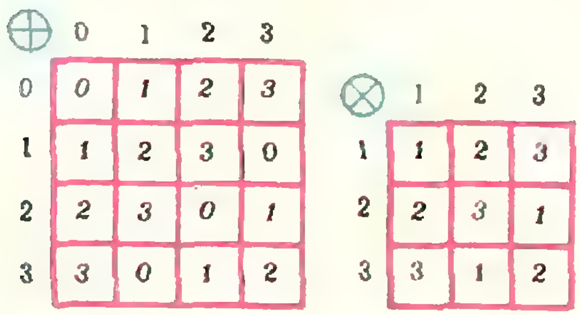
Теорема П7. (*Обратимость сложения.*) *Для любых двух элементов $a$ и $b$ из $F_p$ существует единственный элемент $c\in F_p$, для которого $a\oplus_p c=b$.*

Теорема П8. (*Обратимость умножения.*) *Для любого $a\in F_p$, не равного нулю, и любого $b\in F_p$ существует единственный элемент $c$, для которого $a\otimes_p c=b$.*

Теорема П9. (*Дистрибутивный, или распределительный закон.*) *Для любых трех элементов $a, b, c$ из $F_p$*

$$a\otimes_p(b\oplus_p c)=(a\otimes_p b)\oplus_p(a\otimes_p c).$$

Используя множество $F_p$ и введенные на нем операции, мы определим теперь конечную аффинную плоскость порядка $p$. Точками этой плоскости будем называть пары чисел $(x, y)$, где $x, y\in F_p$; всего имеется $p^2$ таких пар. Прямой этой плоскости будем называть любое множество таких пар, координаты которых удовлетворяют либо некоторому уравнению вида $x=s$, где $s$ — элемент набора $F_p$, либо уравнению вида $y=a\otimes_p x\oplus_p b$, где оба числа $a$, $b$ принадлежат набору $F_p$.



| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

| $\otimes$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 3 | 1 | 2 |

**Рис. 9. Таблица сложения и умножения конечного поля из четырех элементов.**

Мы предоставляем читателю проверку справедливости аксиом А1—А3 при таком определении точек и прямых. (Для доказательства утверждения, эквивалентного, например, (А1), нужно показать, что любые две точки $A=(c, d)$ и $B=(e, f)$ могут удовлетворять только одному уравнению либо вида $x=s$, либо вида $y=a\otimes_p x\oplus_p b$; при проверке следует воспользоваться свойствами операций $\oplus_p$ и $\otimes_p$, сформулированными в Теоремах П1—П9.) Тем самым будет завершено доказательство той части Теоремы 1, в которой идет речь о простых значениях порядка $n$ плоскости.

Полезно понимать, что для нашего построения была существенна не арифметическая природа чисел из набора $F_p$ и даже не простота числа $p$, а только те свойства элементов набора, которые описываются Теоремами П1—П9. Мы могли рассмотреть произвольное конечное множество F, лишь бы в нем были определены: а) две операции, первую из которых мы будем называть *сложением*, а вторую *умножением*, б) два особых элемента, первый из которых мы будем называть (и обозначать) *нулем*, а второй — *единицей*, и, наконец, лишь бы эти операции и эти два выделенных элемента удовлетворяли требованиям Теорем П1—П9.

*Множество F с такими свойствами называют конечным полем.*

Вот пример конечного поля с 4 элементами: $F_4=\{0, 1, 2, 3\}$, операции которого определены согласно таблицам рисунка 9. Соответствующая конечная аффинная плоскость порядка 4 с «красно-зеленой» координатной сеткой изображе-

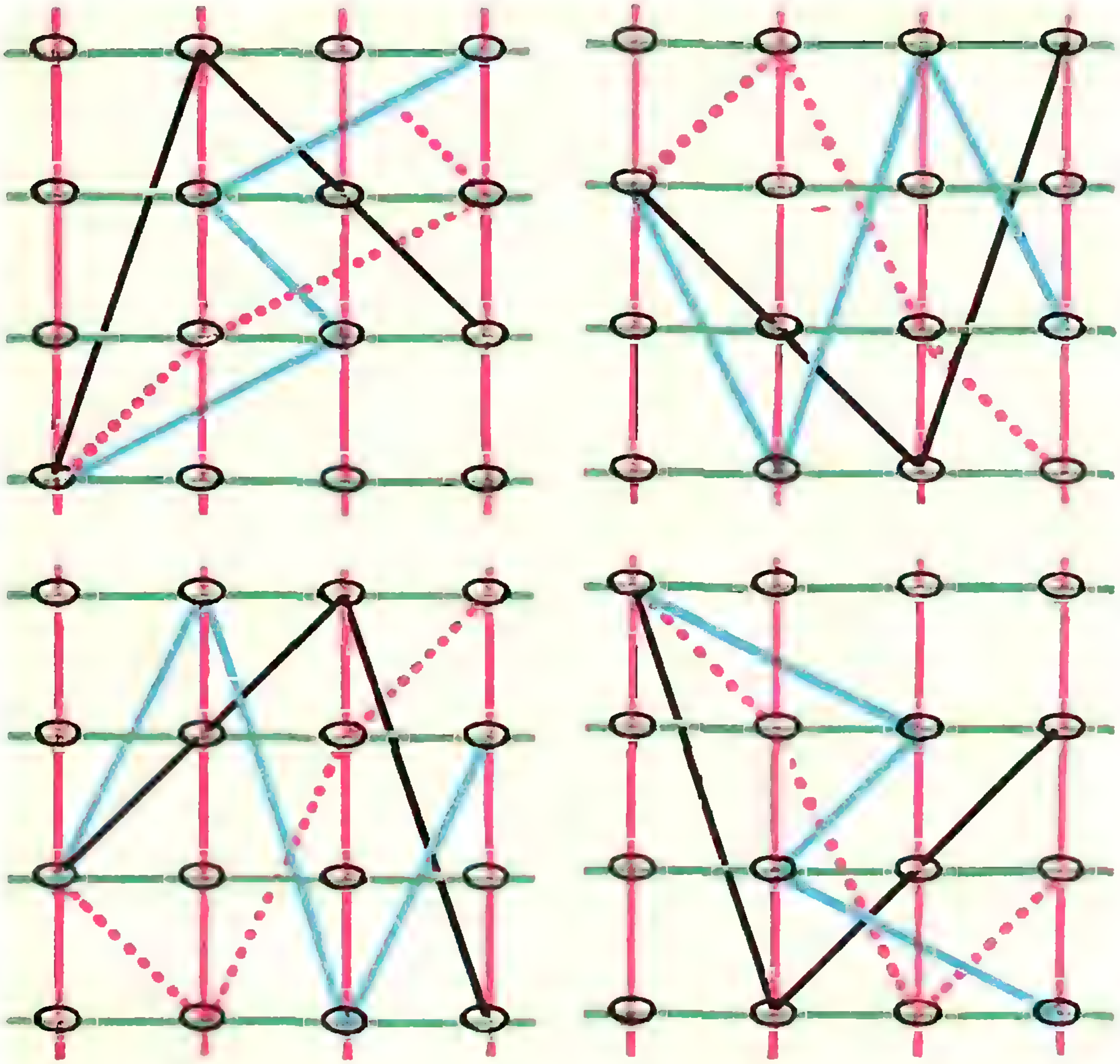


**Рис. 10. Каждому семейству параллельных отвечает свой цвет: для трех семейств (синего, черного, пунктирного) на каждом рисунке изображено по одной прямой.**

на на рисунке 10. Одновременно этот рисунок служит решением уже упомянутой (эпиграф к § 2) задачи о 16 космонавтах: каждое семейство параллельных прямых — это разделение 16 космонавтов на 4 экипажа, каждая прямая такого семейства — один экипаж.

Приведем без доказательства основную теорему о конечных полях.

Теорема. *Число $q$ элементов любого конечного поля есть степень простого числа $q=p^m$. Наоборот, для любого $q=p^m$, где $p$ — простое число, а $m$ — произвольное натуральное, найдется единственное конечное поле $F_q$ с $q$ элементами* *).

Из справедливости этой теоремы и вытекает существование конечной аффинной плоскости порядка $q=p^m$.

---

*) Доказательство этой теоремы можно найти например, в классической книге ван дер Вардена «Современная алгебра», т. I, с. 153 (Гостехиздат, 1947). Единственность поля нужно понимать в том смысле, что любое другое поле с тем же числом элементов *изоморфно* полю $F_q$: между элементами *этих двух полей можно установить такое* взаимно однозначное соответствие, чтобы нуль соответствовал нулю, единица — единице, сумма — сумме и произведение — произведению.

## § 6. Эпилог

> *В отличие от романа или пьесы преждевременное раскрытие замысла не является недостатком научного исследования.*
>
> Дж. Гэлбрейт

Итак, вопрос о существовании конечных аффинных плоскостей данного порядка несколько прояснился: есть запрещенные значения (красные числа на рис. 6), есть неисследованные значения (черные числа там же) и есть разрешенные значения — простые числа и их степени (синие числа), для которых существует способ построения плоскости.

Но вот единственный ли этот способ?! Нет ли каких-либо других плоскостей для данного порядка $q=p^m$?

В самом деле, Теорема о конечных полях (§ 5) запрещает существование полей, отличных от некоторых стандартных полей $F_q$ (их называют в честь Эвариста Галуа *полями Галуа*); с простейшими из этих полей — полями $F_p$ — вы на самом деле уже встречались на страницах «Кванта» — в статье А. Бельского и Л. Садовского «Кольца» («Квант», 1974, № 2 — см. задачи 2 и 3 на с. 7. этого номера), но не препятствует существованию плоскостей того же порядка $q=p^m$, отличных от стандартных. Удалось показать, что все плоскости, чей порядок не превосходят числа 8, могут быть лишь стандартными, и построить нестандартную плоскость порядка 9.

Прощаясь с читателем, автор трактата горячо рекомендует ему прочесть две замечательные книги Э. Артина и М. Холла[*], где предмет трактата освещен одинаково интересно, хотя и с разных сторон.

## Удивительные числа

Напишите четыре трехзначных числа:

360, 351, 362, 402.

Возьмите теперь любое число января, например, 15/I, прибавьте к числу 15 первую цифру из написанных — 3, и сумму 15+3 разделите на 7 (число дней недели): (15+3) : 7. В остатке вы получите 4 — 15/I—76 приходится на 4-й день недели, т. е. на четверг.

Если взять какое-нибудь число февраля, например 15, и прибавить вторую цифру из ряда трехзначных чисел, разделить на 7, то в остатке получится 0, что указывает, что 15 февраля приходится на воскресенье.

Если взять 7/IV, то по этому правилу к 7 придется прибавить 3, тогда получим (7+3) : 7 — в остатке 3, значит, 7/IV будет третьим днем недели, т. е. средой.

Словом, записанный ряд трехзначных чисел — это 12 постоянных слагаемых (записанных поквартально) для всех двенадцати месяцев 1976 года, с помощью которых можно быстро определить день недели любой даты года по очень простому правилу:

Интересующее вас число + постоянное слагаемое данного месяца : 7 = частное и остаток — ответ.

Попробуйте по календарю на 1976 года определить, откуда взялись эти 12 цифр, и составить такие 12 цифр для 1977 года.

*П. Сорокин* (Астрахань)

---

[*] Э. Артин, Геометрическая алгебра. Издательство «Наука», Москва, 1969. М. Холл, Комбинаторика. Издательство «Мир», Москва, 1970.

А. Кикоин

# ТЕМПЕРАТУРА, ТЕПЛОТА, ТЕРМОМЕТР

Температура — одна из тех не очень многих физических величин, о которых человек узнает не только до того, как начнет изучать физику, но и до того, как научится грамоте. Уже в раннем детстве мы узнаем, что *словам горячее, теплое, холодное,* отражающим наши ощущения, соответствуют различные значения температуры. Мы слышим о том, что летом температура высокая, а зимой низкая, что у здорового человека температура тела 36,6 градуса, а если она выше, то нужно вызывать врача...

Из-за привычности понятия температуры мы обычно не отдаем себе отчета в том, насколько эта величина своеобразна, насколько она *отличается от других привычных* величин, таких как длина, масса, объем. А различие здесь очень существенное. Состоит оно вот в чем.

Если соединить десять стержней длиной в 1 *м* каждый, приставив их один к другому, то получится стержень длиной в 10 *м*. Десять масс в 1 *кг* каждая в сумме дадут массу в 10 *кг* и т. д. Но если соединить десять тел, каждое из которых имеет температуру 20 градусов, то мы получим тело, температура которого 20 градусов, а не 200. Температуры тел при их соединении не складываются, как складываются их длины, объемы, массы и т. д. Длина в 100 *м* — это сумма ста длин в 1 *м*, но температура в 100 градусов — это не сумма ста температур в 1 градус каждая, подобно тому, как человек в возрасте 15 лет — это не то же *самое, что 15 годовалых детей! Температура,* как говорят, величина не аддитивная. В этом — одна из важнейших особенностей этой величины.

С этой особенностью связан и способ измерения температуры. Чтобы измерить длину тела, нужно сравнить его с другим телом, длина которого принята за единицу. Определить массу тела — значит сравнить ее с другой массой, принятой за единицу. Ведь и длина, и масса тела равны соответственно сумме длин и *масс* его частей.

Но температуру так измерить нельзя. Но это значит, что сама величина температуры вообще не может быть измерена, раз ее нельзя сравнивать с эталоном температуры. Каким же образом температуру всетаки измеряют?

### Немного истории

Прибор для измерения температуры — термометр — впервые был изобретен Галилеем около 1592 года (само слово «термометр» впервые встречается в литературе в 1624 году). Способ измерения температуры, предложенный Галилеем, принципиально не отличается от того, которым пользуются и в наше время.

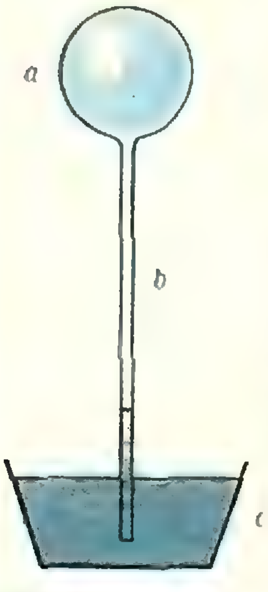


Рис. 1.

Схема придуманного им прибора показана на рисунке 1.

Небольшой стеклянный баллон (*a*) припаян к тонкой длинной трубке (*b*) с открытым концом. Баллон нагревают руками и погружают нижний конец трубки в сосуд с водой (*c*). По мере того как баллон охлаждается до температуры окружающего воздуха, уровень воды в трубке поднимается над уровнем воды в сосуде.

Легко понять, что в приборе Галилея используется тот факт, что объем газа в баллоне с трубкой зависит от температуры. Поэтому по изменению объема газа можно судить и об изменении температуры.

Конечно, описанный прибор еще не термометр. По нему нельзя отсчитывать числовое значение температуры. Поэтому его следует называть не термометром, а термоскопом. Но если термоскоп тем или иным способом снабдить шкалой, то он станет термометром. На решение этой задачи потребовалось почти 150 лет. Пока для нас важно, что уже в приборе Галилея содержится принцип измерения температуры, и принцип этот не пришлось изменять вплоть до наших дней: температура непосредственно не измеряется. Измеряется величина, *зависящая* от температуры. В термоскопе Галилея такой величиной был объем газа. В современном ртутном термометре величиной, зависящей от температуры, по изменению которой судят об изменении температуры, тоже является объем, но не газа, а ртути. Наряду с объемом газа такой величиной может быть давление газа (при постоянном объеме), длина твердого стержня, электрическое сопротивление проводника и т. д.

## Закон природы, который нельзя открыть без термометра

Уже первые несовершенные термометры и даже термоскопы позволили открыть один из важнейших законов природы — закон теплового равновесия. Закон этот многим кажется и казался настолько очевидным, что на его открытие не претендует ни один ученый и никто не может указать даты его открытия. Состоит этот закон в том, что любая изолированная группа (система) тел сама собой с течением времени приходит в состояние, при котором температуры всех тел системы одинаковы. Такое состояние и называется состоянием теплового равновесия.

Ясно, что закон теплового равновесия мог быть открыт только после изобретения термометра. С другой стороны, само измерение температуры с помощью термометра основано на законе теплового равновесия. Ведь термометр тоже тело, имеющее определенную температуру. И он измеряет именно собственную температуру. А если мы хотим с его помощью измерить температуру какого-то другого тела, оно должно быть в тепловом равновесии с термометром, потому что в этом случае температуры тела и термометра одинаковы. Вот почему при измерении температуры тела с помощью термометра всегда приходится ждать некоторое время — ждать установления теплового равновесия между телом и термометром.

## Еще немного истории

Итак, термоскоп появился в конце XVI века. Термометром он стал примерно в середине XVIII века. Но что именно измеряет термометр? Что такое температура? Правильный ответ на этот вопрос был дан еще через сто лет после того, как появился термометр.

Температура — величина, которая характеризует тепловое состояние тела. О холодных и горячих телах мы говорим, что у них разная температура. Следовательно, вопрос о том, что такое температура, сводится к вопросу: чем отличается холодное тело от горячего?

Первый ответ на этот вопрос дал сам Галилей. Из того легко наблюдаемого факта, что когда вблизи горячего тела находится холодное, то горячее тело охлаждается, а холодное нагревается, Галилей сделал естественный вывод, что от горячего тела к холодному что-то переходит (с таким же правом можно было считать, что что-то переходит от холодного тела к горячему!). Галилей считал, что это «что-то» есть особое тепловое вещество. И большинство исследователей XVII—XVIII веков придерживались такой же точки зрения и называли это вещество теплородом.

Согласно теории, основанной на представлении о теплороде, горячее тело отличается от холодного тем, что в нем больше теплорода, чем в холодном. Установление теплового равновесия по этим представлениям состоит в том, что теплород переходит от горячего тела к холодному. Значит, всякое тело состоит как бы из двух веществ — вещества самого тела (вода, медь, железо, стекло) и теплорода. Каждое тело — это смесь вещества тела и вещества теплоты (теплорода). Слово температура как раз и означает смесь. И в течение почти полутораста лет считалось, что измеряя температуру, мы измеряем *концентрацию* теплорода в теле. Отсюда и название единицы температуры — *градус*. Именно в таких единицах измеряли, например, концентрацию водных растворов.

Такой взгляд на температуру держался очень долго — до конца XVIII века. Так и говорили — градусы теплоты.

Но одновременно с «вещественной» теорией теплоты существовала и другая теория, одним из создателей и поборников которой был великий русский ученый М. В. Ломоносов. Эта теория основывалась на том факте, что нагревание тела может быть вызвано движением. Ломоносов писал: «Очень хорошо известно, что теплота возбуждается движением: от взаимного трения руки согреваются, дерево загорается пламенем; при ударе кремня об огниво появляются искры; железо накаливается от проковывания частыми и сильными ударами...» Отсюда делался вывод, что теплота — это не вещество, а движение маленьких частиц, из которых состоят все тела («нечувствительных частиц», как их тогда называли).

Свыше двухсот лет шла борьба между этими двумя теориями. В течение долгого времени господствовала первая теория, но в конце концов победу одержала вторая.

Уже в XVIII веке были выполнены опыты, которые заставили многих физиков пересмотреть представление о том, что температура — это концентрация теплоты (теплорода) в теле.

В 1760 году английский физик и врач Блек показал, что одно и то же количество теплоты, подведенное к равным массам различных веществ, приводит к различным изменениям температуры. Но если бы температура действительно представляла концентрацию теплоты в теле, то получение одного и того же количества теплоты должно было бы вызывать у равных масс любых веществ одно и то же *изменение* температуры. В этих опытах Блек открыл, как мы теперь знаем, что у разных веществ различная теплоемкость. Но с теорией теплорода это несовместимо.

В 1764 году тот же Блек показал, что при плавлении льда им поглощается значительное количество теплоты, но температура его при этом остается неизменной. Эту теплоту со времен Блека часто называют скрытой теплотой плавления. Точно так же, при отвердевании воды выделяется теплота и опять — без изменения температуры. Ясно, что если температура — это концентрация теплоты в теле, то невозможно поглощение теплоты без повышения температуры и невозможна потеря теплоты телом без понижения его температуры.

Что же в действительности представляет собой температура — величина, смысл которой так долго оставался непонятным?

Это стало ясным лишь после того, как появилась кинетическая теория строения вещества. И мы поймем смысл температуры из сопоставления двух как будто бы совсем разных вещей — одного из результатов кинетической теории и способа измерения температуры.

## О молекулярном хаосе и о его законах

Основой кинетической теории строения вещества является утверждение о том, что всякое вещество состоит из маленьких частиц — молекул, непрерывно и беспорядочно движущихся. Между молекулами действуют сложные силы притяжения и отталкивания. Но в газах при обычных давлениях эти силы малы. И можно представить себе газ, в котором силы взаимодействия между молекулами вообще отсутствуют. Так как такой газ можно себе лишь представить, то он получил название идеального газа.

Идеальный газ — это скопление огромного числа молекул, беспорядочно движущихся по всем направлениям со скоростями в сотни метров в секунду, то и дело сталкивающихся между собой и со стенками сосуда. В этом невообразимом хаосе (возможно, что само слово газ произошло от древнего слова хаос) действуют, однако, строгие и нерушимые законы. Благодаря тому, что в идеальном газе не надо учитывать сил взаимодействия между молекулами, эти законы можно установить теоретически. В частности, можно, пользуясь законами механики, *вычислить* давление газа, то есть силу, с которой газ действует на единицу площади стенки сосуда. Сила эта есть результат ударов движущихся молекул о стенки.

Расчет показывает, что если в сосуде объемом $V$ находится $N$ молекул газа, то давление, оказываемое газом на стенки сосуда, равно

$$p = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\overline{E}, \qquad (1)$$

где $\overline{E} = \frac{m\overline{v^2}}{2}$ — кинетическая энергия хаотического движения, приходящаяся в среднем на 1 молекулу газа. Формула (1) показывает, что давление газа равно $^2/_3$ средней кинетической энергии хаотического движения молекул, содержащихся в единице объема (ведь $\frac{N}{V}$ — это как раз и есть число молекул в единице объема).

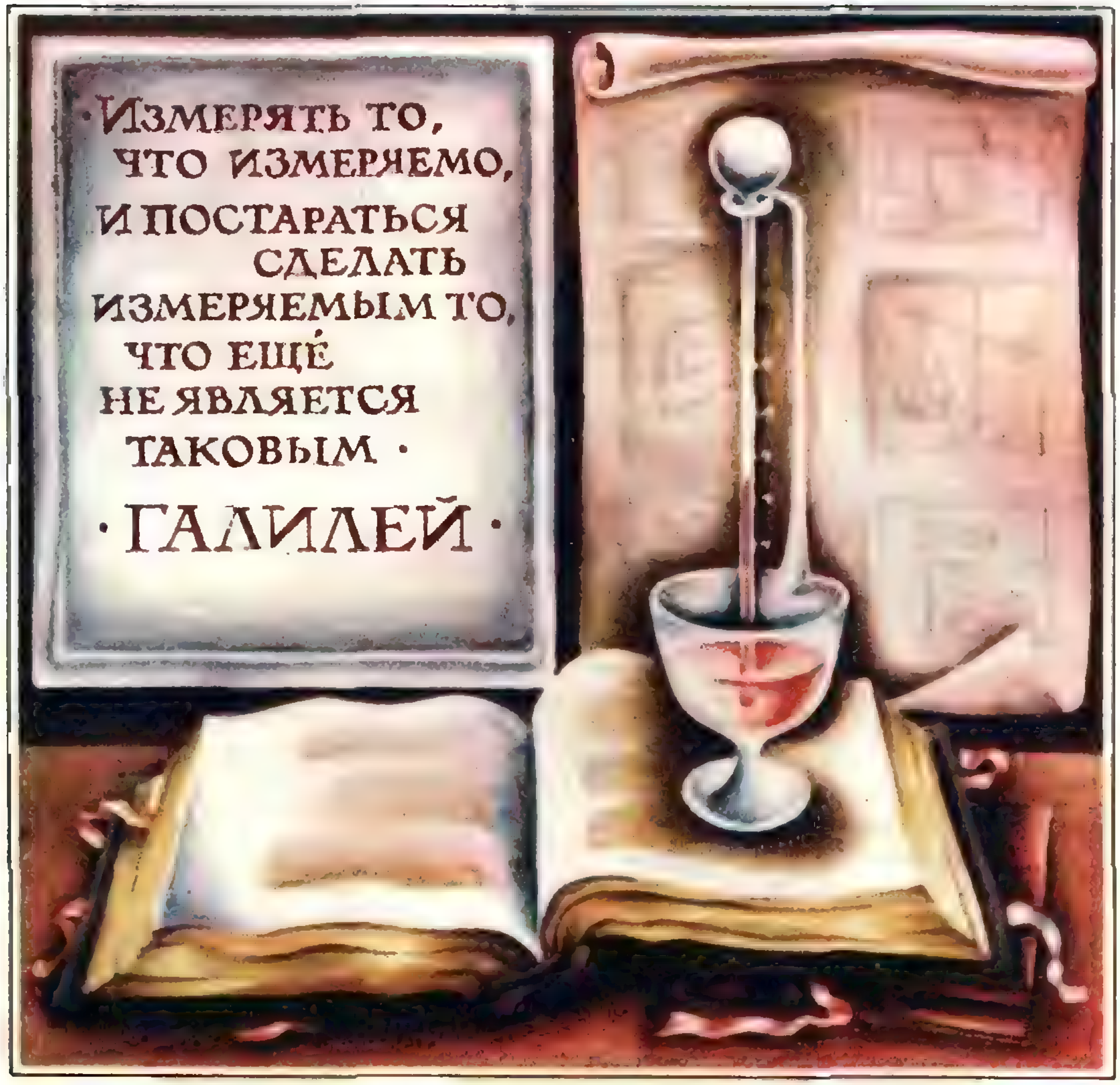
Для реальных газов расчет давления довольно сложный, но при определенных условиях формула (1) достаточно точна. Она тем точнее, чем меньше величины $N/V$ и $\overline{E}$. Практически этой формулой можно пользоваться при давлениях около 1 *атм* и меньше.

Но какое отношение все это имеет к температуре? Ведь в формулу (1) температура не входит!

Чтобы это понять, вернемся к незаконченному нами рассмотрению способа измерения температуры.

## О температурных шкалах

Первыми термометрами, которыми практически пользовались, были жидкостные термометры, изготовлявшиеся группой флорентийских ученых. Вслед за ними их стали конструировать и изготовлять и в дру-


·Измерять то, что измеряемо, и постараться сделать измеряемым то, что ещё не является таковым ·
·ГАЛИЛЕЙ·

гих странах. В них использовались различные жидкости, но главным образом — спирт и ртуть (иногда масло).

Жидкостные термометры представляли собой тонкие стеклянные трубки, заканчивавшиеся внизу небольшим шариком или цилиндром. Шарик и нижняя часть трубки заполнялись жидкостью (спиртом, ртутью, маслом). На второй странице обложки вы видите образцы флорентийских термометров. (Не правда ли, это не только приборы, но и, своего рода, произведения искусства. Вообще, старинные приборы изготовлялись с «художественным подходом».)

Что касается термометрических шкал, то использовались самые различные способы их построения. Каждый конструктор и изготовитель термометров придумывал и способ создания шкалы к ним. К концу XVIII века в ходу было около двух десятков различных термометрических шкал, из которых до наших дней сохранились три (что тоже слишком много).

В конце концов восторжествовал принцип построения термометрических шкал, предложенный голландским стеклодувом и физиком-любителем Фаренгейтом и шведским астрономом Цельсием. Принцип основан на использовании двух так называемых реперных точек, то есть тепловых состояний, отличающихся своим постоянством. Такими точками были температуры таяния льда и кипения воды при атмосферном давлении. (Температура плавления любого твердого вещества и температура кипения любой жидкости при данном давлении также постоянны, но вода и лед наиболее доступны.)

В 1742 году Цельсий предложил такой способ градуировки, т. е. создания шкалы термометров (рис. 2). Термометр, каков бы он ни был, приводится в контакт с тающим льдом и после установления теплового равновесия уровень жидкости в термометре (если это жидкостный термометр) отмечается некоторым числом. Затем тающий лед заменяется кипящей водой, и новый уровень жидкости в термометре отмечается числом, которое отличается от первого на 100. А разность уровней делится на 100 равных частей — градусов. Сейчас кажется курьезом, что Цельсий отмечал уровень жидкости в термометре при температуре кипения воды цифрой нуль, а уровень ее при температуре тающего льда — числом 100. Впрочем, через 8 лет, в 1750 году, шкала была перевернута, и в таком виде ею пользуются и теперь.

Еще до Цельсия, в 1724 году, Фаренгейт, тоже используя в качестве реперных точек температуры тающего льда и кипящей воды, изготовлял термометры, в которых температура тающего льда отмечалась числом 32, а температура кипящей воды — числом 212, так что интервал температур тающий лед — кипящая вода оказывался разделенным не на 100, а на 180 равных частей — градусов. Французский ученый Реомюр, подобно Цельсию, приписывал температуре тающего льда значение 0, но по термометру Реомюра вода кипит при температуре 80 градусов.

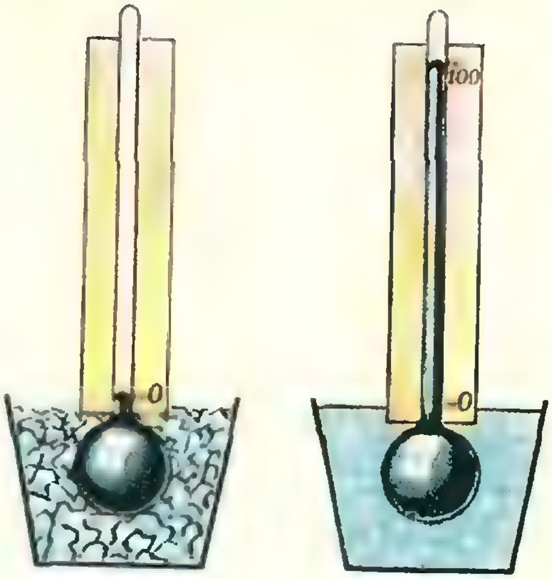


Рис. 2.

Как видим, в построении термометрических шкал был немалый произвол. Произвольным было число градусов, на которые делился интервал температур между реперными точками. Произвольными были и значения температур самих реперных точек. Ведь нет разумных оснований считать, что температура тающего льда равна нулю, то есть что тающий лед не имеет никакой температуры!

Для нас здесь важно, что разделяя интервал температур между точками таяния льда и кипения воды на *равные* части (на 100, 80 или 180), мы тем самым полагаем заранее, что объем жидкости, которой заполнен термометр, *строго линейно* зависит от температуры. Если обозначить объем жидкости при температуре тающего льда через $V_0$, объем той же жидкости при температуре кипящей воды через $V$, а сами эти температуры через $t_0$ и $t$, то деление интервала температур на равные части означает, что

$$\frac{V-V_0}{t-t_0}=c,$$

где $c$ — постоянная величина. Если принять, что $t_0=0$, то $V-V_0=ct$, и

$$V=V_0+ct.$$

Можно ли проверить, что объем в самом деле линейно зависит от температуры? Очевидно, нет. Ведь для опытной проверки необходимо

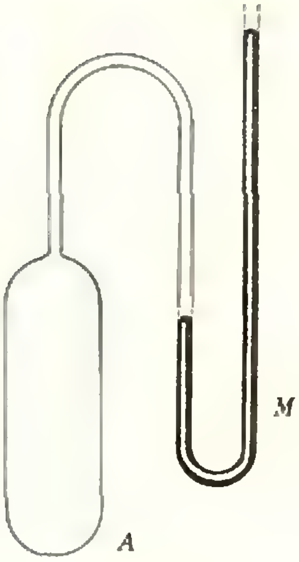


Рис. 3.

пользоваться термометром. Но при устройстве термометра заранее было предположено, что объем пропорционален температуре. Поэтому опыт ничего другого дать не может.

Существует старый анекдот. В одном морском порту ежедневно ровно в полдень стреляла пушка. Капитаны кораблей, покидая порт, проверяли по пушечному выстрелу свои судовые хронометры, при помощи которых определяют географическую долготу. Один из капитанов пожелал узнать, насколько можно быть уверенным в том, что пушка стреляет действительно в полдень. И выяснилось, что артиллерист определяет время по «очень точным часам», имеющимся у местного часовщика. А часовщик сказал капитану, что он проверяет свои «очень точные часы»... по выстрелу портовой пушки. Ясно, что при таких условиях нельзя судить ни о достоинствах часов, ни о том, действительно ли ровно в полдень раздается пушечный выстрел. Таким же образом, пользуясь термометром, шкала которого создана в предположении, что объем жидкости пропорционален температуре, нельзя узнать, верно ли это предположение.

Для техники измерения температур важно, что термометры с различными жидкостями, а тем более термометры, в которых о температуре судят не по объему жидкости, а по каким-нибудь другим свойствам, дают при измерении одной и той же температуры не совпадающие показания, причем различие в показаниях не одинаково в разных температурных областях. В связи с этим возникла необходимость в каком-то стандартном термометре, по которому градуировались бы все термометры. Тогда их показания, конечно, будут совпадать. Как решается эта задача?

В настоящее время стандартным термометром служит так называемый газовый термометр постоянного объема. Об этом термометре и о новой шкале температур мы и расскажем.

## Газовый термометр и абсолютная шкала температур

В газовом термометре в качестве величины, зависящей от температуры, по которой судят о самой температуре, принимается давление газа в закрытом сосуде, то есть при постоянном объеме. Опыт показывает, что давление нагретого газа больше, чем давление холодного. Сам газовый термометр состоит из сосуда *A*, заполняемого «идеальным» газом (любым газом при малом давлении), и присоединенного к нему манометра *M* для измерения давления (рис. 3).

Если сосуд поместить в тающий лед, а затем в кипящую воду и измерить значения давлений при этих температурах, обеспечив тепловое равновесие, то окажется, что давление при температуре кипящей воды в 1,3661 раза больше, чем при температуре тающего льда. Если обозначить давление и температуру, соответствующие кипящей воде, через $p$ и $T$, а значения этих величин, соответствующие тающему льду, через $p_0$ и $T_0$, то

$$\frac{p}{p_0} = 1{,}3661. \qquad (2)$$

Чтобы не порывать со ставшей за двести лет привычной стоградусной шкалой Цельсия, по-прежнему полагают, что

$$T - T_0 = 100. \qquad (3)$$

Разность давлений при температурах кипения воды и тающего льда делят на 100 *равных частей* — градусов. Это значит, что и теперь мы заранее полагаем, что температура линейно зависит от давления газа при постоянном объеме. Более того, мы можем считать, что температура газа прямо пропорциональна его давлению. Проверить это допущение, разумеется, нельзя по той же причине, по которой в приведенном выше анекдоте нельзя по пушечному выстрелу проверять правильность хода часов, а по часам — своевременность выстрела. Просто само измерение температуры основано на том, что давление газа и его температура считаются пропорциональными друг другу.

Приписывать температуре тающего льда значение нуль теперь нет необходимости. Ее можно просто вычислить. В самом деле, если температура газа прямо пропорциональна давлению, то отношение давлений газа при температурах кипящей воды и тающего льда равно отношению самих этих температур, то есть

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0}. \qquad (4)$$

Но отношение, стоящее в левой части этого равенства, равно 1,3661. Следовательно, и правая часть равна этому числу:

$$\frac{T}{T_0} = 1{,}3661.$$

Отсюда получаем

$$T = 1{,}3661\,T_0.$$

Подставив это значение для $T$ в равенство (3), находим

$$1{,}3661\,T_0 - T_0 = 100,$$

и мы сразу получаем

$$T_0 = \frac{100}{0{,}3661} \approx 273{,}15.$$

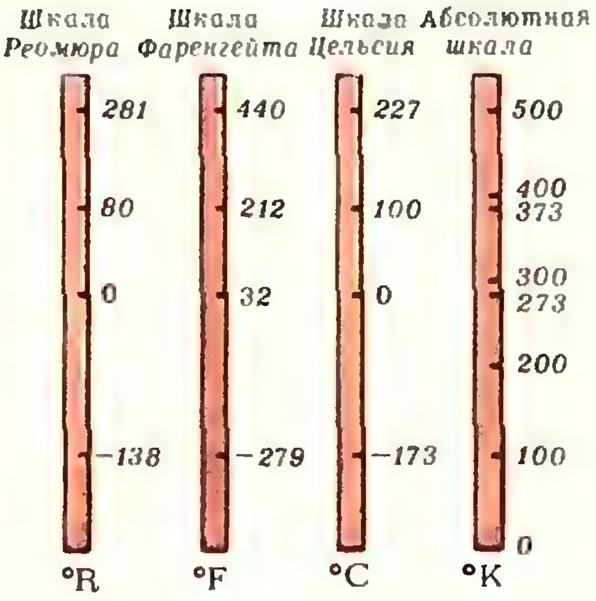


**Рис. 4.**

Этим и отличается новая шкала от старой шкалы Цельсия: температура таяния льда по этой шкале равна не нулю, а 273,15 градуса. А нуль температуры на 273,15 (для краткости на 273) градуса ниже температуры таяния льда. Это, как говорят, абсолютный нуль. Это — та температура, при которой давление идеального газа стало бы равным нулю, если бы такая температура была достигнута и если бы газ еще оставался при этой температуре газом. Так как давление газа не может быть меньше чем нуль, то температура на такой шкале отрицательной (меньше нуля) быть не может.

Описанная только что температурная шкала (некоторые тонкости в ее определении, практически несущественные, мы опускаем) носит название абсолютной шкалы температур или шкалы Кельвина. И сама температура, отсчитываемая по этой шкале, называется абсолютной температурой. Обозначается она буквой $T$ и выражается в градусах Кельвина (сокращенно °K), так что температура таяния льда равна 273,15°K, температура кипения воды равна 373,15°K и т. д.

Но шкалой Цельсия тоже пользуются на практике. Температуру, отсчитываемую по этой шкале, обозначают буквой $t$ и выражают в градусах Цельсия (сокращено °C). По этой шкале температура таяния льда равна 0°C, температура кипения воды равна 100°C и т. д. Ясно, что

$$t\ ^\circ\mathrm{C}=(T-273{,}15)^\circ\mathrm{K}.$$

В физике почти всегда пользуются шкалой Кельвина.

Теперь нам будет нетрудно выяснить, в чем же состоит истинный смысл температуры.

### Что же такое температура?

Итак, по принятому теперь способу измерения температуры давление $p$ произвольной массы газа $M$, то есть произвольного числа $N$ молекул газа, в сосуде объемом $V$ пропорционально его абсолютной температуре $T$.

Это видно из уравнения (4), которое можно переписать в виде

$$\frac{p}{T}=\frac{p_0}{T_0}. \tag{5}$$

Соотношение (5) показывает, что при постоянном объеме отношение давления газа к его абсолютной температуре — постоянная величина. С другой стороны, давление газа, как мы видели, определяется формулой (см. (1))

$$p=\frac{2}{3}\frac{N}{V}\overline{E}.$$

Подставив это значение $p$ в выражение (5), получаем

$$T=\frac{2}{3}\frac{N}{V}\frac{T_0}{p_0}\overline{E}. \tag{6}$$

Уравнение (6) относится к газу в закрытом сосуде постоянного объема. Поэтому число $N$ молекул газа сохраняет постоянное значение; отношение $\frac{T_0}{p_0}$, как мы видели, тоже постоянно. Следовательно, коэффициент при $\overline{E}$ в формуле (6) — постоянная величина для любого газа, то есть

$$T=\frac{2}{3}A\overline{E}, \tag{7}$$

где $A=\frac{N}{V}\frac{T_0}{p_0}$ — константа. Это означает, что абсолютная температура газа — это то же, что средняя кинетическая энергия хаотического движения одной его молекулы, только выраженная не в джоулях, а в градусах Кельвина. Коэффициент же $\frac{2}{3}A$—это переводный множитель, показывающий, во сколько раз 1°K больше 1 *дж/молекулу*. Подобно этому, одну и ту же длину можно выразить в метрах и в дюймах. Необходимо только знать, что 1 *м*=40 *дюйм*. Коэффициент 40 — переводный множитель, показывающий, во сколько раз 1 *м* больше 1 *дюйм*.

Обычно формулу (7) записывают в виде

$$\overline{E}=\frac{3}{2}kT, \tag{8}$$

где

$$k=\frac{1}{A}=\frac{V}{N}\frac{p_0}{T_0}. \tag{9}$$

Коэффициент $k$ называется постоянной Больцмана.

Из формулы (9) видно, как из опыта получить значение постоянной Больцмана. Для этого нужно наполнить сосуд известного объема $V$ известной массой $M$ газа (массу газа можно определить взвешиванием). Затем поместить сосуд в тающий лед (его температура $T_0=273{,}15^\circ$K), измерить с помощью манометра давление $p_0$ газа. Зная массу $M$ газа, легко определить значение $N$. Действительно, если молярная масса газа $\mu$, то число молей газа равно $\frac{M}{\mu}$; а поскольку в каждом моле газа имеется $N_A$ молекул ($N_A$ — число Авогадро), то число молекул $N$ в массе $M$ газа равно $N=\frac{M}{\mu}N_A$. Итак, зная массу газа $M$, его молярную массу $\mu$, объем сосуда $V$ и давление газа $p_0$

при температуре $T_0$, можно определить значение постоянной Больцмана $k$.

Такого рода измерения (а также и многие другие) неоднократно проводились. Все они дают для постоянной Больцмана значение

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \textit{дж/град}.$$

Как мы видим, значение $k$ очень малое. Это значит, что средняя кинетическая энергия беспорядочных движений одной молекулы, и определяющая то, что мы называем температурой, чрезвычайно мала. При температуре в 1°К средняя кинетическая энергия молекулы $\overline{E}$ равна

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \approx$$

$$\approx 2 \cdot 10^{-23}\ \textit{дж/молекулу}.$$

Таково соотношение между градусом Кельвина и джоулем на молекулу.

В заключение нам остается еще выяснить, какова связь между температурой и теплотой — двумя понятиями, которые в течение веков считались чуть ли не синонимами.

Известно, что теплотой называется энергия тепловых беспорядочных движений, *передаваемая* от одного тела к другому (при теплопередаче). Ясно поэтому, что теплота не является величиной, характеризующей состояние тела. О ней нельзя сказать, что она содержится в теле. Температура же характеризует состояние тела, потому что она определяется средней кинетической энергией его молекул. Понятно, что между теплотой и температурой в сущности никакой связи нет. Можно только сказать, *что если два тела имеют различную температуру, то более высокой является температура того из них, которое передает теплоту другому.* Температура тела — это величина, которая определяет, будет ли данное тело отдавать теплоту другим телам или получать ее от них. Такое определение температуры в свое время дал Максвелл.

### Нужна ли величина, которая называется температурой?

Температура как понятие и как физическая величина появилась в науке задолго до того, как можно было понять ее истинный смысл. Но теперь, когда он известен, стоит ли сохранять эту как будто бы архаическую величину? Не лучше ли всюду, где мы привыкли говорить о температуре, о градусах Кельвина, о градусах Цельсия, заменить их тем, что они есть в действительности — средней кинетической энергией частицы, и измерять ее в джоулях?

Но нетрудно видеть, что для отказа от температуры и от градусов нет оснований.

Во-первых, едва ли будет удобно, например, врачу считать пациента больным на том основании, что средняя кинетическая энергия его молекулы равна $6{,}64 \cdot 10^{-21}$ *дж*, вместо того, чтобы говорить о температуре в 38°С.

Во-вторых, замена градусов джоулями может породить и недоразумения. Ведь энергия, например, в 100 *дж*, вообще говоря, означает, что за ее счет может быть получена и работа в 100 *дж*. Между тем, если температура тела равна 100 *дж/молекулу* (для температуры — это фантастическое значение), то это вовсе не значит, что за ее счет можно получить такую же работу.

Упражнения

1. Каким числом выражается абсолютный нуль температуры на шкалах Фаренгейта и Реомюра?

2. Вычислить среднюю кинетическую энергию молекулы газа при температуре 1000°К.

3. При взрыве ядерной бомбы образуется газовый шар, температуру которого можно считать равной 20 миллионам градусов. Какова средняя кинетическая энергия частицы в этом шаре?

4. В атомной и ядерной физике принято выражать энергию частиц в особых единицах — электрон-вольтах (*эв*).

Выразить в электрон-вольтах среднюю кинетическую энергию молекулы газа при комнатной температуре.

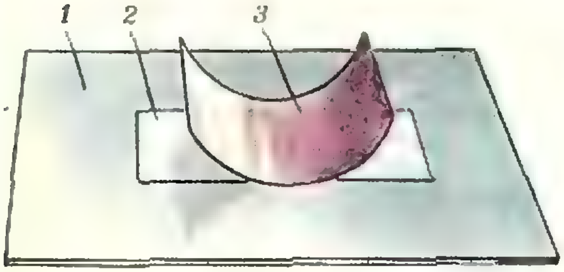
5. Вычислить значение постоянной Больцмана, пользуясь градусами Фаренгейта.

*В. Майер*

# Беспокойная дуга

Этот красивый и несложный опыт принадлежит нашему выдающемуся соотечественнику изобретателю радио А. С. Попову.

Из латунного или жестяного листа толщиной около 1 *мм* вырежьте полоску размером примерно 30×100 *мм*. Полоску аккуратно обработайте напильником и шкуркой, сняв заусенцы с ее краев, и изогните ее так, чтобы получилась дуга радиусом 3—4 *см*. На пластинку алюминия или дюраля положите слюдяной листок толщиной не более 0,2 *мм*. Нужный по толщине листок нетрудно получить, расщепляя лезвием бритвы слюду, которую можно приобрести в хозяйственном магазине. На пламени сухого горючего или газовой горелки разогрейте изготовленную дугу и быстро поместите ее на листок слюды. При этом, даже если вы оставите дугу совершенно неподвижной, она начнет раскачиваться, и это колебательное движение может продолжаться несколько минут.



1 — алюминиевая пластинка, 2 — листок слюды, 3 — жестяная дуга.

Вот как объяснил результат этого интересного опыта сам А. С. Попов. «Причина движения проста: слюда, нагреваемая только с одной стороны, вспучивается в сторону нагретого тела и приподнимает его слегка, вследствие этого в прикосновение с нагретым телом приходят новые точки на поверхности слюды, а прежде нагретые остывают от соседства с холодным телом. Дуга наклоняется в одну сторону до тех пор, пока тяжесть не преодолеет образующейся таким образом движущей силы, тогда начинается движение в обратную сторону и т. д.».

Таким образом, в описанном опыте тепловая энергия нагретой дуги переходит в механическую энергию колебаний этой дуги. Это — типичный автоколебательный процесс, подробнее разобраться в особенностях которого мы предоставляем вам самим.

А теперь несколько экспериментальных заданий для самостоятельного исследования.

1. Выясните, является ли существенным наличие в опыте алюминиевой пластинки, обладающей хорошей теплопроводностью.
2. Какую дугу — широкую или узкую, толстую или тонкую — лучше использовать в опыте?
3. Получится ли опыт, если и латунная дуга, и алюминиевая пластинка будут нагреты до одной температуры? (Для того чтобы ответить на этот вопрос, вовсе не обязательно ставить соответствующий эксперимент).
4. Каким образом можно существенно увеличить продолжительность качаний дуги? Разработайте и проверьте в действии соответствующую установку.
5. Продумайте и поставьте опыт, аналогичный описанному, в котором нагретое тело совершало бы не колебательное, а вращательное движение.

*А. Тоом*

# Решения задач ВЗМШ

В этом номере мы публикуем решения некоторых задач из вступительной работы в ВЗМШ 1976 года (см. «Квант» № 1, с. 68).

Задача 2. *Три прямые пересекаются в одной точке так, что каждые две из них образуют угол 60°. Точка М находится на расстоянии 3 см от одной прямой и на расстоянии 5 см — от другой. На каком расстоянии от третьей прямой может находиться точка М?*

Решение задачи основано на следующем факте, общем для всех точек плоскости. Для любой точки расстояние до одной из прямых, указанных в условии, равно сумме расстояний до двух других. Поэтому искомое расстояние может быть равно либо $5+3=8$ *см*, либо $5-3=2$ *см*. Легко проверить, что оба эти значения действительно возможны.

Задача 3. *Какую цифру означает каждая из букв* М, И, Л, А, Н *в равенстве* НАЛИМ × 4 = ЛИМАН?

Ясно, что Н$\leqslant$2, так как иначе число НАЛИМ × 4 было бы шестизначным. С другой стороны Н четно, как последняя цифра числа ЛИМАН, делящегося на 4. Поэтому Н=2. Отсюда следует, что А$<$5, иначе получим шестизначное произведение. Кроме того, А=1 или 3, поскольку А2— последние две цифры числа, делящегося на четыре. Рассмотрим два случая:

I. А=1. Последовательно получаем Л=8, И=7, М=5, что отбрасывается проверкой.

II. А=3, Л=9, И=5, М=8, что и дает ответ.

(В решении мы пользовались тем, что перенос из предыдущего разряда не может быть больше трех).

Задача 4. *Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная линия, состоящая из 7 звеньев?*

Звено ломаной не может пересечься с самим собой и своими соседями. Значит, каждое звено пересекается не более чем с четырьмя. Отсюда точек пересечения не больше чем $\frac{7\times 4}{2}=14$. На рисунке 1 показана ломаная, имеющая 14 точек самопересечения.

Задача 5. *Дедушка с внуком пошли вместе кататься на лыжах. Бабушка знает, что по ровному месту оба едут со скоростью 7 км/час; под гору: дедушка — 8 км/час, внук — 20 км/час; в гору: дедушка —6 км/час, внук — 4 км/час. Оба проехали по одному и тому же маршруту.*

*Может ли бабушка определить, что больше — протяженность спус-*

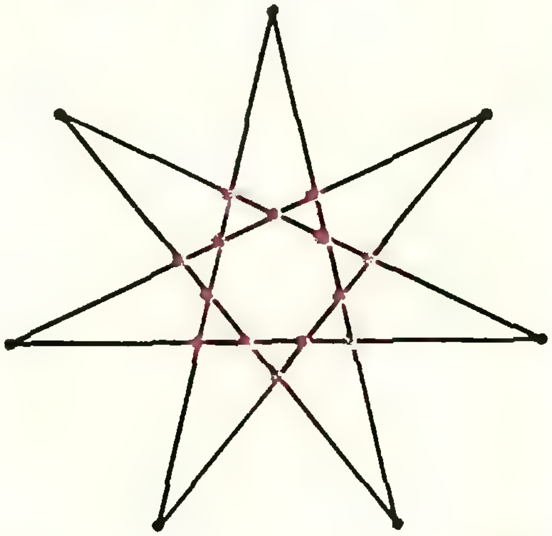


Рис. 1.

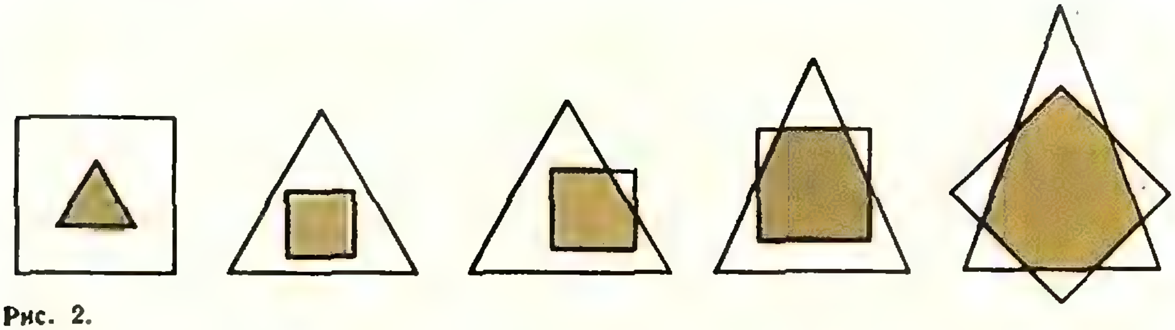


Рис. 2.

*ков или подъемов на их пути, — если первым вернулся*

*а) внук,*

*б) дедушка?*

Обозначим протяженность подъемов через $x$, а протяженность спусков через $y$. (Ровное место можно вообще не учитывать, так как на нем скорости деда и внука одинаковы.) Тогда время деда на подъемах и спусках равно $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}$, а время внука равно $\frac{x}{4}+\frac{y}{20}$. Пусть известно, какое из этих чисел меньше другого, что мы запишем так: $\frac{x}{6}+\frac{y}{8} \vee \frac{x}{4}+\frac{y}{20}$. Преобразуя, получаем: $9y \vee 10x$. Если внук вернулся раньше, то $9y>10x$, откуда $y>x$. Если же дед вернулся раньше, то $9y<10x$, что возможно как при $y<x$, так и при $y>x$.

Задача 6. *Сколько сторон может иметь многоугольник, являющийся:*

*а) пересечением;*

*б) объединением*

*треугольника и выпуклого четырехугольника? (Укажите все возможные значения и нарисуйте примеры.)*

а) На рисунке 2 показано, как при пересечении могут получиться многоугольники с 3, 4, 5, 6, 7 сторонами. Больше семи сторон получиться не может, так как все стороны пересечения лежат на сторонах пересекающихся фигур, причем на разных, а их всего семь.

б) На рисунке 3 показано, как при объединении могут получиться многоугольники с числом сторон от трех

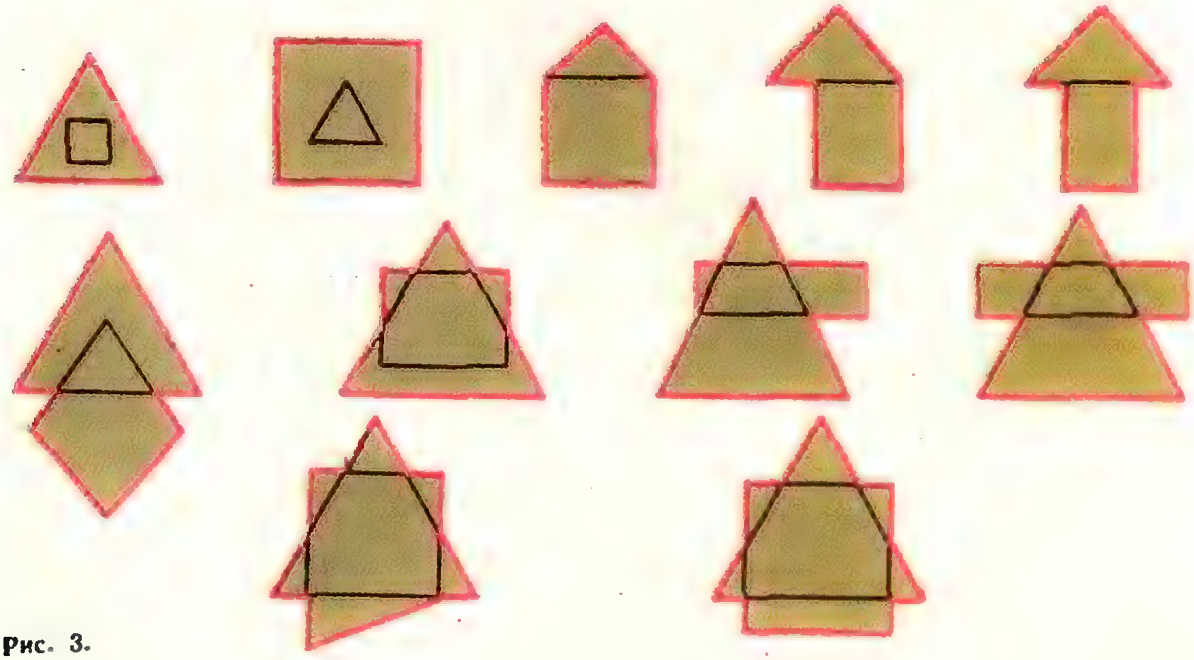


Рис. 3.

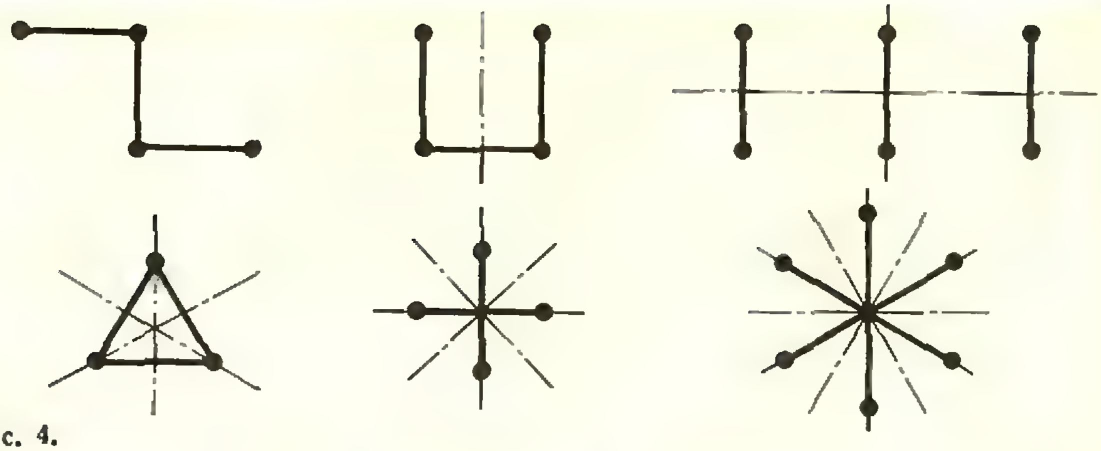


Рис. 4.

до тринадцати. Больше тринадцати вершин объединение иметь не может, потому что каждая вершина объединения — это

1) либо вершина одной из объединяемых фигур, а их всего семь;

2) либо точка пересечения их сторон, а их не более чем по две на каждой стороне треугольника.

Задача 7. *На плоскости нарисованы три конгруэнтных отрезка. Сколько осей симметрии может иметь это множество (объединение данных трех отрезков)?*

На рисунке 4 показаны множества, имеющие 0,1, 2, 3, 4, 6 осей симметрии соответственно. Докажем, что иного числа осей симметрии фигура иметь не может.

Убедитесь самостоятельно, что если несовпадающих отрезков меньше трех, то осей симметрии не больше четырех.

Пусть наше множество состоит из трех несовпадающих отрезков. Легко понять, что симметрия фигуры переводит один из отрезков в себя. Для каждого отрезка есть лишь две симметрии, переводящие его в себя (их осями служат прямая, на которой лежит отрезок, и его серединный перпендикуляр). Значит, всего осей симметрии не более шести.

Остается доказать, что не может быть пяти осей симметрии. Для этого мы воспользуемся следующим фактом. Если прямые I и II являются осями симметрии фигуры $\Phi$, то прямая III, симметричная прямой II относительно прямой I, тоже является осью симметрии для $\Phi$. (См. рис. 5, на котором показано, как получить точку $A_3$, симметричную $A_1$ относительно III.) Пусть осей симметрии пять. Тогда множество осей включает прямую I, содержащую некоторый отрезок, и серединный перпендикуляр к нему — иначе осей было бы меньше четырех. Но тогда осей — четное число; можно объединить в пары оси, симметричные относительно I, а осей, перпендикулярных I, кроме оси II, нет — иначе их было бы бесконечное число (см. рис. 6).

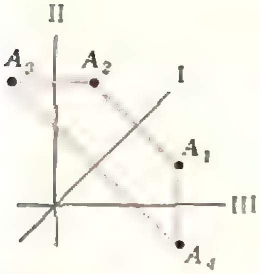


Рис. 5.

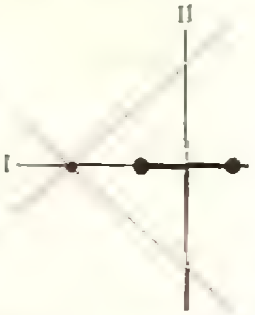
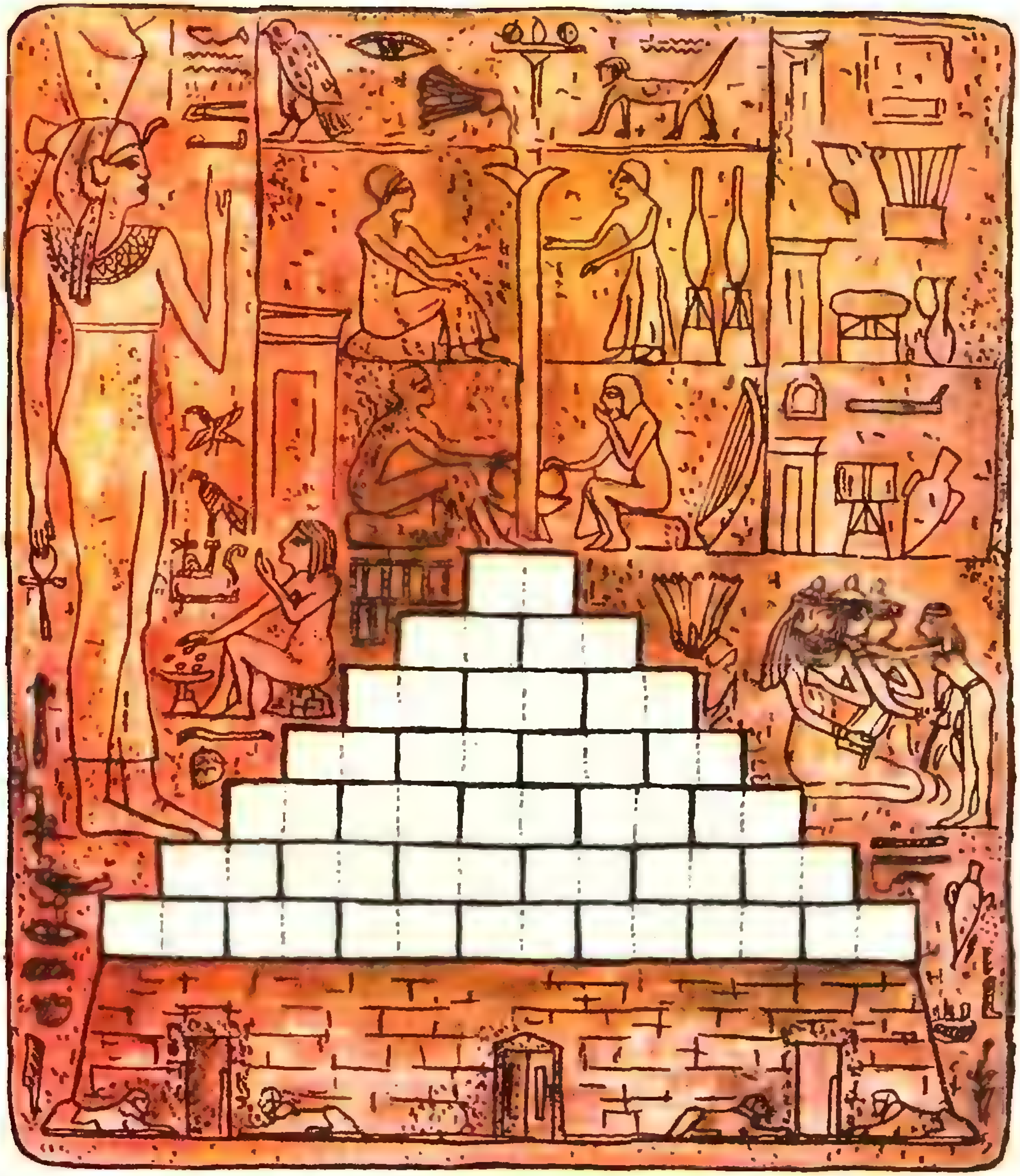


Рис. 6.



# ПИРАМИДА ИЗ ДОМИНО

Расположите комплект домино (28 косточек) в виде пирамиды (см. рисунок), соблюдая следующие условия.

1. В каждой строке сумма очков на косточках должна быть точным квадратом.

2. В строках косточки укладываются согласно правилам игры в домино: 0 к 0, 1 к 1 и т. д.

*Л. Мочалов*

# задачник кванта

## Задачи

### M386—M390; Ф398—Ф402

**Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 августа 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», M386, M387» или «...Ф398». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.**

**Задачник «Кванта» в этом номере составлен из задач, предлагавшихся в этом году на Московских олимпиадах по математике и физике.**

**M386**. Квадратная комната разгорожена перегородками, параллельными стенам, на несколько меньших квадратных комнат. Длина стороны каждой комнаты — целое число. Докажите, что сумма длин всех перегородок делится на 4.

*С. Фомин*

**M387***. Существует ли такое натуральное число, что если приписать его само к себе справа, то получится точный квадрат?

*Б. Кукушкин*

**M388** а) На плоскости отмечено конечное число точек. Докажите, что среди них найдется точка, у которой не более трех ближайших (то есть, находящихся от нее на наименьшем расстоянии; таких точек, вообще говоря, может быть несколько).

б) Существует ли на плоскости конечное множество точек, у каждой из которых в этом множестве ровно три ближайших?

*А. Карабегов*

**M389**. Можно ли бесконечный лист клетчатой бумаги разбить на «доминошки» (каждая доминошка покрывает две соседние клетки) так, чтобы каждая прямая, идущая по линии сетки, разрезала пополам лишь конечное число доминошек?

*С. Фомин*

**M390***. Докажите, что существует бесконечно много натуральных $n$, для которых сумма цифр числа $2^n$ больше суммы цифр числа $2^{n+1}$.

*С. Конягин*

**Ф398.** При подключении в сеть трехламповой люстры с двумя выключателями была допущена ошибка. В результате этого при замыкании одного из выключателей все три лампы горели неполным накалом. При замыкании другого выключателя горела нормально только одна из ламп (две другие не горели), и тот же эффект давало замыкание обоих выключателей одновременно. При разомкнутых выключателях все три лампы не горели. Нарисуйте возможную схему выполненного монтажа, объясните наблюдаемые эффекты. (8 класс)

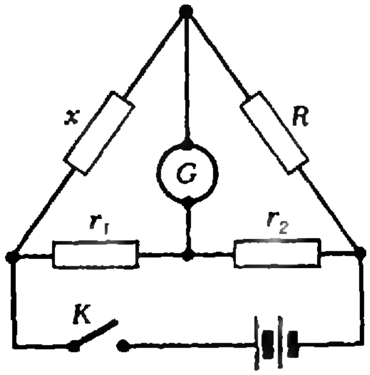


Рис. 1.

**Ф399.** Три небольших одинаковых металлических шарика, находящихся в вакууме, помещены в вершинах равностороннего треугольника. Шарики поочередно по одному разу соединяют с удаленным проводником, потенциал которого поддерживается постоянным. В результате на первом шарике оказывается заряд $Q_1$, а на втором — $Q_2$. Определить заряд третьего шарика. (9 класс)

**Ф400.** Две заряженные частицы имели первоначально одинаковые по величине и направлению скорости. После того как на некоторое время было включено однородное электростатическое поле, вектор скорости одной из частиц повернулся на 60°, а численное значение скорости уменьшилось вдвое. Вектор скорости другой частицы повернулся на 90°. Во сколько раз изменилось численное значение скорости второй частицы? Определите отношение заряда к массе для второй частицы, если для первой частицы оно равно $k_1$. (9 класс)

**Ф401.** Схему, изображенную на рисунке 1 (мостик Уитстона), применяют обычно для измерения неизвестного сопротивления $x$. Как, используя подобную схему, измерить сопротивление $R_G$ самого гальванометра $G$, если второго гальванометра нет? (10 класс)

**Ф402.** Рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F = -0{,}6$ *м* расположена так, что один из ее фокусов совпадает с полюсом вогнутого зеркала. Каково фокусное расстояние $F_1$ зеркала, если известно, что система дает действительное изображение предмета, помещенного на любом расстоянии перед линзой? Изображение создается лучами, вторично прошедшими через линзу после отражения от зеркала. (10 класс)

# Решения задач

## М343—М350; Ф353—Ф357

**М343.** *В некотором государстве города соединены дорогами. Длина любой дороги меньше 500 км и из любого города в любой можно попасть, проехав по дорогам*

Будем обозначать города буквами $A$, $B$, $C$, $D$,... Прежде всего заметим, что: 1) если какой-то путь $A$ — ... — $B$ — ... — $C$ — ... — кратчайший между городами $A$ и $C$, то часть его, например, от $A$ до $B$ — кратчайший путь между соответствующими городами; 2) кратчайший путь не проходит по одной дороге дважды.

*менее 500 км. Когда одну дорогу закрыли на ремонт, выяснилось, что из любого города можно проехать в любой другой по оставшимся дорогам. Докажите, что это можно сделать, проехав не более 1500 км.*

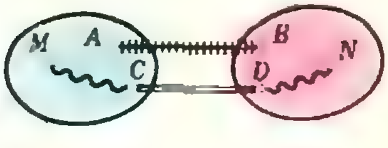


Рис. 1.

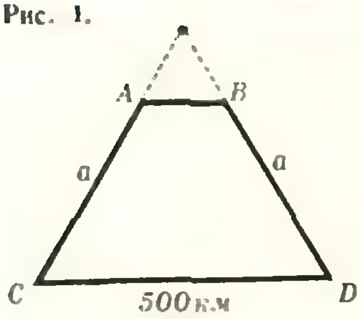


Рис. 2.

Допустим теперь, что закрыли дорогу, соединяющую города $A$ и $B$; обозначим ее через $AB$. Поделим все города на две группы: к первой группе отнесем город $A$ и те города, кратчайший путь из которых в город $A$ не проходил по дороге $AB$, а ко второй — все остальные. Нужно считать, что город $B$ окажется во второй группе — иначе во второй группе не будет вообще ни одного города; ведь если $AB$ — не кратчайший путь из $A$ и $B$, то ни один из кратчайших путей не может проходить по дороге $AB$, то есть дорога $AB$ тогда — *бесполезная*.

Пусть $M$ и $N$ — города, кратчайший путь между которыми составляет теперь больше 500 *км*. Значит, раньше кратчайший путь между $M$ и $N$ проходил по дороге $AB$. Но тогда кратчайший путь в город $A$ из одного из этих городов проходил по дороге $AB$, а из другого — нет (см. замечание в начале решения); следовательно, города $M$ и $N$ принадлежат разным группам. Рассуждая от противного, получаем, что любые два города, принадлежащие одной и той же группе, могут быть соединены путем длины меньше 500 *км*.

Поскольку из города $A$ по-прежнему можно проехать в город $B$, то найдутся два города $C$ и $D$ такие, что $C$ принадлежит первой группе, а $D$ — второй, и город $C$ соединен дорогой с $D$. Теперь понятно, как из любого города $M$ первой группы попасть в любой город $N$ второй группы, проехав меньше 1500 *км*: нужно из $M$ поехать вначале в город $C$ (этот путь меньше 500 *км*, так как $M$ и $C$ принадлежат одной и той же группе), затем — из $C$ в $D$ (длина дороги $CD$ меньше 500 *км* по условию), и, наконец, из города $D$ — в город $N$ (города $D$ и $N$ — из одной группы, поэтому путь из $D$ в $N$ снова меньше 500 *км*) — см. рисунок 1.

Оценку 1500 *км* нельзя улучшить. Действительно, если четыре города $A$, $B$, $C$ и $D$ расположены так, как показано на рисунке 2 ($ABCD$ — трапеция такая, что при продолжении ее боковых сторон получается равносторонний треугольник), то, закрыв дорогу $AB$, получим, что длина кратчайшего пути между $A$ и $B$ равна $(500+2a)$ *км*, где $a$ можно сделать сколь угодно близким к 500.

*С. Елисеев*

◆

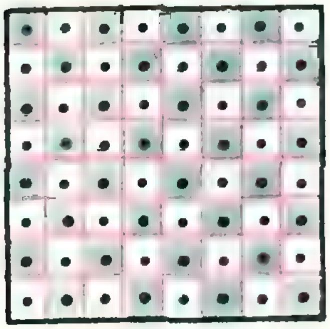


Рис. 3.

**М344.** *На шахматной доске отмечены центры всех 64 полей. Можно ли провести на доске 13 прямых так, чтобы в каждой из частей, на которые эти прямые делят доску, оказалось не более одной отмеченной точки? (Прямые не должны проходить через центры полей.)*

На рисунке 3 показано, как провести 14 прямых (на рисунке эти прямые — красные), разделяющих все центры полей шахматной доски.

Однако 13 прямых для этого недостаточно.

Действительно, рассмотрим квадрат, проходящий через центры всех 28 граничных клеток (на рисунке 4 это квадрат из черных точек). Ясно, что 13 прямых пересекают его не более чем в 26 точках, и поэтому разрезают не более чем на 26 частей, то есть два «граничных» центра окажутся в одной части. Значит, для разделения 28 граничных, а следовательно, и всех центров понадобится не менее 14 прямых.

*Ю. Лысов*

◆

**М345.** *В последовательности 1 9 7 5 2 3 ... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырех цифр. Встретятся ли в этой последовательности подряд*

Для решения задачи пункта а) достаточно заметить, что в последовательности 1975... после каждой четной цифры идут подряд четыре нечетные цифры. Поэтому четверка 1 2 3 4 в этой последовательности встретиться не может.

Пункты б) и в) разберем более подробно.

В условии задачи дано правило, как по четырем рядом стоящим цифрам определять следующую цифру. Попробуем *а) четыре цифры 1 2 3 4?*

*б) вторично цифры 1 9 7 5?*

*в) цифры 8 1 9 7?*

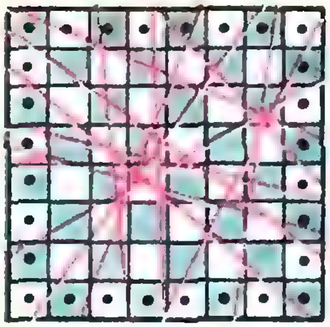


Рис. 4.

сделать «наоборот»: по четырем рядом стоящим цифрам $a\ b\ c\ d$ определить предшествующую им цифру $x$. Поскольку цифра $d$ следует за четверкой цифр $x\ a\ b\ c$, то цифра $d$ равна последней цифре суммы $x + a + b + c$ и, значит, $x + a + b + c = 10k + d$ при некотором целом $k$. Отсюда, $x = 10k + (d - a - b - c)$. Поскольку $x$ — цифра, то из последнего выражения следует, что $x$ равно остатку от деления на 10 числа $(d - a - b - c)$. Разделить число $p$ на число $q$ с остатком, — значит, найти числа $s$ и $r$ такие, что $p = sq + r$ и $0 \leqslant r < q$. (Обратите внимание, что остаток от деления числа — 13 на 10 равен 7, а не — 3!) Остаток от деления одного целого числа на другое определяется однозначно; значит, цифра $x$ также определяется однозначно.

Например, чтобы определить цифру, предшествующую четверке 1 9 7 5, надо от 5 отнять 1, 9, 7 и разделить полученное число (—12) с остатком на 10. В остатке получим 8; значит цифра 8 предшествует четверке 1 9 7 5.

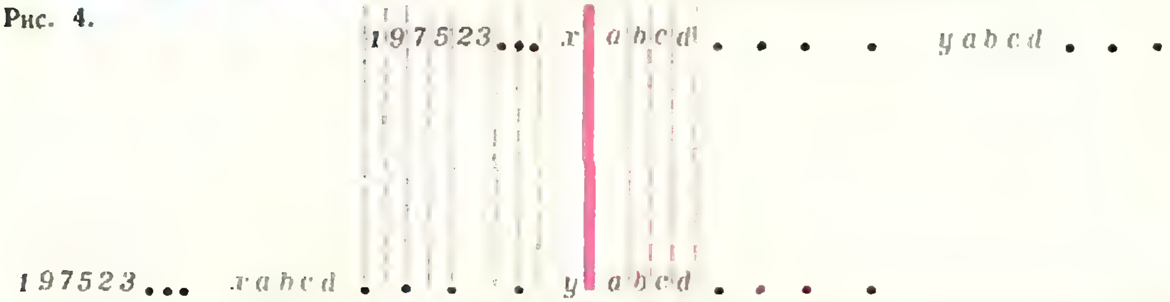

1 9 7 5 2 3 ... x a b c d . . . . y a b c d . . .
1 9 7 5 2 3 ... x a b c d . . . . y a b c d . . . .

Рис. 5.

Итак, мы доказали следующее утверждение: *двум одинаковым четверкам цифр, стоящих рядом в последовательности 197523..., предшествует одна и та же цифра.*

Поскольку различных четверок цифр конечное число, а именно, 10000 штук, — то в бесконечной последовательности 197523 ... какая-то четверка встретится вторично. Пусть это будет четверка цифр $a$, $b$, $c$, $d$. Тогда последовательность имеет вид

$$1\ 9\ 7\ 5\ 2\ 3\ \ldots\ x\ a\ b\ c\ d \ldots\ y\ a\ b\ c\ d \ldots \qquad (*)$$

Напишем под последовательностью (*) эту же последовательность еще раз, но «сдвинутую», так, чтобы под первой четверкой $a\ b\ c\ d$ оказалась вторая (см. рис. 5). Согласно доказанному выше утверждению, цифры в первом столбце, расположенном левее красной линии, совпадают, т. е. $x = y$. Аналогично, совпадают цифры и в предшествующем $x$ и $y$ столбце, и так далее. Таким образом, в каждом из столбцов, расположенных левее красной линии, цифры совпадают. Поэтому под четверкой 1 9 7 5 в «верхней» последовательности стоит четверка 1 9 7 5 в «нижней» последовательности. А это и означает, что четверка 1 9 7 5 встречается в последовательности 1 9 7 5 2 3... вторично.

Как было показано выше, перед четверкой цифр 1 9 7 5 встречающейся в последовательности 1 9 7 5 2 3...во второй раз, будет стоять цифра 8. Значит, в рассматриваемой последовательности встретится и четверка 8 1 9 7.

*Г. Гуревич*

◆

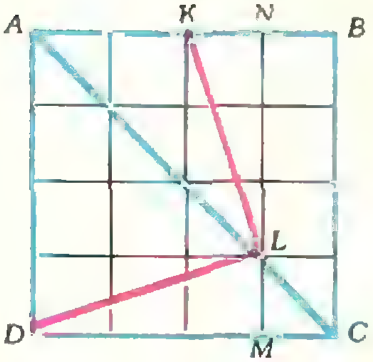


Рис. 6.

**М346**. *Точка $K$ — середина стороны $AB$ квадрата $ABCD$, а точка $L$ делит диагональ $AC$ в отношении 3 : 1. Докажите, что угол $KLD$ — прямой.*

Положим квадрат на клетчатую бумагу со стороной клетки, равной $^1/_4$ стороны квадрата, так, как показано на рисунке 6 (точки $K$ и $L$ при этом попадут в узлы решетки!). Очевидно, что треугольники $KNL$ и $MLD$ конгруэнтны, $\measuredangle LDM \cong \measuredangle KLN$, и значит, $\widehat{DLM} + \widehat{KLN} = 90^\circ$. Поэтому $\widehat{DLK} = 180^\circ - (\widehat{DLM} + \widehat{KLN}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

*Л. Лиманов*

**M347.** *Двое играют в такую игру. Первый загадывает два числа от 1 до 25, а второй должен их угадать. Он может назвать любые два числа от 1 до 25 и узнать у первого, сколько из названных им чисел — 0,1 или 2 — совпадают с загаданными. За какое минимальное число вопросов он сможет наверняка определить загаданные числа?*

Многие читатели успешно справились с определением загаданных чисел за 14 вопросов. Покажем, что всегда можно определить загаданные числа не более чем за 13 вопросов.

Называя пары (1,2), (3,4),…,(21,22), мы используем 11 вопросов; при этом возможны следующие 4 случая:

а) после какого-то вопроса получен ответ «2»;

б) на все вопросы получены ответы «0»;

в) на какие-то два вопроса — $i$-й и $j$-й — получены ответы «1»;

г) только на один $i$-й вопрос получен ответ «1», на остальные вопросы—«0» (невнимательное рассмотрение этого случая многих заставило считать, что нельзя гарантировать определение загаданных чисел за 13 вопросов).

Укажем дальнейшие действия отгадывающего в каждом из этих случаев.

а) После ответа «2» загаданные числа определены.

б) Загаданы два числа из чисел 23,24,25. Задаем вопрос (23,24). Если ответ «2», то эти числа и загаданы, если ответ «1», то вопросом (23,22) определим, какое из чисел — 23 или 24 — загадано наряду с числом 25.

в) Числа в $i$-й паре $(2i-1)$ и $2i$, в $j$-й паре —$(2j-1)$ и $2j$. Задаем вопросы $(25,2i)$, $(25,2j)$. Ответ «1» на первый (двенадцатый) вопрос означает, что в $i$-й паре загадано число $2i$; ответ «0» указывает на число $(2i-1)$. Аналогично со вторым (тринадцатым) вопросом.

г) Вопросы $(2i, 23)$, $(2i, 24)$ при всех возможных ответах определяют загаданные числа. В самом деле, ответ «2» на первый или второй вопрос не требует пояснений. Для других комбинаций ответов на эти два вопроса мы сообщаем загаданные числа (легко проверяется, что другого мнения в том, какие числа загаданы, не может быть)— см. таблицу на рисунке 7.

| *Ответ* | *Загаданы числа* |
|---|---|
| 1 , 1 | $2i$ , 25 |
| 1 , 0 | $2i-1$ , 23 |
| 0 , 1 | $2i-1$ , 24 |
| 0 , 0 | $2i-1$ , 25 |

*Таблица*

**Рис. 7.**

Итак, мы показали, что за 13 вопросов всегда можно определить загаданные числа; естественно, как следует из решения, иногда хватает и меньшего количества вопросов.

Для завершения решения докажем, что нельзя гарантировать определение загаданных чисел за 12 вопросов. После 11 вопросов все ответы могут быть «0»; при этом всегда существуют три числа, не включенные в вопросы. Если двенадцатый вопрос не содержит ни одно из этих трех чисел, то ответ «0» позволит любым двум из них быть загаданными. Если же в двенадцатый вопрос входит одно или два из этих трех чисел, то после ответа «1» также нельзя однозначно указать загаданные числа.

*Ю. Лысов*

◆

**M348.** *В таблицу 10×10 записаны числа от 1 до 100 по порядку. Затем в каждой строке и в каждом столбце ровно у половины чисел поставлен знак минус. Докажите, что в получившейся таблице сумма всех чисел равна нулю.*

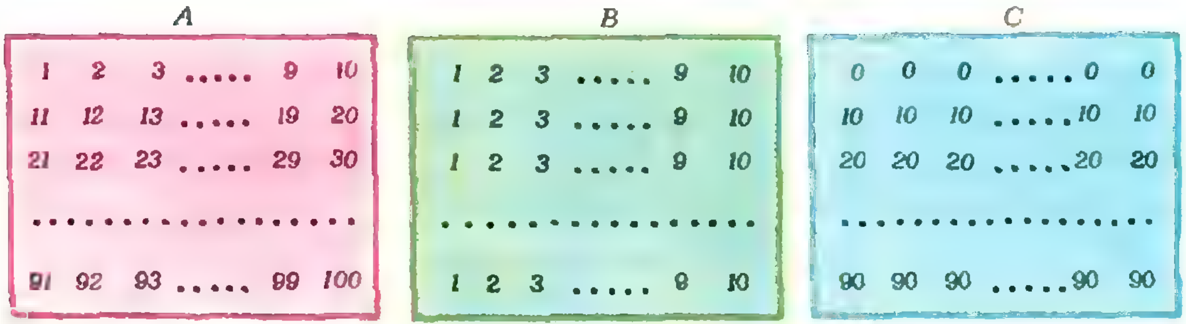
Представим данную таблицу $A$ в виде суммы двух таблиц $B$ и $C$ (рис. 8). Расставим знаки в каждой из таблиц $A$, $B$ и $C$ одинаковым образом — так, что в каждой строке и в каждом столбце ровно у половины чисел будет минус. Тогда в полученной таблице $B$ сумма чисел будет равна нулю в каждом столбце, а в полученной таблице $C$ сумма чисел будет равна нулю в каждой строке. Следовательно, сумма всех чисел в таблицах $B$, $C$, а значит, и в $A=B+C$ будет равна нулю.

*Н. Васильев*

◆

**M349.** *Какому условию должны удовлетворять длины сторон треугольника, чтобы треугольник, сос-*

Обозначим данный треугольник через $ABC$, длины его сторон $BC$, $AC$ и $AB$ — через $a$, $b$ и $c$, величины противолежащих этим сторонам углов — через $A$, $B$ и $C$ соответственно. Предположим, что $a\leqslant b\leqslant c$ (тогда и $A\leqslant B\leqslant C$). Пусть $h_a$, $h_b$, $h_c$ —



| A |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | ..... | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | ..... | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | ..... | 29 | 30 |
| ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... |
| 91 | 92 | 93 | ..... | 99 | 100 |

| B |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | ..... | 9 | 10 |
| 1 | 2 | 3 | ..... | 9 | 10 |
| 1 | 2 | 3 | ..... | 9 | 10 |
| ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... |
| 1 | 2 | 3 | ..... | 9 | 10 |

| C |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | ..... | 0 | 0 |
| 10 | 10 | 10 | ..... | 10 | 10 |
| 20 | 20 | 20 | ..... | 20 | 20 |
| ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... |
| 90 | 90 | 90 | ..... | 90 | 90 |

**Рис. 8.**

$A=B+C$

*тавленный из а) высот, б) медиан, в) биссектрис данного треугольника, был подобен данному?*

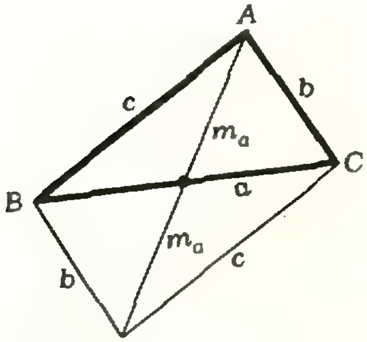


**Рис. 9.**

длины высот треугольника, опущенных из вершин $A$, $B$, $C$; $m_a$, $m_b$ и $m_c$ — длины медиан, $l_a$, $l_b$ и $l_c$ — биссектрис.

Мы будем пользоваться тем фактом, что у подобных треугольников сходственные стороны (лежащие против соответственно равных углов) пропорциональны.

а) Поскольку $h_a\cdot a=h_b\cdot b=h_c\cdot c$ ($=2S$, где $S$ — величина площади треугольника $ABC$), и $a\leqslant b\leqslant c$, мы получаем, что $h_a\geqslant h_b\geqslant h_c$. Значит, если треугольник $ABC$ и треугольник, составленный из его высот, подобны, то сходственными у них будут стороны длины $a$ и $h_c$, $b$ и $h_b$, $c$ и $h_a$ соответственно. Поэтому в случае подобия должны быть выполнены равенства $h_a:h_b:h_c=c:b:a$, то есть $\frac{h_a}{h_b}=\frac{c}{b}$ и $\frac{h_a}{h_c}=\frac{c}{a}$. Второе соотношение всегда имеет место, поэтому треугольник $ABC$ ($a\leqslant b\leqslant c$) будет подобен треугольнику из своих высот, если $\frac{h_a}{h_b}=\frac{c}{b}$. Но $\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}$, следовательно, должно быть $\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$, откуда $b^2=ac$.

б) Прежде всего, как и в пункте а), выясним, какие стороны у треугольника $ABC$ ($a\leqslant b\leqslant c$!) и у треугольника, составленного из его медиан, должны быть сходственными. Для этого докажем, что если $a\leqslant b\leqslant c$, то $m_a\geqslant m_b\geqslant m_c$. Выразим $m_a$, $m_b$ и $m_c$ через длины сторон $a$, $b$ и $c$ треугольника $ABC$. Так как сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон, то (рис. 9):

$$(2m_a)^2=2b^2+2c^2-a^2,$$
$$(2m_b)^2=2c^2+2a^2-b^2,$$
$$(2m_c)^2=2a^2+2b^2-c^2.$$

Поскольку $2b^2+2c^2-a^2=(2c^2+2a^2-b^2)+(3b^2-3a^2)$ и $3b^2-3a^2\geqslant 0$, имеем $m_a\geqslant m_b$. Аналогично $m_b\geqslant m_c$, и утверждение доказано. Следовательно, должны быть справедливы следующие равенства: $m_a:m_b:m_c=c:b:a$, то есть

$$\frac{m_a}{m_b}=\frac{c}{b} \text{ и } \frac{m_a}{m_c}=\frac{c}{a}. \qquad (1)$$

Подставим в соотношения (1) выражения $m_a$, $m_b$ и $m_c$ через $a$, $b$ и $c$. Получим

$$\frac{2b^2+2c^2-a^2}{2a^2+2c^2-b^2}=\frac{c^2}{b^2} \quad (2) \text{ и } \frac{2b^2+2c^2-a^2}{2b^2+2a^2-c^2}=\frac{c^2}{a^2} \quad (2')$$

Из условия (2′) имеем
$$2b^2(a^2-c^2)=(a^2-c^2)(a^2+c^2),$$
то есть либо $a=c$, либо $2b^2=a^2+c^2$.

Если $a=c$, то треугольник $ABC$ — равносторонний: $a=b=c$ (так как $a\leqslant b\leqslant c$), и мы получаем это условие как частный случай условия $2b^2=a^2+c^2$.

Легко видеть, что если $2b^2=a^2+c^2$, то справедливо и условие (2). Поэтому если длины $a$, $b$ и $c$ ($a\leqslant b\leqslant c$) сторон треугольника $ABC$ связаны соотношением $2b^2=a^2+c^2$, то этот треугольник подобен треугольнику, составленному из его медиан.

в) Снова нужно выяснить, какие стороны у треугольника $ABC$ и у треугольника из его биссектрис могут быть сходственными (в предположении, что эти треугольники подобны). Напомним, что у нас $a\leqslant b\leqslant c$. Докажем, что тогда $l_a\geqslant l_b\geqslant l_c$.

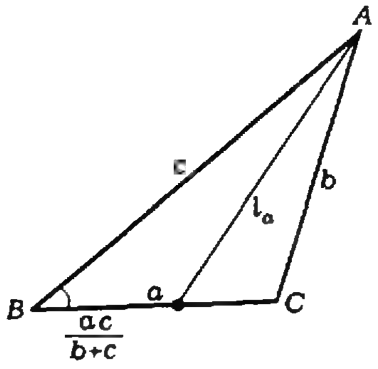


Рис. 10

Выразим $l_a$, $l_b$ и $l_c$ через $a$, $b$ и $c$. По теореме косинусов и теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника имеем (рис. 10):

$$l_a^2=c^2+\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2-2c\,\frac{ac}{b+c}\cos B=c^2+\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2-$$

$$-\frac{2ac^2}{b+c}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=bc\left[1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right].$$

Аналогично

$$l_b^2=ac\left[1-\frac{b^2}{(a+c)^2}\right] \text{ и } l_c^2=ab\left[1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right].$$

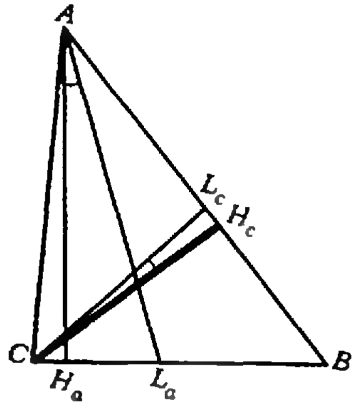


Рис. 11.

Поскольку $a\leqslant b$, получаем $b+c\geqslant a+c$, то есть $\frac{a}{(b+c)^2}\leqslant\frac{b}{(a+c)^2}$, и $\frac{a^2b}{(b+c)^2}\leqslant\frac{ab^2}{(a+c)^2}$; следовательно, $c\left[b-\frac{a^2b}{(b+c)^2}\right]\geqslant c\left[a-\frac{ab^2}{(a+c)^2}\right]$, то есть $l_a\geqslant l_b$. Неравенство $l_b\geqslant l_c$ доказывается аналогично.

Итак, если треугольник $ABC$ ($a\leqslant b\leqslant c$) подобен треугольнику из биссектрис, то должны быть выполнены равенства $l_c:l_b:l_a=a:b:c$, то есть $\frac{l_c}{l_a}=\frac{a}{c}$ и $\frac{l_b}{l_a}=\frac{b}{c}$.

Посмотрим, когда эти условия выполняются.

Если $\frac{l_c}{l_a}=\frac{a}{c}$, то $al_a=cl_c$. Но аналогичное соотношение всегда имеет место для высот: $ah_a=ch_c$ (см. пункт а). Значит (рис. 11), прямоугольные треугольники $AH_aL_a$ и $CH_cL_c$, где $|AH_a|=h_a$, $|AL_a|=l_a$, $|CH_c|=h_c$, $|CL_c|=l_c$, подобны, причем стороны длины $h_a$, $h_c$ и $l_a$, $l_c$ у них сходственные. Следовательно, углы, образуемые сторонами $AH_a$, $AL_a$ и $CH_c$, $CL_c$, будут равны: $H_a\widehat{A}L_a=H_c\widehat{C}L_c$. Посчитаем эти углы.

Напомним, что у нас $a\leqslant b\leqslant c$, то есть $A\leqslant B\leqslant C$. Из этого условия следует, что $L_c\in[AH_c]$, а $L_a\in[BH_a]$.

Поэтому $H_a\widehat{A}L_a=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}-B$, $H_c\widehat{C}L_c=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}-A$,

и так как $H_a\widehat{A}L_a=H_c\widehat{C}L_c$, то $\frac{A}{2}+B=\frac{C}{2}+A$, то есть

$B = \frac{A+C}{2} = \frac{\pi}{3}$ (сравни с решением M318, «Квант», 1975, № 12). Покажем, что на самом деле треугольник будет подобен треугольнику из своих биссектрис лишь тогда, когда у него все углы (а не только $B$!) равны $\frac{\pi}{3}$, то есть лишь тогда, когда он равносторонний.

Для этого воспользуемся вторым соотношением $\frac{l_b}{l_a} = \frac{b}{c}$.

Опишем вокруг треугольника $ABC$ с углом $B$, равным $\frac{\pi}{3}$, окружность и построим на основании $AC$ этого треугольника правильный треугольник $AB'C$ (рис. 12). Если $|B'D| = 2R$ — диаметр окружности, то $BD$, очевидно, биссектриса угла $B$, так что $|BL_b| = l_b$. Обозначим угол $BCB'$ через $\varphi$; легко видеть, что $\varphi = \widehat{BCB'} = \widehat{BAB'} = \widehat{BDB'}$, так что

$$l_b = |BD| - |DL_b| = 2R\cos\varphi - \frac{R}{2\cos\varphi}.$$

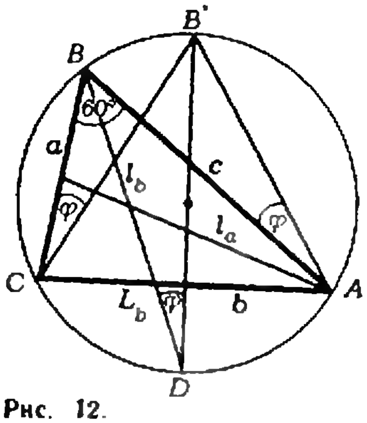


Рис. 12.

Поскольку $b = R\sqrt{3}$, имеем $\frac{l_b}{b} = \frac{2\cos\varphi - 1/2\cos\varphi}{\sqrt{3}}$.

Далее

$$\frac{l_a}{c} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{2}\right)\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2\cos\frac{\varphi}{2}},$$

и так как $\frac{l_b}{b} = \frac{l_a}{c}$, должно быть

$$\cos\frac{\varphi}{2}\left(2\cos\varphi - \frac{1}{2\cos\varphi}\right) = \frac{3}{2}. \qquad (*)$$

Легко видеть, что $\varphi = 0$ — корень этого уравнения. Тогда $A = B = C = \frac{\pi}{3}$, и треугольник $ABC$ равносторонний (совпадает с треугольником $AB'C$). Далее заметим, что $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{3}$. Поэтому $\cos\frac{\varphi}{2}$ убывает $\left(\text{от } 1 \text{ до } \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $2\cos\varphi$ убывает, $\frac{1}{2\cos\varphi}$ возрастает, так что $2\cos\varphi - \frac{1}{2\cos\varphi}$ убывает, и вся левая часть, когда $\varphi \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ убывает. Поэтому у уравнения (*) в промежутке $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$ корней, отличных от нуля, нет, и мы получаем окончательный ответ: если треугольник подобен треугольнику, составленному из его биссектрис, то этот треугольник равносторонний.

*И. Клумова*

**М350.** *С белого углового поля шахматной доски размерами $n\times m$ ($n$ и $m$ больше 1) начинает двигаться слон. Дойдя до края доски, слон поворачивает под прямым углом. Попав в угол, он останавливается.*

*а) При каких $n$ и $m$ слон обойдет все белые поля доски?*

*б) Сколько всего полей он обойдет на доске $n\times m$?*

*Рассмотрите в качестве примеров доски размерами* $10\times 15$, $10\times 25$, $15\times 25$.

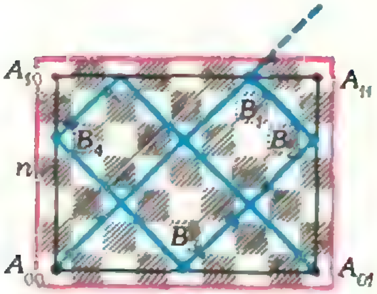


Рис. 13.

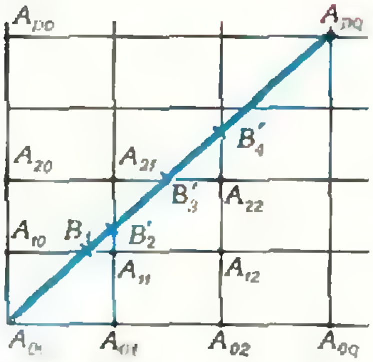


Рис. 14.

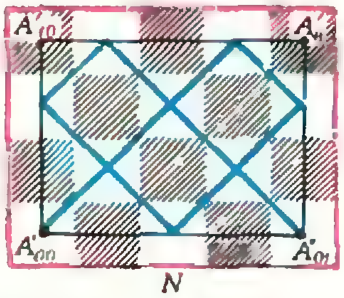


Рис. 15.

а) Рассмотрим прямоугольник $A_{00}A_{01}A_{11}A_{10}$ с вершинами в центрах угловых полей (рис. 13) $|A_{00}A_{10}|=n-1$, $|A_{00}A_{01}|=m-1$. Возьмем *решетку*, порождаемую этим прямоугольником (рис. 14). Обозначим *узлы* такой решетки через $A_{ij}$, $i,j=0,1,2,\ldots$ (Узел $A_{ij}$ — это точка пересечения прямой, проходящей через $A_{i0}$ параллельно $(A_{00}A_{01})$, с прямой, проходящей через $A_{0j}$ параллельно $(A_{00}A_{10})$; точки $A_{i0}$ $(i=1,2,\ldots)$ лежат на прямой $A_{00}A_{10}$, точки $A_{0j}$ $(j=1,2,\ldots)$ — на прямой $A_{00}A_{01}$, причем $|A_{(i-1)0}A_{i0}|=|A_{i0}A_{(i+1)0}|=|A_{00}A_{10}|$, $|A_{0(j-1)}A_{0j}|=|A_{0j}A_{0(j+1)}|=|A_{00}A_{01}|$.)

Проведем из точки $A_{00}$ луч $d$ под углом 45° к прямой $A_{00}A_{01}$ (биссектрису прямого угла решетки). Тогда пути слона $A_{00}B_1B_2B_3\ldots$ по доске будет соответствовать последовательность точек $A_{00}$, $B_1$, $B_2'$, $B_3'$, …, в которых луч $d$ пересекается со сторонами решетки. Слон останавливается на $l$-м ходу (попав в угол) тогда и только тогда, когда точка $B_l'$ попадает в узел решетки.

Пусть $A_{pq}$ — первый (не считая $A_{00}$) узел решетки, лежащий на луче $d$ (он соответствует достигнутому слоном угловому полю доски). Поскольку $A_{00}A_{0q}A_{pq}A_{p0}$ — квадрат,

$$p\,(n-1)=q\,(m-1)=a; \tag{1}$$

и число $a$ — наименьшее общее кратное чисел $m-1$ и $n-1$ (напомним, что узел $A_{pq}$ — первый).

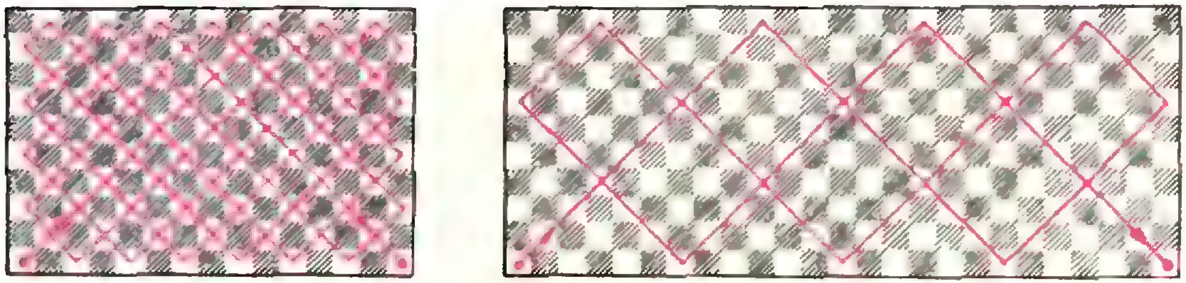
Между узлами $A_{00}$ и $A_{pq}$ луч $d$ пересекает стороны решетки $p+q$ раз, и соответственно $p+q$ раз слон попадет на край доски. На границе доски $2m+2n-4$ полей — поровну белых и черных. Слон побывает на всех белых полях доски в том и только том случае, если он побывает на всех граничных белых полях, т. е. если

$$p+q=m+n-2. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $\dfrac{a}{m-1}+\dfrac{a}{n-1}=(m-1)+(n-1)$, откуда $a=(m-1)(n-1)$. Но наименьшее общее кратное двух чисел равно их произведению тогда и только тогда, когда они взаимно просты; и мы получаем ответ на пункт а) задачи: слон обойдет все белые поля доски тогда и только тогда, когда числа $m-1$ и $n-1$ взаимно просты.

б) Если бы каждое «внутреннее» белое поле доски, через которое слон проходит два раза, считалось дважды, то число белых полей, проходимых слоном, было бы равно $a+1$ (поскольку длина стороны квадрата $|A_{00}A_{0q}|=a$, $a$ — целое число, на диагонали $A_{00}A_{pq}$ лежат центры $a+1$ квадратиков со стороной единица). Чтобы найти, сколько белых полей обойдет слон на самом деле, нужно из $a+1$ вычесть число внутренних белых полей, проходимых слоном дважды. Посчитаем, сколько таких полей.

Обозначим через $b$ наибольший общий делитель чисел $m-1$ и $n-1$ (сейчас мы уже предполагаем, что числа $m-1$ и $n-1$ не взаимно просты; тогда $b>1$ и $(m-1)\times(n-1)=ab$). Положим $M=\dfrac{m-1}{b}+1$, $N=\dfrac{n-1}{b}+1$. Числа $M-1$ и $N-1$ взаимно просты, поэтому, если взять доску размерами $N\times M$, то слон, начав двигаться с белого углового поля, обойдет все ее белые поля. Прямоугольники $A_{00}A_{10}A_{11}A_{01}$ и $A_{00}A'_{10}A'_{11}A'_{01}$ (рис. 15) подобны, поэтому числа самопересечений путей слона на обеих досках (размерами $n\times m$ и $N\times M$) одинаковы. Но так как слон попадает на все граничные белые поля доски $N\times M$ и проходит по всем ее диагоналям, то во



а) б)

**Рис. 16.**

всех внутренних белых полях этой доски (не лежащих на краю, путь слона самопересекается. Число же белых полей, не лежащих на границе доски $N\times M$, равно

$$\left[\frac{MN-(2M+2N-4)+1}{2}\right]=\left[\frac{(M-2)(N-2)+1}{2}\right]$$

(здесь $[x]$ — целая часть числа $x$). Следовательно, на доске $n\times m$ слон обойдет $a+1-\left[\frac{(M-2)(N-2)+1}{2}\right]=$

$$=\frac{(m-1)(n-1)}{b}-\left[\frac{\left(\frac{m-1}{b}-1\right)\left(\frac{n-1}{b}-1\right)+1}{2}-1\right]=$$

$$=\frac{(m-1)(n-1)}{b}-\left[\frac{\left(\frac{m-1}{b}-1\right)\left(\frac{n-1}{b}-1\right)-1}{2}\right]$$ белых полей.

Случаи досок размерами $10\times15$ и $10\times25$ приведены на рисунках 16, *а*, *б* (на доске $10\times15$ слон обходит все белые поля, на доске $10\times25$ — 66 полей). На доске $15\times25$ слон обойдет 136 полей.

◆ *Е. Гик, А. Жорницкий*

**Ф353.** *Фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала равно F. Каким оно станет, если зеркало нагреть на t градусов? Во сколько раз увеличится при этом световой поток Φ от Солнца, который можно сфокусировать зеркалом?*

*Коэффициент линейного расширения металла, из которого сделано зеркало, равен α.*

Сферическое зеркало представляет собой поверхность, имеющую форму сферического сегмента. При нагревании сферический сегмент расширяется так же, как и целая сфера, т. е. любые линейные размеры изменяются пропорционально множителю $(1+\alpha t)$, а любые площади — пропорционально $(1+\alpha t)^2$.

Следовательно, радиус сферы, частью которой является зеркало, при нагревании на $t$ градусов увеличится до

$$R'=R\,(1+\alpha t),$$

а площадь сечения зеркала, перпендикулярная солнечным лучам, станет равной

$$S'=S\,(1+\alpha t)^2.$$

Здесь $R$ — бывший радиус сферы, $S$ — бывшая площадь сечения зеркала. Поскольку коэффициент линейного расширения $\alpha$ очень мал, $(1+\alpha t)^2\approx1+2\alpha t$, и $S'=S\,(1+2\alpha t)$.

Таким образом, фокусное расстояние зеркала будет равно

$$F'=R'/2=R\,(1+\alpha t)\,2=F\,(1+\alpha t),$$

а световой поток $\Phi'=ES'$ ($E$ — освещенность зеркала) по сравнению со световым потоком $\Phi=ES$ увеличится в

$$\frac{\Phi'}{\Phi}=\frac{ES'}{ES}=1+2\,\alpha t \text{ раз}.$$

◆

**Ф354.** *Необходимо сконструировать печь, на нагревательном элементе которой должна выделяться мощность*

Так как сопротивление нагрузки (нагревательного элемента) $R$ и сопротивление подводящих проводов $r=1$ *ом* включены последовательно, то

$$U=I\,(R+r).\qquad(1)$$

*2,1 квт. Напряжение сети равно 220 в, сопротивление подводящих проводов 1 ом. Каким необходимо сделать сопротивление нагревательного элемента печи?*

**Ф355.** *На pV-диаграмме (рис. 17) изображен замкнутый процесс, проведенный с одним молем газа. Участки 1→2 и 3→4 графика — прямые, проходящие через начало координат, а участки 2→3 и 4→1 — изотермы. Нарисовать график этого процесса на TV-диаграмме. Найти объем $V_3$, если известны объемы $V_1$ и $V_2 = V_4 = V$.*

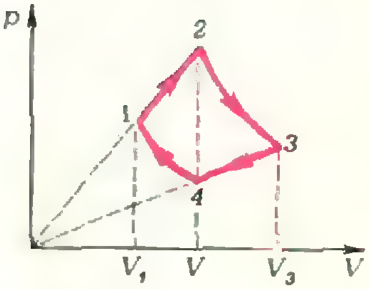


Рис. 17.

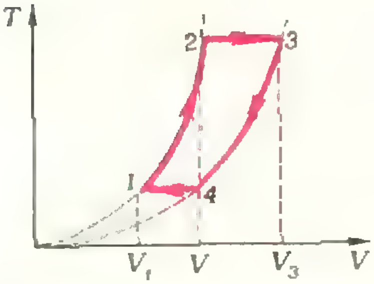


Рис. 18.

Здесь $U = 220$ *в* — напряжение сети, $I$ — ток в цепи.

Тепловая мощность, выделяющаяся на нагрузке, равна

$$P = I^2R. \qquad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) ток $I$, получим квадратное уравнение для $R$:

$$PR^2 - R(2rP - U^2) + Pr^2 = 0.$$

Из этого уравнения непосредственно находим

$$R_1 \approx 21 \text{ ом}, \quad R_2 \approx 0{,}05 \text{ ом}.$$

При обоих значениях $R$ на нагрузке будет выделяться мощность 2,1 *квт*, но при $R = 0{,}05$ *ом* на подводящих проводах выделится мощность в $\dfrac{I^2r}{I^2R} = \dfrac{1}{0{,}05} = 20$ раз больше, чем на нагрузке! Ясно, что это недопустимо. Следовательно, нужно выбрать сопротивление нагревательного элемента $R = 21$ *ом*.

*И. Слободецкий*

◆

Для того чтобы построить график данного процесса на диаграмме зависимости абсолютной температуры от объема, найдем прежде всего зависимость между $T$ и $V$ для процессов $1\to2$ и $3\to4$. На $pV$-диаграмме графики этих процессов — прямые, проходящие через начало координат, поэтому можно записать:

для процесса $1\to2$ $p = \alpha V$, где $\alpha = \text{const}$;

для процесса $3\to4$ $p = \beta V$, где $\beta = \text{const}$ $(\beta < \alpha)$.

Сопоставляя эти уравнения процессов с уравнением состояния идеального газа $pV = \nu RT$ ($\nu = 1$ *моль*), получим, что

$$\text{в процессе } 1\to2 \quad T = \frac{\alpha}{\nu R} V^2,$$

$$\text{а в процессе } 3\to4 \quad T = \frac{\beta}{\nu R} V^2.$$

Таким образом, оба процесса на $TV$-диаграмме изображаются параболами (рис. 18), причем парабола для процесса $1\to2$ идет более круто, так как $\alpha > \beta$. Состояния 2 и 4 характеризуются одинаковыми объемами $V_2 = V_4 = V$ (по условию), следовательно, на $TV$-диаграмме они лежат на одной вертикальной прямой $V = \text{const}$, пересекающей обе параболы. Изотермы $2\to3$ и $4\to1$ на $TV$-диаграмме изображаются горизонтальными отрезками, начинающимися в точках 2 и 4 и идущими до пересечения с соседней параболой в точках 3 и 1.

Теперь найдем объем $V_3$. Поскольку участки $2\to3$ и $4\to1$ — изотермы,

$$T_2 = T_3 \text{ и } T_1 = T_4.$$

Перепишем эти равенства, воспользовавшись уже известными нам выражениями температур через соответствующие объемы:

$$\frac{\alpha}{\nu R} V^2 = \frac{\beta}{\nu R} V_3^2$$

и

$$\frac{\alpha}{\nu R} V_1^2 = \frac{\beta}{\nu R} V^2.$$

Поделив первое равенство на второе, найдем

$$V_3 = \frac{V^2}{V_1}.$$

**Ф356.** *С какой скоростью движется тень Луны по земной поверхности во время полного солнечного затмения? Затмение наблюдается на экваторе. Для простоты считать, что земная ось перпендикулярна земной и лунной орбитам.*

Для оценки будем считать, что расстояние Луны до Земли $R_1 = 384\,000$ *км*, а период обращения вокруг Земли $T_1 = 28$ *сут* $= 2\,419\,200$ *сек*. Аналогично примем, что радиус Земли $R_2 = 6\,400$ *км* и Земля делает полный оборот вокруг своей оси за время $T_2 = 1$ *сут* $= 86\,400$ *сек*. Тогда скорость движения Луны по круговой орбите

$$v_1 = \frac{2\pi R_1}{T_1} \approx 995 \text{ м/сек},$$

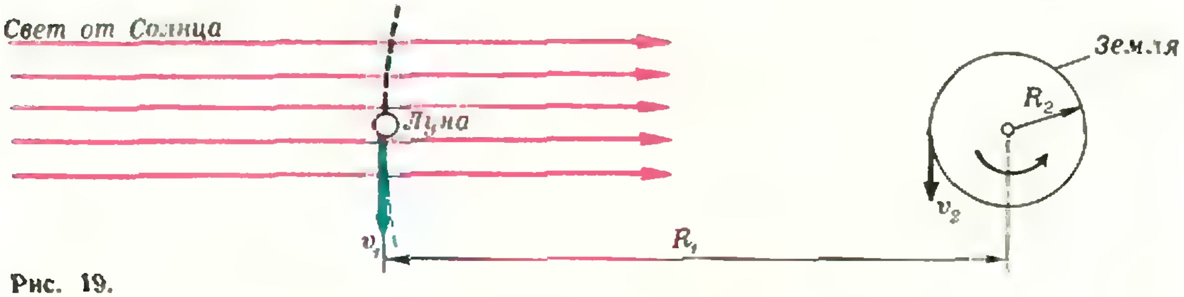


Рис. 19.

а линейная скорость точек земной поверхности

$$v_2 = \frac{2\pi R_2}{T_2} \approx 465 \text{ м/сек},$$

причем, для той области поверхности Земли, где наблюдается тень от Луны, обе скорости направлены в одну сторону (рис. 19).

Поскольку солнечные лучи можно считать параллельными и размеры Луны малы, тень Луны движется относительно земной поверхности в полдень со скоростью

$$v = v_1 - v_2 = 2\pi\left(\frac{R_1}{T_1} - \frac{R_2}{T_2}\right) \approx 530 \text{ м/сек}.$$

◆

**Ф357.** *Кубик массы m прикреплен к двум пружинам с жесткостями $k_1$ и $k_2$ и длинами в недеформированном состоянии $l_1$ и $l_2$ соответственно. Пружины закреплены другими концами (рис. 20), так что кубик*

Введем систему координат с началом в точке *O* (на левой стенке) и с положительным направлением оси *OX* вправо. Пусть координата кубика равна $x$ $(0 < x < L)$; следовательно, он находится на расстоянии $x$ от левой стенки и на расстоянии $L - x$ от правой стенки (см. рис. 20).

Обозначим через $F_1$ проекцию силы, действующей на кубик со стороны левой пружины. По закону Гука

$$F_1 = k_1(l_1 - x).$$

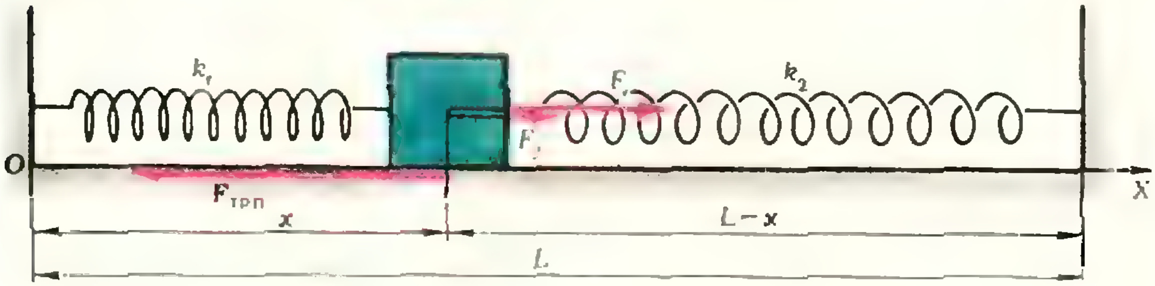


Рис. 20.

*может двигаться по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между кубиком и плоскостью μ, расстояние между точками закрепления пружин L, размер кубика мал и им можно пренебречь. Найти область, в которой кубик может находиться в равновесии.*

При $x>l_1$ проекция отрицательна, т. е. сила направлена влево (левая пружина растянута), при $x<l_1$ — вправо. Аналогично проекция силы, действующей на кубик со стороны правой пружины, равна

$$F_2=k_2[(L-x)-l_2].$$

При $(L-x)>l_2$ правая пружина растянута, сила направлена вправо ($F_2>0$), при $(L-x)<l_2$ — влево. Проекцию результирующей силы запишем в виде

$$F=F_1+F_2=(k_1l_1+k_2L-k_2l_2)-(k_1+k_2)x.$$

Если кубик не прижат ни к левой, ни к правой стенке, то при равновесии сила **F** может компенсироваться только силой трения покоя $\mathbf{F}_{\text{тр.п}}$. Считая, что абсолютная величина силы трения покоя не может превысить значения $F_{\text{тр.п}_{\max}}=\mu N$, где $N$ — сила нормального давления ($N=mg$), получаем

$$-\mu N\leqslant F\leqslant \mu N,$$

или

$$-\mu mg\leqslant(k_1l_1+k_2L-k_2l_2)-(k_1+k_2)x\leqslant\mu mg.$$

Обозначим

$$x_1=(k_1l_1+k_2L-k_2l_2-\mu mg)/(k_1+k_2),$$
$$x_2=(k_1l_1+k_2L-k_2l_2+\mu mg)/(k_1+k_2).$$

Тогда последнюю систему неравенств можно переписать так:

$$x_1\leqslant x\leqslant x_2.$$

Очевидно, что кубик не может проникнуть ни в правую, ни в левую стенки. Следовательно, область равновесия определяется неравенствами

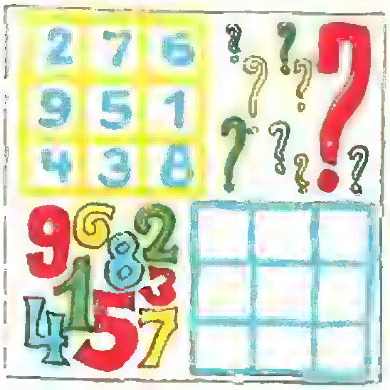
$$x_{\min}\leqslant x\leqslant x_{\max},$$

где

$$x_{\min}=\begin{cases}x_1, & \text{если } x_1\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } x_1\leqslant 0,\end{cases}$$

$$x_{\max}=\begin{cases}x_2, & \text{если } x_2\leqslant L,\\ L, & \text{если } x_2\geqslant L.\end{cases}$$

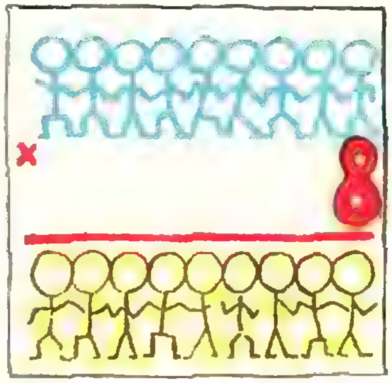
*Б. Буховцев*



## Два квадрата

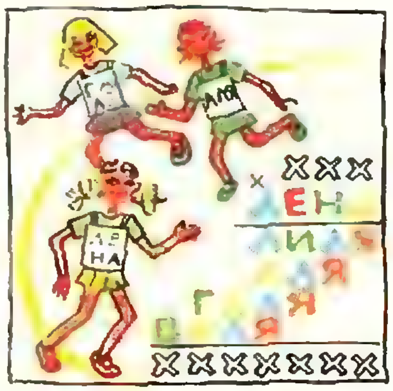
Верхний квадрат обладает удивительным свойством: суммы чисел по вертикалям, горизонталям и диагоналям одинаковы и равны 15.

А сможете ли вы разместить цифры от 1 до 9 так, чтобы эти суммы были различны?!



## Одинокая восьмерка

Множимое и произведение примера состоят из девяти цифр от 1 до 9 включительно. Восстановите запись примера.



## Женские имена

В этом примере на умножение разными буквами зашифрованы некоторые различные цифры, вместо крестиков могут стоять любые цифры. Расшифруйте пример!

*Л. Мочалов*

*А. Мышкис,*
*Л. Садовский*

# Прикладная математика

## 1. Что такое прикладная математика?

Трудно указать предмет, который вызвал бы в последние годы столь ожесточенные споры среди людей, имеющих отношение к математике. Пока идут эти споры, во всех промышленно развитых странах развернулась широкая подготовка специалистов в области прикладной математики; в частности, и в наших институтах специальность «прикладная математика» превращается в одну из наиболее популярных. В то же время многие выдающиеся специалисты утверждают, что никакой прикладной математики вообще нет . . .

Что же это за область, которой нет? И чем занимаются специалисты в этой области (или необласти)?

Математика начала применяться еще до того, как стала наукой. Простые арифметические и геометрические понятия и закономерности проникали во все области человеческой деятельности. Во времена же расцвета античного мира произошло оформление математики как науки с ее характерным *дедуктивным методом*, согласно которому все ее утверждения выводятся по строгим логическим правилам из немногочисленных исходных положений, принимаемых без доказательства, как аксиомы. С этого периода началось построение грандиозного здания математики.

Попутно с развитием математики расширялся и круг ее приложений. Многие важные математические понятия и методы были созданы специально для решения прикладных задач и лишь затем анализировались, развивались и обобщались в «чисто математическом» плане. Отдельные дисциплины — небесная механика, теоретическая электротехника, теория прочности, теоретическая физика и некоторые другие — оказались буквально «нашпигованными» математикой.

Однако до последних десятилетий сравнительно сложные разделы математики применялись все же лишь в небольшом числе традиционных областей науки и техники; да и там сложные задачи часто не удавалось довести до практически приемлемого решения.

В наше время электронные цифровые вычислительные машины в корне изменили представление о возможностях применения математики. С помощью ЭВМ были решены многие ранее поставленные математические задачи прикладного характера, а также и новые задачи и проблемы, относящиеся как к традиционным областям приложений, так и к новым областям, где ранее математика не находила применения. Оказалось, что не только конкретные математические результаты, но и сам строй математического мышления приносят неоценимую пользу в самых разных областях науки, техники, экономики, всей человеческой деятельности. Наступает качественно новый период развития математики — период «всеобщей математизации».

И вот стало отчетливо видно, что математика в процессе ее приложений приобретает ряд характерных особенностей, черт, родственных для различных областей приложения и в то же время порой существенно отличающихся от привычных черт «чистой» математики. Традиционное выдвижение на первый план логического совершенства, глубины и общности формулировок далеко не всегда отвечает жестким требованиям современных приложений — своевременности, эффективности, экономности. Вследствие этого получилось, что специалисты в области «чистой» математики часто оказывались не в состоянии математику эффективно применять. Возникла настоятельная потребность в специалистах нового типа.

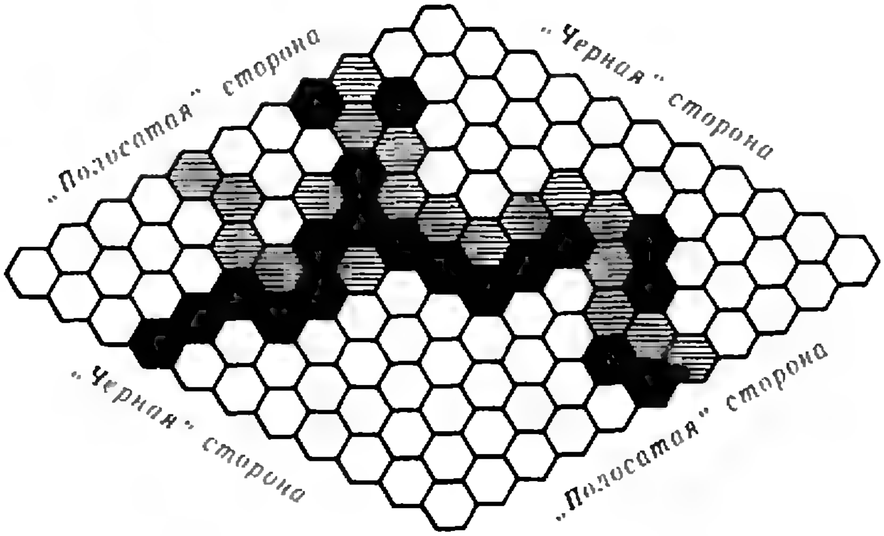
Прикладная математика призвана создавать, изучать, развивать и совершенствовать методы применения математики к задачам, возникающим за ее пределами. Таким образом, при достаточно широком взгляде на математику прикладная математика является неотъемлемой частью «математики вообще». При этом не следует представлять себе упрощенно, что будто бы математику можно отчетливо разделить на «чистую» и «прикладную» или что прикладная математика — это математическая дисциплина типа алгебры или геометрии. Применяться могут самые разнообразные разделы математики, и огромное число математических понятий и методов являются как «чистыми», так и «прикладными» (или «преимущественно чистыми», «преимущественно прикладными» и т. п.), т. е. могут входить как в чисто математические, так и в прикладные исследования. Поэтому более правильно говорить о чистой и прикладной математике не как о разделах математики, а как о ее аспектах, подходах к ней, отвечающих соответственно тезисам «математика как цель» и «математика как средство». И оказывается, что многие понятия, методы, утверждения в этих двух подходах не только играют существенно различную роль, но порой наполняются и различным содержанием (см. п. 2)!

Пока дисциплин, основанных на систематическом применении математики, было немного, а сами методы этого применения были не слишком сложны, потребности в большом числе специалистов — прикладных математиках — не было. С легкими математическими задачами справлялись сами представители этих дисциплин, а более трудные и принципиально новые задачи изучали такие великие ученые как Б. Риман, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов и другие (которые были одновременно как чистыми, так и прикладными математиками!). Однако в период всеобщей математизации, когда прикладные математические задачи становятся все более сложными и разнообразными, такого сочетания усилий недостаточно: великих ученых не хватает на все задачи! В то же время существенный вклад в решение таких задач из самых разнообразных областей человеческой деятельности сейчас могут внести лишь специалисты с широким математическим образованием, владеющие методами применения математики и обладающие соответствующими интересами и навыками. Это и есть прикладные математики. В зависимости от темперамента и обстоятельств они могут специализироваться либо в какой-то определенной области приложения математики, либо же, будучи в первую очередь математиками, переходить от одной области к другой; могут работать в составе групп или же самостоятельно.

И, наконец, отметим, что, несмотря на многовековую историю применения математики и огромный опыт такого применения к конкретным задачам, изучение принципов и общих методов этого применения только начинается. Возможно, некоторые из наших читателей примут участие в изучении, систематизации и совершенствовании этих принципов и методов, то есть в оформлении своеобразной дисциплины — общей прикладной математики.

## 2. Каковы особенности прикладной математики?

Говоря теперь о чистой и прикладной математике, мы будем, с одной стороны, иметь в виду «академическую»



математику, изучаемую на математических факультетах университетов и целиком основанную на дедуктивном методе; а с другой стороны — математику в том обличье, которое она приобретает в процессе приложений.

Естественно, что содержание многих понятий, утверждений, методов в чистой и прикладной математике одинаково или почти одинаково. (Пример — теорема Пифагора.) Однако сейчас мы сосредоточим внимание на случаях, когда это не так.

*а) Существование решения*

Вопрос «имеет ли данная задача решение?» не так прост, как может показаться на первый взгляд; и зачастую «чистый» и «прикладной» математики дают на него прямо противоположные ответы. Не вдаваясь в философские и логические дебри, поясним сказанное следующим примером.

Американские студенты изобрели игру в «гекс». Играют двое на четырехсторонней доске из правильных шестиугольничков (в качестве доски, например, можно использовать кафельный пол) фишками двух цветов: «черными» и «полосатыми». Обычно размеры доски — это 11×11 шестиугольничков — см. рисунок. Две противоположные стороны доски объявляются «черными», две другие — «полосатыми». Игроки по очереди выкладывают свои фишки-шестиугольнички: один — «черные», другой — «полосатые», причем фишку можно класть на любое свободное поле. За каждым из игроков закреплена пара сторон доски — одинаковых по цвету с его фишками. Цель каждого игрока — соединить связным путем свои стороны своими фишками.

Естественно поставить вопрос: а существует ли выигрышная стратегия для первого или второго игроков («стратегия» состоит в указании хода в любом уже создавшемся положении)? На этот вопрос дал ответ известный американский математик Дж. Нэш: он доказал, что существует выигрышная стратегия для первого (начинающего) игрока и не существует для второго. Приведем схему его остроумного доказательства.

Прежде всего, можно доказать (мы предоставляем это читателю), что данная игра обязательно заканчивается выигрышем одного из игроков, т. е. что ничьих здесь не бывает. Считая это известным, докажем существование выигрышной стратегии для первого игрока методом «от противного», т. е. допустим, что такой стратегии нет. Это означает, что, как бы ни старался первый игрок, второй может уйти от поражения, т. е. в силу невозможности ничьих выиграть. Но тогда второй игрок имеет выигрышную стратегию (продумайте, почему это так?).

Пусть первый игрок играет таким образом. Он ставит на любое поле первую фишку, и затем, не обращая на нее внимания, отвечает на ходы противника, пользуясь выигрышной стратегией второго игрока (как бы считая себя вторым игроком). Так он продолжает до тех пор, пока ему в силу этой стратегии не понадобится место, уже занятое первой фишкой. В этот момент он ставит фишку на любое свободное поле, а дальше опять играет, не обращая на нее внимания, пользуясь выигрышной стратегий второго игрока, и т. д. В результате после каждого своего хода первый игрок получает позицию, предусмотренную выигрышной стратегией для второго игрока, да еще впридачу одно накрытое поле. Значит, его противник очередным ходом не может закончить партию, как бы он ни ходил. А так как ничья невозможна, то первый игрок обязательно доведет партию до своей победы, вопреки предположению. Полученное противоречие доказывает существование выигрышной стратегии для первого игрока; а отсюда ясно, что у второго игрока такой стратегии не может быть.

Казалось бы, задача о выигрышной стратегии полностью решена. Но тут приходит игрок и спрашивает у математика: «Как же я должен играть, чтобы наверняка выиграть?». Анализ проведенного доказательства позволяет дать только такой ответ: «Перебери все возможные стратегии (их конечное число); в силу доказанного, среди них есть по крайней мере одна выигрышная, — ею и пользуйся!» «Но как их перебрать? Их ведь так много . . .» «А это к математике не относится», — возможно, ответит математик, — «пусть инженеры изготовят устройство для такого перебора. Я свое дело сделал».

Это — ответ чистого математика. Прикладной же математик не может не учитывать реальных обстоятельств при построении решения (в данном примере — выигрышной стратегии). Нетрудно проверить, что общее число $S$ всевозможных стратегий для первого игрока, во всяком случае, удовлетворяет оценке:

$$S > 121 \cdot 119^{120} \cdot 117^{118} \cdot 115^{116} \cdot \ldots \cdot 101^{102}$$

(напомним, что на доске у нас 121 шестиугольное поле).

Правая часть этого неравенства заведомо превосходит $100^{1} \cdot 100^{120} \cdot 100^{118} \cdot \ldots \cdot 100^{102} \approx 10^{2222}$. Можно быть уверенным, что никогда никакое устройство не сможет осуществить перебор такого количества вариантов!

Итак, перед нами утверждение о существовании решения задачи, вполне правомерное с точки зрения «ортодоксальной» чистой математики, но с точки зрения прикладной математики — неприемлемое. Грубо говоря, расхождение этих двух подходов получилось из-за того, что *«ортодоксально»-конечное* общее число стратегий оказалось практически. . . *бесконечным*. Поэтому, хотя абстрактное решение данной задачи и существует (доказано, что у первого игрока есть выигрышная стратегия), прикладной математик ответит, что у задачи игры в «гекс» решения нет (нельзя в общем случае указать практически реализуемый алгоритм нахождения этой выигрышной стратегии).

### *б) Способ рассуждений*

В чистой математике нет понятий «не вполне точное определение», «не вполне строгое доказательство» и т. п.; в ней все «не вполне точно определенное» — не определено, «не вполне строго доказанное» — не доказано. При решении любой задачи в чистой математике переходить от одних утверждений к другим можно, исходя из условий этой задачи, только на основе правил строгой логики.

Не то в прикладной математике! Конечно, и в ней дедуктивные рассуждения играют весьма важную роль. Но здесь не менее важны и рассуждения иного рода, которые называют «эвристическими», «правдоподобными», «рациональными» и т. п. Это —

рассуждения, неприемлемые с точки зрения чистой математики, но при разумном их применении приводящие к правильным практическим результатам. Такие рассуждения типичны для всех дисциплин (физика, химия, биология, медицина и т. д.), кроме чистой математики; так что в этом отношении прикладная математика находится как бы на стыке математики с этими дисциплинами.

Эвристические рассуждения могут включать аналогии, численные и физические эксперименты, общие выводы на основе анализа типичных случаев (это — так называемая «неполная индукция») и другие подобные способы рассуждений. Все эти способы в чистой математике доказательной силы не имеют, однако в прикладных задачах они вполне правомерны и постоянно применяются.

В прикладных математических рассуждениях за математическими понятиями обычно стоят реальные объекты. Поэтому при решении прикладной математической задачи часто оказываются полезными сведения, не содержащиеся явно в формулировке задачи, но вытекающие из ее «физического смысла».

Однако в ряде случаев наиболее целесообразными, а порой и единственно возможными оказываются дедуктивные методы. Поэтому прикладной математик должен владеть всеми способами рассуждений.

Почему же все-таки в прикладной математике далеко не всегда удается проводить все построения так же строго, как в чистой математике? Дело в том, что часто эвристическим путем можно получить решения задач именно в тех случаях, когда чисто дедуктивные методы не приводят к цели или требуют колоссальных, неоправданных усилий. Кроме того, переход от реального объекта к его математической модели (об этом см. ниже) всегда является эвристическим и осуществляется лишь с некоторой точностью. Решение математической задачи — это только часть полного исследования.

### 3. Математические модели

Прикладной математик все время имеет дело с математическими моделями. Моделями могут быть геометрические фигуры, числовые множества, различные уравнения и системы уравнений и т. п., описывающие какие-либо свойства изучаемого реального объекта или явления.

Рассмотрим простой пример. Пусть нас интересует объем жидкости, которую может вместить стоящий перед нами стакан. Этот объем можно найти, например, наполнив стакан и затем вылив воду в специальный сосуд с делениями. Но вот мы говорим, что стакан — это круглый цилиндр с диаметром основания $d$ и высотой $H$. Тем самым мы переходим к математической модели, которая дает возможность получить ответ: $V=\frac{\pi}{4}d^2H$ — без эксперимента, но и без учета несовершенства реальной формы стакана, или поверхностного натяжения, и т. п.

Конечно, как мы уже говорили, математическая модель описывает реальный объект лишь приближенно.

Однако бывают случаи, когда принятая математическая модель описывает реальный объект совершенно неправильно, как говорят, модель оказывается *неадекватной* реальному объекту. Составление математической модели — дело очень ответственное. Реальный объект может иметь много различных, неравносильных моделей; и поиски адекватной и в то же время достаточно простой модели зачастую приобретают драматический характер. Кроме того, изучая модель, мы можем столкнуться с совершенно непредвиденными математическими трудностями.

Поэтому прикладному математику недостаточно только хорошего математического образования. Он должен обладать и математической эрудицией, и интуицией, чтобы при решении конкретной прикладной задачи применять именно те методы, которые дадут наибольший эффект. Он должен уметь развивать эти методы и создавать новые. И, конечно, — довести решение до результата, используя для этого все необходимые средства, в том числе и ЭВМ.

### 4. Как стать математиком-прикладником?

Подготовка математиков-прикладников в нашей стране осуществляется в университетах и в ряде крупных высших технических учебных заведений. При этом наблюдается определенное сближение университетского и технического образования, в основном за счет существенного повышения общетеоретического потенциала выпускников втузов, специализирующихся по прикладной математике (специальность 0647).

В то же время во втузах сохраняется и некоторая особенность — ориентация на приложения математических методов в практических задачах, возникающих в соответствующих областях экономики, техники, транспорта, управления и т. д. Поэтому наряду с математическими курсами общетеоретического и прикладного характера (1700—2050 часов) в учебном плане (всего 4700 часов) специальности 0647 предусмотрены дисциплины, связанные с ЭВМ (300—600 часов), АСУ, теория управления, физика, механика, электротехника и радиоэлектроника. На последних семестрах читаются курсы, связанные со специализацией: методы прикладной математики, численные методы, алгоритмизация процессов управления, теория систем, системное моделирование и некоторые другие. Прикладная математика имеет три основные специализации:

1) применение средств вычислительной техники к решению задач народного хозяйства — техники, экономики, управления, планирования;

2) математическое обеспечение АСУ;

3) математическое обеспечение ЭВМ.

Первая из этих специализаций начинает играть главенствующую роль, и вот почему. Прогресс вычислительной техники и создание все более совершенных, сложных, все более быстродействующих (до $2 \cdot 10^8$ операций в секунду) ЭВМ сопровождается явной *унификацией*: меньшим становится разнообразие типов машин. Унификация моделей наблюдается даже в мировом масштабе: в результате соглашения между отдельными фирмами различные типы вычислительных машин оказываются совместимыми в эксплуатации.

ЭВМ второго поколения (на полупроводниках), подобные БЭСМ-6, пришедшие в 60-х годах на смену ламповым машинам первого поколения (50-е годы), обладают быстродействием до $10^6$ операций в секунду, т. е. в $10^3$ раз большим быстродействия машин первого поколения, и примерно в $10^9$ раз больше быстродействия человека. Эти ЭВМ весьма надежны в работе, однако их эксплуатация требует создания весьма трудоемкого, дорогостоящего и медленно создаваемого внутреннего математического обеспечения, т. е. совокупности специальных программ, позволяющих переводить соответствующие алгоритмы решения задач на внутренний язык машины, понятный ей. Принято считать, что опытный программист отрабатывает 3—4 команды в день. При такой технологии требуется сотни человеко-лет предварительной работы, чтобы загрузить, например, одну машину БЭСМ-6 на один час. Выход был найден на пути передачи существенной части труда человека по созданию программ самим машинам. Однако и это не решило многих проблем; во всяком случае — для машин третьего поколения (на интегральных схемах), машин 70-х годов с быстродействием до $2 \cdot 10^7$ операций в секунду. Эти проблемы обретают новый характер. Машины становятся все более «прожорливыми»: они требуют задач в огромном объеме, задач, облеченных в математическую форму, специально подготовленных для «машинного чрева». Поэтому, если созданию машин второго поколения сопутствовало выдвижение на первый план специалиста в области построения и совершенствования внутреннего математического обеспечения, то «жизненный тонус» машин третьего поколения требует наличия широкого круга лиц, способных подготовить задачу: вникнуть в ее смысловое содержание (в ее физический смысл), построить математическую модель, выбрать методы ее изучения, подготовить алгоритм решения, использовать машину для его осуществления.

Естественно, что это — грубая схема, но зачастую даже она не может быть реализована.

Дело в том, что многие задачи, особенно экономического, социологического, общественного типа, настолько сложны, что не поддаются формализации средствами современной математики. Иными словами, не удается построить математическую модель рассматриваемого явления. В такой ситуации возникает особенно острая потребность в сочетании формализованного и неформализованного подходов, сочетания математических и эвристических методов, вычислений и интуиции. Этот путь приводит к понятию *имитационной модели*. Имитационная модель изображает, имитирует изучаемый процесс; она служит для всестороннего его анализа, позволяет варьировать различными параметрами процесса и изучать последствия этих изменений. Отдельные элементы имитационной модели могут допускать формализацию, для других ее может не быть. Во всех случаях, однако, предполагается соединение возможностей машины (быстрого просчета большого числа вариантов) и интуиции, опыта человека. Имитационное моделирование — важнейшее направление в современной прикладной математике. Об этом много интересного можно почерпнуть в увлекательной книге Н. Н. Моисеева «Математик задает вопросы» (М., «Знание», 1974).

В конце 70-х годов найдут применение разрабатываемые в настоящее время машины четвертого поколения. По-видимому, они окажутся «высоко интеллигентными», позволят упростить диалог между человеком и машиной (неизбежный при исследовании имитационной модели), возьмут на себя многие функции, выполняемые ныне программистами и специалистами по внутреннему математическому обеспечению, и потребуют обильного материала для «размышлений». В этом одна из причин того, что подавляющая часть математиков-прикладников ориентируется теперь на специализацию по применению ЭВМ в задачах народного хозяйства. Другая, столь же важная, причина — в математизации наук, во все более разнообразном и глубоком использовании математических методов как в традиционных, так и в совершенно новых областях знаний.

Специальностью математика-прикладника можно овладеть, обучаясь во многих втузах страны. Среди них — известные втузы: МИИТ, МИНХиГП, МАИ, МИЭМ, МИФИ, МФТИ, Алтайский, Тульский, Донецкий, Львовский политехнические институты, Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта, Казанский авиационный, Харьковский радиотехнический институты и некоторые другие.

Кроме того, специальность «прикладная математика» есть и в средних специальных учебных заведениях: в Московском математическом техникуме (в этот техникум принимаются только москвичи), в Ленинградском механическом техникуме (у этого техникума тоже нет общежития), в Минском политехникуме, в Киевском механико-металлургическом техникуме, в Днепропетровском техникуме автоматики и телемеханики, в Днепропетровском промышленно-экономическом техникуме ме, в Ростовском электротехническом техникуме, в Кировоканском политехникуме, в Ковровском энергомеханическом техникуме, на среднетехническом факультете Тульского политехнического института.

Каждый выпускник восьмилетней школы, желающий получить углубленную математическую подготовку и одновременно интересующую его специальность, может смело подавать заявление в один из этих техникумов. [Особый интерес представляет собой вновь открываемая специальность: «Обработка информации в АСУ». По этой специальности на общий курс математики отводится (для поступающих после 8-го класса) свыше 500 учебных часов; сюда включены элементы математической логики, теории вероятностей и математической статистики. В общеспециальном цикле изучается вычислительная математика в объеме 100 учебных часов, основы программирования и алгоритмические языки в объеме 128 учебных часов. Набор по специальности «Обработка информации в АСУ» будет проводиться в Ленинградском промышленно-экономическом техникуме.]

## 5. А что делать в школе?

Конечно, — осваивать математику, ибо прикладная математика — это прежде всего математика. Нужно овладеть дедуктивным методом рассуждений, научиться давать точные определения, тренироваться в решении задач различного типа, в частности задач, развивающих логическое и алгоритмическое мышление.

Не пренебрегать «текстовыми» задачами, решение которых требует предварительного составления уравнений. К сожалению, текстовые задачи школьного курса математики, как правило, мало имеют общего с теми задачами, с которыми сталкивается прикладной математик. Однако важна привычка не робеть перед нематематическими текстами!

Полюбить вычисления, начиная с самых грубых прикидок *порядка* величин и самых грубых подсчетов и кончая самыми точными вычислениями с помощью всех известных вам методов и доступных вычислительных средств.

Осваивать физику и отдельные разделы других дисциплин (в том числе не включенные в школьную программу), в которых применяется математика. Научиться мыслить на «физическом» языке, проводить неформальные рассуждения, научиться пользоваться эвристическими определениями, проводить эвристические доказательства, типичные для прикладных дисциплин.

А для начала мы предлагаем вам решить несколько задач и список полезных книг и статей.

### Упражнения

1. Докажите, что при игре в «гекс» ничьих не бывает.

2. Докажите оценку общего числа $S$ стратегий для первого игрока при игре в «гекс»:

$$121\cdot 119^{120}\cdot 117^{118}\cdot\ldots\cdot 101^{102} < S <$$
$$< 121\cdot 119^{120}\cdot 117^{118}\cdot 3^{4}.$$

3. Сравните $S$ с возможным числом элементарных частиц во Вселенной.

4. В стенгазете клуба «Рога и копыта» «Литературной газеты» появилось сообщение о том, что начальник пожарной охраны Камского элеватора Матвей Толстобрюхов подсчитал, что емкость этого хранилища составляет 839522634175293648209 зерен пшеницы. Укажите две грубейшие ошибки в этом подсчете.

5. Выведите простую приближенную формулу для увеличения продолжительности дня (по сравнению с 22 декабря) $N$-го января, в зависимости от $N$.

6 Оси двух круговых цилиндров радиусов $R_0$ и $R$ пересекаются под прямым углом. Получите приближенные формулы для объема $V$ полученного тела при $R_0=\text{const}$ и $R\to 0$ либо $R\to\infty$.

### Литература

1. Математика в современном мире, «Мир», Москва, 1967.

2. И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Я. Г. Пановко, Прикладная математика. Предмет, логика, особенности подходов, «Наукова думка», Киев, 1976.

3. Г. Штейнгауз, Задачи и размышления, «Мир», Москва, 1974.

4. Л. Садовский, Прикладная математика — новая специальность в технических вузах, «Квант», 1974, № 6.

*Г. Дорофеев, Н. Розов*

# Чертеж в геометрической задаче

На роль чертежа в решении геометрической задачи поступающие смотрят по-разному. Одни думают, что чертеж вообще не нужен, и выполняют его подчеркнуто небрежно. Другие, наоборот, считают сам чертеж достаточным аргументом в рассуждениях и даже не находят нужным как-либо обосновывать то, что «видно из чертежа». Обе эти крайние точки зрения неправильны.

Разумеется, никакой чертеж, даже самый аккуратный, не может заменить логического доказательства, а является лишь иллюстрацией к рассуждениям. Любой геометрический факт, который мы «увидели» на чертеже, необходимо строго обосновать — только тогда можно утверждать, что этот факт действительно имеет место, а не получен из верного (или, что гораздо опаснее, неверного) рисунка.

В то же время наглядный чертеж — хороший помощник при решении задачи: он может подсказать идею необходимых рассуждений и вычислений, натолкнуть на мысль использовать некоторую теорему или придумать удачное дополнительное построение. Недаром математики вообще часто прибегают к геометрическим иллюстрациям, чтобы сделать идеи доказательства более понятными.

Однако помочь решить задачу может только чертеж, правильно отражающий существенные геометрические особенности конфигурации, о которой идет речь в условии. Именно поэтому к чертежу следует относиться очень внимательно.

Часто поступающие ограничиваются первым более или менее удачно выполненным рисунком, не интересуясь, насколько точно сделанный чертеж отвечает условию задачи. Между тем во многих задачах провести полное решение по одному чертежу в принципе невозможно, поскольку условие задачи допускает существование геометрически различных конфигураций. Кроме того, такая привязанность к одному «случайному» чертежу приводит и к иной неприятности: в ходе решения задачи может обнаружиться противоречие между получающимися результатами и исходным чертежом, которое обычно ставит поступающих в тупик. Однако при правильном понимании роли чертежа в этом нет ничего страшного — следует просто отказаться от первоначального изображения и сделать новый чертеж, соответствующий появившейся геометрической информации (конечно, при условии, что проведенные рассуждения и вычисления правильны).

При построении чертежа бывает полезно делать не примерный эскиз, дающий лишь общее представление о геометрической конфигурации, а стремиться последовательно конструировать чертеж, опираясь на данные задачи и общие геометрические факты. При таком подходе легче «увидеть» те идеи, которые можно применить в решении.

Задача 1 (МГУ, ф-т почвоведения, 1974). *В треугольнике ABC угол B равен* 90°, $AB = 4$. *На стороне BC взята точка D так, что* $BD = 1$. *Окружность радиуса* $\sqrt{5}/2$ *проходит через точки B и D и касается в точке B окружности, описан-*

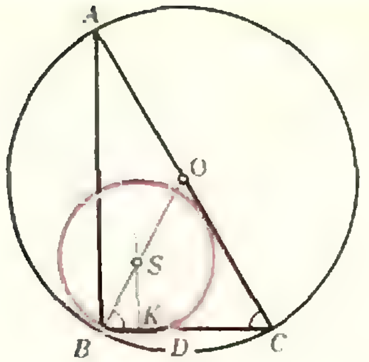


Рис. 1.

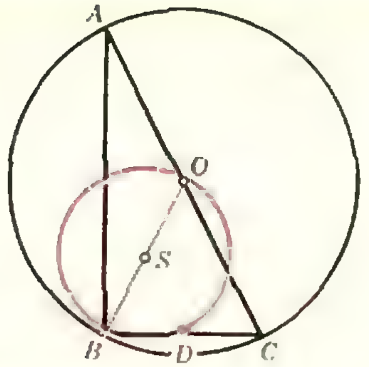


Рис. 2.

*кой около треугольника ABC. Найти площадь треугольника ABC.*

Прежде всего построим треугольник $ABC$ с прямым углом $B$ (рис. 1). Для построения окружности, описанной около этого треугольника, выясним сначала, где находится ее центр $O$ и чему равен ее радиус. Как известно, центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит в середине гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы. Это дает возможность построить описанную окружность.

Займемся теперь построением другой окружности. Отметив на стороне $BC$ точку $D$, мы можем утверждать, что центр этой окружности лежит на перпендикуляре, проведенном через середину $K$ отрезка $BD$. Из условия касания окружностей заключаем, что центр рассматриваемой окружности лежит на радиусе описанной окружности, проведенном в точку касания, т. е. в точку $B$. Иначе говоря, центр $S$ окружности, о которой идет речь в условии, есть точка пересечения прямой $SK$ и медианы $BO$.

Построение чертежа закончено. В ходе этого построения мы установили два факта, на которых и основывается решение задачи: во-первых, центр $S$ лежит на стороне $BO$ равнобедренного треугольника $BOC$; во-вторых, перпендикуляр, опущенный из центра $S$ на катет $BC$, проходит через середину отрезка $BD$.

Теперь проведем необходимые вычисления. Из прямоугольного треугольника $BSK$ по теореме Пифагора находим $SK = 1$, а тогда $\operatorname{ctg}(\angle SBK) = 1/2$. Но $\angle ACB = \angle OBC$, и поэтому $BC = AB \operatorname{ctg}(\angle ACB) = 2$. Следовательно, площадь треугольника $ABC$ равна 4.

Итак, задача полностью решена, и идею решения мы получили благодаря последовательному конструированию чертежа. Однако, как это ни удивительно на первый взгляд, чертеж, изображенный на рисунке 1, полностью условию задачи не соответствует. В самом деле, проведенные вычисления показывают, что $BC = 2$, а $AC = 2\sqrt{5}$. Следовательно, $BO = \sqrt{5} = 2 \cdot SB$, т. е. $BO$ — диаметр окружности с центром $S$, которая, таким образом, проходит через точку $O$. Другими словами, полностью соответствует данным задачи рисунок 2.

В чем же причина неполного соответствия рисунка 1 данным задачи? Дело в том, что проведенное конструирование чертежа касалось только его геометрической стороны, но не учитывало всех конкретных числовых данных. Более того, мы и не могли их учесть, поскольку все числовые размеры конфигурации, а следовательно, и ее геометрически точный вид, удается установить только после соответствующих вычислений.

Тем не менее изложенное выше решение является исчерпывающим, хотя, как мы теперь убедились, основывалось на неточном чертеже. Это объясняется просто: в наших рассуждениях нигде не использовалось взаимное расположение точки $O$ и окружности с центром $S$, выяснение их взаимного расположения при данном способе решения задачи не обязательно.

Подобная ситуация является в геометрической задаче типичной. Практически никогда, приступая к решению, мы не в состоянии построить чертеж, абсолютно точно отображающий всю специфику конфигурации, — многие ее особенности вскрываются только в ходе рассуждений. Поэтому важно прежде всего выявлять геометрические свойства, существенные в данной задаче. Это требует особого внимания и осторожности, поскольку с первого взгляда далеко не всегда очевидно, какие именно особенности конфигурации окажутся существенными и в какой мере допустимо несоответствие между данной конфигурацией и чертежом.

Разумеется, если в процессе решения выясняется, что чертеж явно не соответствует данным задачи, его следует заменить на правильный. Например, в следующей задаче даже развитое геометрическое воображение не может помочь сразу выполнить чертеж, точно отражающий существенные особенности конфигурации.

Задача 2 (МГУ, мехмат, 1972). *В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро $SC$ равно ребру $AB$ и наклонено к плоскости основания $ABC$ под углом $60^\circ$. Известно, что вершины $A$, $B$, $C$ и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса* 1. *Доказать, что центр указанной сферы лежит на ребре $AB$, и найти высоту пирамиды.*

Для решения задачи сделаем традиционный чертеж пирамиды $SABC$ (рис. 3), построим ее высоту $SH$ и проведем отрезок $HC$. Так как по условию задачи $\measuredangle SCH = 60^\circ$, то из треугольника $CHS$ находим $SH = a\sqrt{3}/2$, $HC = a/2$, где через $a$ обозначена длина ребра $SC$.

По условию вершины $A$, $B$, $C$ и середины $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответствующих боковых ребер лежат на одной сфере. Отсюда, в частности, следует, что через точки $A$, $A_1$, $B$, $B_1$ проходит окружность — сечение этой сферы плоскостью грани $SAB$. Так как $A_1B_1 \parallel AB$, то четырехугольник $AA_1B_1B$ — трапеция, и притом равнобочная, поскольку она вписана в окружность. Поэтому

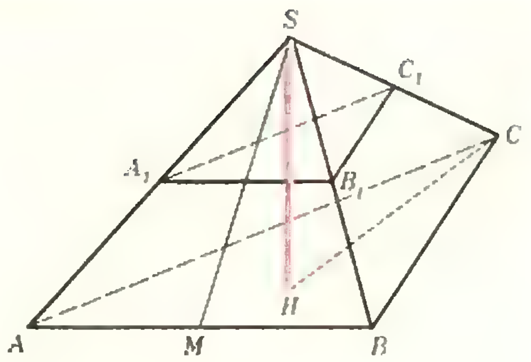


Рис. 3.

$$AA_1 = BB_1 = \frac{1}{2}\,SA = \frac{1}{2}\,SB.$$

Аналогичные рассуждения для четырехугольника $BB_1C_1C$ показывают, что пирамида $SABC$ имеет равные боковые ребра: $SA = SB = SC = AB = a$. Отсюда видно, что треугольник $ASB$ — равносторонний, а поэтому апофема $SM$ этой боковой грани равна $a\sqrt{3}/2$, т. е. $SM = SH$.

Таким образом, высота пирамиды совпадает с апофемой боковой грани $ASB$. Но тогда точка $H$ совпадает с $M$, а грани $ASB$ и $ABC$ взаимно перпендикулярны. Поэтому изображенная на рисунке 3 картина на

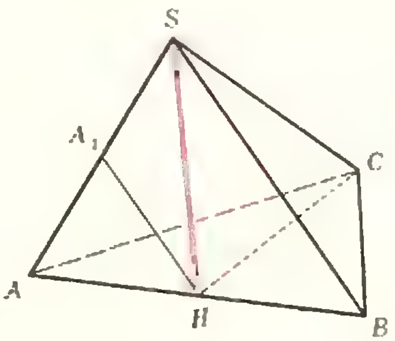


Рис. 4.

самом деле не соответствует условию задачи, верным будет рисунок 4.

Дальнейшее решение не представляет труда. Проекции на плоскость $ABC$ (рис. 4) равных наклонных $SA$, $SB$, $SC$ равны: $HA = HB = HC = a/2$, следовательно, точка $H$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABC$, а потому центр сферы лежит на перпендикуляре к плоскости основания, восставленном из точки $H$, т. е. на высоте $SH$ пирамиды (или на ее продолжении). Центр этой сферы равноудален, например, от точек $A$ и $A_1$. Поскольку $HA_1 = a/2$ как средняя линия треугольника $ASB$, то $HA_1 = HA$, так что точка $H$, лежащая на ребре $AB$, как раз и является центром сферы. Но радиус этой сферы по условию равен 1, $HA=a/2=1$, $a = 2$ и $SH = \sqrt{3}$.

Иногда само условие задачи умышленно бывает сформулировано несколько неопределенно — так, что оно явно допускает геометрически существенно различные чертежи, и непосредственно по исходным данным не ясно, какая именно из конфигураций имеется в виду. В таком случае надо изобразить на нескольких чертежах все возможности, отвечающие условию задачи, а затем, исследуя каждый чертеж, найти истинную геометрическую конфигурацию.

Задача 3 (МГУ, ф-т почвоведения, 1975). *В равнобочной трапеции лежат две окружности. Одна из них, радиуса* 1, *вписана в трапецию, а вторая касается двух сторон трапеции и первой окружности. Расстояние от вершины угла, образованного двумя сторонами трапеции, касающимися второй окружности, до точки касания окружностей вдвое больше диаметра второй окружности. Найти площадь трапеции.*

Непосредственно из условия задачи не ясно, в какой из углов трапеции — в тупой или в острый — вписана вторая окружность. Поэтому

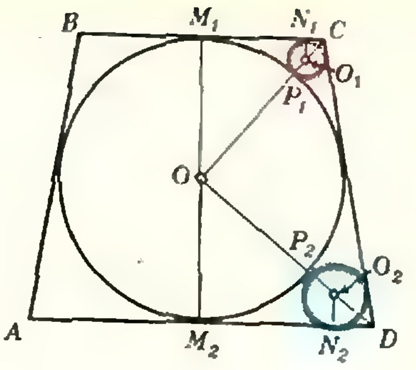


Рис. 5.

мы должны рассмотреть оба варианта (рис. 5) и попытаться выяснить, какой из них согласуется с конкретными числовыми соотношениями, заданными в условии.

Пусть $O$ — центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, $O_1$, $O_2$ — центры второй окружности (два варианта!), $P_1$, $P_2$, $M_1$, $M_2$, $N_1$, $N_2$ — точки касания. Радиусы второй окружности обозначим через $r_1$, $r_2$. Из подобия треугольников $OM_1C$ и $O_1N_1C$ в первом случае и $OM_2D$ и $O_2N_2D$ во втором имеем

$$\frac{OM_1}{O_1N_1} = \frac{OC}{O_1C}, \quad \frac{OM_2}{O_2N_2} = \frac{OD}{O_2D},$$

и, поскольку $OC = OP_1 + P_1C = 1+4r_1$, $OD = OP_2 + P_2D = 1+4r_2$, то в обоих случаях

$$\frac{1}{2r} = \frac{1+4r}{3r},$$

откуда $r = 1/2$. По теореме Пифагора из треугольников $OM_1C$ и $OM_2D$ соответственно получаем теперь, что

$$M_1C = 2\sqrt{2}, \; M_2D = 2\sqrt{2}.$$

Итак, если вторая окружность вписана в тупой угол трапеции, то меньшее основание трапеции равняется $4\sqrt{2}$; если же вторая окружность вписана в острый угол трапеции, то большее основание трапеции равно $4\sqrt{2}$. Между тем, если в равнобочную трапецию с основаниями $a$ и $b$, где $a < b$, вписана окружность диаметра $d$, то выполняется

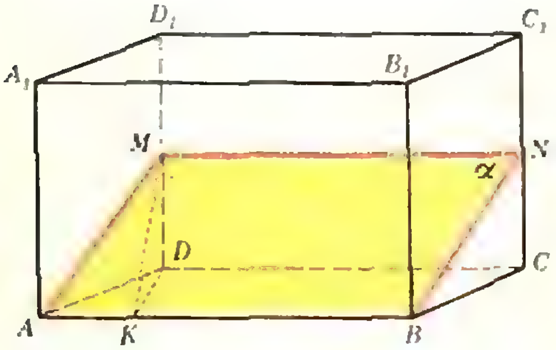


Рис. 6.

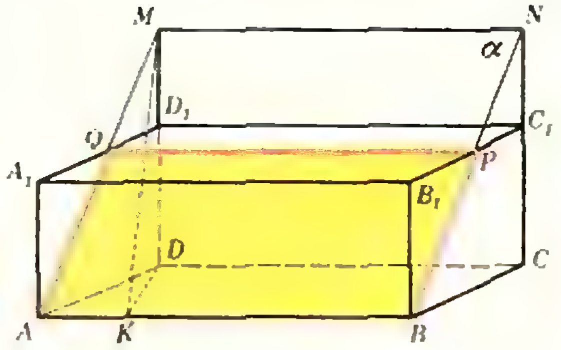


Рис. 7.

неравенство $a < d < b$ — это следует, например, из легко доказываемого и весьма полезного соотношения $d = \sqrt{ab}$. Поэтому в нашей задаче меньшее основание трапеции должно быть меньше 2, так что окружность с центром $O_1$ условию задачи не удовлетворяет, и следует рассматривать лишь окружность с центром $O_2$. Теперь уже легко найти площадь $S$ трапеции. Пользуясь соотношением между основаниями трапеции и диаметром вписанной в нее окружности $d = \sqrt{ab}$, мы получаем равенство

$$2 = \sqrt{AD\cdot BC} = \sqrt{4\sqrt{2}\cdot BC},$$

откуда $BC = \sqrt{2}/2$ и $S = \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot 2 = 9\sqrt{2}/2$.

В разобранной задаче возможность существования двух принципиально различных геометрических конфигураций была совершенно очевидна. Однако не всегда это так, и нужно обладать хорошим геометрическим воображением и проявлять достаточную осмотрительность, чтобы при выполнении чертежа «увидеть» все конфигурации, которые следует рассмотреть в решении.

Задача 4 (МГУ, географич. ф-т, 1968). *Высота прямой призмы равна 1, ее основанием служит ромб со стороной 2 и острым углом 30°. Через сторону основания проведена секущая плоскость, наклоненная к плоскости основания под углом в 60°. Найти площадь сечения.*

На экзамене многие поступающие, выполнив рисунок 6, дали примерно следующее «решение» этой задачи: «Пусть $MN$ — линия пересечения секущей плоскости $\alpha$ с плоскостью грани $DCC_1D_1$; опустив перпендикуляр $MK$ на $AB$, по теореме о трех перпендикулярах получим, что $KD \perp AB$. Поэтому $\angle MKD$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью $\alpha$ и плоскостью основания, так что $\angle MKD = 60^\circ$. Тогда $MK = \frac{KD}{\cos 60^\circ} = \frac{AD\sin 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 2$. Но $MK$ — высота параллелограмма $AMNB$, полученного в сечении, и следовательно, искомая площадь $S = AB\cdot MK = 4$».

В этом рассуждении есть существенный пробел: чертеж, на котором оно основано, выполнен при неявном предположении, что плоскость $\alpha$ пересекает прямоугольник $DCC_1D_1$. Между тем при заданных числовых данных это вовсе не очевидно, более того — неверно: в действительности плоскость $\alpha$ «выходит» из данной призмы через верхнюю грань, а точка $M$ лежит на продолжении ребра $DD_1$. В самом деле, найдя так же, как и выше, что $MK = 2$ (заметим, что это вычисление не зависит от положения точки $M$ на прямой $DD_1$), из треугольника $MDK$ мы получим, что $MD = \sqrt{3}$, так что $MD$ больше $D_1D$. Следовательно, речь в задаче идет о конфигурации, указанной на рисунке 7, и искать надо площадь параллелограмма $AQPB$, а не

*AMNB*. Дальнейшее решение задачи не вызывает принципиальных затруднений, и мы предоставляем это читателям; искомая площадь $S = 4/\sqrt{3}$.

Еще большее внимание требуется при решении задач, в которых геометрическая конфигурация задается не числовыми, а буквенными данными, т. е. в своего рода геометрических задачах с параметрами. В этих задачах (так же, как и в алгебраических задачах с параметрами) и способ решения, и получаемый ответ могут существенно зависеть от соотношений между параметрами, определяющими конфигурацию.

Пусть, например, в разобранной только что задаче секущая плоскость проведена под углом $\varphi$ к плоскости основания, а все остальные числовые данные — те же самые. Тогда в решении следует рассмотреть три случая:

1) точка $M$ лежит на ребре $DD_1$;
2) точка $M$ совпадает с $D_1$;
3) точка $M$ лежит на продолжении ребра $DD_1$.

Какой именно из указанных случаев имеет место, зависит от величины угла $\varphi$, и определить это можно, исходя из сравнения отрезков $MD$ и $D_1D$. Независимо от расположения точки $M$ на прямой $DD_1$, ясно, что $MD = KD \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi$. Поэтому указанные случаи определяются условиями:

1) $\operatorname{tg}\varphi < 1$;
2) $\operatorname{tg}\varphi = 1$;
3) $\operatorname{tg}\varphi > 1$.

Таким образом, если $\varphi < 45°$, то имеет место первый случай (рис. 6), и тогда $S = 2/\cos\varphi$. Если $\varphi > 45°$, то имеет место третий случай (рис. 7), тогда $S = 2/\sin\varphi$. Что же касается случая $\varphi = 45°$, то его нужно было бы рассмотреть на специальном чертеже, но фактически можно использовать и любой из имеющихся — так довольно часто бывает при рассмотрении «крайних» значений; в этом случае $S = 2\sqrt{2}$.

Окончательный ответ записывается в виде

$$S = \begin{cases} 2/\cos\varphi, & \text{если } \varphi < 45°, \\ 2\sqrt{2}, & \text{если } \varphi = 45°, \\ 2/\sin\varphi, & \text{если } \varphi > 45°. \end{cases}$$

Можно, разумеется, включить второй случай в любой из двух других, и записать ответ более компактно.

С аналогичной ситуацией мы встречаемся и в следующей задаче. Правда, окончательный ответ в ней от вида конфигурации не зависит и одинаков для всех значений параметра, однако промежуточные вычисления проводятся по-разному для различных конфигураций. Естественно, что решение, в котором рассмотрены не все геометрически различные случаи, не может считаться полноценным, хотя формально получается правильный ответ.

Задача 5 (МГУ, мехмат, 1970). *Шар радиуса $r$ касается плоскости $P$ в точке $A$. Прямая $l$ образует с плоскостью $P$ угол $\varphi$, пересекает эту плоскость в точке $C$ и касается шара в точке $B$. Найти длину отрезка $AB$, если $AC = 2r$.*

Изобразим конфигурацию, о которой идет речь в условии (рис. 8). Из точки $B$ опустим перпендикуляр $BB_1$ на плоскость $P$ и проведем отрезок $CB_1$; ясно, что $\angle BCB_1 = \varphi$. Далее, $OA = OB = r$, а $CB = CA = 2r$ по свойству касательных к шару, проведенных из одной точки.

Искомый отрезок $AB$ является гипотенузой прямоугольного тре-

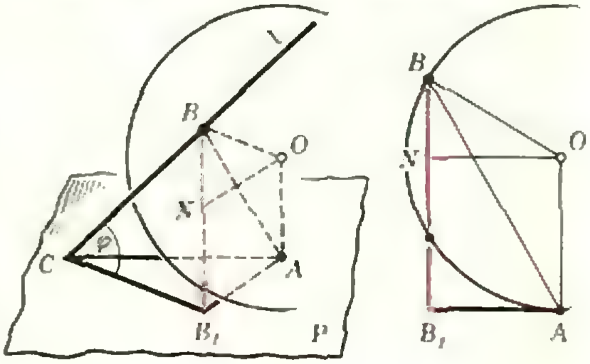


Рис. 8.

угольника $BB_1A$, катет $BB_1$ которого определяется из прямоугольного треугольника $CB_1B$: $BB_1 = 2r\sin\varphi$. Остается найти катет $AB_1$. Прямые $OA$ и $BB_1$, перпендикулярные к плоскости $P$, лежат в одной плоскости. Проведем в ней прямую $ON \parallel AB_1$; тогда $AONB_1$ — прямоугольник, и следовательно, $AB_1 = ON$, $NB_1 = OA = r$. Так как

$$NB = BB_1 - NB_1 = 2r\sin\varphi - r,$$

то из треугольника $ONB$

$$ON^2 = OB^2 - NB^2 = 4r^2 \sin\varphi\,(1 - \sin\varphi),$$

а из треугольника $BB_1A$

$$AB = \sqrt{AB_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{ON^2 + BB_1^2} = 2r\sqrt{\sin\varphi}.$$

Не следует, однако, думать, что задача решена. В самом деле, при вычислении отрезка $NB$ мы существенно использовали тот факт, что точки $B$, $N$ и $B_1$ расположены именно так, как это изображено на рисунке 8. Но из условия задачи вовсе не следует, что точка $N$ лежит между $B$ и $B_1$; точка $B$ может лежать между точками $N$ и $B_1$, точки $N$ и $B$ могут даже совпадать. Только рассмотрев все эти случаи, мы можем утверждать, что провели исчерпывающее решение задачи.

Если точка $B$ лежит между $N$ и $B_1$ (рис. 9), то

$$NB = NB_1 - BB_1 = r - 2r\sin\varphi,$$

а дальнейшее вычисление отрезков $ON$ и $AB$ проводится точно так же,

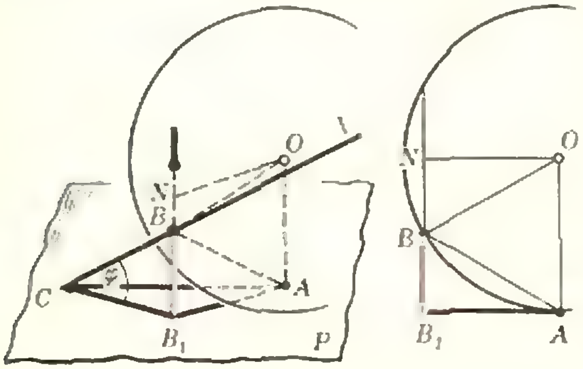


Рис. 9.

как и выше; в результате мы приходим к той же формуле для отрезка $AB$. Если, наконец, точки $N$ и $B$ совпадают, то ясно, что $BB_1 = ON = r$, и $AB = r\sqrt{2}$. В этом случае в треугольнике $CB_1B$ катет $BB_1 = r$ составляет половину гипотенузы $CB = 2r$, а потому $\varphi = 30^\circ$, т. е. $AB = 2r\sqrt{\sin\varphi}$.

Таким образом, равенство $AB = 2r\sqrt{\sin\varphi}$ справедливо при любых возможных значениях $\varphi$.

Решение этой задачи можно провести и с помощью рассуждений, не зависящих от конкретного расположения точек $B$, $B_1$ и $N$ — попробуйте сделать это самостоятельно.

Рассмотренные задачи показывают, что тщательное выполнение чертежа имеет содержательное значение — правильно выполненный чертеж облегчает решение, а неправильный может привести к неверным выводам. В заключение заметим, что необходимо обращать внимание и на чисто техническую сторону — чертеж должен быть простым и понятным, рисовать его надо как можно более аккуратно (причем не только в чистовике, но и при черновом решении), хотя не следует впадать в крайность: геометрическая задача не есть задача по черчению, миллиметровой точности здесь не нужно. Обычно достаточно аккуратно сделать чертеж от руки, без использования чертежных инструментов (кроме, быть может, циркуля), обращая особое внимание на взаимное положение отдельных фигур. Конечно, навыки рисования от руки нужно вырабатывать у себя заранее, в процессе подготовки к экзаменам.

### Упражнения

**1** (МГУ, мехмат, 1961). На плоскости даны четыре различные точки $A$, $B$, $C$, $D$ такие, что $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$. Доказать, что $AD \perp BC$.

**2** (МГУ, мехмат, 1961). В треугольной пирамиде две грани — равносторонние треугольники со стороной $a$, а две другие грани — равнобедренные прямоугольные треугольники. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

3 (МГУ, физфак, 1962). Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом $\alpha$ между диагоналями, а все боковые ребра образуют с плоскостью основания один и тот же угол $\varphi$. Определить расстояние от центра описанного шара до плоскости основания пирамиды и объем пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен $R$.

4 (МГУ, мехмат, 1968). Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB=1$, $BC=2$ и угол $ABC$ — тупой. Через каждую из точек $B$ и $D$ проведено по две прямые, одна из которых перпендикулярна к стороне $AB$, а другая — к стороне $BC$. В пересечении этих четырех прямых получился параллелограмм, подобный параллелограмму $ABCD$. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

5 (МГУ, экономич. ф-т, 1971). Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, причем $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. В угол $A$ куба вписан шар радиуса 1/2. Найти радиус шара, вписанного в угол $C$ куба и касающегося данного шара, если известно, что ребро куба равно 3/2.

6 (МГУ, ВМиК, 1971). Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник, стороны $AB$ и $AC$ которого равны и образуют между собой угол $\alpha$, а высота пирамиды совпадает с ребром $SA$ и равна $h$. Дана вторая треугольная пирамида, имеющая ту же вершину $S$, а ее основанием является треугольник, вершины которого лежат на разных сторонах треугольника $ABC$. Найти объем второй пирамиды, если известно, что ее боковые грани равновелики, а боковые ребра равны.

7 (МГУ, экономич. ф-т, 1973). В окружность вписан равнобедренный треугольник с основанием $a$ и углом при основании $\alpha$. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся первой окружности и основания треугольника, причем точка касания является серединой основания. Определить радиус второй окружности. Если решение не единственно, рассмотреть все возможности.

8 (МГУ, ф-т почвоведения, 1974). В треугольнике $ABC$ известно: $AC=1$, $BC=\sqrt{7}$, $\angle A=120^\circ$. На продолжении стороны $CA$ взята точка $M$ так, что $BM$ является высотой треугольника $ABC$. Найти радиус окружности, проходящей через точки $A$ и $M$ и касающейся в точке $M$ окружности, проходящей через точки $M$, $B$ и $C$.

9 (МГУ, ф-т почвоведения, 1975). В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга, причем каждая из них касается также трех сторон параллелограмма. Радиус одной из окружностей равен 1. Известно, что один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найти площадь параллелограмма.

10 (МГУ, мехмат, 1975). Два равных ромба $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$) и $APQR$ ($AP \parallel QR$, $AR \parallel PQ$) имеют общую вершину $A$ и лежат в одной плоскости. Известно, что $\angle BAD = \angle PAR = \alpha$, причем $\alpha < \pi/2$ и $\angle QAC = \beta$. Продолжения сторон $BC$ и $QR$ пересекаются в точке $K$. Ромбы расположены в разных полуплоскостях относительно прямой $AK$ и в одной полуплоскости относительно прямой $AD$. Найти величину угла $KAD$.

---

# Задачи наших читателей

1. В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD =$ с острым углом $\widehat{DAB} = \gamma$. Диагонали $AB_1$ и $BC_1$ боковых граней образуют с плоскостью основания углы $\alpha$ и $\beta$. Определить угол между этими диагоналями.

2. Даны географические координаты двух точек на сфере радиуса $R$: $\varphi_1$, $\theta_1$ и $\varphi_2$, $\theta_2$ ($\varphi$ — широта, $\theta$ — долгота). Определить расстояние по сфере между этими точками.

*В. Хренов* (г. Воронеж)

3. Пусть высоты треугольника $ABC$ пересекаются в точке $H$. Докажите, что

а) $|AH| = 2R|\cos\hat{A}|$, где $R$ — радиус описанной окружности треугольника;

б) $|AH| = |BC|\,|\operatorname{ctg}\hat{A}|$.

В частности,

а) если $|AH| = R_0$, то $\hat{A} = 60^\circ$ или $\hat{A} = 120^\circ$;

б) если $|AH| = |BC|$, то $\hat{A} = 45^\circ$ или $\hat{A} = 135^\circ$.

Заметим, что два эти примера приведены в качестве задач 5.1 и 5.3 в брошюре «Математические соревнования. Геометрия» («Наука», 1974), где указаны неправильные ответы (забыты тупые углы). См. также журнал «Математика в школе», 1970, № 4, с. 44; 1974, № 5, с. 73.

*Э. Готман* (г. Арзамас)

4. Дан треугольник $ABC$ со сторонами $a$, $b$, $c$; $r$ — радиус вписанной в него окружности, $R$ — описанной, $S$ — его площадь. Доказать, что

а) $$\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2} \leqslant \frac{9R^2}{4S};$$

б) $$\frac{\cos^2\frac{\hat{A}}{2}}{a} + \frac{\cos^2\frac{\hat{B}}{2}}{b} + \frac{\cos^2\frac{\hat{C}}{2}}{c} \geqslant \frac{27r}{8S}.$$

Для какого треугольника достигается равенство?

*Т. Райков* (Болгария)

# Варианты вступительных экзаменов в вузы

## Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Сегодня математические методы исследования все шире проникают не только в естественные науки и технику, но и в гуманитарные области знания. Именно поэтому на ряде гуманитарных факультетов университетов поступающие сдают письменный экзамен по математике. В этом номере мы знакомим читателей с вариантами, предложенными поступавшим на гуманитарные факультеты МГУ в 1975 году.

### Отделение политэкономии экономического факультета

1. На заводе работают токари 1-го, 2-го и 3-го разрядов. Некоторую работу два токаря 3-го разряда и один токарь 1-го разряда, работая вместе, могут выполнить на 15 минут быстрее, чем три токаря 2-го разряда. За то время, за которое один токарь 1-го разряда и один токарь 2-го разряда могут вдвоем выполнить ту же работу, один токарь 3-го разряда сделает только 5/7 этой работы. Один токарь 2-го разряда и один токарь 3-го разряда вместе могут выполнить эту работу за то же время, что и три токаря 1-го разряда. За какое время выполнит работу бригада, включающая в себя по одному токарю каждого разряда?

2. Решить уравнение

$$(\sin x+2\cos x+2)(1-2\cos x)=4\sin^2 x-3.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{3+\log_{2x}y^2}=-\log_{2x}y,\\ x+y=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

4. Прямоугольный треугольник с острым углом $\alpha$ расположен внутри окружности радиуса $r$ так, что гипотенуза является хордой окружности, а вершина прямого угла лежит на диаметре, параллельном гипотенузе. Найти площадь треугольника.

5. При каком значении $x$ выражение

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

принимает наименьшее значение?

### Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета

1. Найти все решения уравнения

$$\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\cos x}+\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\cos x}=\frac{5}{2}.$$

2. Дан треугольник $ABC$, причем $AB=AC$ и $\measuredangle A=110^\circ$. Внутри треугольника $ABC$ взята точка $M$ такая, что $\measuredangle MBC=30^\circ$, а $\measuredangle MCB=25^\circ$. Найти $\measuredangle AMC$.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{x-1}+x-3\geqslant\sqrt{2(x-3)^2+2x-2}.$$

4. В продажу поступили соцстраховские путевки трех типов. Одна путевка 1-го типа стоит 4 руб., одна путевка 2-го типа стоит 6 руб., одна путевка 3-го типа стоит 9 руб. По путевке 1-го типа можно отдыхать 8 дней, по путевке 2-го типа 14 дней, по путевке 3-го типа 20 дней. Сколько путевок каждого типа надо купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим, а сумма, израсходованная на приобретение всех путевок, составляла 100 руб.?

### Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. Из пункта $A$ в пункт $B$ вышел автобус, а из пункта $B$ в то же самое время навстречу этому автобусу выехали грузовик и велосипедист. После встречи с грузовиком в пункте $C$ автобус проехал до встречи с велосипедистом расстояние, равное трети пути $AC$. Если бы грузовик после встречи с автобусом поехал из пункта $C$ в обратную сторону, то он встретился бы с велосипедистом посредине между пунктами $B$ и $C$. Во сколько раз скорость автобуса превосходит скорость велосипедиста?

2. Найти все значения $x$, удовлетворяющие уравнению

$$\log_2\left(a^2x^3-5a^2x^2+\sqrt{6-x}\right)=\log_{2+a^2}\left(3-\sqrt{x-1}\right)$$

при любом значении $a$.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}+3\operatorname{ctg}2x.$$

4. Найти сумму корней уравнения

$$2\cos^2 x+\mathrm{ctg}^2 x=\frac{\sin^3 x+1}{\sin^2 x},$$

принадлежащих интервалу $2 \leqslant x \leqslant 40$.

5. В правильную треугольную пирамиду с длиной ребра основания $a$ и двугранным углом при основании, равным 60°, вложено три шара одинакового радиуса так, что каждый шар касается двух других, плоскости основания и двух боковых граней пирамиды. Найти радиус каждого шара.

### Факультет психологии

1. Бригаде из трех трактористов поручено вспахать поле. Если бы работали только 1-й и 2-й трактористы, то за один день было бы вспахано 45% поля. Если бы работали только 2-й и 3-й трактористы, то за два дня было бы вспахано 75% поля. Наконец, если бы работали только 1-й и 3-й трактористы, то за три дня было бы вспахано 97,5% поля. За сколько дней данное поле вспахал бы каждый тракторист в отдельности, если считать интенсивности работы каждого тракториста постоянными?

2. Вокруг треугольника $ABC$ со сторонами $AB=10\sqrt{2}$, $AC=20$ и углом $B$, равным 45°, описана окружность. Через точку $C$ проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение стороны $AB$ в точке $D$. Найти площадь треугольника $BCD$.

3. Решить уравнение

$$2-3\,\mathrm{tg}\,x=\sqrt{\frac{5-6\cos^2 x}{\cos^2 x}}.$$

4. Решить неравенство

$$\log_{x-2}\frac{1}{5}=\log_{\frac{x-3}{x-5}}\frac{1}{5}.$$

5. Найти все целые положительные решения уравнения

$$2x^2+2xy-x+y=112.$$

*И. Горев*

## Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Белорусский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет был создан в 1921 году. За время своего существования он превратился в один из крупнейших вузов страны. В частности, на трех факультетах (физическом, механико-математическом и факультете прикладной математики) университет готовит высококвалифицированные кадры физико-математического профиля. В этой статье мы коротко расскажем о физическом факультете БГУ.

Физический факультет БГУ имеет два отделения: физики и радиофизики. На отделение физики на первый курс принимается 325 человек. Специализацию студентов осуществляют девять кафедр. Из них две теоретические, где студенты занимаются вопросами квантовой механики, теории поля и элементарных частиц, статистической физики, теории относительности, теории атомных и молекулярных спектров. Остальные кафедры выпускают в основном физиков-экспериментаторов, специализирующихся по оптике и спектроскопии, физике твердого тела и полупроводников, теплофизике, биофизике, ядерной физике и др.

На отделение радиофизики на первый курс принимается 100 человек. Здесь студенты специализируются по радиотехнике и физической электронике, электрофизике, электронным математическим машинам и др.

Студенты физического факультета, начиная с 2—3 курсов, привлекаются к научной работе, которая проводится на кафедрах факультета, в лабораториях научно-исследовательского института прикладных физических проблем при БГУ, в институтах АН БССР и других НИИ Минска.

При университете имеется подготовительное отделение, которое готовит слушателей для поступления на физический и другие факультеты университета.

Поступающие на физический, механико-математический, химический факультеты и на факультет прикладной математики сдают устный экзамен по физике. В экзаменационных билетах имеются три вопроса по программе для поступающих в вузы и одна задача. Варианты задач для абитуриентов, поступающих на физический факультет и на нефизические факультеты, различаются. Ниже приводится несколько задач обоих вариантов, которые предлагались абитуриентам, поступающим в БГУ в 1975 году.

### Физический факультет

1. Шарик массой $m$, подвешенный на нити, отклонили от положения равновесия так, что нить стала горизонтальной, и отпустили. Когда шарик проходил положение равновесия, середина нити зацепилась за гвоздь. Определить натяжение нити в тот момент, когда нижняя половина нити будет горизонтальной.

2. Тело, брошенное вертикально вверх, прошло за первые 4 *сек* путь 50 *м*. Определить начальную скорость тела. Сопротивление не учитывать; $g=10$ *м/сек*².

3. Плотность жидкости, перекачиваемой насосом, увеличили на $n$%. Как при этом

изменилась скорость жидкости в насосе, если мощность насоса осталась без изменения?

4. Найти емкость системы конденсаторов, включенных между точками $A$ и $B$ (рис. 1), определить разность потенциалов и заряды на каждом конденсаторе, если $C_1 = 1$ *мкф*, $C_2 = 3$ *мкф*, а напряжение между точками $A$ и $B$ равно 10 *в*.

5. Между пластинами плоского конденсатора, подключенного к аккумулятору, находится в состоянии покоя в вакууме заряженный шарик. Определить ускорение шарика после увеличения расстояния между пластинами на 10%.

6. В оптическом центре вогнутого сферического зеркала с радиусом кривизны 50 *см* помещен точечный источник света силой 10 *св*. На расстоянии, равном диаметру зеркала (от полюса зеркала), помещен экран перпендикулярно главной оптической оси зеркала. Определить освещенность экрана в точке пересечения главной оптической оси с экраном.

7. Расстояние между двумя точечными источниками света равно 24 *см*. Где между ними надо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием 9 *см*, чтобы изображения обоих источников получились в одной и той же точке?

### Механико-математический, химический факультеты и факультет прикладной математики

1. Ящик в форме куба перемещают на некоторое расстояние: один раз волоком, а другой — кантованием (т. е. опрокидыванием через ребро). При каком значении коэффициента трения скольжения $\mu$ работы перемещения ящика волоком и кантованием равны?

2. На доске стоит цилиндр, у которого высота больше диаметра в два раза. Один из концов доски начинают медленно поднимать. Что произойдет раньше: цилиндр опрокинется или соскользнет с доски, если коэффициент трения цилиндра о доску 0,4?

3. Шарик массой $m$ на нити движется по окружности в вертикальной плоскости так, что полная энергия его остается постоянной. На сколько сила натяжения нити будет больше при прохождении шарика через нижнюю точку, чем через верхнюю? Сопротивление воздуха не учитывать.

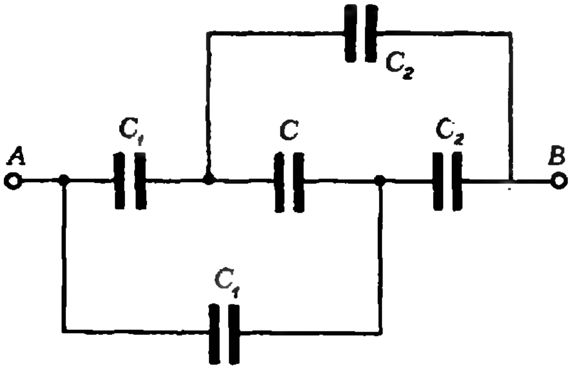


Рис. 1.

4. С наклонной плоскости высотой $h$ соскальзывает металлический брусок. На сколько градусов нагревается брусок, если $1/n$-я часть выделившегося при трении количества теплоты идет на нагревание бруска? Скорость бруска в конце наклонной плоскости $v$, удельная теплоемкость материала бруска $c$.

5. Металлический цилиндр объемом 400 $см^3$ был взвешен в воздухе и в углекислом газе. Разность в весе получилась в $2{,}8 \cdot 10^{-3}$ *н*. Каковы плотности углекислого газа и воздуха на основании данных опыта, если их отношение равно 20/13?

6. В фокусе вогнутого зеркала с радиусом кривизны 40 *см* помещен точечный источник с силой света 16 *св*. На двойном фокусном расстоянии от зеркала перпендикулярно оптической оси установлен экран. Определить освещенность в середине экрана.

7. Оптическая система состоит из тонкой собирающей линзы и плоского зеркала, установленного в ее фокальной плоскости. Источник света помещен на главной оптической оси и равноудален от линзы и зеркала. Определить местоположение всех изображений и расстояние между ними, если фокусное расстояние линзы равно $F$.

*А. Саржевский, С. Галко*

## Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова (Ленина)

Казанский государственный университет имени В. И. Ульянова (Ленина) является одним из старейших университетов СССР — он основан в 1804 году. В нем учился, вел преподавание и почти 20 лет был ректором великий русский ученый Н. И. Лобачевский. Здесь же начиналась революционная деятельность В. И. Ленина (в то время он был студентом юридического факультета).

После Великой Октябрьской социалистической революции университет вырос в крупное научно-педагогическое учебное заведение и имеет теперь 8 факультетов: механико-математический, физический, химический, биолого-почвенный, геологический, географический, юридический и историко-филологический (с отделением татарского языка и литературы).

На дневном отделении механико-математического факультета имеется 10 кафедр, НИИ математики и механики, вычислительный центр. Обучение проводится по трем специальностям: математика, прикладная математика и механика, а на вечернем — по прикладной математике.

Специальность «математика» разделена на следующие специализации: алгебра, геометрия (исследования по обобщенным пространствам), дифференциальные уравнения, теория функций и функциональный анализ. Помимо глубокой подготовки в избранной области, студенты овладевают методами вычислений, программированием, проходят практику в ВЦ и осваивают работу на ЭВМ.

Специальность «прикладная математика» разделяется на специализации: применение средств вычислительной техники (математическая логика, теория вероятностей, методы оптимизации, численные методы), математическое обеспечение ЭВМ, математическое обеспечение АСУ, теоретическая кибернетика.

Специальность «механика» включает специализации: гидроаэромеханика (в частности, подземная гидромеханика) и теория упругости и пластичности. В первой изучаются движения в жидких и газообразных средах (в частности, фильтрация в нефтеносных пластах) и техника эксперимента в аэродинамических лабораториях, во второй — теории упругости, пластичности и ползучести, методы расчета оболочек и соответствующая экспериментальная часть.

Выпускники факультета направляются в НИИ, конструкторские и проектные бюро и вузы.

На физическом факультете 12 кафедр, три проблемные лаборатории (магнитной радиоспектроскопии, радиоастрономии и бионики) и две астрономические обсерватории (городская — учебная и загородная — научно-исследовательская имени В. П. Энгельгардта). Подготовка студентов ведется по трем основным направлениям: физика, радиофизика и электроника, астрономия. Внутри этих специальностей осуществляются специализации: теоретическая физика, теория относительности и гравитации, физика твердого тела, теплофизика, физика полимеров, оптика и спектроскопия, радиоэлектроника, биоэлектроника, астрономия, астрономогеодезия.

Ниже приведены варианты вступительного письменного экзамена по математике и задачи из билетов устного экзамена по физике в Казанском государственном университете в 1975 году.

## Математика

### Вариант 1

(специальность: прикладная математика)

1. В прогрессии 1, $\sin x$, $\sin^2 x$, ... сумма первых $n$ членов в $m$ раз больше суммы всех членов прогрессии. При каких $x$, принадлежащих интервалу $(0, 2\pi)$, это возможно? Исследовать влияние на решение чисел $n$ и $m$.

2. Для всех вещественных чисел $a$ решить неравенство

$$\frac{x^2-2^{1-|a|}x+1}{x^2-a^2}<0.$$

3. В правильной четырехугольной пирамиде часть ее высоты (две трети от основания) служит диаметром шара. Найти длину линии пересечения поверхностей шара и пирамиды, если сторона основания пирамиды $a=\frac{\sqrt{14}}{2}$ есть среднее пропорциональное между высотой пирамиды и диаметром шара.

### Вариант 2

(специальность: математика и механика)

1. Решить неравенство

$$\log_2(4^x-5\cdot 2^x+2)>2.$$

2. Решить уравнение

$$\cos[\pi\log_2(x-4)]\cos[\pi\log_2(x-1)]=1.$$

3. В тетраэдре, ребро которого $a=3\sqrt{3}$, высота служит диаметром шара. Найти длину линии пересечения поверхностей тетраэдра и шара.

### Вариант 3

(специальность физика, радиофизика и астрономия)

1. Решить уравнение

$$7\sin x\cdot\cos x+\sin x-\cos x-1=0.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{3+|x^2-4x|}(x^2+|x-3|)<1.$$

3. Объем конуса в $m$ раз больше объема вписанного в него шара. Определить угол между образующей и плоскостью основания при наименьшем возможном значении $m$.

## Физика

1. Между двумя лодками, покоящимися на поверхности озера, протянута веревка. Человек, находящийся на первой лодке, тянет веревку с постоянной силой 50 *н*. Определить скорость, с которой будет двигаться первая лодка относительно берега и относительно второй лодки, через 5 *сек* после того, как человек на первой лодке начал тянуть веревку. Масса первой лодки с человеком 250 *кг*, второй лодки с грузом — 500 *кг*. Сопротивлением воды пренебречь.

2. На горизонтальной плоскости лежит брусок *1* с массой $M$, а на нем находится брусок *2* с массой $m$. Найти минимальное значение силы, приложенной к бруску *1*, при котором брусок *2* соскальзывает. Коэффициент трения бруска *1* о плоскость равен $k_1$, коэффициент трения между брусками — $k_2$.

3. В U-образную запаянную с одного конца трубку с длиной колена $L$ налита жидкость так, что в закрытом колене остался воздух, а уровень жидкости в открытом

колене совпадает с краем трубки. Затем часть жидкости выпустили через кран в нижней части сосуда. При этом уровни жидкости в обоих коленах сравнялись и остановились на середине трубок. Какова была разность уровней вначале, если плотность жидкости $\rho$ и атмосферное давление $p$ известны?

4. Заряд конденсатора в схеме, изображенной на рисунке 2, равен $q$. Определить емкость конденсатора, считая э. д. с. батарей $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, их внутренние сопротивления $r_1$ и $r_2$, а также сопротивления $R_1$ и $R_2$ известными.

5. Между пластинами плоского конденсатора на расстоянии 0,8 *см* от нижней пластины «висит» заряженный шарик. Разность потенциалов на пластинах 300 *в*. Через сколько секунд шарик упадет на нижнюю пластину, если разность потенциалов уменьшить на 60 *в*?

6. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v_0$. Длина обкладок конденсатора равна $l$. Определить напряженность поля в конденсаторе и направление скорости электрона при вылете его из конденсатора, если абсолютное значение этой скорости равно $v_1$.

7. Проволочный виток, имеющий площадь $S = 6\,000$ *см*², разрезан в некоторой точке и в разрез включен конденсатор емкостью 20 *мкф*. Виток помещен в однородное магнитное поле, магнитные линии которого находятся под углом 30° к плоскости витка. Индукция магнитного поля равномерно изменяется во времени со скоростью 0,005 *тл/сек*. Определить заряд конденсатора.

*Е. Беговатов, Р. Галиуллин, Б. Лаптев*

# Уральский государственный университет им. А. М. Горького

В «Кванте», 1973, № 7 мы рассказывали об Уральском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. А. М. Горького. В этом номере мы приводим образцы вариантов письменного экзамена по математике и задач устного экзамена по физике на математико-механическом и физическом факультетах в 1975 году.

## Математика

### Математико-механический факультет

### Вариант 1

1. Первая ткацкая фабрика за $k$ дней ($k$ — целое число) выпустила 80 640 *м* ткани, а вторая, затратив на один рабочий день больше, выпустила 139 840 *м* той же ткани. Известно, что за один день вторая фабрика выпускает по крайней мере на 8000 *м* ткани больше первой. Сколько метров ткани производит каждая фабрика за один рабочий день?

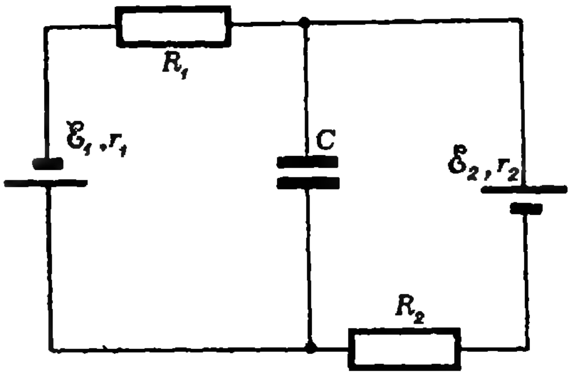


Рис. 2.

2. В прямоугольный треугольник вписан круговой сегмент так, что его хорда лежит на гипотенузе, а дуга, равная $\pi + 2\alpha$, касается катетов. Один из острых углов треугольника равен $\alpha$. Ближайший к вершине угла $\frac{\pi}{2} - \alpha$ конец хорды сегмента совпадает с серединой гипотенузы. Доказать, что угол $\alpha$ удовлетворяет соотношению $\operatorname{ctg} \alpha = -2 \cos 2\alpha$.

3. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0, \\ x|x| + y|y| = -2. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$\log_{\cos x}\left(\cos x - \frac{1}{4} \sin x\right) = 3.$$

### Вариант 2

1. В цехе имеется 8 станков, на каждом из которых производится по 5 изделий в день. Цех получил заказ на 440 изделий. Перед началом работы оказалось, что $k$ станков вышло из строя. После выпуска 150 изделий были отремонтированы старые и введены в строй еще $2k$ станков той же производительности. Известно, что цех на 10-й день (до окончания рабочего дня) выполнил заказ. Сколько изделий по этому заказу выпустил цех за 10-й день работы?

2. В прямоугольный треугольник вписан круговой сегмент так, что его хорда длины $l$ лежит на гипотенузе, а дуга, содержащая 240°, касается катетов. Найти гипотенузу треугольника, если один из его острых углов равен 30°.

3. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - x - y^2 = -0{,}25, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 0{,}5. \end{cases}$$

4. Решить уравнение
$(\log_{\cos x} \sin x)(1 + \log_{\sin x} \operatorname{tg} x) = 1.$

### Физический факультет

#### Вариант 3

1. Две машинистки вместе напечатали 167 страниц. Первая работала без перерыва, а вторая делала перерыв на 1 час. К моменту окончания перерыва оказалось, что обе напечатали по 60 страниц. Напечатав 72 страницы, первая машинистка закончила работу. Насколько позднее закончила работу вторая машинистка, если известно, что она печатает в час на 3 страницы больше первой?

2. В шаре радиуса $R$ хорда $AB$ равна $R$. Пусть точки $C$ и $D$ лежат на поверхности шара и угол $ACB$ прямой, а угол $ADB$ равен 60°. Найти угол между плоскостями $ACB$ и $ADB$.

3. При каждом действительном значении параметра $a$ найти наименьший корень уравнения
$x^3 + 2ax^2 - (a+1)^2x = 2a(a+1)^2.$

4. Решить систему

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{11}{16}, \\ \sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{5}{8}. \end{cases}$$

#### Вариант 4

1. Велосипедист проехал путь из $A$ в $B$, равный 60 *км*, с постоянной скоростью. Обратно он в течение часа едет с той же скоростью, затем делает остановку на 20 минут. После остановки он продолжает путь, увеличив скорость на 4 *км/час*. Какова была первоначальная скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь он потратил не меньше времени, чем на путь из $A$ в $B$?

2. Через касательную к шару радиуса $R$ проведены две плоскости под углом 45° друг к другу. Найти радиусы сечений шара этими плоскостями, если известно, что они относятся как 1 : 2.

3. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} + x < 1, \\ x^2 + x - 2 < 0. \end{cases}$$

4. При каждом действительном значении параметра $a$ решить уравнение
$a(a - \sin x)\sin x - a(a - \cos x)\cos x =$
$= \cos x - \sin x.$

## Физика

### Математико-механический факультет

1. Пуля массой $m$ попадает в деревянный брусок массой $M$, подвешенный на нити длиной $L$ (баллистический маятник), и застревает в нем. Определить, на какой угол $\alpha$ отклонится маятник, если скорость пули равна $v$.

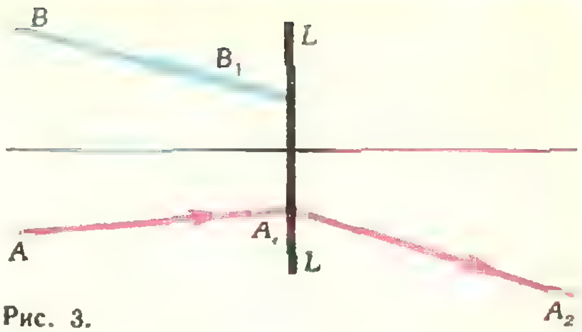


Рис. 3.

2. Оцените массу земной атмосферы, если известно, что радиус Земли $R_з =$ $= 6400$ *км*.

3. Электровоз движется со скоростью 72 *км/час*, развивая при этом в среднем силу тяги $5 \cdot 10^4$ *н*. Найти ток, проходящий через мотор электровоза (без учета потерь), если напряжение на зажимах мотора 500 *в*.

4. Луч света падает на границу раздела двух сред под углом 30°. Показатель преломления первой среды $n_1 = 2{,}4$. Определить показатель преломления второй среды, если известно, что отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу.

### Физический факультет

1. Тело массой 1 *кг* скользит по наклонной плоскости длиной 21 *м*, которая образует с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Скорость тела у основания наклонной плоскости 4,1 *м/сек*. Вычислить количество теплоты, выделившееся при трении тела о плоскость, если начальная скорость тела была равна нулю.

2. Электрическая лампа накаливания наполнена азотом при давлении 600 *мм рт. ст.* Емкость лампы 500 *см*³. Сколько воды войдет в лампу, если у нее отломить кончик под водой на глубине 10 *м* от поверхности? Атмосферное давление считать равным 760 *мм рт. ст.* Плотность ртути 13,6 *г/см*³.

3. На рисунке 3 дана линза $LL$ и ход луча $AA_1A_2$, прошедшего через линзу. Построить ход луча $BB_1$.

4. Солнечные лучи, падающие под некоторым углом на плоское горизонтальное зеркало, отражаясь, попадают на вертикальный экран. На зеркале стоит непрозрачная пластинка высотой $h$. Определить размер тени на экране.

*Э. Голубов, Р. Емлин*

# Московский технологический институт

В Московском технологическом институте имеются следующие факультеты: механико-технологический (готовит инженеров-механиков и инженеров-технологов); химико-технологический факультет (готовит инженеров химиков-технологов и инженеров-технологов); инженерно-экономический факультет (выпускники факультета получают квалификацию инженера-экономиста по учету); художественно-технологический факультет. При институте есть дневное подготовительное отделение и вечерние подготовительные курсы.

С 1974/75 учебного года все первые курсы обучаются по новым учебным планам, в которых существенно повышена роль математики в подготовке инженеров. На факультетах МТИ, кроме общего курса высшей математики, читаются курсы теории вероятностей и математической статистики, математического программирования, а также ряд спецкурсов, в частности, основы математической теории эксперимента. Наибольшая математическая подготовка обеспечивается на инженерно-экономическом и механико-технологическом факультетах, на химико-технологическом факультете введен курс вычислительной математики. На всех технологических факультетах введено обучение работе на ЭВМ.

На различных факультетах требования по математике разные, что учитывалось при составлении вариантов. Ниже приводятся некоторые варианты вступительного письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в МТИ 1975 года.

## Математика

### Инженерно-экономический факультет

1. Упростить выражение

$$2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}:$$
$$:\left[2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)\right].$$

2. Решить уравнение

$$(1-\sin 2x)-5(\sin x-\cos x)+4=0.$$

3. Решить неравенство

$$2^{2+\sin x}+10\geqslant 3\cdot 2^{1-\sin x}.$$

4. Полная поверхность конуса в $n$ раз больше поверхности вписанного в него шара ($n\geqslant 2$). Найти угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

### Механико-технологический факультет

1. Упростить выражение

$$\frac{a+\sqrt{2+\sqrt{5}}.\sqrt[12]{(9-4\sqrt{5})^3}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}}+$$
$$+\sqrt[3]{a}.$$

2. Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{2\sqrt{2}}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}<0.$$

4. В параллелепипеде все его грани — равные ромбы со сторонами $a$ и острыми углами $\alpha=60°$. Найти объем этого параллелепипеда.

### Химико-технологический факультет

1. Упростить выражение

$$\frac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+$$
$$+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}=-\log_x 5.$$

4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен $2\beta$, и периметр осевого сечения равен $2p$. Определить полную поверхность конуса.

## Физика

1. Объем пузырька воздуха при всплывании его со дна озера на поверхность увеличивается в 3 раза. Какова глубина озера? ($\rho=10^3$ *кг/м*$^3$, $g=9,8$ *м/сек*$^2$, $p_0=1,01\cdot10^5$ *н/м*$^2$).

2. Летчик давит на сиденье кресла самолета в нижней точке петли Нестерова с силой 7200 *н*. Масса летчика 80 *кг*, радиус петли 250 *м*. Определить скорость самолета.

3. Известно, что Земля создает электрическое поле, напряженность которого вблизи поверхности составляет $E=130$ *в/м*. Определить электрический потенциал поверхности Земли. Радиус Земли $R=6\,400$ *км*.

4. Линия электропередачи длиной 100 *км* работает при напряжении 200 *кв*. Определить к. п. д. линии, т. е. отношение напряжения на нагрузке к напряжению, подводимому к линии. Линия выполнена алюминиевым кабелем с площадью поперечного сечения 150 *мм*$^2$. Передаваемая мощность 30 000 *квт*.

5. Лампа мощностью $P=100$ *вт* обеспечивает среднюю освещенность площадки $E=150$ *лк*. Определить световую отдачу $\eta$ этой лампы, если на площадку с площадью $S=5$ *м*$^2$ падает $k=50\%$ светового потока.

*А. Назаретов*

# Над чем думают физики?

«Что такое размер и форма ядра? Всем ясно, что такое размер и форма покоящегося твердого тела. Но ведь ядро состоит из частиц, совершающих быстрые и запутанные движения. Имеет ли в таком случае смысл говорить о его размерах и форме? В качестве полезной аналогии рассмотрим пропеллер аэроплана. Вращающийся пропеллер имеет вид туманного круга, и случайный наблюдатель мог бы предположить, что он и в самом деле имеет форму круга. Однако более внимательный наблюдатель, вооруженный скоростной фотокамерой, может сделать фотоснимок, который обнаружит истинную форму пропеллера. Эта «моментальная фотография» согласуется с нашим обычным представлением о форме, в то время как «экспонированная фотография», увиденная первым наблюдателем, позволяет определить лишь среднюю форму, которая может не иметь ничего общего с истинной. Предположим теперь, что мы сделали вторую моментальную фотографию данного пропеллера или другого пропеллера, принадлежащего такому же аэроплану. На втором снимке мы увидим ту же самую форму, что и раньше,— ту же самую длину лопастей, такой же угол между ними и т. д. Отличной может быть лишь ориентация пропеллера в плоскости вращения. Пропеллер сохраняет свою форму, и, следовательно, мы можем считать его «твердым». Ситуация была бы другой, если бы мы сделали моментальные фотографии, например, двух одинаковых осьминогов. В этом случае формы спрутов на двух фотографиях почти наверняка были бы разными — спрут «мягкий».

Размеры и форму ядер также можно определить с помощью моментальных фотографий. Более того, мы можем различать «твердые» ядра, сохраняющие свою форму, и «мягкие» ядра, форма которых может меняться. Кроме того, мы можем делать снимки ядер с различным временем экспозиции. В этом случае мы будем получать не истинную форму, а лишь форму, усредненную по времени, нечто подобное расплывчатому кругу, в виде которого нам представляется вращающийся пропеллер.»

Так начинается одна из статей в десятом выпуске научно-популярного сборника «Над чем думают физики» *).

Научно-популярные сборники «Над чем думают физики» выходят с 1962 года. Каждый из них посвящен какому-либо крупному разделу современной физики — физике атомного ядра, элементарным частицам, физике твердого тела, квантовой микрофизике, астрофизике. Все статьи заимствованы из широко известного американского научно-популярного журнала «Scientific American». Авторами статей являются крупные ученые разных стран, рассказывающие о проводимых ими исследованиях. Это — своеобразный репортаж с самых передовых рубежей современной науки. Как правило, в этих статьях высокий научный уровень содержания успешно сочетается с увлекательной и доступной формой изложения. Авторы почти не прибегают к математическому аппарату, но зато широко используют убедительные примеры, глубокие физические аналогии, модели и другие приемы популяризации. Немало помогают в постижении рассказываемого и великолепные схематические рисунки, которыми щедро снабжена каждая статья.

Человечество остро нуждается в энергии. Чем совершеннее наша техника и комфортабельнее жизнь, тем больше энергии мы расходуем. Последние несколько десятилетий мировые расходы энергии удваивались в среднем примерно за каждые 10 лет. По прогнозам американских энергетиков США к 2030 году увеличат расход энергии в 10 раз. Темпы роста советской энергетики еще более высоки. Однако капиталистический мир уже не первый год живет в условиях жесткого энергетического кризиса. Слишком быстро тают запасы природного топлива — угля, нефти, газа. К тому же оно является теперь весьма ценным сырьем для предприятий большой химии. Данные Международных энергетических конгрессов свидетельствуют о том, что этих запасов хватит менее чем на одно столетие. Ну, а что же потом?

Человечество связывает свои надежды на будущее с атомной и термоядерной энергетикой. О физических основах этой во многих отношениях еще будущей энергетики и рассказывается в десятом выпуске сборника «Над чем думают физики».

В нем помещено тринадцать статей. Шесть из них рассказывают о физике атомного ядра — размерах и форме ядер, структуре их поверхности (структуре поверхности тела размером $\sim 10^{-12}$ *см*!), механизме деления тяжелых ядер, замыкающих периодическую систему элементов, круговороте радиоактивных изотопов и применении нейтронов для научных исследований. Седьмая статья посвящена так называемым атомным реакторам-размножителям, которые не только сжигают ядерное топливо, но, одновременно, производят новое искусственное ядерное топливо, да еще в количестве, большем сгоревшего. Именно с этими реакторами связаны сейчас наиболее важные исследования в области атомной энергетики.

---

*) Над чем думают физики, выпуск 10. М., «Наука», 1974. 184 с., ц. 80 коп.

Далее следуют четыре статьи об исследованиях в области управляемых термоядерных реакций — перспективы термоядерной энергетики, проблемы удержания горячей плазмы внутри термоядерных установок, попытки вызвать термоядерную реакцию при помощи лазерного луча и рассказ об установках «Токамак», на которых советские физики добились рекордных результатов по нагреву и удержанию термоядерной плазмы. Завершают сборник две статьи о новых методах ускорения заряженных частиц. Хотя статьи этого сборника написаны в разные годы, они удачно дополняют и развивают друг друга.

Несмотря на то, что все статьи в этом сборнике принадлежат иностранным авторам, в них часто встречаются имена советских физиков. Советские физики внесли очень большой вклад как в физику атомного ядра, так и в изучение управляемых термоядерных реакций. В сборнике рассказано о работах академика Н. Г. Басова, который первым получил термоядерные нейтроны при облучении водородной плазмы лучом мощного лазера. Подробно описаны советские термоядерные установки «Токамак», созданные под руководством академика Л. А. Арцимовича. Много внимания уделено критерию устойчивости термоядерной плазмы, предложенному советским физиком В. Д. Шафрановым и американским физиком Крускалом. Рассказано также о новых методах ускорения заряженных частиц, предложенных академиками Г. И. Будкером и В. И. Векслером. Однако в сборнике встречаются и такие места, где, к сожалению, отсутствуют необходимые ссылки на работы советских ученых. Жаль, что эти пробелы не восполнены при переводе и редактировании сборника (хотя сами переводы сделаны очень хорошо). Так, например, в начале статьи о делении атомных ядер следовало бы дать ссылку на работы члена-корреспондента АН СССР Я. И. Френкеля, который независимо от Н. Бора создал капельную модель ядра и применил ее к процессу деления тяжелых ядер. В статье о реакторах-размножителях надо было бы привести сведения о советских реакторах этого типа и прежде всего о мощном промышленном реакторе-размножителе, который давно уже работает на побережье Каспийского моря вблизи города Шевченко.

В заключение мы хотим привести небольшой отрывок из статьи В. Вола и Г. Крамера, прочитав который, читатель убедится в том, насколько живо и интересно написан рецензируемый сборник. Но прежде — два слова о методе нейтронно-активационного анализа, которому посвящена эта статья.

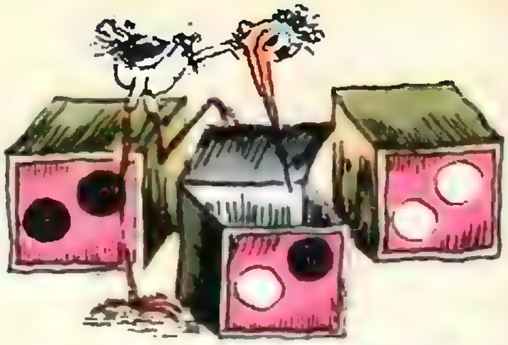
Облучая вещество нейтронами, можно сделать его атомы радиоактивными. Исследуя испускаемые при этом радиоактивные излучения, можно установить химический состав вещества и обнаружить имеющиеся в нем примеси, атомы которых будут испускать характерное для них излучение.

В конце своей статьи Вол и Крамер пишут:

«Едва ли не самое захватывающее применение нейтронно - активационного анализа за последние годы было предпринято двумя шведскими физиками С. Форсхувудом и А. Вассеном в 1961 году при сотрудничестве с Г. Смитом из отдела судебной медицины при университете в Глазго. В течение длительного времени медики ставили под сомнение официальный диагноз, что Наполеон умер от рака в 1821 году во время ссылки на острове Святой Елены. На основе записанных симптомов предполагалось много различных диагнозов: пепсиновая язва, малярия, дизентерия и др. Для проверки гипотезы о том, что Наполеон в действительности был отравлен, Форсхувуд и его коллеги раздобыли волосы, бесспорно принадлежавшие Наполеону. Они были сбриты с его головы в ночь после смерти, очевидно, для того, чтобы распространять их как сувениры, а также для снятия маски. Несколько волосков было облучено нейтронами в ядерном реакторе. Затем последовательно полумиллиметровые участки довольно длинных волос исследовались на присутствие в них мышьяка. Концентрация мышьяка в сегментах волос была гораздо выше нормальной. Это указывает на возможность хронического отравления Наполеона мышьяком. Кроме того, содержание мышьяка было не одинаковым по длине волос. По-видимому, Наполеону давали мышьяк с перерывами, не каждый день. Зная, что волосы на голове в среднем вырастают за день на 0,35 *мм*, ученые пришли к выводу, что периоды наивысшей концентрации мышьяка в волосах совпадают с теми днями, когда, судя по записям, Наполеон был особенно болен во время неволи. Таким образом, исходя из концентрации мышьяка, содержащегося в волосах современных здоровых людей, можно прийти к выводу, что Наполеон скорее всего умер от отравления мышьяком, который ему давали под видом лекарства во время болезни».

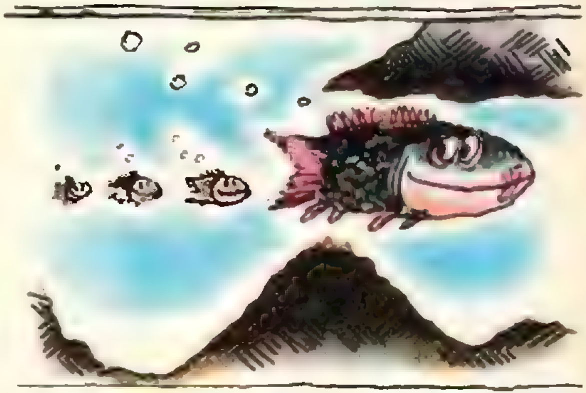
*В. Лешковцев*

# «Квант» для младших школьников

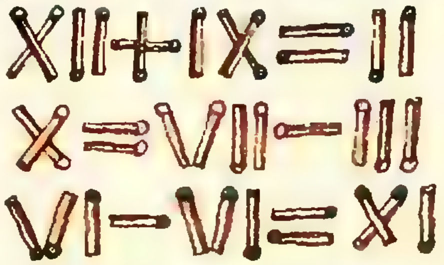


## Задачи

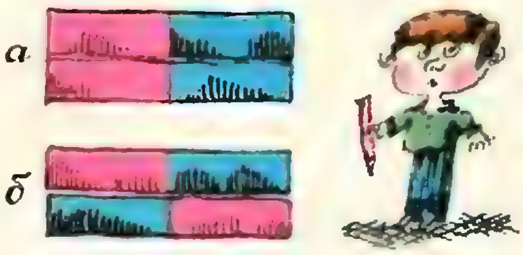
1. В трех одинаковых коробках лежат по два шарика: в одной — два черных, в другой — два белых, в третьей — белый и черный. На каждой коробке есть табличка: на одной изображены два белых шарика, на другой — два черных, на третьей — белый и черный. Но известно, что содержимое каждой коробки не соответствует табличке. Как, вынув только один шарик только из одной коробки, переставить таблички на коробках в соответствии с их содержимым?



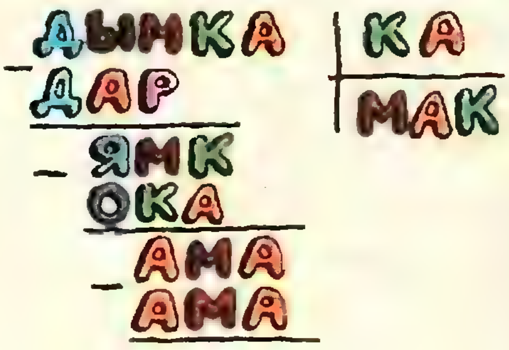
2. В озере плавает рыба. Она все время плывет в горизонтальном направлении. Дно озера очень неровное. Рыба проплывает то над глубокой впадиной, то над подводной горой, то попадает под нависшую скалу. Какие силы действуют на рыбу в этих трех случаях?



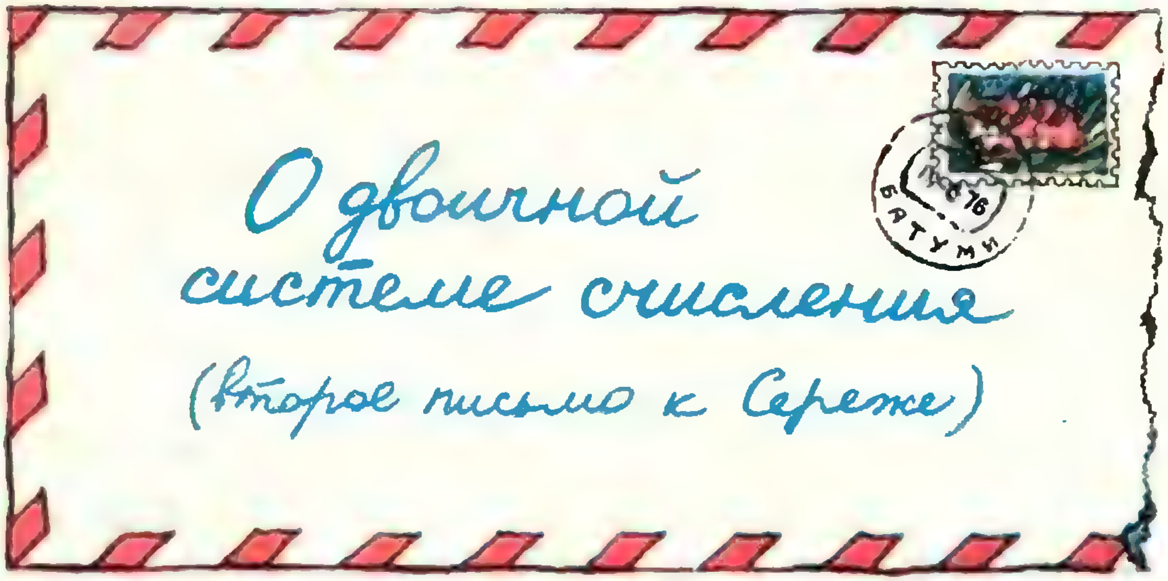
3. Из спичек сложили три неверных равенства (см. рисунок). Переложите в каждом равенстве по одной спичке так, чтобы равенства стали верными.



4. Два одинаковых прямолинейных магнита соединили один раз так, как показано на рисунке *а*, другой раз — так, как показано на рисунке *б*. Нарисуйте линии индукции магнитных полей в этих двух случаях.



5. На рисунке зашифрован процесс деления (уголком), в котором цифры зашифрованы буквами. Расшифруйте пример.



# О двоичной системе счисления

## (второе письмо к Сереже)

Здравствуй, дорогой Сережа!

На днях получил твое письмо. Оно меня очень обрадовало. Ты пишешь, что внимательно прочел заметку «О системах счисления» в «Кванте» № 8 за 1975 год и решил все предложенные там задачи. Разве можно усомниться в этом, когда в конце письма значится: «Писано в Москве, в воскресенье, 112-го сентября 30400 года»? *). Ох, и оригинальный же ты человек, Сережа! Правда, мне не совсем понятно, почему число и год ты записал в разных системах. Впрочем, в данном случае — это твое право.

Ну, а теперь приступим к делу.

1. Как я и обещал, сегодня у нас речь пойдет о двоичной системе счисления. Это — самая простая система счисления. В ней только две цифры — 0 и 1. Число 2, т. е. *основание системы*, запишется как 10. Ты, конечно, это отлично знаешь.

Вот как запишутся в двоичной системе числа первого десятка: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010.

Таблица сложения в этой системе состоит из единственного равенства: $1+1=10$. (Равенства $0+0=0$, $0+1=1+0=1$ можно опустить — ведь прибавление нуля не меняет числа!)

А как с таблицей умножения? Собственно говоря, никакой таблицы умножения в двоичной системе и нет — нужно только знать, что любое число, умноженное на нуль, есть нуль, и что умножение на единицу числа не меняет.

Арифметические действия над многозначными числами в двоичной системе выполняются по тем же правилам, что и в десятичной. Рассмотрим конкретные примеры.

1) Сложим числа 101101 и 10100. Запишем одно число под другим, соблюдая разряды:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 101\,101 \\ 10\,100 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$1+0=1$; $0+0=0$; $1+1=10$, — 0 пишем, 1 в уме; далее, $1+0=1$, да еще 1, будет 10, — опять 0 пишем, 1 — в уме; наконец 1, да еще 1 (то, что было «в уме») дают 10. Итак, получим:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 101\,101 \\ 10\,100 \end{array} \\ \hline 1\,000\,001 \end{array}$$

---

*) 14 сентября 1975 года. В первом письме к Сереже («Квант», 1975, № 8, с. 59) рассказывалось о разных системах счисления. Так, число 14, записанное в десятичной системе, то есть $14_{10}$ (индекс 10 — это основание системы счисления) — это число 112 в троичной системе счисления; поскольку $14_{10}=1\cdot3^2+1\cdot3+2\cdot3^0$. А число $1975_{10}$ в *пятеричной* системе счисления запишется как 30 400, так как $1975_{10}=3\cdot5^4+0\cdot5^3+4\cdot5^2+0\cdot5^1+0\cdot5^0$.

Проверим правильность наших вычислений. Для этого данные числа запишем в десятичной системе Имеем:

$$101101_2=1\cdot2^5+0\cdot2^4+1\cdot2^3+1\cdot2^2+$$
$$+0\cdot2^1+1\cdot2^0=45_{10},$$
$$10100_2=1\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+$$
$$+0\cdot2^0=20_{10}.$$

Сумма этих чисел должна равняться 65. Так и есть: $1000001_2=$ $=1\cdot2^6+0\cdot2^5+0\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+$ $+0\cdot2^1+1\cdot2^0=65_{10}$.

2) Умножим теперь число 1101 на число 110 Имеем:

$$\begin{array}{r}\times\ 1101\\ 110\\ \hline 11010\\ 1101\\ \hline 1001110\end{array}$$

Проверку этого, а также следующих результатов:

$$\begin{array}{r}-\ [illegible]\\ [illegible]\\ \hline [illegible]\end{array}\qquad \begin{array}{r|l}-\ 111100 & 1010\\ \cline{2-2} 1010 & 110\\ \cline{1-1} -\ 1010 & \\ 1010 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

сделай сам.

Кроме того, выполни действия и проверь правильность полученных ответов в следующих примерах: 10101 + 101, 111110 − 1011, 101101 − 111, 10101 · 101, 11011 : 11, 1001110001 : 1111101.

2. Как видишь, двоичная система и в самом деле очень простая. Правда, по сравнению с десятичной она довольно громоздка, но, оказывается, у нее есть ряд преимуществ. Расскажу только об одном.

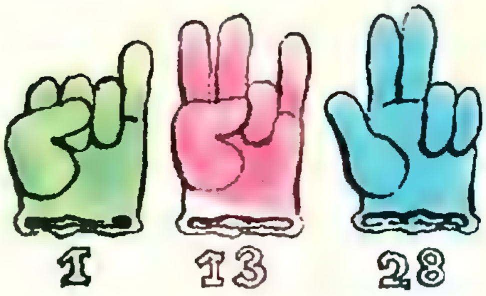


Рис. 1.

Предположим, что для обозначения чисел мы используем . . . пальцы рук. Так поступают, например, судьи баскетбольных матчей, показывая «на пальцах» номер игрока, получившего персональное замечание. Если номер игрока не больше десяти, то судья просто показывает соответствующее число пальцев; если же номер больше десяти, то судья показывает пальцы одной руки, зажатые в кулак — это десяток, и добавляет нужное число пальцев другой руки — единицы. Так он может показать номера 11, 12, 13, 14, 15. А как быть, если игроков больше (т. е. если матч не баскетбольный, а, например, футбольный)?

Представим теперь на минутку, что судья пользуется не десятичной, а двоичной системой счисления. Как ты думаешь, какие числа сможет он показывать пальцами только одной руки? Наверное, ты не поверишь, если я скажу, что он сможет показать любое число от единицы до тридцати одного включительно? Тем не менее это так. В самом деле, условимся согнутым пальцем обозначать нуль, а выпрямленным — единицу. Тогда мы сможем показывать все числа от $00001_2$ до $11111_2$; а последнее и есть $31_{10}$.

На рисунке 1 показано несколько чисел, «записанных пальцами».

Подумай, сколько чисел можно «записать», если использовать пальцы обеих рук?

3. В заключение, дорогой Сережа, хочу рассказать тебе об одном фоку-

се: его с успехом демонстрируют на своих Праздниках математики учащиеся Батумской школы № 7.

Возьмем какие-либо 15 названий — пусть, к примеру, это будут названия геометрических фигур: *точка*, *прямая*, *луч*, *отрезок* и т. д. — см. таблицу 1.

Составим из названий, помещенных в таблице 1, еще четыре таблицы (таблицы 2—5).

«Фокусник», показывая зрителям сводную таблицу, просит задумать название какой-либо фигуры. Потом, стоя спиной к таблицам 2—5, просит одного из зрителей сказать, в каких из этих таблиц присутствует задуманное им название. Получив ответ, он сразу называет, какая фигура была задумана. Затем он обращается к следующему зрителю и опять безошибочно называет задуманную фигуру и т. д. Зрители поражены.

А стоит ли поражаться? Секрет фокуса заключается в том, чтобы уметь переводить числа из двоичной системы счисления в десятичную. Уверен, что ты уже раскрыл его. Если нет, подумай — и наверняка найдешь ключ к отгадке. (Между прочим, можно брать и больше названий, например 31, или 63, или 127 и т. д. Но тогда придется составлять не четыре, а соответственно пять, шесть или семь таблиц.)

Ну, вот и все. Надеюсь, у тебя появилось желание поглубже познакомиться с системами счисления, в том числе и с двоичной. Могу порекомендовать литературу. Это книга С. В. Фомина «Системы счисления», М., 1975, и статья Р. С. Гутера «Системы счисления и арифметические основы работы электронных вычислительных машин» (см. книгу «Дополнительные главы по курсу математики», учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7—8 классов; хотя эта книга написана для учащихся 7—8 классов, многое в ней доступно и школьникам 5—6 классов).

*Таблица 1*

1 Точка
2 Прямая
3 Луч
4 Отрезок
5 Ломаная
6 Угол
7 Треугольник
8 Четырехугольник
9 Параллелограмм
10 Прямоугольник
11 Ромб
12 Квадрат
13 Трапеция
14 Окружность
15 Круг

*Таблица 2*

Точка
Луч
Ломаная
Треугольник
Параллелограмм
Ромб
Трапеция
Круг

*Таблица 3*

Прямая
Луч
Угол
Треугольник
Прямоугольник
Ромб
Окружность
Круг

*Таблица 4*

Отрезок
Ломаная
Угол
Треугольник
Квадрат
Трапеция
Окружность
Круг

*Таблица 5*

Четырехугольник
Параллелограмм
Прямоугольник
Ромб
Квадрат
Трапеция
Окружность
Круг

С нетерпением жду твоего письма.
Желаю успеха!
*А. Бендукидзе*

### К статье «Температура, теплота, термометр»

1. Отношение значений абсолютных температур кипения воды и таяния льда по опытным данным равно

$$\frac{T_к}{T_0} = 1{,}3661 .$$

На шкале Фаренгейта интервал между значениями температур, соответствующих $T_к$ и $T_0$, разделен на 180 частей-градусов. Поэтому

$T_к - T_0 = 1{,}3661\ T_0 - T_0 = 0{,}3661\ T_0 = 180$, откуда

$$T_0 = \frac{180}{0{,}3661} \approx 491{,}67.$$

Иными словами, интервал значений температур от абсолютного нуля до температуры таяния льда на шкале Фаренгейта должен быть разделен на 491, 67 частей-градусов. Так как температуре таяния льда на этой шкале соответствует отметка +32°F, то абсолютному нулю должна соответствовать отметка — 459,67°F.

Пользуясь аналогичными рассуждениями найдем, что по шкале Реомюра абсолютному нулю температуры соответствует отметка —218,52°R.

2. $$\overline{E} = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT =$$

$$= \frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ дж/град \cdot 10^3\ град}{2} =$$

$$= 2{,}07 \cdot 10^{-20}\ дж.$$

3. По той же формуле, что и в задаче 2 получаем

$$\overline{E} = 4{,}14 \cdot 10^{-16}\ дж.$$

4. При комнатной температуре ($T \approx$ $\approx 300$°K) средняя кинетическая энергия молекул газа равна

$$\overline{E} = \frac{3}{2}\ kT = 6{,}21 \cdot 10^{-21}\ дж.$$

Так как 1 эв = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ дж, то

$$\overline{E} = \frac{6{,}21 \cdot 10^{-21}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}\ эв \approx 3{,}9 \cdot 10^{-2}\ эв.$$

5. Постоянная Больцмана равна $1{,}38 \times \times 10^{-23}$ дж/°K. Градус Фаренгейта в 1,8 раз меньше градуса Кельвина. Поэтому

$$k = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23}}{1{,}8} = 7{,}6 \cdot 10^{-24}\ дж/°F.$$

### К статье «Чертеж в геометрической задаче»

1. Указание. Рассмотреть отдельно случаи, когда точка $D$ лежит внутри или вне треугольника $ABC$; воспользоваться теоремой о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2. $a\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})/2$.

3. $R\,|\cos 2\varphi|;\ \frac{4}{3}\ R^3 \sin^2 2\varphi \sin^3 \varphi \sin\alpha$.

Указание. Заметить, что вычисления проводятся по-разному, в зависимости от того, лежит центр описанного шара внутри или вне пирамиды.

4. 6/5. Указание. Рассмотреть два случая: указанные в условии задачи прямые пересекают стороны параллелограмма или их продолжения; убедиться, что в первом случае чертеж не соответствует условию задачи.

5. Условию задачи удовлетворяют три шара; их радиусы $r_1 = 1$ (внутреннее касание), $r_{2,3} = (3 \pm \sqrt{5})/2$ (внешнее касание).

6. $$\frac{-4h^3 \sin^3 \dfrac{\alpha}{4}}{3 \cos \dfrac{3\alpha}{4}}.$$

7. $\frac{1}{4}\ a \operatorname{tg}\alpha;\quad \frac{1}{4}\ a \operatorname{ctg}\alpha$.

8. $\sqrt{7}/4$.

9. $(8\sqrt{3} + 12)/3$.

10. $(\alpha + \beta)/2$.

### К статье «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

#### Отделение политэкономии экономического факультета

1. За 3 часа 15 минут.

2. $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi,$

где $n$ — целое. Указание. Привести уравнение к виду $(1 + \sin x)(1 - 2\cos x) = 0$.

3. $x = 1,\ y = {}^1/_2$. Указание. Из первого уравнения системы следует, что $y = 1/(2x)$ или $y = 8x^3$, причем $\log_{2x} y < 0$.

4. $S = \frac{r^2 \sin 2\alpha}{1 + \sin^2 2\alpha}$. Указание.

Обозначить гипотенузу треугольника через $a$, опустить на нее перпендикуляр из центра окружности и по теореме Пифагора вычислить радиус окружности.

5. $x = 0$. Указание. Обозначить $\sqrt{x} + 3$ через $y$ и найти наименьшее значение выражения $y + \frac{1}{y}$ при $y \geqslant 3$.

### Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета

1. $x = \pm\arccos(\log_{2+\sqrt{3}} 2) + k\pi$, где $k$ — целое. Указание. Заметить, что $\sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}} = 2 \pm \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3} = 1/(2+\sqrt{3})$ и обозначить $(2+\sqrt{3})^{\cos x}$ через $t$.

2. $\measuredangle AMC = 85°$.

3. $x = 5$. Указание. Обозначить $\sqrt{x-1}$ через $u$, $x - 3$ через $v$.

4. Одна путевка 1-го типа и 16 путевок 2-го типа.

### Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. В 5 раз.

2. $x = 5$. Указание. Значения $x$, удовлетворяющие данному уравнению при *любом* значении $a$, удовлетворяют этому уравнению, *в частности*, при $a = 0$. Но при $a = 0$ уравнение имеет два корня: $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. Непосредственная проверка показывает, что лишь первый из них удовлетворяет данному уравнению при любом значении $a$.

3. $$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{13} + \frac{k\pi}{2},$$

где $k$ — целое.

4. $117\pi$. Указание. Привести уравнение к виду $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ и найти (как суммы арифметических прогрессий) суммы соответствующих корней (по 6 в каждой серии).

5. $a/8$.

### Факультет психологии

1. За 5, 4 и 8 дней соответственно.

2. $150 + \frac{250\sqrt{3}}{3}$.

3. $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$, где $k$ — целое.

4. $4 - \sqrt{3} \leqslant x < 3$, $x \geqslant 4 + \sqrt{3}$.

5. $x = 1$, $y = 37$. Указание. Выразив из данного уравнения $y$ через $x$: $y = -x + 1 + \frac{111}{2x+1}$, заметить, что $2x + 1$ может быть лишь одним из четырех делителей числа 111.

### К статье «Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина»

### Физический факультет

1. $2\,mg$.

2. $v_1 = 30$ *м/сек*; $v_2 = 10$ *м/сек* (в этом случае тело должно быть брошено вверх с высоты, большей $\approx 40$ *м*).

3. $$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt[3]{1 + 0{,}01n}.$$

4. Разность потенциалов и заряд на конденсаторе $C$ равны нулю; $C_{AB} = \frac{2C_1C_2}{C_1 + C_2} = 1{,}5$ *мкф*; заряды на конденсаторах $C_1$ и $C_2$ равны $q = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}U_{AB} = 7{,}5\cdot 10^{-6}$ *к*; разности потенциалов на конденсаторах $C_1$ и $C_2$ равны соответственно $U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}U_{AB} = 7{,}5$*в* и $U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}U_{AB} = 2{,}5$*в*.

5. $a = 1/11g = 0{,}89$ *м/сек²*.

6. $E = 2I/R^2 = 80$ *лк*.

7. $d_1 = 18$ *см*; $d_2 = 6$ *см*.

### Механико-математический, химический факультеты и факультет прикладной математики

1. $\mu = 0{,}5(\sqrt{2} - 1) = 0{,}2$.

2. Цилиндр раньше соскользнет.

3. На $6\,mg$.

4. $$\Delta t = \frac{1}{nc}(gh - v^2/2).$$

5. $\rho_1 = 2$ *кг/м³*; $\rho_2 = 1{,}3$ *кг/м³*.

6. $E = 8I/R^2 = 800$ *лк*.

7. $S_1S_2 = 0{,}5F$; $S_1S_3 = 4F$; $S_2S_3 = 4{,}5F$. Указание. См. рис. 1.

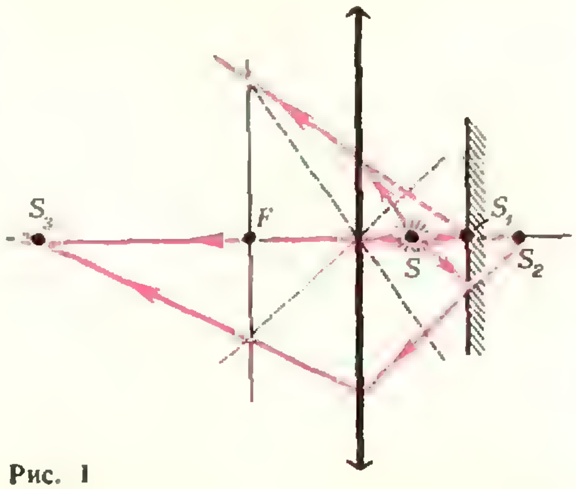


Рис. 1

## К статье «Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова (Ленина)»

### Математика

#### Вариант 1

1. При $m \geqslant 2$ и $m \leqslant 0$ решений нет; при $1 < m < 2$ и $n$ четном решений нет, при $n$ нечетном

$$x_1 = \pi - \arcsin \sqrt[n]{1-m},$$

$$x_2 = 2\pi + \arcsin \sqrt[n]{1-m};$$

при $0 < m \leqslant 1$

$$x_1 = \arcsin \sqrt[n]{1-m} \text{ (при } m \neq 1),$$

$$x_2 = \pi - \arcsin \sqrt[n]{1-m}$$

при нечетных $n$, а при четных $n$ еще

$$x_3 = \pi + \arcsin \sqrt[n]{1-m},$$

$$x_4 = 2\pi - \arcsin \sqrt[n]{1-m} \text{ (при } m \neq 1).$$

2. При $a = 0$ решений нет, при $a \neq 0$ решение $-|a| < x < |a|$.
3. $4\pi$.

#### Вариант 2

1. $x > \log_2 \dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$.
2. $x = 5$.
3. $4\pi$.

#### Вариант 3

1. $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x_2 = \pi + 2k\pi,$

$$x_{3,4} = \pm \arccos \frac{5\sqrt{2}}{14} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

2. $x < 0$, $0 < x < 5/2$.
3. $2 \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Указание. Пусть $R$ — радиус основания конуса, $\alpha$ — искомый угол, тогда высота конуса $h = R \operatorname{tg} \alpha$, радиус шара $r = R \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$.

### Физика

1. $v_1 = 1$ *м/сек*; $v_2 = 1{,}5$ *м/сек*.
2. $F_{\min} = (k_1 + k_2)(m + M)g$.
3. $x = \dfrac{p}{2\rho g}\left(\sqrt{1 - \dfrac{2\rho g L}{p}} - 1\right)$.
4. $C = \dfrac{q(R_1 + R_2 + r_1 + r_2)}{\mathscr{E}_1(R_2 + r_2) - \mathscr{E}_2(R_1 + r_1)}$.
5. $t = \sqrt{\dfrac{2lU_1}{g(U_1 - U_2)}} \approx 9 \cdot 10^{-2}$ *сек*.
6. $E = \dfrac{mv_0}{el}\sqrt{v_1^2 - v_0^2}$; угол отклонения скорости от первоначального направления равен $\varphi = \arccos v_0/v_1$.
7. $q = CS \dfrac{\Delta B}{\Delta t} \sin \alpha = 3 \cdot 10^{-8}$ *к*.

## К статье «Уральский государственный университет им. А. М. Горького»

### Математика

#### Вариант 1

1. Первая фабрика производит в день 26 880 *м* ткани, вторая — 34 960 *м* ткани. Указание. В силу условий задачи неизвестный параметр $k$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{139\,840}{k+1} - \frac{80\,640}{k} \geqslant 8000.$$

Отсюда следует неравенство $25k^2 - 160k + 252 \leqslant 0$. Решая последнее неравенство, получаем $\dfrac{14}{5} \leqslant k \leqslant \dfrac{18}{5}$. Поскольку $k$ — целое число, находим $k = 3$.

2. Пусть треугольник $ABC$ удовлетворяет всем условиям задачи (рис. 2), т. е. $\measuredangle BAC = \alpha$, $\smile DFGE = \pi + 2\alpha$, $E$ — середина гипотенузы $AB$. По условию $\measuredangle DOE = 2\pi - (\pi + 2\alpha) = \pi - 2\alpha$. Поэтому $\measuredangle ODE = \measuredangle OED = \alpha$. Значит, $DO \parallel AC$ и точки $D$, $O$ и $G$ лежат на одной прямой. Пусть радиус дуги сегмента равен $R$. Нетрудно подсчитать, что $GB = 2R \operatorname{tg} \alpha$, $CB = R + 2R \operatorname{tg} \alpha$, $AB = \dfrac{R + 2R \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$, $AD = \dfrac{R}{\sin \alpha}$, $DE = 2R \cos \alpha$. Согласно условию задачи $AD + DE = \dfrac{AB}{2}$, т. е. $\dfrac{R}{\sin \alpha} + 2R \cos \alpha = \dfrac{R(1 + 2 \operatorname{tg} \alpha)}{2 \sin \alpha}$. Отсюда $1 + 2 \sin 2\alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha$. Умножая обе части последнего равенства на $\operatorname{ctg} \alpha$, получаем $\operatorname{ctg} \alpha = -2 \cos 2\alpha$.

3. Первое уравнение системы можно записать в виде

$$(x + 3y)(x - y) = 0.$$

Если $x = -3y$, то из второго уравнения

системы $y|y| = \frac{1}{4}$, откуда $y > 0$, и следовательно, $y_1 = \frac{1}{2}$, $x_1 = -\frac{3}{2}$. Если же $x = y$, то из второго уравнения системы $y|y| = -1$, откуда $y < 0$, и значит, $y_2 = -1$, $x_2 = -1$.

4. $x_1 = \frac{\pi}{12} + 2n\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{12} + 2n\pi$, где $n$ — целое число. Указание. Получить $x = k\pi$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$. Для нахождения ответа учесть, что $0 < \cos x < 1$.

### Вариант 2

1. До ввода новых станков цех работал $\frac{150}{40-5k}$ дней, а после ввода — $\frac{290}{40+10k}$ дней. Из условия задачи получаем неравенство

$$\frac{150}{40-5k} + \frac{290}{40+10k} < 10,$$

откуда $10k^2 - 39k + 32 < 0$. Поскольку $k$ — целое число, из последнего неравенства находим $k = 2$. Значит, до ввода новых станков цех работал 5 дней, затем еще 4 полных дня в цехе работало 12 станков, т. е. за 9 дней цех выпустил $150 + 4 \cdot 5 \cdot 12 = 390$ изделий. Таким образом, за 10-й день работы по данному заказу цех выпустил $440 - 390 = 50$ изделий.

2. $\frac{2l}{3}(2 + \sqrt{3})$. Указание. Докажите, что если $D$ — ближайший к углу 30° конец хорды сегмента, $O$ — центр окружности сегмента, а $E$ — точка касания сегмента с катетом, лежащим против этого угла, то точки $D$, $O$, $E$ лежат на одной прямой.

3. Первое уравнение системы можно представить в виде

$$\left(x - \frac{1}{2} - y\right)\left(x - \frac{1}{2} + y\right) = 0.$$

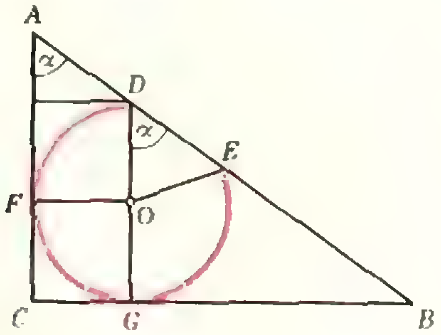


Рис. 2

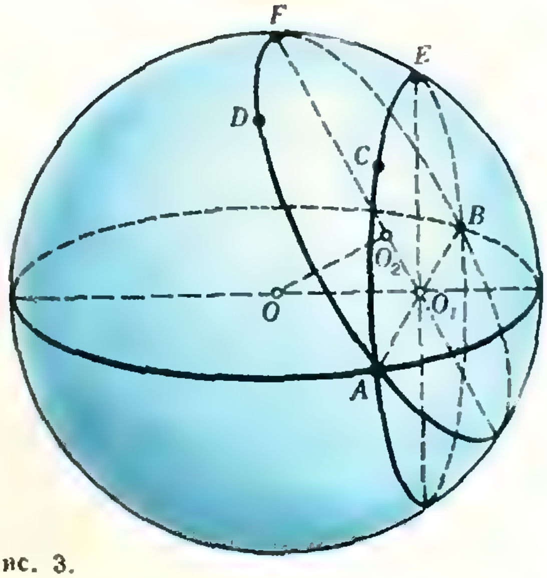


Рис. 3.

Если $x = \frac{1}{2} + y$, то из второго уравнения находим $\sqrt{\frac{1}{2} + y} + \sqrt{y} = \frac{1}{2}$. Последнее уравнение корней не имеет. Если же $x = \frac{1}{2} - y$, то второе уравнение системы приводится к виду $\sqrt{\frac{1}{2} - y} + \sqrt{y} = \frac{1}{2}$. Отсюда $\sqrt{y} < \frac{1}{2}$, т. е. $y < \frac{1}{4}$. Но при $y < \frac{1}{4}$ выполняется $\sqrt{\frac{1}{2} - y} > \frac{1}{2}$, так что последнее уравнение также не имеет корней. Таким образом, система решений не имеет.

4. $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, где $n$ — целое число. Указание. Получить $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ и учесть, что $0 < \cos x < 1$ и $0 < \sin x < 1$.

### Вариант 3

1. На 4/3 часа.

2. $\arcsin\frac{1}{3}$. Решение. Пусть $O$ — центр шара, $O_1$ — центр сечения этого шара плоскостью $ACB$, $O_2$ — центр сечения

этого шара плоскостью $ADB$ (рис. 3). Так как $\angle AOB$ прямой, хорда $AB$ — диаметр окружности с центром в точке $O_1$. Через точку $O_1$ перпендикулярно $AB$ проведем плоскость П, она пройдет через центр шара и будет перпендикулярна плоскостям $ACB$ и $ADB$. Пусть $E$ и $F$ — точки пересечения плоскости П с окружностями сечений $ACB$ и $ADB$ соответственно. Очевидно, $\angle EO_1F$ является линейным углом искомого двугранного угла между плоскостями $ACB$ и $ADB$. Так как $OO_2 \perp FO_1$ и $OO_1 \perp EO_1$, то $\angle EO_1F = \angle O_2OO_1$. Стороны треугольника $O_2OO_1$ легко найти: так как $\angle AO_2O_1 =$

$$= \angle AFB = \angle ADB = 60^\circ, \text{ то } O_2O_1 = \frac{R\sqrt{3}}{6};$$

очевидно, $OO_1 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Тогда $\sin\angle O_2OO_1 =$

$$= \frac{O_2O_1}{OO_1}.$$

3. При $a \leqslant -1$ наименьшим корнем будет $a+1$; при $-1 \leqslant a \leqslant 1$ наименьшим корнем будет $-a-1$; при $a \geqslant 1$ наименьшим корнем будет $-2a$. Указание. Корнями данного уравнения являются $x_1 = -2a$, $x_2 = a+1$, $x_3 = -a-1$. Значения параметра $a$, при которых наименьшим корнем будет $x_3$, найдутся из системы неравенств

$$\begin{cases} x_3 \leqslant x_1, \\ x_3 \leqslant x_2, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} -a-1 \leqslant -2a, \\ -a-1 \leqslant a+1, \end{cases}$$

откуда $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Аналогично можно найти значения параметра $a$, при которых наименьшим корнем будет $x_2$, а затем $x_1$.

4. $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + n\pi$, $y = (-1)^k \times$

$\times \arcsin \dfrac{3}{4} + k\pi$, где $n$ и $k$ — целые числа.

### Вариант 4

1. $20 \leqslant x < 60$. Указание. Пусть $x$ (*км/час*) — первоначальная скорость велосипедиста. Из условий задачи вытекает неравенство

$$\frac{60}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{3} + \frac{60-x}{x+4}.$$

Для получения ответа надо еще учесть, что $0 < x < 60$.

2. Радиус большего сечения равен $R\sqrt{\dfrac{10+4\sqrt{2}}{17}}$. Указание. Через точку касания прямой с шаром провести плоскость, перпендикулярную касательной. Сечение шара этой плоскостью есть большой круг, он пересекается с упомянутыми в условии задачи сечениями по их диаметрам.

3. $-2 < x \leqslant -1$.

4. При всех значениях параметра $a$ уравнение имеет серию корней $x = \dfrac{\pi}{4} +$ $+ n\pi$, где $n$ — целое число.

### Физика

#### Математико-механический факультет

1. $\cos\alpha = 1 - \dfrac{m^2v^2}{2gL(m+M)^2}$.

2. $M_{атм} \approx 52 \cdot 10^{17}$ *кг*.

3. $I = \dfrac{Fv}{U} = 2 \cdot 10^3 a = 2 ка$.

4. $n_2 = n_1 \dfrac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} \approx 1{,}4$.

#### Физический факультет

1. $Q = 94{,}5$ *дж*.

2. $m_в = \rho_в V\left(1 - \dfrac{p_1}{p_а + \rho_в gh}\right) \approx 300$ *г*.

3. См. рис. 4.

4. $l = 2h$.

### К статье «Московский электротехнический институт связи»

(*см. «Квант» № 5*)

### Математика

#### Факультет автоматики, телемеханики и электроники

1. $x_1 = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi(2n+1)}{2}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$ ($n$ — целое). Указание. Уравнение приводится к виду $\sin 3x = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$.

2. $x = 1$. Указание. Привести уравнение к виду $\left(2^x - \dfrac{2}{2^x}\right)^3 = 1$.

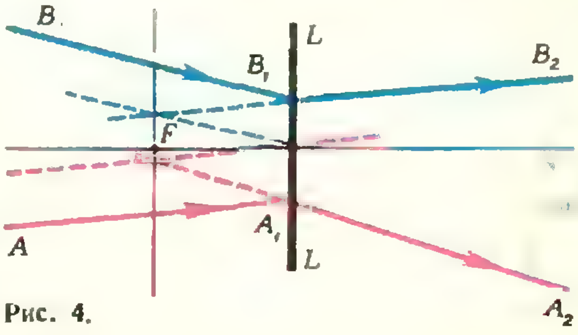


Рис. 4.

3. Указание. Корни заданного квадратного трехчлена лежат внутри отрезка $[0, 1]$, лишь между ними трехчлен отрицателен. 4. Указание. При заданных ограничениях $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \dfrac{-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$. 5. Искомых дробей будет три: 3/8, 4/15, 5/24. Указание. Обозначим искомую дробь через $x/(x^2-1)$, тогда надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2-1+2} > \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{x-3}{x^2-1-3} < \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

и отобрать только целые $x$.

**Факультет автоматической электросвязи**

1. $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$ ($n$ — целое). 2. $x < -1 + \sqrt{5}$. 3. $2\sqrt{3}\sin 20^\circ \sin 40^\circ$. 4. $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. 5. $\alpha = \arccos\dfrac{1}{3}$.

**Факультет автоматизации предприятий связи**

1. $x_1 = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$ ($k$ — целое). 2. $\log_{1/2}\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} < x < \log_{1/2}\sqrt{5}$. 3. $4\operatorname{tg}\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$. 4. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. 5. Искомых прогрессий будет четыре: $b = \pm 1/2$, $q = 2$; $b = \pm 4$, $q = 1/2$.

**Факультет радиосвязи и радиовещания**

1. $x = 8$. 2. $x = 7$. 3. $x = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi k$ ($k$ — целое). 4. $x \leqslant -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \leqslant x < 3$.

5. $r = \dfrac{b}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}\sqrt{\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}}$.

**Факультет многоканальной электросвязи**

1. $-2 < x \leqslant 1$, $x \geqslant 4$. 2. $x = k\pi/7$ ($k$ — целое). 3. 0. 4. $x_1 = 625$, $y_1 = 3$; $x_2 = 12$, $y_2 = 4$. 5. $S_{\text{ш}} = \dfrac{4}{\sin^2 2\alpha} \times \sqrt[3]{9\pi V^2 \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

**Инженерно-экономический факультет**

1. $x_1 = \dfrac{k\pi}{8}$, $x_2 = \dfrac{2\pi n}{9}$ ($k$ — целое, $n$ — целое, не кратное 9). 2. $x = 8$. 3. $a = -4$. 4. Указание. Воспользоваться формулой тангенса половинного угла. 5. $A = 42$, $B = 35$.

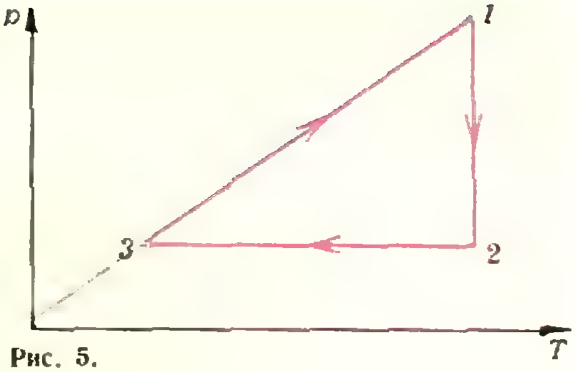


Рис. 5.

**Физика**

1. $h = s\left(\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gs}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)$, если $s$ и $\alpha$ отвечают условию $\operatorname{tg}\alpha > \dfrac{gs}{2v_0^2\cos^2\alpha}$. Заметим, что камень может попасть в столб как на подъеме, так и на спуске.

2. $F = \dfrac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$.

3. См. рис. 5 и 6.

4. $\varphi = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{n}\varphi_0$.

5. $U \approx 22\,в$.

6. $E \approx 4\,в/м$.

7. $v = 8\cdot 10^6\ м/сек$.

**К статье «Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)»**

*(см. «Квант» № 5)*

**Математика**

Вариант 1

1. 1632. Указание. По условию $136\cdot 21x - 136\cdot 12x = 1224$. 2. $x = -\dfrac{\pi}{4} +$

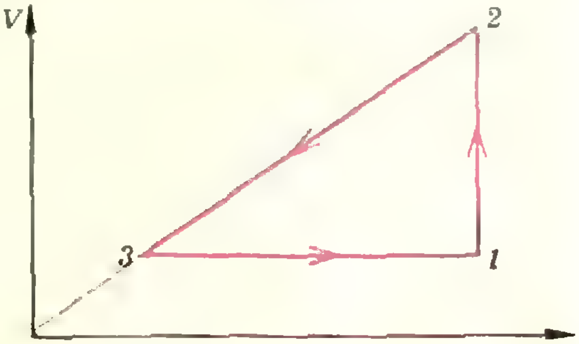


Рис. 6.

$+\pi k$ ($k$ — целое). Указание. Уравнение приводится к виду $(\sin x + \cos x) \times \times (\cos 2x - 1) = 0$. **4.** $x_1 = 1$, $x_2 = 10$, $x_3 = 0{,}001$. Указание. Положить $x = 10^y$; уравнение приводится к виду $y^3 + 2y^2 - 3y = 0$.

### Вариант 2

**1.** 63 *км/час*, 60 *км/час*. **2.** $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$ ($k$ — целое). **3.** $x = 5/2$. **5.** $x = 2$, $\alpha = \pi + 2\pi k$ ($k$ — целое) и $0 < x < 1$, $\alpha$ — любое.

### Физика

**1.** Задачу удобно решать в системе отсчета, связанной с одним из теплоходов, например, со вторым. С точки зрения наблюдателя, находящегося на теплоходе *2*, теплоход *1* движется со скоростью $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ по линии $AC$ (рис. 7), и минимальное расстояние между теплоходами равно

$$l_{\min} = BD = (OB - OA)\sin 60^\circ \approx 8{,}7 \text{ мили}.$$

**2.** При движении ядра над поверхностью Земли созданное силой тяжести ускорение $g$ не может рассматриваться как ускорение, с которым ядро приближается к поверхности Земли. Действительно, предположим, что линейная скорость ядра равна первой космической скорости; тогда ядро вообще не упадет на Землю, двигаясь между тем с ускорением $g$. Если же линейная скорость ядра меньше первой космической, ядро не сможет стать спутником Земли, а рано или поздно упадет на ее поверхность. Причем, упадет тем быстрее, чем меньше линейная скорость ядра. С точки зрения «неподвижного» наблюдателя (например, связанного с центром Земли) у «восточного» ядра линейная скорость $v' = v_я + v_з$, а у «западного» ядра — $v'' = v_я - v_з$. Здесь $v_я$ — скорость ядра относительно пушки, т. е. относительно «подвижного» наблюдателя, а $v_з$ — линейная скорость вращения Земли вокруг своей оси. Поскольку $v' > v''$, время полета «восточного» ядра больше, чем «западного». Следовательно, «восточное» ядро улетит дальше от пушки, чем «западное».

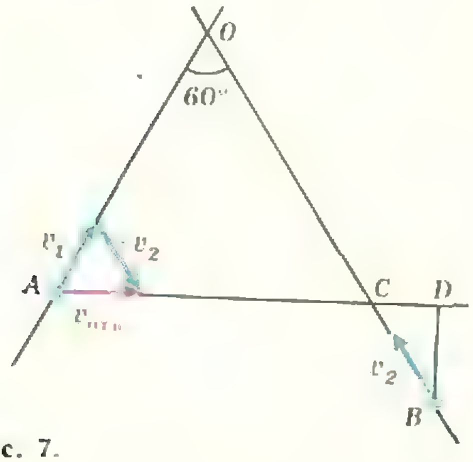


Рис. 7.

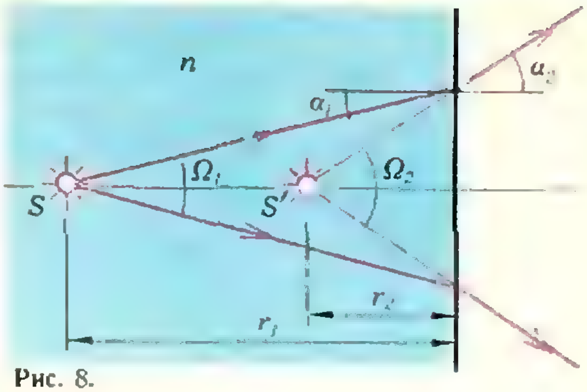


Рис. 8.

**3.** Работа равна изменению механической энергии спутника, равной сумме его потенциальной и кинетической энергий. Используя аналогию между законом Кулона и законом всемирного тяготения*), потенциальную энергию спутника можно вычислить по формуле $П = -\gamma\frac{mM}{R}$. Здесь $\gamma$ — гравитационная постоянная, $m$ — масса спутника, $M$ — масса Земли, $R$ — радиус круговой орбиты спутника. Кинетическую энергию спутника можно найти из условия движения спутника по круговой орбите: $mv^2/R = \gamma mM/R^2$, или $K = mv^2/2 = \gamma mM/2R$. Тогда полная механическая энергия спутника, движущегося по круговой орбите радиуса $R$, равна $E = П + K = -\gamma\, mM/R + \gamma mM/2R = -\gamma mM/2R$. Изменение энергии при переходе с орбиты радиуса $R_1$ на орбиту радиуса $R_2$ равно

$$\Delta E = E_2 - E_1 = E_1\left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right) = 5\cdot 10^9 \text{ дж}.$$

Следовательно, искомая работа равна 5 *Гдж*.

**4.** $$F = -\frac{g^2 r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2 l^2} = -4{,}4\cdot 10^{-3} \text{ дин};$$

знак «минус» показывает, что шарики притягиваются.

**5.** Сила света источника равна отношению светового потока к телесному углу, в котором этот световой поток распределяется. При переходе через перегородку телесный угол увеличивается (рис. 8), а световой поток не изменяется, поэтому $I_2/I_1 = \Omega_1/\Omega_2$. Из рисунка 8 $\Omega_1/\Omega_2 = r_2^2/r_1^2 = \sin^2\alpha_1/\sin^2\alpha_2 = 1/n^2$. Таким образом,

$$I_2/I_1 = 1/n^2,$$

т. е. сила света для наблюдателя уменьшится в $n^2$ раз.

---

*) См., например, статью С. Козела «Физические аналогии», «Квант», 1975, № 11. (*Прим. ред.*)

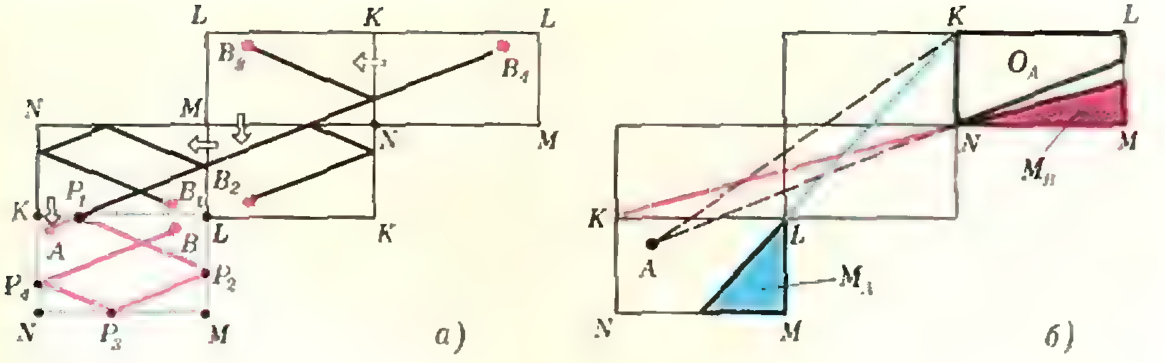


Рис. 9.

## К статье «Математика бильярда»

*(см. «Квант» № 5)*

1. См. § 2 статьи.

2. Если $\operatorname{tg}\alpha$ — рациональное число, то траектория периодична; в противном случае траектория непериодична.

3. Например, если начальный отрезок траектории параллелен одной из сторон треугольника, то траектория периодична. (Полный ответ такой: если $\alpha$ — угол между начальным отрезком траектории и одной из сторон, то траектория периодична тогда и только тогда, когда число $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$ рационально!).

4. Для этих бильярдов любая траектория либо периодична, либо всюду плотно заполняет *полукольцо* или *сектор кольца*, либо заканчивается в одной из точек излома борта.

5. Отразите $A$ относительно $OM$, $B$ относительно $ON$ и соедините полученные точки $A'$ и $B'$. Прямая $A'B'$ пересекает лучи $OM$ и $ON$ в искомых точках $P_1$ и $P_2$.

6. (А) Это частный случай задачи 5 (точка $B$ совпадает с точкой $A$).

(Б) Сначала зафиксируем положение точки $A$ на стороне $MN$ и применим построение из задачи 6 (А). Перемещая затем точку $A$ по стороне $MN$, увидим, что самый маленький периметр у треугольника $ABC$ будет тогда, когда $LA$ — высота треугольника $ABC$. Таким образом, искомый треугольник $ABC$ образован основаниями высот треугольника $MLN$.

7. Отразим прямоугольник $KLMN$ вместе с точкой $B$ последовательно относительно сторон $KL$, $LM$, $MN$, $NK$ (см. рис. 9, *а*), соединим получившуюся в конце концов точку $B_4$ с точкой $A$ и обратными отражениями превратим отрезок $AB_4$ в искомую траекторию $AP_1P_2P_3P_4B$. Траектория будет кратчайшей ломаной такого вида. Задача имеет решение не всегда: при каждом положении шара $A$ шар $B$ (или точка $B_4$) обязан находиться в соответствующей «зоне обстрела» $O_A$ (см. рис. 9, *б*); кроме того, для шара $B$ есть *«мертвая зона»* $M_B$ — если шар $B$ находится в зоне $M_B$, то в него никак нельзя попасть после требуемых отражений (при *любом* положении шара $A$); аналогичная «мертвая зона» $M_A$ есть и у шара $A$ — см. рисунок 9, *б*.

8. «Обратный принцип» неверен даже для выпуклых кривых (см. рис. 10, *а*, *б*).

9. Пусть $P_1P_2 \ldots P_nP_1$ — ломаная наибольшей длины. Возьмем в *принципе экстремального пути* в качестве точек $A$ и $B$ вершины этой ломаной через одну, т. е. $P_{k-1}$ и $P_{k+1}$; очевидно, $AP_kB$ — максимальная ломаная, и, согласно *принципу*, в точке $P_k$ выполнен закон упругого отражения.

10. (А) Самый длинный отрезок $P_1P_2$ с концами на кривой $\Gamma$ следует считать двузвенной периодической траекторией $P_1P_2P_1$. (Легко показать, что этот отрезок $P_1P_2$ перпендикулярен касательным к $\Gamma$ в точках $P_1$ и $P_2$.)

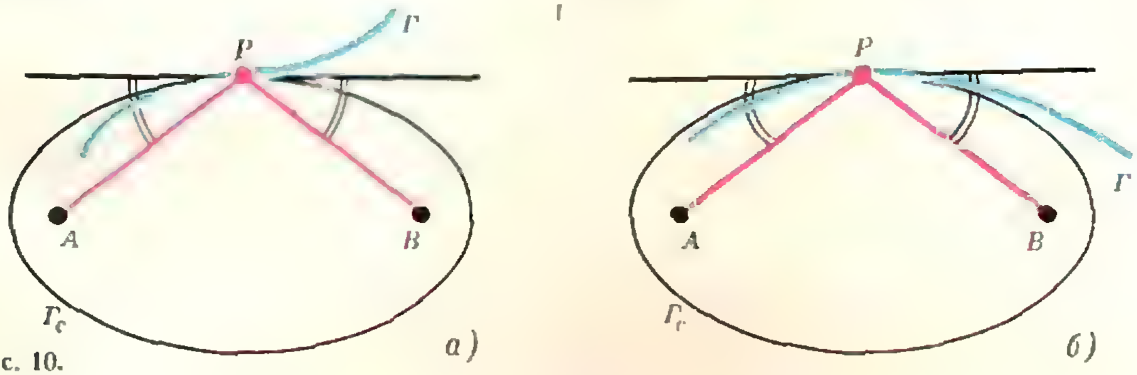


Рис. 10.

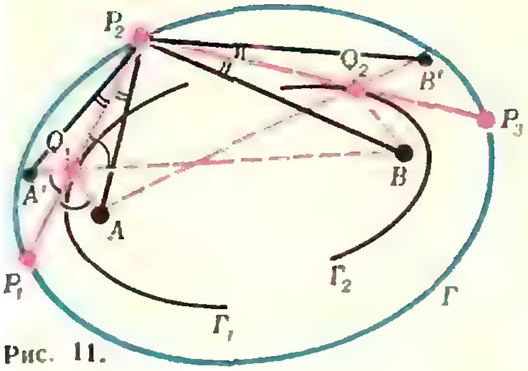


Рис. 11.

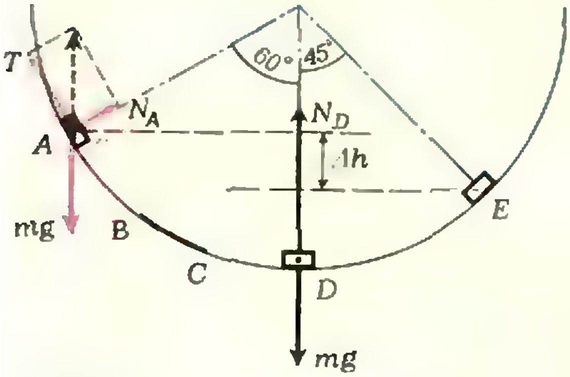


Рис. 12.

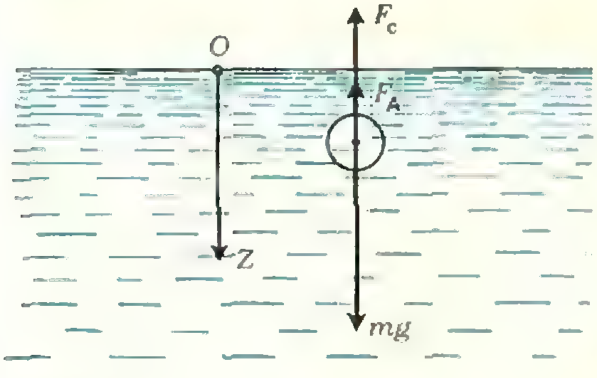


Рис. 13.

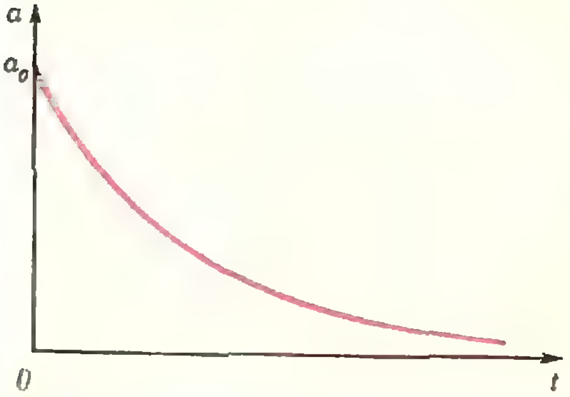


Рис. 14.

(Б) Ответ. *Не будет*. Если разрешить ломаным $P_1P_2...P_nP_1$ «самопересекаться», то при четном $n=2m$ «наидлиннейшая» ломаная вырождается в отрезок $P_1P_2$ из задачи 10 (А), проходимый $2m$ раз (в $P_1P_2P_1P_2P_1...$ $...P_2P_1$).

(В) Когда две вершины ломаной $P_1P_2...$ $...P_nP_1$ сливаются в одну, ее длина становится меньше (например, длина у ломаной $P_1P_3P_4...P_nP_1$ меньше, чем у $P_1P_2P_3P_4...$ $...P_nP_1$), и никакой $n$-звенной траектории не получится.

11. Правильные $n$-угольники.

12. Первое утверждение следует из оптического свойства эллипса. Докажем второе утверждение. Пусть $P_1P_2P_3...$ — рассматриваемая траектория; проведем эллипсы: $\Gamma_1$ с фокусами $A$ и $B$, касающийся отрезка $P_1P_2$, и $\Gamma_2$ с теми же фокусами, касающийся отрезка $P_2P_3$, и покажем, что они совпадают. Пусть $Q_1$ и $Q_2$ — соответствующие точки касания (см. рис. 11). Эллипсы $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ принадлежат семейству $\{\Gamma_c\}$, где $\Gamma_c$ задается соотношением $|AM|+|MB|=c$. Пусть $\Gamma_1=$ $=\Gamma_{c_1}$ и $\Gamma_2=\Gamma_{c_2}$; достаточно доказать, что $c_1=c_2$.

Рассмотрим точки $A'$ и $B'$, симметричные точкам $A$ и $B$ относительно прямых $P_1P_2$ и $P_2P_3$ соответственно. Из оптического свойства эллипсов $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ следует, что $c_1=|AQ_1|+|Q_1B|=|A'B|$, $c_2=|AQ_2|+$ $+|Q_2B|=|AB'|$. Но треугольники $A'P_2B$ и $AP_2B'$ конгруэнтны, так как $|A'P_2|=$ $=|AP_2|$, $|P_2B|=|P_2B'|$ и $A'\widehat{P_2}B=A\widehat{P_2}B+$ $+A'\widehat{P_2}A=A\widehat{P_2}B+B\widehat{P_2}B'=A\widehat{P_2}B'$ (углы $A'P_2A$ и $BP_2B'$ равны, так как в силу оптического свойства эллипса $\Gamma$ равны углы $AP_2P_1$ и $BP_2P_3$!). Следовательно, $|A'B|=$ $=|AB'|$ и $c_1=c_2$.

13. Эта задача решается аналогично задаче 12, только вместо эллипсов $\Gamma_c$ нужно рассмотреть гиперболы $H_c$, задаваемые соотношениями $||AM|-|MB||=c$, и использовать *оптическое свойство гиперболы*: для любой точки $M$ на гиперболе $H_c$ отрезки $MA$ и $MB$ образуют равные углы с касательной к $H_c$ в точке $M$.

16. «Намотав» отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$ на окружность $\Gamma$ длины 1, получим на $\Gamma$ последовательность точек $\{P_n=a_n\}$, удовлетворяющую условиям теоремы Якоби.

17. Если $c^n$ начинается с набора цифр $A$, то для некоторого $k$ имеем $A\cdot 10^k \leqslant c^n <$ $<(A+1)\cdot 10^k$, т. е. $k+\lg A \leqslant n\cdot\lg c<$ $<k+\lg(A+1)$, или $\{\lg A\} \leqslant \{n\cdot\lg c\}<$ $<\{\lg(A+1)\}$. Осталось воспользоваться иррациональностью числа $\lg c$ и применить утверждение задачи 16.

### К статье «Экзамены по физике в Англии»

*(См. «Квант» № 5)*

1. а) На тело действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила реакции опоры $\mathbf{N}_A$ и сила натяжения нити $\mathbf{T}$, причем $m\mathbf{g}+\mathbf{N}_A+\mathbf{T}=0$ (рис. 12). б) В этом положении на тело дей-

ствуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила реакции опоры $\mathbf{N}_D$, при этом $N_D - mg = \frac{mv_D^2}{R}$.
в) Потеря механической энергии равна $mg\Delta h = mgR(\sqrt{2}-1) \cdot 2 \approx 12$ *дж*. г) $N_D = mg + \frac{mv_D^2}{R} = mg[1 + (2-\sqrt{2})] \approx$ $\approx 64$ *н*.

**2.** При движении на тело действуют (рис. 13) сила тяжести $m\mathbf{g}$, выталкивающая сила (сила Архимеда) $\mathbf{F}_A$ ($F_A = V\rho_ж g = \frac{m}{\rho_т}\rho_ж g$; $\rho_ж$ и $\rho_т$ — плотности жидкости и тела соответственно) и сила сопротивления $\mathbf{F}_c$ ($F_c = kv$; $k$ — коэффициент пропорциональности). Запишем уравнение движения тела: $ma = mg - m\frac{\rho_ж}{\rho_т}g - kv$. В начальный момент ($v = 0$) $a = a_0 = g\left(1 - \frac{\rho_ж}{\rho_т}\right)$, затем ускорение уменьшается (рис. 14). В пределе (при достаточно большой высоте сосуда) движение становится равномерным со скоростью $v_{max} = \frac{m}{k}\left(1 - \frac{\rho_ж}{\rho_т}\right)g$ (рис. 15). График изменения координаты тела со временем приведен на рисунке 16. Аналитические выражения для $a$, $v$ и $z$ в зависимости от $t$ можно получить, решая соответствующие дифференциальные уравнения. Если вы сумеете это сделать, то получите

$$a(t) = v_{max}\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t}, \quad v(t) = v_{max}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right), \quad z(t) = v_{max}t + v_{max}\frac{m}{k} \times \left(-1 + e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

**3.** а) Разобьем кольцо на такие малые участки, что заряды на них можно считать точечными. Тогда силу $F$ можно представить как сумму сил взаимодействия этих точечных зарядов с пробным зарядом. Очевидно, что при $x = 0$ $F = 0$ в силу симметрии. б) При увеличении $x$ сила $F$ сначала растет, но при $x \to \infty$ $F \to 0$ (так как стремятся к нулю все элементарные силы взаимодействия). Можно показать, что сила $F$ максимальна при $x = R\sqrt{2}/2$.

**4.** Цилиндр будет совершать колебания вдоль вертикальной оси (обозначим ее через $OZ$). Если трение мало, то колебания будут затухать медленно. График зависимости $z(t)$ приведен на рисунке 17.

**5.** См. рис. 18.

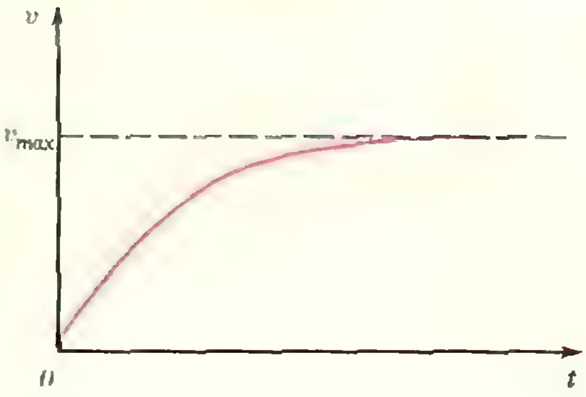


Рис. 15.

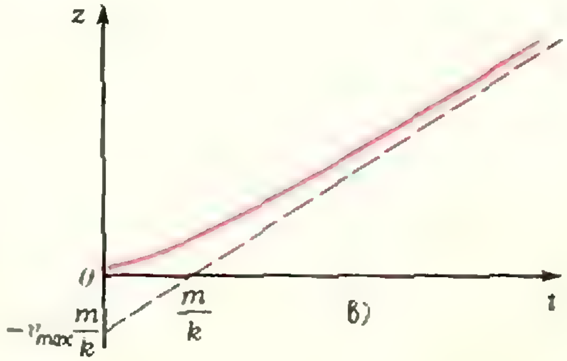


Рис. 16.

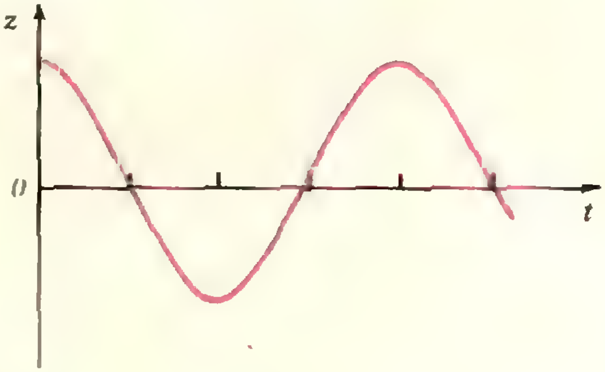


Рис. 17.

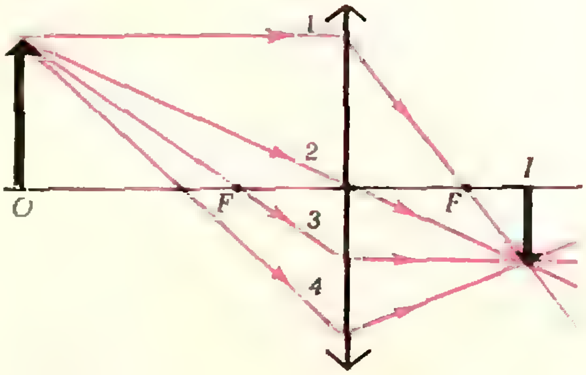


Рис. 18.

6. Для материальной точки массы $m_i$, движущейся по окружности радиуса $r_i$ с угловой скоростью $\omega$, момент импульса равен $m_ir_i^2\omega$, а для системы $n$ материальных точек — $\sum\limits_{i=1}^{n} m_ir_i^2\omega$. В замкнутой системе полный импульс есть величина постоянная. Когда мальчик уронит гантели (не опуская рук), то а) угловая скорость его вращения не изменится; б) момент импульса всей системы (мальчик, стул, гантели) уменьшится.

7. Пусть для определенности источник света дает линейчатый спектр, тогда 1) призма позволяет получить только один спектр, а дифракционная решетка — несколько; 2) чем меньше длина волны света, тем ближе располагаются соответствующие максимумы в спектре от решетки к центральному максимуму, а для призмы наоборот — она сильнее отклоняет короткие волны, чем длинные. 3) Для источника, дающего сплошной спектр, ширина разноцветных полос в спектре от решетки одна и та же, а в спектре от призмы — нет (например, синие участки шире, чем красные).

8. Чем больше длина наклонной плоскости, тем больше время скатывания, так как конечная скорость в обоих случаях одна и та же, а ускорение пропорционально синусу угла наклона плоскости к горизонту, т. е. обратно пропорционально длине наклонной плоскости.

9. а) Стержень-перемычка начнет двигаться вправо (по правилу левой руки). б) Ускорение стержня с течением времени будет уменьшаться, так как э. д. с. индукции, возникающая в замкнутом контуре, уменьшает ток в цепи. Движение стержня аналогично движению тела в вязкой жидкости (см. задачу 2).

10. Наметим только путь решения этой задачи. а) По мере увеличения тока $I$ в цепи температура $T$ проволоки будет повышаться. В результате будет увеличиваться длина $l$ проволоки (а значит, и величина провисания проволоки $\Delta h$, которую удобно измерять), ее сопротивление $R$ и, следовательно, падение напряжения $U$ на ней. При больших токах проволока раскалится до такой температуры, что начнет светиться, причем интенсивность излучения связана с величиной тока. Сильно нагретая проволока может гореть в воздухе, причем скорость этой реакции тоже зависит от $I$. Величина тока в проволоке влияет на индукцию $B$ возникающего магнитного поля и на силу $F$, действующую на проволоку со стороны внешнего магнитного поля (например, магнитного поля Земли). При нагревании проволоки меняется также сила давления $F_д$ проволоки на опоры. б) Для измерений можно выбрать, например, такую тройку величин: $\Delta h$, $R$ и $B$. Прежде чем проектировать эксперимент, оцените ожидаемые результаты. Например, подсчитайте, на сколько изменяется длина проволоки $l$ и ее сопротивление $R$ при нагревании проволоки от комнатной температуры на 100°.

### К задачам «Квант» для младших школьников»

*(см. «Квант» № 5)*

1. Пусть бриллианты стоят 40 000, 60 000, 70 000, 80 000, 600 000, 610 000, 620 000, 630 000, 640 000, 650 000 долларов. Тогда все условия задачи выполнены.

2. Необходимо взять с собой тело, вес которого измерен на Земле (все равно, каким способом), и пружинные весы (динамометр). Рычажные (чашечные) весы для эксперимента не годятся. Их показания на Земле и на Луне будут одинаковыми: сами гири «уменьшатся» в весе в 6 раз.

3. Указание. Множество точек $M$, для которых $|AM| \leqslant |BM|$, — это полуплоскость, содержащая точку $A$ и ограниченная срединным перпендикуляром к отрезку $AB$. Аналогично рассматриваем точки $A$ и $C$. Чтобы объединение двух полуплоскостей покрывало всю плоскость, надо, чтобы ограничивающие их прямые были параллельны, а точка $A$ лежала между этими прямыми.

4. Одинаковы.

5. Хватит. Указание. При первом взвешивании положите на каждую чашку весов по 3 гири.

### К ребусам

*(См. «Квант» № 3, 3-ю с. обл.)*

«Пятью пять». $\overline{\text{ПЯТЬ}} = 2846$.

«Муха и слон». $\overline{\text{МУХА}} = 2048$, $\overline{\text{СЛОН}} = 9536$.

«Праздник». $\overline{\text{ПИРОГ}} = 92\,164$, $92\,364$, $92\,764$.

«Мозаика букв». $\overline{\text{МОЗАИКА}}$ $\overline{\text{БУКВ}} = 9\,327\,517\quad 4610$.

«Шесть на шесть». $\overline{\text{ШЕСТЬ}} = 90\,625$.

### К «кросснамберу» «Их было семеро»

*(См. «Квант» № 5, 3-ю с. обл.)*

Джо — 3 (слитка), Джон — 11, Джоб — 2, Джекоб — 1, Джим — 5, Джерри — 7, Джефф — 9.

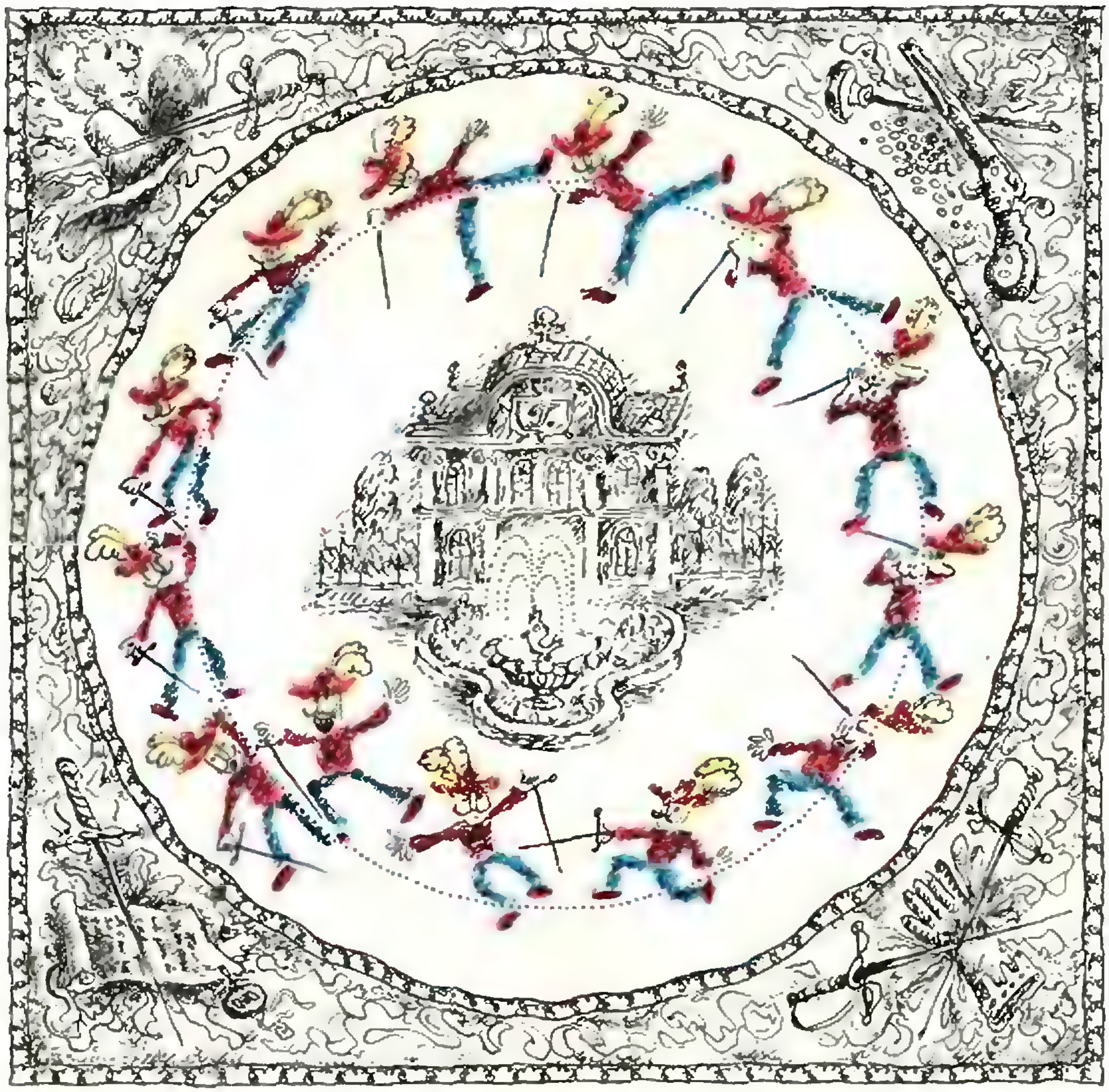
Номер оформили:
Е. Верентинова, Г. Красиков, Э. Назаров,
А. Пономарева, Э. Смирнов

Корректор *В. П. Сорокина*

113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62 Сдано в набор 22/III-1976 г.
Подписано в печать 10/V-1976 г.
Бумага 70×100$^1/_{16}$. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,81 Т-06975
Цена 30 коп. Заказ 544 Тираж 328 740

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

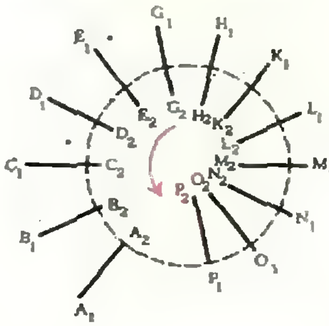
*Рукописи не возвращаются*



### Куда исчез мушкетер?

Эти бравые мушкетеры, затеявшие показательные поединки перед домом де Тревиля, сыграют с вами, если вы, конечно, захотите, веселую шутку. Переведите рисунок на кальку, вырежьте круг по пунктирной линии и поверните немного вокруг центра — один из мушкетеров бесследно исчезнет!

Куда он пропал? В этом вам поможет разобраться следующий рисунок. На нем вместо каждого мушкетера нарисован отрезок прямой. Все отрезки конгруэнтны, но $[B_1 B_2]$ на $^1/_{12}$ часть своей длины ближе к центру, чем отрезок $[A_1 A_2]$; $[C_1 C_2]$ на столько же ближе к центру, чем $[B_1 B_2]$ и т. д.

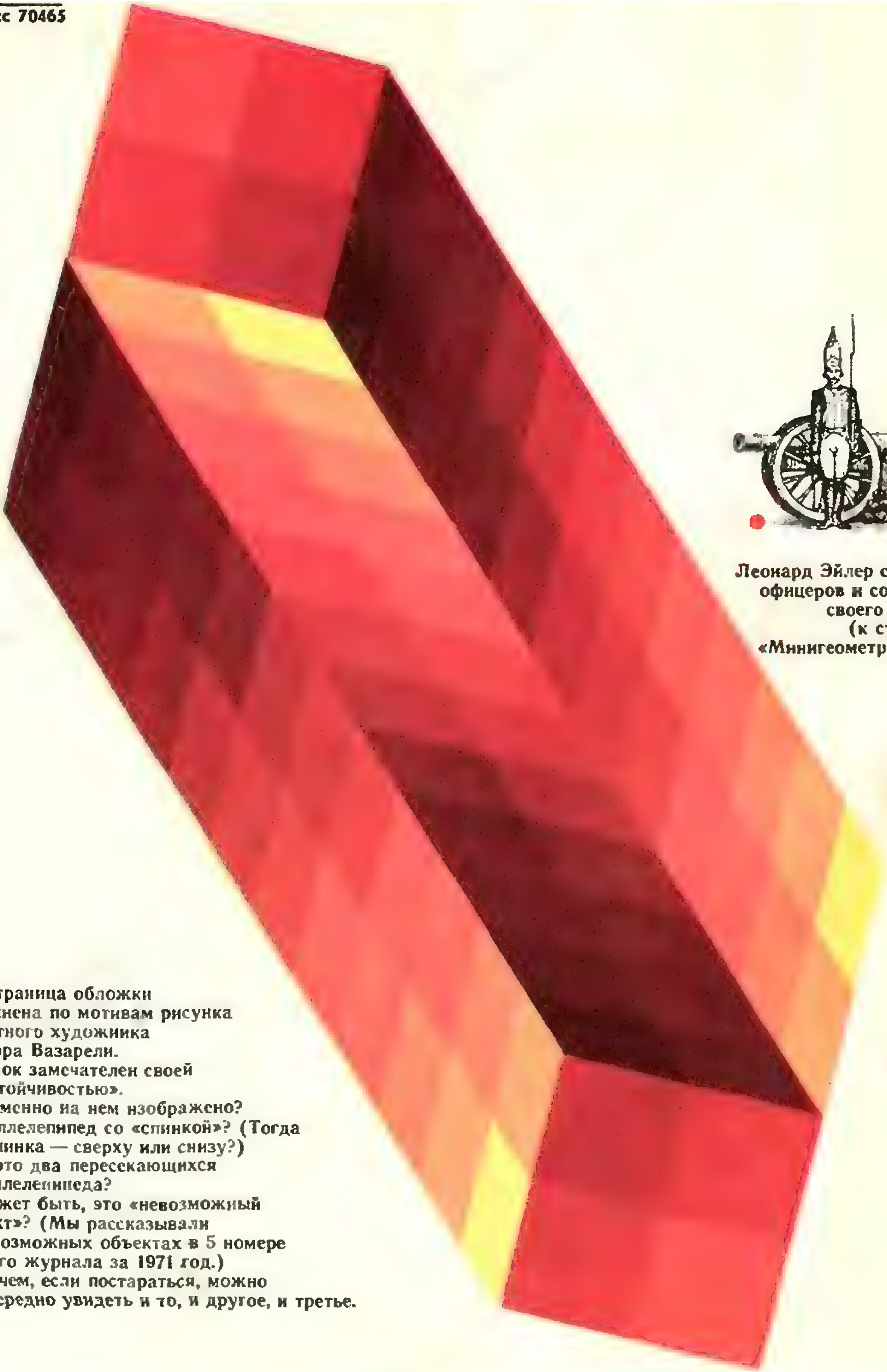


Точки $A_1$, $B_1$, ..., $P_1$ лежат на кривой, которая называется *спиралью Архимеда*. Представьте себе, что по вращающейся грампластинке с постоянной скоростью ползет от центра *Т* улитка *У*. Тогда относительно стола она перемещается как раз по спирали Архимеда.

Повернем теперь круг на рисунке так, чтобы точка $P_2$ оказалась на одном радиусе с $O_1$, точка $O_2$ на одном радиусе с $N_1$ и т. д. Число отрезков сократится на 1, но все они снова будут конгруэнтны, только длина каждого из них возрастет на $^1/_{12}$.

Теперь вам понятно, куда девался мушкетер?

Индекс 70465



Леонард Эйлер среди
офицеров и солдат
своего каре
(к статье
«Минигеометрия»).

Эта страница обложки
выполнена по мотивам рисунка
известного художника
Виктора Вазарели.
Рисунок замечателен своей
«неустойчивостью».
Что именно на нем изображено?
Параллелепипед со «спинкой»? (Тогда
где спинка — сверху или снизу?)
Или это два пересекающихся
параллелепипеда?
А может быть, это «невозможный
объект»? (Мы рассказывали
о невозможных объектах в 5 номере
нашего журнала за 1971 год.)
Впрочем, если постараться, можно
поочередно увидеть и то, и другое, и третье.

# НОМЕР
# 7

Основан в 1970 году

# квант

1976

7

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство „Наука"
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
*академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
*академик* А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
*(главный художник)*
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
*(зам. главного редактора)*
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
*(зам. главного редактора)*
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

**Редакция:**
В. Н. Березин
А. Н. Виленкин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова
*(художественный редактор)*
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чернова
*(зав. редакцией)*

**В НОМЕРЕ:**

2 *Б. Алейников, П. Бузыцкий, М. Дубсон.* Симплекс-метод
9 *Э. Казарян, Р. Саакян.* Об одном методе решения задач по электростатике
14 *А. Дозоров.* Зачем трансформатору сердечник?

**Лаборатория «Кванта»**

18 *М. Головей.* Фигура Гайдингера

**Математический кружок**

21 *Э. Готман.* Задачи на доказательство
25 *Я. Понарин.* Вычисление площадей

**Задачник «Кванта»**

28 Задачи М391—М395; Ф403—Ф407
30 Решения задач М351 — М353; Ф358 — Ф361

**Практикум абитуриента**

37 Донецкий государственный университет
38 Московский институт управления им. С. Орджоникидзе
39 Московский институт электронного машиностроения
40 Белорусский институт инженеров железнодорожного транспорта
41 Донецкий политехнический институт
43 Марийский политехнический институт им. М. Горького
43 Ярославский политехнический институт
44 Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина
45 Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

**X Всесоюзная олимпиада школьников**

48 *В. Березин, В. Тихомирова.* Московская городская олимпиада школьников

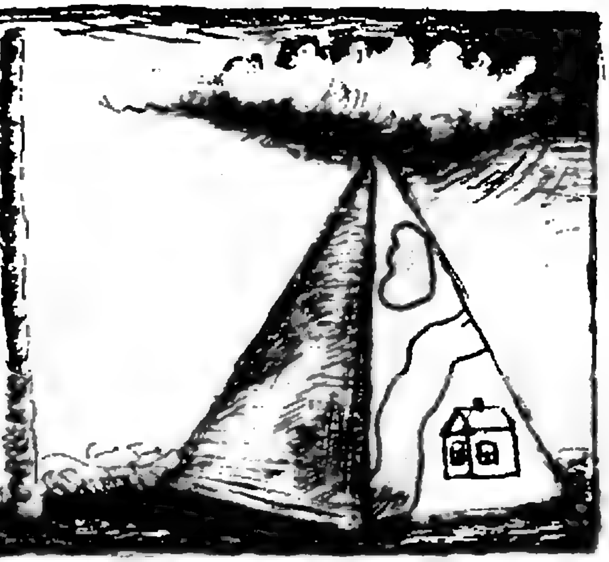
**Рецензии, библиография**

50 *Э. Белага.* «Математические машины»
51 *Л. Кармазина, Н. Меллер.* «АЛГОЛ 60»
52 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги

**«Квант» для младших школьников**

54 Задачи
55 *А. Орлов.* Поиск предмета
58 **Ответы, указания, решения**
**Смесь** *(с. 47)*

© *Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1976 год*



*Б. Алейников*
*П. Бузыцкий,*
*М. Дубсон*

# СИМПЛЕКС-МЕТОД

## Что такое линейное программирование?

Каждый человек ежедневно, не всегда осознавая это, решает проблему: как получить наибольший эффект, обладая ограниченными средствами?

Как потратить деньги, сэкономленные на школьных завтраках, чтобы получить наибольшее удовольствие: купить ли 2 билета в кино, порцию мороженого и пластинку или купить 2 пластинки, но обойтись без кино и мороженого? Как употребить вечерние часы: тщательно выполнить домашнее задание, немного посмотреть телевизор и дочитать интересную книгу или рискнуть сделать уроки наскоро, но зато посмотреть по телевизору кинофильм и хоккейный матч и самому поиграть в хоккей во дворе?

Наши средства и ресурсы всегда ограничены. Жизнь была бы менее интересной, если бы это было не так. Нетрудно выиграть сражение, имея армию в 10 раз большую, чем у противника; Ганнибалу, чтобы разбить римлян при Каннах, командуя вдвое меньшей армией, нужно было действовать очень обдуманно.

Чтобы достичь наибольшего эффекта, имея ограниченные средства, надо составить план, или программу, действий. Раньше план в таких случаях составлялся «на глазок» (теперь, впрочем, зачастую тоже). В середине XX века был создан специальный математический аппарат, помогающий делать это «по науке». Соответствующий раздел математики называется *математическим программированием*. Слово «программирование» здесь и в аналогичных терминах («линейное программирование», «динамическое программирование» и т. п.) обязано отчасти историческому недоразумению, отчасти неточному переводу с английского. По-русски лучше было бы вместо него употребить слово «планирование». С программированием для ЭВМ математическое программирование имеет лишь то общее, что большинство возникающих на практике задач математического программирования слишком громоздки для ручного счета: решить их можно лишь при помощи ЭВМ, предварительно составив программу.

Чтобы сравнивать между собой по эффективности различные решения, различные программы действий, прежде всего надо ввести какой-то количественный критерий. Такой количественный критерий называется *целевой функцией* (или *показателем эффективности*). В задачах математического программирования обычно разыскивается экстремум (максимум или минимум) целевой функции при некоторых ограничениях на значения ее аргументов (это и есть математический аналог того, что мы выше называли «наибольшим эффектом при ограниченных средствах»).

Раздел математического программирования, в котором целевая функция $L$ является линейной функцией от искомых величин $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

а ограничения, наложенные на них, имеют вид линейных уравнений:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

или линейных неравенств:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \vee b$$

($\vee$ — любой из знаков $\leqslant, \geqslant$), называется *линейным программированием*.

Временем рождения линейного программирования принято считать 1939 год, когда была напечатана брошюра Леонида Витальевича Канторовича «Математические методы организации и планирования производства». Поскольку методы, предложенные Л. В. Канторовичем, были малопригодны для ручного счета, а быстродействующих вычислительных машин в то время не существовало, работа Л. В. Канторовича осталась почти не замеченной. Свое второе рождение линейное программирование пережило в начале пятидесятых годов с появлением ЭВМ. Тогда началось всеобщее увлечение линейным программированием, вызвавшее в свою очередь развитие других разделов математического программирования. В 1975 году академик Л.В. Канторович и американец профессор Т. Купманс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам за «вклад в разработку теории оптимального использования ресурсов в экономике».

### Каноническая форма задачи

Каждую задачу линейного программирования можно свести к следующей стандартной форме: найти неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые удовлетворяли бы системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

и обращали в минимум функцию $L$:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n. \quad (2)$$

Так сформулированную задачу специалисты называют *общей задачей линейного программирования в канонической форме* (ОЗЛП).

Покажем на примере, как ограничения-неравенства превращаются в уравнения. Пусть требуется найти неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, x_3$, которые удовлетворяли бы системе неравенств

$$\begin{cases} \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 \leqslant a, \\ \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 \geqslant b. \end{cases} \quad (3)$$

Прежде всего перейдем от системы (3) к равносильной системе

$$\begin{cases} -\alpha_1x_1 - \alpha_2x_2 - \alpha_3x_3 + a \geqslant 0, \\ \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 - b \geqslant 0. \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим $-\alpha_1x_1 - \alpha_2x_2 - \alpha_3x_3 + a$ через $x_4$. Тогда $x_4 \geqslant 0$ и $-\alpha_1x_1 - \alpha_2x_2 - \alpha_3x_3 + a = x_4$. Аналогично расправимся со вторым неравенством системы (4). Таким образом, добавив новые («дополнительные») переменные $x_4, x_5$, мы свели первоначальную задачу к виду: найти неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$, которые удовлетворяли бы системе уравнений

$$\begin{cases} -\alpha_1x_1 - \alpha_2x_2 - \alpha_3x_3 - x_4 = -a, \\ \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 - x_5 = b. \end{cases}$$

Задача отыскания максимума линейной функции $L$:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n,$$

эквивалентна задаче отыскания минимума линейной функции $L'$:

$$L'(x_1, x_2, \dots, x_n) = -d_1x_1 - d_2x_2 - \dots - d_nx_n.$$

Решение $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ системы (1) назовем *допустимым решением* ОЗЛП, если числа $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ неотрицательны. *Оптимальным* будем называть то из допустимых решений, которое обращает целевую функцию (2) в минимум.

Конкретная ОЗЛП может и не иметь решения: система (1) может быть несовместной, т. е. вообще не иметь решений; она может быть совместной, но не иметь допустимых решений; наконец, она может даже иметь допустимые решения, но среди них может не быть оптимального: функция (2) может быть не ограничена снизу на множестве допустимых решений. Однако все эти опасности подстерегают нас только в специально придуманных задачах; в естественно возникающих практических задачах решение, как правило, существует.

Предположим, что система (1) совместна и ее уравнения *линейно независимы*, т. е. никакое из них не может быть выведено из других. Можно доказать, что тогда $m \leqslant n$.

Рассмотрим вначале случай, когда число уравнений $m$ равно числу переменных $n$. В линейной алгебре доказывается, что в этом случае система (1) имеет единственное решение. Если это решение допустимое, оно автоматически будет оптимальным.

Интерес представляет случай, когда $m < n$ (на практике это соответствует возможности выбора различных планов действия). Обозначим $n - m$ через $k$. В линейной алгебре доказывается, что можно какие-то $m$ переменных (они называются *базисными*) выразить через остальные $k$ переменных (их называют *свободными*). Система (1) имеет в рассматриваемом случае бесконечное множество решений: придавая свободным переменным произвольные значения и вычисляя соответствующие значения базисных переменных, мы будем каждый раз получать новое решение системы (1). Некоторое решение системы (1) называется *опорным*, если значения по крайней мере $k$ переменных равны нулю. В теории линейного программирования доказывается, что оптимальное решение является опорным.

Из этой последней теоремы вытекает следующий план решения ОЗЛП: как-нибудь выбираем $k$ свободных переменных; разрешаем систему относительно $m$ оставшихся базисных переменных; полагая свободные переменные равными нулю, находим опорное решение; вычисляем соответствующее значение целевой функции. Перебрав все возможности выбора свободных переменных, увидим, на каком из опорных решений целевая функция примет наименьшее значение, — это и будет искомое оптимальное решение.

Для простых задач, в которых число переменных $n$ невелико, такой метод решения — «слепым» перебором — в принципе годится. Однако в задачах, возникающих на практике, число переменных и число наложенных ограничений $m$ обычно очень велики — порядка сотен и даже тысяч. Для таких задач простой перебор практически невозможен: число возможных способов выбора свободных переменных становится огромным! Поэтому в теории линейного программирования были разработаны различные методы, позволяющие находить оптимальное решение не «слепым» перебором, а так, чтобы каждый следующий выбор свободных переменных приближал нас к решению.

Старейшим и наиболее известным из них является *симплекс-метод*, созданный в конце сороковых годов американским математиком Дж. Данцигом.

## Симплекс-метод

Пусть, например, в качестве свободных переменных выбраны первые $k$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а остальные $m$ переменных выражены через них:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \alpha_{k+1,1}x_1 + \alpha_{k+1,2}x_2 + \\ \quad + \dots + \alpha_{k+1,k}x_k + \beta_{k+1}, \\ x_{k+2} = \alpha_{k+2,1}x_1 + \alpha_{k+2,2}x_2 + \\ \quad + \dots + \alpha_{k+2,k}x_k + \beta_{k+2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n,2}x_2 + \\ \qquad + \dots + \alpha_{n,k}x_k + \beta_n. \end{cases} \qquad (5)$$

Положив все свободные переменные равными нулю, получим следующее решение системы (1):

$$x_1^0 = x_2^0 = \dots = x_k^0 = 0,$$
$$x_{k+1}^0 = \beta_{k+1},\ x_{k+2}^0 = \beta_{k+2},\ \dots$$
$$\dots,\ x_n^0 = \beta_n. \qquad (6)$$

Если все свободные члены $\beta_{k+1}$, $\beta_{k+2}, \dots, \beta_n$ неотрицательны, решение (6) является допустимым.

Чтобы проверить, является ли оно оптимальным, выразим целевую функцию $L$ через свободные переменные $x_1, x_2, \dots, x_k$, подставив выражения для $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ из (5) в (2):

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = d_0 + d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_kx_k. \qquad (7)$$

Из (6) вытекает, что $L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = d_0$. Посмотрим, не можем ли мы уменьшить значение целевой функции $L$, увеличивая значения свободных переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$ (уменьшать мы их не можем, так как в решении (6) они равны нулю, а мы ищем допустимое решение).

Если все коэффициенты $d_1$, $d_2$, $\dots$, $d_k$ в равенстве (7) неотрицательны, то, увеличивая значения переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$, мы не можем уменьшить значение функции $L$. В этом случае найденное нами решение является оптимальным.

Если же среди коэффициентов $d_1$, $d_2, \dots, d_k$ в равенстве (7) есть отрицательные, то, увеличивая значения соответствующих свободных переменных, мы будем уменьшать значение функции $L$, т. е. будем улучшать решение. В этом случае найденное нами решение не является оптимальным.

Пусть, например, в равенстве (7) отрицателен коэффициент $d_1$. Если в системе (5) все коэффициенты при $x_1$ неотрицательны, то любое увеличение значения переменной $x_1$ оставит значения переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ неотрицательными и мы не выйдем из области допустимых решений. Значение же функции $L$ будет при этом неограниченно уменьшаться. Таким образом, в этом случае целевая функция $L$ не ограничена снизу на множестве допустимых решений и оптимального решения ОЗЛП не существует.

Допустим, наконец, что среди уравнений системы (5) есть такие, в которых коэффициент при $x_1$ отрицателен. Для переменных, стоящих в левых частях этих уравнений, увеличение значения переменной $x_1$ опасно: оно может сделать их отрицательными.

Если, например, $\alpha_{k+1,1} < 0$, то, очевидно, значение переменной $x_1$ можно увеличивать только до $-\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1,1}}$. (При $x_1^0 = -\frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1,1}}$, $x_2^0 = \dots = x_k^0 = 0$ получим $x_{k+1}^0 = 0$.) Среди переменных, для которых увеличение значения переменной $x_1$ опасно, выберем ту, которая раньше всех обратится в нуль, т. е. ту, для которой величина $-\frac{\beta_l}{\alpha_{l,1}}$ меньше всего. Пусть такая «наиболее угрожаемая» переменная будет $x_r$.

Выведем теперь из числа свободных переменных $x_1$ и переведем вместо нее в группу свободных переменных $x_r$, т. е. разрешим систему (1) относительно базисных переменных

$$x_1, x_{k+1}, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n.$$

Дальше все повторяется: положив все свободные переменные $x_2, \dots, x_k$, $x_r$ равными нулю, найдем соответствующее решение; выразим целевую функцию $L$ через новые свободные переменные; если все коэффициенты при переменных в полученном выражении для $L$ неотрицательны, найденное решение — оптимальное; в противном случае процесс выбора базисных переменных и улучшения решения продолжается.

Описанный алгоритм и называется *симплекс-методом*. (Обратили ли Вы, читатель, внимание, что в нашем изложении алгоритма оставлена одна «дырка»: одна возможность не рассмотрена?)

## Два примера

Рассмотрим сначала обычную школьную задачу.

Задача 1. *Три школьника хотят добраться до лесного озера, расположенного в 20 км от дома. У них есть один двухместный мопед, на котором можно ехать со скоростью 36 км/час. Пешком каждый школьник может идти со скоростью 4 км/час. Как организовать движение, чтобы всем троим быстрее добраться до озера? Каково наименьшее время, за которое это можно сделать?*

Очевидно, что многократная смена пассажиров на мопеде не сможет дать никакой выгоды во времени по сравнению с однократной. Поэтому составим такой план организации движения: в начальный момент времени из дома $Д$ одновременно выезжают на мопеде два школьника и выходит пешком третий школьник. В промежуточной точке $T$ водитель мопеда высаживает своего спутника, который до озера $O$ идет дальше пешком; мопед же возвращается за третьим школьником, встречает его в точке $K$ и отвозит к озеру (на рисунке 1 красным цветом обозначено движение мопеда, синим — движение пешеходов). Наш план организации движения становится конкретным при фиксировании расстояния $|ДT| = x$. Нам надо найти $x$, при котором время $t$ прибытия в точку $O$ последнего из школьников будет минимальным.

Обозначим через $t_1$ время, затраченное на «переход» из $Д$ в $O$ «высаженным» школьником, через $t_2$ — время, затраченное водителем мопеда. Очевидно, $t_1 = \frac{x}{36} + \frac{20 - x}{4}$.

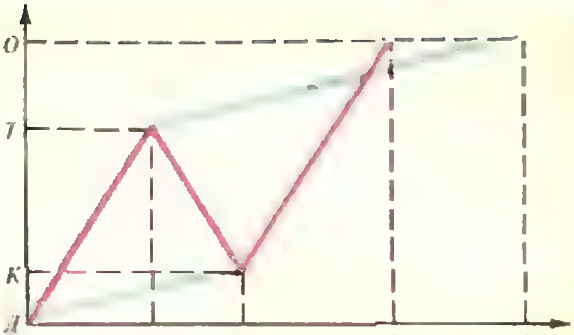


Рис. 1.

Положим $|KT| = y$. Тогда $\frac{x - y}{4} = \frac{x + y}{36}$, откуда $y = \frac{4}{5}x$. Очевидно, $t_2 = \frac{20 + 2y}{36}$. Значит, $t_2 = \frac{5}{9} + \frac{2}{45}x$. По смыслу наших обозначений

$$t = \max(t_1, t_2).$$

Таким образом, $t \geqslant t_1$ и $t \geqslant t_2$. Если «высаженный» школьник прибыл в $O$ раньше, чем мопед, то $t_1 < t_2$ и $t = t_2$. В противном случае $t_1 \geqslant t_2$ и $t = t_1$. Отметим еще, что $t \geqslant 0$.

Нам надо найти такое $x$, при котором функция $t = \max(t_1, t_2)$ принимает наименьшее значение. Кроме того, нам надо найти значение функции $\max(t_1, t_2)$ при этом $x$, т. е. число $\min(\max(t_1, t_2))$. Из рисунка 2 (на нем красным цветом нарисован график функции $t_1(x)$, черным — функции $t_2(x)$, синим — функции $\max(t_1, t_2)$) сразу видно, что искомое $x$ определяется из уравнения $t_1 = t_2$.

Тем не менее, чтобы проиллюстрировать общий метод, поставим и решим данную задачу как задачу линейного программирования. Переформулируем ее так: найти наименьшее $t$, для которого одновременно $t \geqslant t_1$ и $t \geqslant t_2$. Итак, нам надо найти неотрицательные значения переменных $x$ и $t$, которые удовлетворяли бы системе неравенств

$$\begin{cases} t \geqslant \frac{x}{36} + \frac{20 - x}{4}, \\ t \geqslant \frac{5}{9} + \frac{2}{45}x \end{cases} \qquad (8)$$

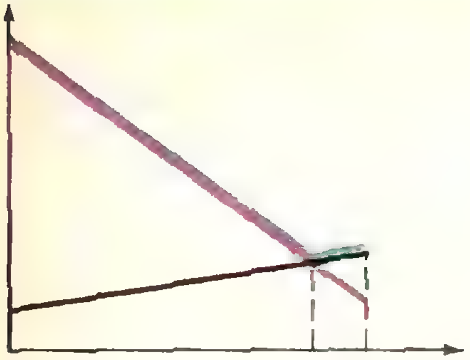


Рис. 2.

и обращали в минимум функцию $L$:

$$L(x, t) = 0 \cdot x + 1 \cdot t = t. \qquad (9)$$

Мы получили задачу линейного программирования. Сведем ее к ОЗЛП.

Система (8) равносильна системе

$$\begin{cases} 2x + 9t - 45 \geqslant 0, \\ -2x + 45t - 25 \geqslant 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Обозначим $2x + 9t - 45$ через $y_1$, $-2x + 45t - 25$ через $y_2$. Тогда $2x + 9t - 45 = y_1$, $-2x + 45t - 25 = y_2$ и $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$. Нашу задачу мы можем теперь сформулировать так: найти неотрицательные значения переменных $x$, $t$, $y_1$, $y_2$, которые удовлетворяли бы системе уравнений

$$\begin{cases} 2x + 9t - y_1 = 45, \\ -2x + 45t - y_2 = 25 \end{cases} \qquad (11)$$

и обращали в минимум целевую функцию $L(x, t, y_1, y_2) = t$. А это уже ОЗЛП. Решим ее симплекс-методом.

Выберем в качестве базисных переменных $y_1$ и $y_2$ (систему (11) легче всего решить относительно них) и выразим их через свободные переменные $x$, $t$:

$$\begin{cases} y_1 = 2x + 9t - 45, \\ y_2 = -2x + 45t - 25. \end{cases} \qquad (12)$$

Полагая свободные переменные равными нулю, получим решение систем (12) и (11):

$$x^{(1)} = t^{(1)} = 0, \quad y_1^{(1)} = -45, \quad y_2^{(1)} = -25.$$

Это решение не является допустимым.

Выберем теперь в качестве базисных переменных две другие переменные, например $t$ и $y_2$. (В теории линейного программирования существует метод, указывающий, каким образом выбирать новые свободные переменные так, чтобы приближаться к области допустимых решений. Здесь мы этот метод не излагаем.) Разрешим систему (11) относительно них:

$$\begin{cases} t = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{9}y_1 + 5, \\ y_2 = -12x + 5y_1 + 200. \end{cases} \qquad (13)$$

Полагая свободные переменные равными нулю, получим решение систем (13) и (11):

$$x^{(2)} = y_1^{(2)} = 0, \quad t^{(2)} = 5, \quad y_2^{(2)} = 200. \qquad (14)$$

Решение (14) уже является допустимым. Чтобы проверить, является ли оно оптимальным, выразим целевую функцию $L$ через свободные переменные $x$ и $y_1$. Из (9) и (13)

$$L(x, t, y_1, y_2) = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{9}y_1 + 5. \qquad (15)$$

Значение целевой функции $L$ на решении (14) равно 5.

Поскольку коэффициент при $x$ в (15) отрицателен, решение (14) не является оптимальным: увеличивая значение переменной $x$, мы будем уменьшать значение целевой функции $L$.

В обоих уравнениях системы (13) коэффициенты при $x$ отрицательны. Поэтому увеличение значения переменной $x$ опасно как для $t$, так и для $y_2$: это увеличение может сделать их отрицательными. Из первого уравнения системы (13) следует, что значение переменной $x$ можно увеличивать до $-5 \Big/ \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$ (при таком значении $x$ и при $y_1 = 0$ получим $t = 0$; при дальнейшем увеличении $x$ значение переменной $t$ станет отрицательным); из второго — до $-\frac{200}{-12} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$. Таким образом, при увеличении значения переменной $x$ раньше обратится в нуль переменная $y_2$: она находится в «более угрожаемом» положении, чем $t$.

Выведем теперь из числа свободных переменных $x$ и переведем вместо нее в группу свободных переменных $y_2$, т. е. разрешим систему (11) относительно базисных переменных $x$ и $t$:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{12} y_1 - \frac{1}{12} y_2 + \frac{50}{3}, \\ t = \frac{1}{54} y_1 + \frac{1}{54} y_2 + \frac{35}{27}. \end{cases} \qquad (16)$$

Полагая свободные переменные равными нулю, получим решение систем (16) и (11):

$$y_1^{(3)} = y_2^{(3)} = 0, \quad x^{(3)} = \frac{50}{3}, \quad t^{(3)} = \frac{35}{27}. \qquad (17)$$

Выразим целевую функцию $L$ через $y_1$ и $y_2$. Из (9) и (16)

$$L(x, t, y_1, y_2) = \frac{1}{54} y_1 + \frac{1}{54} y_2 + \frac{35}{27}. \qquad (18)$$

Значение целевой функции $L$ на решении (17) равно $\frac{35}{27}$.

Поскольку все коэффициенты при переменных в (18) неотрицательны, решение (17) является оптимальным. Итак, задача решена: мопеду надо ссадить пассажира на расстоянии $x^{(3)} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$ (*км*); наименьшее время, за которое можно добраться до озера, равно $t^{(3)} = \frac{35}{27} = 1\frac{8}{27}$ (*час*).

Приведем теперь типичную практическую задачу, естественно ставящуюся как задача линейного программирования. Это так называемая «задача о диете», или «задача о пищевом рационе».

Задача 2. *Директору столовой нужно составить меню. В его распоряжении имеется 5 видов продуктов: хлеб, овощи, фрукты, мясо, рыба. Известно, что килограмм хлеба стоит $c_1$ рублей, килограмм овощей — $c_2$ рублей и т. д. Известно также, что килограмм хлеба содержит $a_{11}$ кг белков, $a_{12}$ кг жиров и $a_{13}$ кг углеводов и т. д.* (содержание белков, жиров и углеводов в килограмме каждого вида продуктов указано в таблице на рисунке 3). *Требуется так составить меню, чтобы в нем содержалось не менее $b_1$ кг белков, не менее $b_2$ кг жиров и не менее $b_3$ кг углеводов, причем стоимость его была минимальной.*

|  |  |  | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  | *Белки* | *Жиры* | *Углеводы* |
| 1 | $c_1$ | *Хлеб* | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ |
| 2 | $c_2$ | *Овощи* | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ |
| 3 | $c_3$ | *Фрукты* | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ |
| 4 | $c_4$ | *Мясо* | $a_{41}$ | $a_{42}$ | $a_{43}$ |
| 5 | $c_5$ | *Рыба* | $a_{51}$ | $a_{52}$ | $a_{53}$ |
|  |  |  | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |

Рис. 3.

Обозначим через $x_1$ количество хлеба, которое войдет в меню, через $x_2$ — количество овощей и т. д. Общая стоимость меню $L$, очевидно, выразится равенством

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^{5} c_i x_i. \qquad (19)$$

Ограничения на питательность меню выражаются системой неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 + \\ \qquad + a_{51}x_5 \geqslant b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 + \\ \qquad + a_{52}x_5 \geqslant b_2, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 + \\ \qquad + a_{53}x_5 \geqslant b_3. \end{cases} \qquad (20)$$

Наша задача приняла вид: найти неотрицательные значения переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, которые удовлетворяли бы системе неравенств (20) и обращали в минимум функцию $L$ из (19). Это — задача линейного программирования.

*Э. Казарян,*
*Р. Саакян*

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ

Изучая постоянные (не изменяющиеся со временем) электрические поля, создаваемые заряженными проводниками, прежде всего следует иметь в виду, что напряженность электростатического поля внутри проводников равна нулю. Отсюда непосредственно следует, что заряды в проводниках распределяются по их поверхности. Таким образом, задачи электростатики обычно сводятся к нахождению электрического поля вне проводников и к определению распределения зарядов на поверхности проводников.

Сформулируем несколько типичных электростатических задач.

Задача 1. *Точечный заряд $q$ находится на расстоянии $d$ от поверхности заземленного сферического проводника радиуса $r$ (рис. 1). Определить заряд $q'$, индуцированный на этой поверхности.*

Задача 2. *Между двумя заземленными концентрическими сферическими поверхностями, радиусы которых $r_1$ и $r_2$, помещен точечный заряд $q$ (рис. 2). Расстояния от заряда до сферических поверхностей равны соответственно $d_1$ и $d_2$. Найти индуцированные на сферах заряды $q'_1$ и $q'_2$.*

Задача 3. *Точечный заряд $q$ находится на расстояниях $d_1$ и $d_2$ от проводящих заземленных бесконечных плоскостей (рис. 3). Найти заряды $q'_1$ и $q'_2$, наведенные на этих плоскостях.*

Общие методы решения подобных задач изучаются в соответствующем разделе математической физики, не входящей в школьную программу. Однако существует ряд сравнительно простых частных методов, которые позволяют решать задачи по электростатике, не выходя за пределы элементарной математики (например, метод изображений, о котором упоминалось в статье Г. Мякишева «Электростатическое поле»; см. «Квант», 1975, № 4). Здесь мы рассмотрим один из

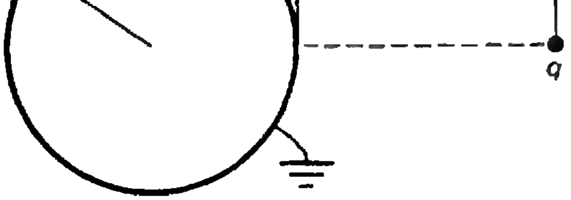


**Рис. 1.**

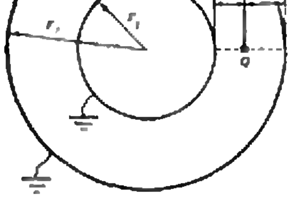


**Рис. 2.**

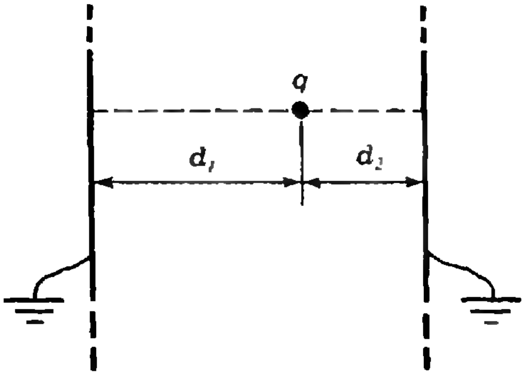


Рис. 3.

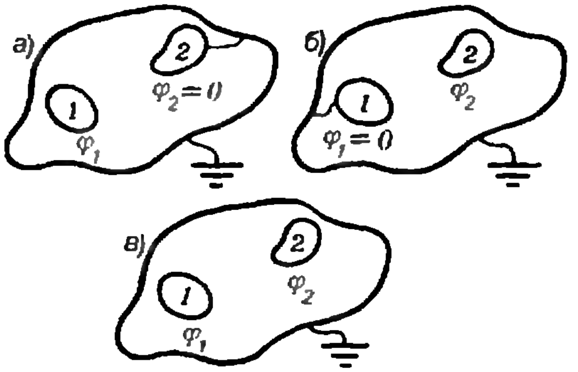


Рис. 4.

таких методов, основанный на теореме (или принципе) взаимности.

В чем заключается сущность этой теоремы? Ее можно сформулировать так: *если в системе из $n$ проводников проводники, несущие заряды $q_1, q_2, \ldots, q_n$, имеют потенциалы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ соответственно, а при зарядах $q_1', q_2', \ldots, q_n'$ потенциалы проводников равны $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_n'$, то справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i' = \sum_{i=1}^{n} q_i'\varphi_i. \qquad (1)$$

Покажем, что это действительно так.

Согласно принципу суперпозиции потенциалы проводников находятся в линейной зависимости от зарядов. Или, наоборот, заряды на проводниках линейно зависят от потенциалов. Рассмотрим сначала частный случай — внутри заземленной проводящей поверхности находятся два заряженных проводника *1* и *2* (рис. 4). Соединим второй проводник с заземленной поверхностью, тогда потенциал этого проводника обратится в нуль (см. рис. 4, *а*). Потенциал первого проводника обозначим через $\varphi_1$. Заряды на каждом из проводников должны быть пропорциональны $\varphi_1$, т. е.

$$\Delta q_1 = C_{11}\varphi_1 \quad \text{и} \quad \Delta q_2 = C_{21}\varphi_1. \quad (2)$$

Здесь $\Delta q_1$ и $\Delta q_2$ — заряды на первом и втором проводниках соответственно, а $C_{11}$ и $C_{21}$ — постоянные величины, называемые коэффициентами емкости и зависящие от формы и взаимного расположения проводников. $C_{11}$ и $C_{21}$ характеризуют заряды первого и второго проводников в случае, когда потенциал первого проводника равен единице, а второй проводник заземлен.

Теперь заземлим первый проводник, а потенциал второго проводника обозначим через $\varphi_2$ (см. рис. 4, *б*). Тогда

$$\Delta q_1' = C_{12}\varphi_2 \quad \text{и} \quad \Delta q_2' = C_{22}\varphi_2, \qquad (3)$$

где $\Delta q_1'$ и $\Delta q_2'$ — новые заряды на проводниках, а $C_{12}$ и $C_{22}$ — соответствующие коэффициенты емкости. $C_{12}$ и $C_{22}$ показывают, каковы заряды первого и второго проводников, если потенциал второго проводника равен единице, а первый проводник заземлен.

Очевидно, что если ни один из проводников не заземлен и их потенциалы равны $\varphi_1$ и $\varphi_2$ (см. рис. 4, *в*), то заряды $q_1$ и $q_2$ на проводниках равны соответственно

$$q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2,$$
$$q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2.$$

Эти соотношения получены путем сложения выражений (2) и (3).

Аналогичные рассуждения можно провести и для общего случая, когда система состоит из $n$ проводников. Для заряда $q_i$ $i$-го проводника получим

$$q_i = C_{i1}\varphi_1 + C_{i2}\varphi_2 + \ldots + C_{in}\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} C_{ik}\varphi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4)$$

Здесь коэффициент емкости $C_{ik}$ характеризует заряд $i$-го проводника, когда все проводники, кроме $k$-го, за-

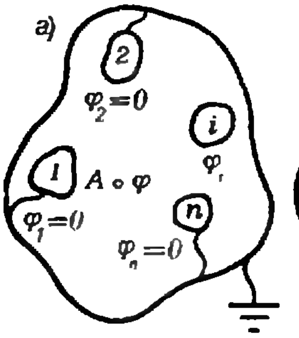


**Рис. 5.**

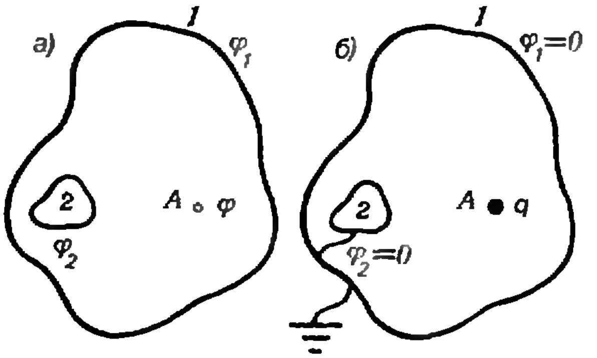


**Рис. 6.**

землены, а потенциал $k$-го проводника равен единице. Пусть теперь заряд $i$-го проводника равен $q_i'$, а его потенциал $\varphi_i'$. Умножим равенство (4) почленно на $\varphi_i'$:

$$q_i\varphi_i' = \sum_{k=1}^{n} C_{ik}\varphi_k\varphi_i' ,$$

а затем просуммируем обе части полученного равенства по всем значениям $i$ от 1 до $n$:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i' = \sum_{i,\,k=1}^{n} C_{ik}\varphi_k\varphi_i' .$$

Но

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} C_{ik}\varphi_k\varphi_i' = \sum_{i,\,k=1}^{n} C_{ik}\varphi_i'\varphi_k = \sum_{i=1}^{n} q_i'\varphi_i$$

(так как и $i$, и $k$ принимают все значения от 1 до $n$), поэтому окончательно получаем

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i' = \sum_{i=1}^{n} q_i'\varphi_i . \qquad (5)$$

Таким образом, теорема взаимности доказана, поскольку равенства (1) и (5) идентичны.

Прежде чем применить теорему взаимности для решения сформулированных выше задач, рассмотрим две дополнительные задачи.

Дополнительная задача 1. *Имеется система проводников, которые все, кроме $i$-го, заземлены, а $i$-й проводник имеет потенциал $\varphi_i$ (рис. 5). В некоторой точке A системы потенциал равен $\varphi$. Определить заряд $q_i'$, индуцируемый на $i$-м проводнике, если все проводники заземлить, а в точку A поместить заряд $q$.*

Представим себе, что в точке $A$ находится проводник, причем его линейные размеры малы по сравнению с расстояниями до других проводников (тогда его присутствие не изменит распределения зарядов и потенциалов в системе). Будем называть его проводником $A$. Рассмотрим два состояния системы:

а) заряд проводника $A$ равен нулю, его потенциал $\varphi$, потенциал $i$-го проводника $\varphi_i$, а потенциалы всех остальных проводников равны нулю (см. рис. 5, *а*);

б) заряд проводника $A$ равен $q$, потенциалы всех остальных проводников равны нулю, а заряд, индуцируемый на $i$-м проводнике, равен $q_i'$ (см. рис. 5, *б*).

Согласно теореме взаимности

$$q\varphi + q_i'\varphi_i = 0,$$

откуда

$$q_i' = -q\frac{\varphi}{\varphi_i} .$$

Дополнительная задача 2. *В замкнутой проводящей поверхности 1, потенциал которой $\varphi_1$, находится проводник 2 (рис. 6). Его потенциал равен $\varphi_2$, а потенциал точки A, находящейся между проводниками, равен $\varphi$. Найти заряды $q_1'$ и $q_2'$, индуцируемые на проводниках, если проводники заземлить, а в точку A поместить заряд $q$.*

Имеем два состояния системы:

а) заряд в точке $A$ равен нулю, ее потенциал $\varphi$, а потенциалы проводников равны $\varphi_1$ и $\varphi_2$ (см. рис. 6, *а*);

б) заряд в точке $A$ равен $q$, потенциалы проводников равны нулю, а индуцированные на них заряды равны $q'_1$ и $q'_2$ (см. рис. 6, *б*).

Для простоты здесь и дальше мы будем говорить о заряде и о потенциале *точки* $A$, подразумевая, что в этой точке находится проводник (как это было сделано в задаче 1).

По теореме взаимности

$$q'_1\varphi_1+q'_2\varphi_2+q\varphi=0. \qquad (6)$$

Из одного этого равенства нельзя, конечно, найти оба индуцированных заряда. Однако можно воспользоваться еще тем условием, что проводящая поверхность *1* во втором случае заземлена. Это означает, что электрическое поле снаружи отсутствует, а значит, алгебраическая сумма всех зарядов, находящихся внутри заземленной поверхности, равна нулю, т. е.

$$q'_1+q'_2+q=0. \qquad (7)$$

Решая совместно уравнения (6) и (7), получим

$$q'_1=q\,\frac{\varphi_2-\varphi}{\varphi_1-\varphi_2}$$

и

$$q_2=-q\,\frac{\varphi_1-\varphi}{\varphi_1-\varphi_2}.$$

Теперь уже можно вернуться к основным трем задачам. Для их решения будем пользоваться теоремой взаимности. Метод, основанный на применении этой теоремы, несколько формальный, но очень простой и удобный. Вся сложность состоит только в том, чтобы разумно выбрать рассматриваемые два состояния системы и записать для них равенство (1).

Решение задачи 1. По условию задачи точечный заряд $q$ находится на определенном расстоянии от заземленной проводящей сферы, на которой наводится заряд $q'$ (состояние 1).

Предположим, что сферическая поверхность не заземлена и имеет потенциал $\varphi_0$, а заряда $q$ нет. Тогда на его месте потенциал поля равен $\varphi=\varphi_0\,\frac{r}{r+d}$ ($r$ — радиус сферической поверхности, $d$ — расстояние от заряда $q$ до этой поверхности). Это — второе состояние системы.

Запишем для этих двух состояний системы теорему взаимности:

$$q\varphi+q'\varphi_0=0,$$

или

$$q'=-q\,\frac{\varphi}{\varphi_0}=-q\,\frac{r}{r+d}.$$

Полученный результат можно применить к случаю, когда заряд $q'$ находится на бесконечной проводящей плоскости. Действительно, бесконечную плоскость можно рассматривать как сферическую поверхность с бесконечно большим радиусом, т. е. $r\to\infty$. Следовательно, в пределе при $r\to\infty$ имеем

$$q'=-q\,\frac{r}{r+d}=-q\,\frac{1}{1+d/r}=-q,$$

т. е. индуцированный на бесконечной плоскости заряд равен по величине, но противоположен по знаку поднесенному к плоскости точечному заряду, где бы этот заряд ни находился.

Решение задачи 2. Согласно условию задачи первое состояние системы таково: заряд $q$ находится в заданной точке между заземленными сферическими поверхностями, на которых наводятся заряды $q'_1$ и $q'_2$.

В качестве второго состояния рассмотрим случай, когда внешняя сфера заземлена, внутренняя сфера имеет потенциал $\varphi_1$, заряд $q$ отсутствует, но на его месте потенциал поля равен $\varphi$.

Исходя из решения дополнительной задачи 1, получим

$$q'_1=-q\,\frac{\varphi}{\varphi_1}. \qquad (8)$$

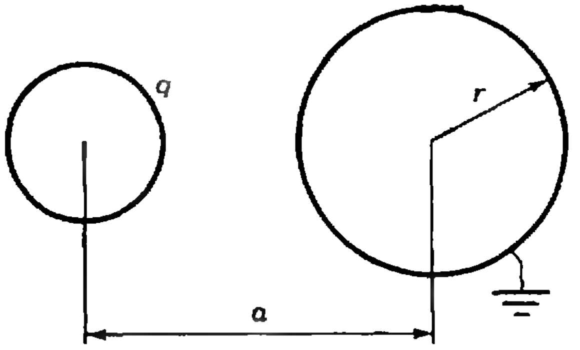


Рис. 7.

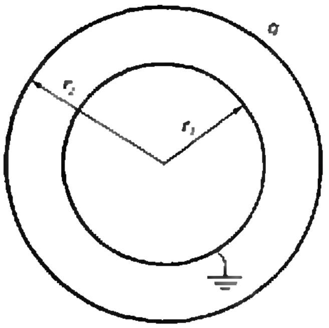


Рис. 8.

Заряд $q_2'$, индуцированный на внешней сфере, найдем из условия, что алгебраическая сумма зарядов, находящихся внутри заземленной поверхности, равна нулю:

$$q_1'+q_2'+q=0. \qquad (9)$$

Таким образом, нам остается найти отношение $\varphi/\varphi_1$. Предположим, что, когда внешняя сфера заземлена, а внутренняя имеет потенциал $\varphi_1$, заряд внутренней сферы равен $q_0$. Очевидно, что при этом на внешней сфере наведется заряд $-q_0$. Выразим потенциалы $\varphi$ и $\varphi_1$ через заряды $q_0$ и $-q_0$:

$$\varphi=\frac{q_0}{r_1+d_1}+\frac{-q_0}{r_2},$$

$$\varphi_1=\frac{q_0}{r_1}+\frac{-q_0}{r_2}.$$

Отсюда

$$\frac{\varphi}{\varphi_1}=\frac{\dfrac{1}{r_1+d_1}-\dfrac{1}{r_2}}{\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}}. \qquad (10)$$

Тогда окончательно из равенств (8)—(10) получим

$$q_1'=-q\frac{r_1d_2}{(r_1+d_1)(d_1+d_2)},$$

$$q_2'=-q\frac{r_2d_1}{(r_1+d_1)(d_1+d_2)}.$$

Решение задачи 3. Оно непосредственно следует из решения задачи 2, поскольку две параллельные бесконечные плоскости можно рассматривать как две концентрические сферы с бесконечно большими радиусами.

Запишем результат решения задачи 2 в виде

$$q_1'=-q\frac{r_1d_2}{(r_1+d_1)(d_1+d_2)}=$$

$$=-q\frac{d_2}{(1+d_1/r_1)(d_1+d_2)},$$

$$q_2'=-q\frac{r_2d_1}{(r_1+d_1)(d_1+d_2)}=$$

$$=-q\frac{r_2d_1}{(r_2-d_2)(d_1+d_2)}=$$

$$=-q\frac{d_1}{(1-d_2/r_2)(d_1+d_2)}.$$

Если $r_1\to\infty$ и $r_2\to\infty$, то

$$q_1'=-q\frac{d_2}{d_1+d_2},$$

$$q_2'=-q\frac{d_1}{d_1+d_2}.$$

Упражнения

1. Центр шара, несущего заряд $q$, находится на расстоянии $a$ от центра заземленного шарового проводника радиуса $r$ (рис. 7). Определить заряд $q'$, индуцированный на заземленном шаре.

2. Из двух концентрических сферических проводников, радиусы которых $r_1$ и $r_2$ ($r_1<r_2$), внутренний заземлен, а внешний имеет заряд $q$ (рис. 8). Найти заряд $q'$, наведенный на внутренней сфере.

*А. Дозоров*

# ЗАЧЕМ ТРАНСФОРМАТОРУ СЕРДЕЧНИК?

Вспомним, как устроен трансформатор и по какому принципу работает.

Простейший трансформатор (см. рисунок) представляет собой две катушки (обмотки), намотанные на общий стальной сердечник. Одна обмотка (первичная) подключается к источнику переменного тока. Устройство, потребляющее электроэнергию (так называемая нагрузка), подключается ко второй обмотке (вторичной). И первичную, и вторичную обмотки пронизывает один и тот же переменный магнитный поток, созданный переменным током источника. В первичной обмотке с числом витков $n_1$ возникает э. д. с. индукции $e_1 = -n_1 \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ ($\Delta \Phi$ — изменение магнитного потока через один виток за время $\Delta t$), а во вторичной — э. д. с. индукции $e_2 = -n_2 \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$.

Предположим, что вторичная обмотка разомкнута, т. е. рассмотрим режим холостого хода трансформатора. Будем также считать, что активное сопротивление первичной катушки очень мало по сравнению с ее индуктивным сопротивлением. По закону Ома сумма всех э. д. с. в замкнутом контуре равна сумме падений напряжения в этом контуре (часто закон Ома, записанный в таком виде, называют правилом Кирхгофа):

$$u_1+e_1=i_1R_1.$$

Здесь $u_1$ — напряжение источника тока, $i_1$ — ток и $R_1$ — активное сопротивление первичной обмотки. Поскольку $R_1$ очень мало ($R_1 \to 0$), $u_1+e_1=0$, или

$$u_1=-e_1.$$

При разомкнутой вторичной обмотке ($i_2=0$) напряжение на ее концах

$$u_2=-e_2.$$

Таким образом, отношение напряжений $\frac{u_2}{u_1}=\frac{e_2}{e_1}$, или для действующих значений

$$\frac{U_2}{U_1}=\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1}=\frac{n_2}{n_1}. \qquad (1)$$

Это соотношение и порождает вопрос, сформулированный в заголовке. Действительно, отношение напряжений зависит только от отношения числа витков в обмотках, а параметры сердечника в соотношении (1) отсутствуют. Могут ли эти параметры быть произвольными? Может ли трансформатор работать вообще без сердечника? Если да, то при каких условиях?

При выводе соотношения (1) подразумевалось, что магнитные потоки через первичную и вторичную катушки равны. Однако это условие может и не выполняться: часть магнитного потока, создаваемого первичной катушкой, может рассеиваться и не пронизывать вторичную обмотку трансформатора, что с неизбежностью должно ухудшать техническую ценность трансформатора. Так, может быть, основное назначение сердечника — уменьшать рассеяние магнитного потока? Но рассеяния можно избежать и другими способами! Например, намотав вторичную обмотку прямо на первичную или намотав обе обмотки на тор (баранку). И снова возникает вопрос, сформулированный в заголовке: зачем трансформатору нужен тяжелый сердечник, в котором, кроме всего прочего, возникают энергетические потери — токи Фуко, гистерезис? В общем, у сердечника масса недостатков. Так зачем же он нужен?

Итак, вопрос сформулирован и обсужден; пора переходить к ответу на него.

Реальные устройства, как правило, обладают худшими свойствами по сравнению с теми идеальными моделями, которые описывает теория, особенно простейшая. Это относится и к трансформатору. Какой же трансформатор разумно называть идеальным? Попробуем качественно разобраться в этом. В трансформаторе электромагнитная энергия передается из первичной катушки во вторичную. В лучшем случае энергия, выделяемая в цепи вторичной обмотки, будет равна энергии, потребляемой первичной обмоткой от источника. Можно говорить не об энергии, а о мощности. Желательно, кроме того, чтобы мощность была максимальной, т. е. коэффициент мощности $\cos\varphi \approx 1$. Математически эти требования записываются таким соотношением:

$$U_{0_1} I_{0_1} = U_{0_2} I_{0_2},$$

где индекс «0» соответствует амплитудным значениям токов и напряжений. С учетом этого требования и выражения (1) условие идеальности трансформатора принимает вид

$$\frac{U_{0_2}}{U_{0_1}} = \frac{I_{0_1}}{I_{0_2}} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (2)$$

В выражении (2), в отличие от (1), содержатся токи обмоток трансформатора. Перейдем к расчету токов $I_{0_1}$ и $I_{0_2}$, когда трансформатор работает уже в рабочем режиме (вторичная обмотка замкнута на нагрузку). Для этого нам понадобятся понятия индуктивности и взаимной индуктивности.

Магнитный поток $\Phi$, пронизывающий контур площади $S$ перпендикулярно к плоскости контура, равен

$$\Phi = BS, \qquad (3)$$

где $B$ — индукция магнитного поля. Если магнитный поток создается током, то величина потока $\Phi$ пропорциональна величине тока $I$:

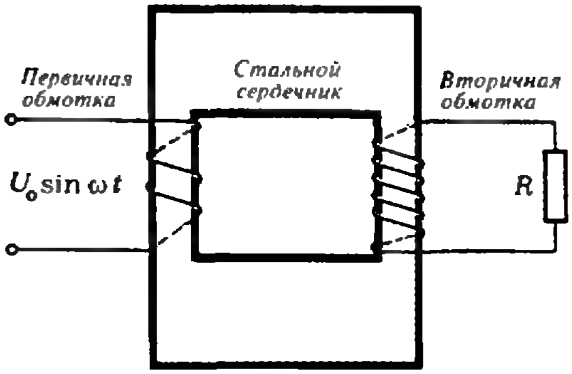
$$\Phi \sim B \sim I, \quad \text{или } \Phi = LI. \qquad (4)$$

Коэффициент пропорциональности $L$ называется коэффициентом самоиндукции или индуктивностью контура. Чем определяется эта величина?

Рассмотрим длинную катушку с большим числом витков (соленоид). Индукция магнитного поля, созданного проводником с током, всегда пропорциональна силе тока и зависит также от конфигурации проводника, от местоположения точки, магнитное поле в которой нас интересует, от магнитных свойств среды. Внутри соленоида магнитное поле однородно. Можно показать, что индукция этого поля равна $B = \mu_0 \mu I n / l$. Здесь $\mu_0$ — магнитная постоянная, $\mu$ — относительная магнитная проницаемость среды, $n$ — число витков соленоида, $l$ — его длина. Тогда из равенства (3)

$$\Phi = BSn = \mu_0 \mu I n^2 S / l.$$

Сравнивая это выражение с (4), най-



дем индуктивность соленоида:

$$L = \mu_0 \mu n^2 S/l. \qquad (5)$$

Аналогичным образом вводится понятие коэффициента взаимной индукции (взаимной индуктивности) $M$ двух контуров. В нашем случае — понятие взаимной индуктивности первичной и вторичной обмоток трансформатора. При замыкании вторичной обмотки на нагрузку во вторичной цепи появляется ток. Обозначим его действующее значение через $I_2$. Одновременно с этим изменяется ток в первичной обмотке. Теперь его действующее значение $I_1$ уже не такое, как в режиме холостого хода трансформатора. Магнитный поток $\Phi_2$ через вторичную обмотку, создаваемый током $I_1$ первичной обмотки, пропорционален этому току:

$$\Phi_2 \sim I_1, \text{ или } \Phi_2 = MI_1.$$

Аналогично магнитный поток $\Phi_1$ через первичную обмотку, вызванный током $I_2$ вторичной обмотки,

$$\Phi_1 \sim I_2, \text{ или } \Phi_1 = MI_2.$$

Коэффициент пропорциональности $M$ — коэффициент взаимной индукции, или взаимная индуктивность обмоток трансформатора. Аналогично выводу величины индуктивности соленоида можно получить выражение для $M$:

$$M = \mu_0 \mu n_1 n_2 S/l. \qquad (6)$$

Из выражений (5) и (6)

$$M = \frac{n_2}{n_1} L_1 = \frac{n_1}{n_2} L_2. \qquad (7)$$

Заметим, что на самом деле магнитный поток в сердечнике трансформатора, конечно, один. Практически он целиком определяется напряжением источника тока, включенного в цепь первичной обмотки. Однако для наглядности можно рассматривать по отдельности магнитные потоки, созданные токами $I_1$ и $I_2$.

Вернемся теперь снова к трансформатору и продолжим обсуждение его работы в рабочем режиме. Запишем закон Ома (правило Кирхгофа) сначала для замкнутой цепи первичной обмотки, а затем — вторичной. В первичной цепи (см. рисунок) активное сопротивление чрезвычайно мало ($R_1 \to 0$), поэтому сумма э. д. с. равна нулю. Пусть к первичной обмотке приложена переменная разность потенциалов $u_1 = U_0 \sin \omega t$ (это—первая э. д. с. в первичной цепи). Кроме того, в первичной цепи возникают две э. д. с. индукции. Одна из них — э. д. с. самоиндукции $e_1'$, обусловленная переменным током $i_1$. Вторая — э. д. с. взаимной индукции $e_1''$ (ток вторичной обмотки $i_2$ создает переменный магнитный поток в первичной обмотке). С учетом (4)

$$e_1' = -L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} = -pM \frac{\Delta i_1}{\Delta t},$$

где $p = \dfrac{n_1}{n_2}$; $\quad e_1'' = -M \dfrac{\Delta i_2}{\Delta t}$.

Итак, для первичной цепи

$$U_0 \sin \omega t - pM \frac{\Delta i_1}{\Delta t} - M \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = 0. \qquad (8)$$

Во вторичной обмотке две электродвижущие силы: э. д. с. самоиндукции $e_2' = -L_2 \dfrac{\Delta i_2}{\Delta t} = -\dfrac{1}{p} M \dfrac{\Delta i_2}{\Delta i}$ и э. д. с. взаимной индукции $e_2'' = -M \dfrac{\Delta i_1}{\Delta t}$. Будем считать для простоты рассуждений, что во вторичную цепь включено в качестве нагрузки активное сопротивление $R$. Тогда

$$-\frac{1}{p} M \frac{\Delta i_2}{\Delta t} - M \frac{\Delta i_1}{\Delta t} = Ri_2. \qquad (9)$$

Решив систему уравнений (8) и (9), мы полностью рассчитаем трансформаторную цепь. Однако уравнения имеют несколько непривычный вид (в математике они называются дифференциальными): в уравнения входят скорости изменения неизвестных величин ($\Delta i_1/\Delta t$ и $\Delta i_2/\Delta t$). Тем не менее решить их несложно.

Поскольку внешнее напряжение меняется по синусоидальному закону, то естественно допустить, что и токи меняются по тому же самому закону, только они могут быть сдвинуты по фазе относительно напряжения. Поэтому будем искать токи в виде $i_1 = A \sin(\omega t - \alpha)$ и $i_2 = B \sin(\omega t - \beta)$.

Здесь $A$, $B$, $\alpha$ и $\beta$ — постоянные величины. Скорость изменения первого тока

$$\frac{\Delta i_1}{\Delta t} = \frac{i_1(t+\Delta t) - i_1(t)}{\Delta t} =$$

$$= A\,\frac{\sin[\omega(t+\Delta t)-\alpha] - \sin(\omega t-\alpha)}{\Delta t} =$$

$$= 2\frac{A}{\Delta t}\sin\frac{\omega\Delta t}{2}\cos\left(\omega t - \alpha + \frac{\Delta t}{2}\right).$$

Устремляя $\Delta t$ к нулю $\left(\sin\frac{\omega\Delta t}{2}\approx\frac{\omega\Delta t}{2},\ \cos\left(\omega t-\alpha+\frac{\Delta t}{2}\right)\approx\cos(\omega t-\alpha)\right)$, получим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta i_1}{\Delta t} = A\omega\cos(\omega t-\alpha).$$

Аналогично

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta i_2}{\Delta t} = B\omega\cos(\omega t-\beta).$$

После чего уравнения (8) и (9) превращаются в тригонометрические:

$$U_0\sin\omega t - pMA\omega\cos(\omega t-\alpha) - MB\omega\cos(\omega t-\beta) = 0, \qquad (8a)$$

$$-\frac{1}{p}MB\omega\cos(\omega t-\beta) - MA\omega\cos(\omega t-\alpha) = RB\sin(\omega t-\beta). \qquad (9a)$$

Каждое из этих уравнений после элементарных преобразований (раскрытия скобок) можно записать в виде

$$a\sin\omega t + b\cos\omega t = 0, \qquad (10)$$

где коэффициенты $a$ и $b$ не зависят от времени. Уравнение (10) справедливо в любой момент времени $t$ только в том случае, если $a=0$ и $b=0$ одновременно. Таким образом, два уравнения преобразуются в четыре:

$$\begin{cases} U_0 - pMA\omega\sin\alpha - MB\omega\sin\beta = 0,\\ pA\cos\alpha + B\cos\beta = 0,\\ -\frac{1}{p}MB\omega\sin\beta - MA\omega\sin\alpha = RB\cos\beta,\\ \frac{1}{p}MB\omega\cos\beta + MA\omega\cos\alpha = RB\sin\beta. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем амплитуды токов в первичной и вторичной цепях и сдвиги токов по фазе относительно внешнего напряжения.

Окончательно получим

$$I_{0_1} = A = \frac{U_0}{p^2R}\sqrt{1+\left(\frac{pR}{M\omega}\right)^2},$$

$$I_{0_2} = B = \frac{U_0}{pR},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{pR}{M\omega}, \quad \beta = \pi.$$

Удовлетворяет ли найденное нами решение требованиям идеальности трансформатора (соотношению (2))? Проверим. Найдем отношение амплитудных значений токов:

$$\frac{I_{0_1}}{I_{0_2}} = \frac{A}{B} = \frac{1}{p}\sqrt{1+\left(\frac{pR}{M\omega}\right)^2}.$$

Последнее выражение совпадает с соотношением (2), если под корнем второе слагаемое стремится к нулю:

$$\frac{R}{M\omega} = \frac{Rl}{\mu_0\mu S n_1 n_2\omega} \to 0$$

(отношение числа витков $p$ должно оставаться постоянным). Таким образом, трансформатор можно считать идеальным, если

а) магнитная проницаемость среды $\mu$ достаточно велика,

б) частота переменного напряжения $\omega$ достаточно велика,

в) число витков в первичной и вторичной обмотках велико,

г) активное сопротивление вторичной обмотки мало,

д) длина катушек минимальна, т. е. обмотки намотаны плотно.

Для создания трансформатора, близкого к идеальному, нужно выбрать наиболее удобное в практическом смысле требование. Таковым является, прежде всего, требование большой магнитной проницаемости среды. Для вакуума $\mu=1$, а для ферромагнетиков $\mu\approx 10\,000$. Увеличение числа витков практически невыгодно (резко возрастают размеры и стоимость трансформатора), а увеличение частоты тока в несколько тысяч раз связано со значительными техническими проблемами. Существующие же высокочастотные трансформаторы действительно применяются без сердечника, а их свойства близки к свойствам идеального трансформатора.

Лаборатория «Кванта»

*М. Головей*

# ФИГУРА ГАЙДИНГЕРА

Посмотрите внимательно на фотографии прозрачных кристаллов на рисунке 1. Это кристаллы углекислого кальция (кальцита) или, как его иногда называют, исландского шпата. Ребра кристаллов, которые мы видим через их толщу, кажутся двойными. Свойство кристаллов кальцита «раздваивать» изображение было обнаружено еще в XVII веке. Но объяснение этого явления, которое называют двойным лучепреломлением, было дано лишь после признания электромагнитной теории света.

В испускаемой обычным источником световой волне векторы напряженности **E** электрического поля и индукции **B** магнитного поля колеблются во всевозможных направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны. Такой свет называется естественным. Если же в световой волне направление колебаний вектора **E** (а следовательно, и вектора **B**) все время постоянно, то такой свет называют плоско- или линейнополяризованным. Направление, перпендикулярное направлению колебаний вектора **E**, называют направлением поляризации. Естественный свет можно представить как сумму волн с всевозможными направлениями поляризации. Во многих веществах скорость распространения световых колебаний (а следовательно, показатель преломления) постоянна и не зависит от направления колебаний вектора **E** *). Такие вещества называют оптически изотропными. В кристалле же исландского шпата дело обстоит иначе. Оказывается, его показатель преломления зависит от ориентации колебаний вектора **E** световой волны. Для двух взаимно перпендикулярных направлений вектора **E** существуют два значения показателя преломления. Этим и объясняется явление двойного лучепреломления. Световой луч, попадающий в кристалл, разделяется на два луча, в которых колебания вектора **E** взаимно перпендикулярны. В силу поперечности световых волн направление колебаний вектора **E** в каждом луче лежит в плоскости, содержащей луч, и перпендикулярно лучу. Так что, попадая в кристалл исландского шпата, луч естественного света разделяется на два луча плоскополяризованного света с взаимно перпендикулярными плоскостями (направлениями) поляризации. Убедиться в этом можно с помощью любого поляризатора. (О том, как изготовить самодельный поляризатор, мы рассказывали в 11-м номере журнала за 1975 год.)

---

*) Разумеется, для данной длины волны.

Рис. 1.

В настоящее время для анализа поляризационных характеристик света пользуются специальными оптическими приборами. Однако еще в середине XIX века было неопровержимо установлено, что некоторые люди способны невооруженным глазом отличать плоскополяризованный свет от естественного.

В XXXII главе повести Л. Н. Толстого «Юность» можно прочесть такие строки: «...я невольно оставляю книгу и, вглядываясь в растворенную дверь балкона в кудрявые висячие ветви высоких берез, на которых уже заходит вечерняя тень, и в чистое небо, на котором, как смотришь пристально, вдруг показывается как будто пыльное, желтоватое пятнышко и снова исчезает, ...»

Обратите внимание на последние слова этого отрывка. О каком желтом пятнышке идет речь у Л. Н. Толстого? Что это: загрязнение атмосферы или иллюзия зрения, связанная с переутомлением от чтения книги? И не то, и не другое! Оказывается, совершенно не подозревая физической сущности наблюдаемой картины, Л. Н. Толстой обратил внимание на явление, которое в то время было известно лишь очень узкому кругу ученых. В чем же сущность описываемого явления, и как его можно наблюдать?

В 1844 году немецким ученым Гайдингером впервые было обнаружено удивительное свойство человеческого глаза. Им было установлено, что глаза некоторых людей способны отличать поляризованный свет от неполяризованного. Поляризационная чувствительность глаза не идет ни в какое сравнение с его цветовой или контрастной чувствительностью. Экспериментальная проверка показала, что этим свойством обладают глаза только 25—30% людей. Хотя и эта оценка не считается достаточно надежной.

Некоторые читатели, без сомнения, обладают способностью обнаруживать поляризованный свет, но, по-видимому, совсем не подозревают об этом. Так же как Толстой не подозревал о том, что он описывает наблюдение поляризации солнечного света в атмосфере.

Известно, что цвет неба связан с рассеянием солнечных лучей в атмосфере. Чистый воздух сам по себе прозрачен. Однако плотность его в пространстве не постоянна. Из-за теплового движения молекул в атмосфере постоянно существуют малые области *), в которых плотности воздуха различны. Иначе говорят, что существуют флуктуации плотности в атмосфере. На этих флуктуациях и происходит рассеяние света. Интенсивность рассеянного света тем больше, чем меньше длина волны. Этим и объясняется голубой цвет неба.

Рассеянный атмосферой свет оказывается поляризованным. Рисунок 2 помогает понять, как происходит поляризация рассеянного света.

Пусть в точке $S$ находится Солнце, в точке $O$ — рассеивающая частица (флуктуация). Напомним, что свет — это поперечные электромагнитные волны, т. е. колебания вектора **E** (и **B**) в световой волне происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения света. Поэтому в световой волне, идущей от источника $S$ к точке $O$, колебания вектора $\mathbf{E}$ лежат в плоскости $YOZ$. Если наблюдать свет, рассеянный частицей в точке $O$, в направлении $YO$, то ясно, что в этом направлении распространяются лишь волны, в которых колебания вектора $\mathbf{E}$ направлены вдоль $OZ$. А это значит, что свет, рассеянный под прямым углом к падающему, полностью поляризован.

---

*) Размеры этих областей сравнимы с длинами волн видимого света.

Наблюдения показывают, что поляризация света в атмосфере не бывает полной. Кроме того, степень поляризации зависит от времени дня.

Убедиться в том, что свет неба поляризован, можно с помощью любого поляризатора. Но, как мы уже говорили, некоторые люди могут наблюдать поляризацию света и невооруженным глазом. Так как попадающий к наблюдателю свет оказывается поляризованным не полностью, видимая им картина не очень четкая. Эту картину и описал Л. Н. Толстой. Гораздо заметнее она будет, если увеличить степень поляризации света с помощью поляризационных светофильтров.

Какой же вид должно иметь поле зрения в идеальном случае? Гайдингер установил, что наблюдатель, глядя в течение нескольких секунд на однородное поле, освещенное линейнополяризованным светом, или на экран, освещенный естественным светом, но наблюдаемый через поляризационный светофильтр, должен видеть слабо выраженную бледно-желтую фигуру на голубоватом фоне. По своим очертаниям фигура напоминает сноп с расширяющимися концами (приблизительно такой, как на рисунке 3). Ее принято называть фигурой Гайдингера. Если направление колебаний электрического вектора (стрелка на рис. 3) изменить на 90°, т. е. повернуть поляризатор на 90°, наблюдатель вновь увидит фигуру, но она окажется повернутой на тот же угол. Четкость картины можно увеличить, если освещение производить синим светом. Угловые размеры фигуры составляют приблизительно 3°.

Экспериментально определенный диапазон длин волн, в которых видна фигура Гайдингера, лежит в фиолетово-голубой области (от 400 до 510 *нм*); наиболее отчетливо ее наблюдали в свете с длиной волны 490 *нм*. Происхождение голубого фона, на котором виден сноп, объясняют световым контрастом, сама же природа этого явления до сих пор еще не выяснена.

Известно, что чувствительностью к поляризованному свету обладают не только глаза человека. В настоящее время можно указать десятки видов живых существ, у которых обнаружена эта способность. С неопровержимостью установлено, что поляризационная чувствительность играет первостепенную роль в зрительной ориентации мух, пчел, пауков.

Попробуйте проверить свое зрение. Может быть, и вы обладаете уникальной способностью распознавать поляризованный свет!

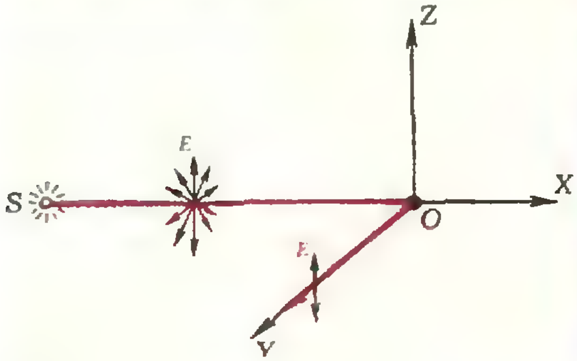


Рис. 2.

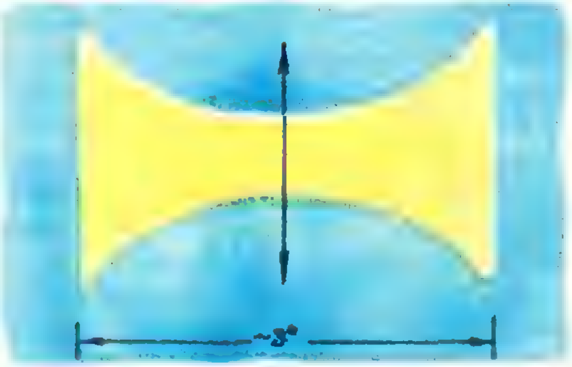


Рис. 3.

Математический кружок

# СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

**В новую программу по геометрии (для девятого класса) входит понятие скалярного произведения векторов. Скалярное произведение векторов широко применяется при решении различных геометрических задач и доказательстве теорем. Ниже мы помещаем две заметки — Э. Готмана и Я. Понарина, в которых на нескольких примерах демонстрируются преимущества векторного метода. От читателя требуется знакомство с простейшими операциями — сложением векторов и умножением вектора на число, а также с понятием скалярного произведения векторов. Напомним определение и некоторые свойства скалярного умножения векторов.**

**Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению числовых значений длин этих векторов на косинус угла между векторами.**

**Обозначается скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через $\vec{a}\cdot\vec{b}$; согласно определению $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a},\vec{b}})$. Свойства, которыми обладает скалярное умножение векторов, аналогичны законам операций над числами:**

**1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;**

**2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\,\vec{b})$, где $\lambda$ — некоторое число;**

**3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$**

**(их доказательства см. в учебном пособии по геометрии для 9-го класса, с. 59).**

---

*Э. Готман*

## Задачи на доказательство

> *Из полученного результата следует выжать все, что он может дать.*
> Д. Пойа. Как решать задачу.

### Плоский четырехугольник

Легко видеть, что если диагонали $AC$ и $BD$ четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны (рис. 1), то длины его сторон удовлетворяют соотношению

$$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2. \qquad (1)$$

А верно ли обратное: можно ли утверждать, что диагонали четырех-

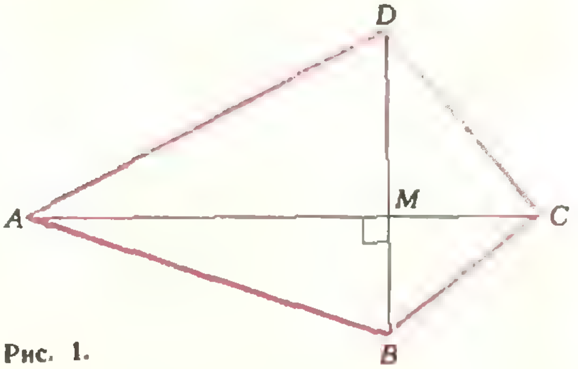


Рис. 1.

угольника взаимно перпендикулярны, если известно, что равны суммы квадратов длин его противоположных сторон?

Обозначим точку пересечения диагоналей через $M$ и применим теорему косинусов. Мы получим

$$|AB|^2 \cdot |AM|^2+|BM|^2-2|AM|\cdot|BM|\cdot\cos(\widehat{AMB}),$$

$$|CD|^2=|CM|^2+|DM|^2-2|CM|\cdot|DM|\cdot\cos(\widehat{AMB})$$

$$BC|^2=|BM|^2+|CM|^2+2|BM|\cdot|CM|\cdot\cos(\widehat{AMB}),$$

$$|AD|^2=|AM|^2+|DM|^2+2|AM|\cdot|DM|\cdot\cos(\widehat{AMB}).$$

Из этих равенств находим

$$|AB|^2+|CD|^2-|BC|^2-|AD|^2=-2(|AM|\cdot|BM|+|CM||\cdot DM|+|BM|\cdot|CM|+|AM|\cdot|DM|)\cdot\cos(\widehat{AMB}).$$

Но $|AM|\cdot|BM|+|CM|\cdot|DM|+|BM|CM|+|AM|\cdot|DM|=(|AM|+|CM|)(|BM|+|DM|)=|AC|\cdot|BD|$, поэтому

$$|AB|^2+|CD|^2-|BC|^2-|AD|^2=-2|AC|\cdot|BD|\cdot\cos(\widehat{AMB}). \qquad (2)$$

Если $\widehat{AMB}=90^\circ$, то $\cos(\widehat{AMB})=0$, и тогда $|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2$.

И наоборот, если верно (1), то $\cos(\widehat{AMB})=0$, т. е. $\widehat{AMB}=90^\circ$. Итак, мы доказали теорему: *диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов длин его противоположных сторон равны.*

Заметим теперь, что число, стоящее в правой части соотношения (2), равно удвоенному скалярному произведению векторов $AC$ и $DB$. И значит, мы можем переписать (2) в виде

$$|AB|^2+|CD|^2-|BC|^2-|AD|^2=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}. \qquad (3)$$

Попробуем теперь, оперируя только лишь с векторами, получить соотношение (3) для случая произвольного расположения четырех точек.

## Четыре точки в пространстве

Пусть $A$, $B$, $C$ и $D$ — произвольные четыре точки в пространстве, для которых мы хотим доказать соотношение (3). С чего же начать доказательство?

Зафиксируем некоторую точку $O$ пространства (точка $O$ выбирается произвольно; иногда ее называют полюсом) и рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$. Обозначим для краткости эти векторы так: $\overrightarrow{OA}=\vec{A}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{B}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{C}$, $\overrightarrow{OD}=\vec{D}$. *По формуле вычитания векторов* имеем $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$, т. е. $\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}$. Аналогично, $\overrightarrow{CD}=\vec{D}-\vec{C}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{C}-\vec{B}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{D}-\vec{A}$.

Вспомним, что скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $(\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2=|AB|^2$. Следовательно, левую часть соотношения (3) мы можем переписать так:

$$|AB|^2+|CD|^2-|BC|^2-|AD|^2=(\overrightarrow{AB})^2+(\overrightarrow{CD})^2-(\overrightarrow{BC})^2-(\overrightarrow{AD})^2=(\vec{B}-\vec{A})^2+(\vec{D}-\vec{C})^2-(\vec{C}-\vec{B})^2-(\vec{D}-\vec{A})^2=2(\vec{A}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{C}-\vec{A}\cdot\vec{B}-\vec{C}\cdot\vec{D})=2(\vec{C}-\vec{A})\cdot(\vec{B}-\vec{D})=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}.$$

Соотношение (3) доказано (подумайте, кстати, почему для доказательства (3) несущественно, где выбирается точка $O$). Это доказательство не слож-

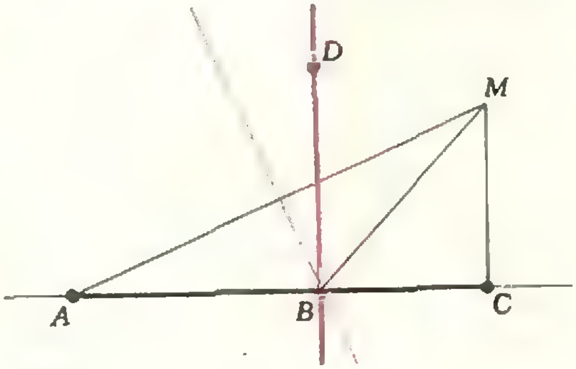


Рис. 2.

нее изложенного в предыдущем пункте (с применением теоремы косинусов), а преимущества его очевидны: ведь теперь мы знаем, что равенство (2) справедливо для *любого* расположения четырех точек $A$, $B$, $C$ и $D$, а не только тогда, когда эти точки являются вершинами плоского четырехугольника.

Применяя равенство (3), мы сейчас получим много новых интересных результатов.

### Следствия

1. *Противоположные ребра $AC$ и $BD$ тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов длин других противоположных ребер: $AB$ и $CD$, $BC$ и $AD$ — равны между собой.*

В самом деле, угол между ребрами $AC$ и $BD$ может быть найден по формуле

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}}) = \frac{|AB|^2+|CD|^2-|BC|^2-|AD|^2}{2\,|AC|\cdot|BD|};$$

но $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}})=0$ тогда и только тогда, когда

$$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2.$$

2. *Множество точек $D$ плоскости, разность квадратов расстояний от каждой из которых до двух данных точек $A$ и $C$ — величина постоянная, есть прямая, перпендикулярная прямой $AC$.*

Доказательство. Пусть эта разность равна $k^2$. Построим на прямой $AC$ точку $B$ так, чтобы $|AB|^2-|BC|^2=k^2$. Для этого через точку $C$ проведем перпендикуляр к прямой $AC$ и отложим на нем отрезок $CM$ длины $k$ (рис. 2). Серединный перпендикуляр отрезка $AM$ пересечет прямую $AC$ в искомой точке $B$.

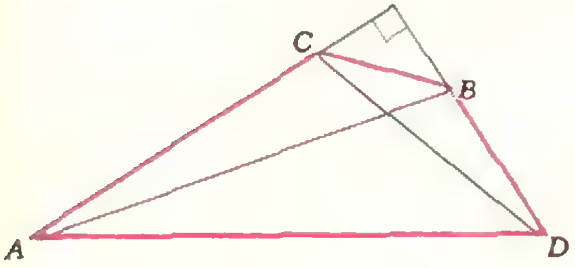


Рис. 3.

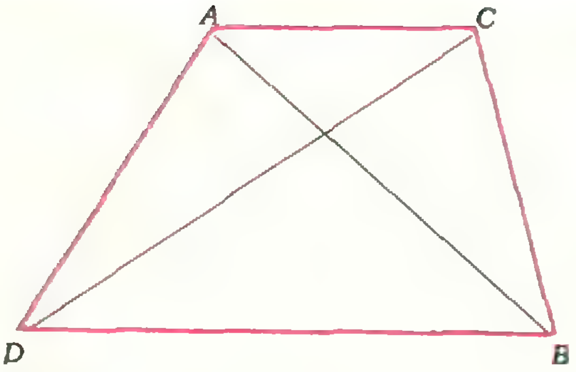


Рис. 4.

Действительно, из прямоугольного треугольника $BCM$, $|BM|^2-|BC|^2=|CM|^2$. Но $|BM|=|AB|$ согласно свойству серединного перпендикуляра, а $|CM|=k$. Следовательно, $|AB|^2-|BC|^2=k^2$.

Очевидно, точка $B$ всегда существует, притом единственная. Пусть теперь $D$ — точка искомого множества. Применив к точкам $A$, $B$, $C$ и $D$ плоскости формулу (3), получим, что $|AD|^2-|CD|^2=|AB|^2-|BC|^2$ тогда и только тогда, когда прямая $BD$ перпендикулярна прямой $AC$.

Замечание. Множество точек пространства, обладающих указанным свойством, есть плоскость, перпендикулярная к прямой $AC$.

3. *Если $ACBD$ — выпуклый четырехугольник, противоположные стороны $AC$ и $BD$ которого перпендикулярны* (рис. 3), *то сумма квадратов длин его диагоналей равна сумме квадратов длин двух других его противоположных сторон.*

Доказательство. Поскольку $(AC)\perp(DB)$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0$, т. е. правая часть равенства (3) обращается в нуль. Следовательно,

$$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2.$$

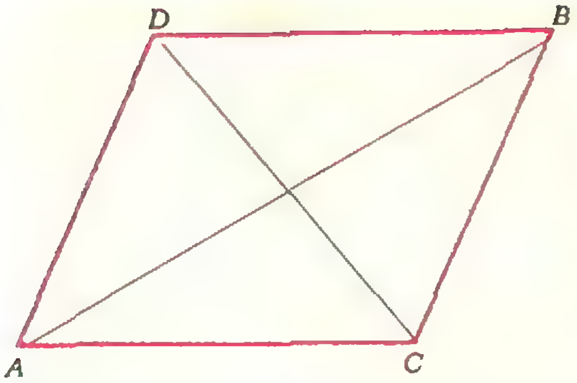


Рис. 5.

4. *Сумма квадратов длин диагоналей трапеции равна сумме квадратов длин ее боковых сторон плюс удвоенное произведение длин оснований.*

Доказательство. Пусть $AC$ и $DB$ — основания трапеции $ACBD$ (рис. 4). Поскольку векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ сонаправлены, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=|AC|\cdot|DB|$, и равенство (3) принимает вид $|AB|^2+|CD|^2-|BC|^2-|AD|^2=2|AC|\cdot|BD|$, т. е.

$$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2+2|AC|\cdot|DB|,$$

что и требовалось доказать.

5. (Известная теорема.) *Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.*

Доказательство. Векторы $AC$ и $DB$ сонаправлены (рис. 5), следовательно, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=|AC|\cdot|DB|=|AC|^2$, поскольку $|AC|=|DB|$.

Подставляя найденное значение $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$ в (3), получим

$$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2+2|AC|^2=|BC|^2+|AD|^2+|AC|^2+|BD|^2,$$

и теорема доказана.

Напомним, что квадрат расстояния между двумя точками равен скалярному квадрату вектора, определяемого этими точками. Решив задачу, не спешите: подумайте, нельзя ли результат использовать для решения какой-нибудь другой задачи.

Задачи

1. а) Около треугольника $ABC$ описана окружность и построена точка $D$, симметричная центру $O$ относительно стороны $AB$. Выразите вектор $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Докажите, что

$$|CD|^2=R^2+a^2+b^2-c^2,$$

где $a=|BC|$, $b=|AC|$, $c=|AB|$, $R=|OA|$.

б) Докажите, что для всякого треугольника $ABC$ справедливо неравенство

$$\cos 2\widehat{A}+\cos 2\widehat{B}-\cos 2\widehat{C}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Выясните, когда имеет место равенство.

2. а) Докажите, что расстояние от центра $O$ окружности, описанной около треугольника $ABC$, до его *центроида* $G$ (точки пересечения медиан) определяется по формуле

$$|OG|^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

б) Докажите, что для всякого треугольника $ABC$

$$\sin^2\widehat{A}+\sin^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{C}\leqslant\frac{9}{4}.$$

При каком условии имеет место равенство?

3. а) Пусть $O$ — центр сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, $G$ — центроид грани $ABC$, $M$ — точка, удовлетворяющая условию $|OM|=3|OG|$. Выразите расстояние от вершины $D$ до точки $M$ через длины ребер тетраэдра и радиус описанной около тетраэдра сферы.

б) Докажите, что если $a$, $b$, $c$ — длины ребер тетраэдра, имеющих общую вершину, $a_1$, $b_1$, $c_1$ — длины трех остальных ребер и $R$ — радиус описанной около него сферы, то

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2\leqslant 4R^2+a^2+b^2+c^2.$$

4. Докажите, что расстояние от центра $O$ сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, до его *центроида* *) $G$ определяется по формуле

$$|OG|^2=R^2-\frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2),$$

где $a$, $b$, $c$, $a_1$, $b_1$, $c_1$ — длины ребер тетраэдра, $R$ — радиус описанной сферы.

5. Докажите, что если $A$, $B$, $C$, $D$ — четыре произвольные точки пространства, $M$ и $N$ — середины отрезков $AC$ и $BD$ соответственно, то имеет место равенство

$$|AC|^2+|BD|^2=|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2-4|MN|^2.$$

Какие следствия можно вывести из этой теоремы?

---

*) См. статью Э. Готмана «Прямая Эйлера» («Квант», 1975, № 2, с. 32).

*Я. Понарин*

# Вычисление площадей

### Площадь треугольника

Известно, что площадь треугольника $ABC$ можно вычислить по формуле

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}, \qquad (1)$$

где $a$, $b$ и $c$ — длины сторон треугольника, лежащих соответственно против углов $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$.

Обозначим векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$ сторон треугольника через $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Из определения скалярного произведения векторов следует, что $\cos\hat{C}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, откуда

$$\sin^2\hat{C}=\frac{a^2b^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}{a^2b^2}$$

(скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины).

Возведем обе части формулы (1) в квадрат и подставим найденное выражение для $\sin^2\hat{C}$; получим

$$4S^2=a^2b^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2. \qquad (2)$$

Формула (2) пригодится нам в дальнейшем (в частности, из нее легко получить формулу Герона для площади треугольника).

### Площадь четырехугольника

Если $p$ и $q$ — длины диагоналей произвольного плоского четырехугольника (противоположные стороны которого не пересекаются во внутренних точках), то его площадь можно найти по формуле

$$S=\frac{1}{2}pq\sin(\widehat{\vec{p},\vec{q}}). \qquad (3)$$

Как и в случае треугольника, перепишем эту формулу в виде, аналогичном (2):

$$4S^2=p^2q^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2. \qquad (4)$$

Чтобы оценить полученные формулы (2) и (4), решим несколько задач (если вы попытаетесь решить их иначе, без использования скалярного произведения, вы увидите, насколько усложнятся решения).

Задача 1. *Вычислить площадь грани $ABC$ тетраэдра $ABCD$, если $a$, $b$, $c$ — длины его ребер $DA$, $DB$ и $DC$, а $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — плоские углы при вершине $D$, соответственно противолежащие ребрам $BC$, $AC$ и $AB$.*

Решение. Введем такие обозначения: $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$. Тогда для площади $S$ грани $ABC$ имеем

$$4S^2=|\overrightarrow{CA}|^2\cdot|\overrightarrow{CB}|^2-(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})^2=$$
$$=(\vec{a}-\vec{c})^2\cdot(\vec{b}-\vec{c})^2-((\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c}))^2=$$
$$=(a^2+c^2-2ac\cos\beta)(b^2+c^2-2bc\cos\alpha)-$$
$$-(ab\cos\gamma-ac\cos\beta-bc\cos\alpha+c^2)^2.$$

Фактически задача уже решена, но в полученное выражение длины $a$, $b$, $c$ и углы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ входят несимметрично, хотя по условию задачи значения $a$, $b$, $c$, а также $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ должны

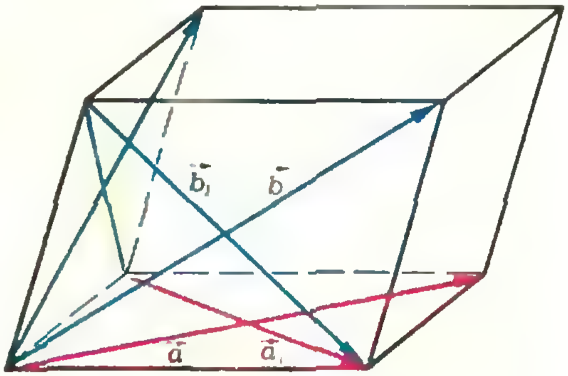


Рис. 1.

быть равноправны. Поэтому желательно полученный ответ привести к симметричному виду. Имеем

$$4S^2=a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-2a^2bc\cos\alpha-$$
$$-2b^2ac\cos\beta-2c^2ab\cos\gamma-$$
$$-a^2b^2\cos^2\gamma-b^2c^2\cos^2\alpha-$$
$$-a^2c^2\cos^2\beta+2a^2bc\cos\beta\cos\gamma+$$
$$+2b^2ac\cos\gamma\cos\alpha+2c^2ab\cos\alpha\cos\beta=$$
$$=(bc\sin\alpha)^2+(ac\sin\beta)^2+(ab\sin\gamma)^2+$$
$$+2abc\,(a\,(\cos\beta\cos\gamma-$$
$$-\cos\alpha)+b\,(\cos\gamma\cos\alpha-$$
$$-\cos\beta)+c\,(\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma)).$$

Это и есть нужный нам симметричный ответ.

В частности, если $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$,

$$4S^2=(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2.$$

Но произведения $ab$, $ac$ и $bc$ равны соответственно удвоенным площадям $S_1$, $S_2$ и $S_3$ граней $DAB$, $DCA$ и $DBC$ тетраэдра $ABCD$, у которого плоские углы при вершине $D$ — прямые. Сокращая на 4, получим

$$S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2,$$

т. е. *в тетраэдре с прямым трехгранным углом квадрат площади грани, лежащей против прямого трехгранного угла, равен сумме квадратов площадей остальных граней.* Это — аналог теоремы Пифагора.

**Задача 2.** *В параллелепипеде длины диагоналей одной грани равны $a$ и $a_1$, другой — $b$ и $b_1$, третьей — $c$ и $c_1$. Найти площадь грани с диагоналями $a$ и $a_1$* (рис. 1).

**Решение.** По формуле (4) $4S^2=a^2a_1^2-(\vec{a}\cdot\vec{a}_1)^2$, где $S$ — нужная площадь.

Так как $\vec{a}_1=\vec{b}-\vec{c}$, то $2\vec{a}\cdot\vec{a}_1=2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{c}$. По теореме косинусов (с учетом определения скалярного произведения) $2\vec{a}\cdot\vec{b}=a^2+b^2-c_1^2$ и $2\vec{a}\cdot\vec{c}=a^2+c^2-b_1^2$. Поэтому

$$2\vec{a}\cdot\vec{a}_1=b^2+b_1^2-c^2-c_1^2 \text{ и } S^2=$$
$$=\frac{1}{4}a^2a_1^2-\frac{1}{16}\left(b^2+b_1^2-c^2-c_1^2\right)^2.$$

**Задача 3.** *Найти площадь $S$ вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$* (рис. 2), *если известны длины $a$, $b$, $c$ и $d$ его сторон.*

**Решение.** Введем такие обозначения для векторов сторон и диагоналей четырехугольника $ABCD$: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$, $\overrightarrow{DA}=\vec{d}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{e}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{f}$. Тогда $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0$, $\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{f}=\vec{b}+\vec{c}$. Согласно формуле (4) $4S^2=(ef)^2-(\vec{e}\cdot\vec{f})^2$. Известно, что стороны и диагонали вписанного четырехугольника связаны таким соотношением (теорема Птолемея) *):

$$ef=ac+bd.$$

Найдем скалярное произведение $\vec{e}\cdot\vec{f}$: $\vec{e}\cdot\vec{f}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{c})=$
$=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+b^2$. Так как $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{d}$, то $\vec{a}\cdot\vec{c}=-a^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{d}$. Поэтому $\vec{e}\cdot\vec{f}=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{d}-a^2+b^2$. По теореме косинусов (с учетом направления векторов) имеем

$$2\vec{b}\cdot\vec{c}=-b^2-c^2+f^2,$$
$$-2\vec{a}\cdot\vec{d}=a^2+d^2-f^2.$$

Следовательно,

$$\vec{e}\cdot\vec{f}=\frac{1}{2}(b^2+d^2-a^2-c^2).$$

Подставляя найденные выражения для $ef$ и $\vec{e}\cdot\vec{f}$ в формулу для площади $S$, получим $4S^2=(ac+bd)^2-\frac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)^2$, откуда $16S^2=(-a+b+c+d)\times\times(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$. Если обозначить полупериметр нашего четырехугольника через $p$, то полученный ответ можно переписать в виде

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Это — аналог формулы Герона для вписанного четырехугольника.

---

*) См., например, «Квант», 1973, № 3, с. 26.

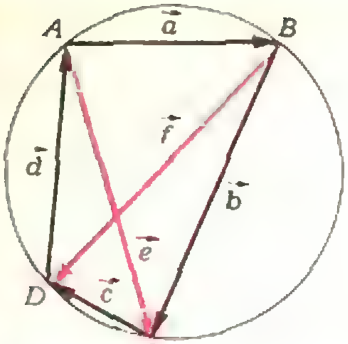


Рис. 2.

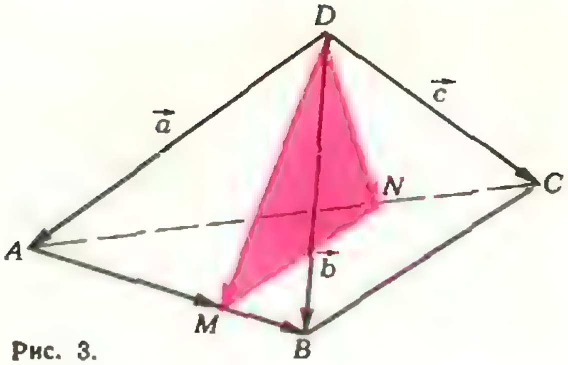


Рис. 3.

Задача 4. *Через вершину правильного тетраэдра с ребром a проведеден а плоскость так, что линия ее пересечения с плоскостью основания параллельна стороне и делит основание на две равновеликие части. Найти площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью* (рис. 3).

Решение. Обозначим в данном правильном тетраэдре $ABCD$ $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$, причем $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=a$. Пусть плоскость сечения пересекает плоскость $ABC$ по прямой $MN$, $M\in(AB)$, $N\in(AC)$ и $(MN)\parallel(BC)$. Нужную площадь сечения можно посчитать по формуле

$$4S^2=|\overrightarrow{DM}|^2\cdot|\overrightarrow{DN}|^2-(\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN})^2.$$

Эта формула подсказывает, как решать задачу.

Имеем $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}$, где $\overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AB}$.

Число $k$ находится из того условия, что прямая $MN$ делит основание $ABC$ на две равновеликие части, причем так, что треугольники $AMN$ и $ABC$ подобны; поэтому

$$S_{AMN}:S_{ABC}=|\overrightarrow{AM}|^2:|\overrightarrow{AB}|^2=k^2=\frac{1}{2},$$

откуда $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому

$$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+k\cdot\overrightarrow{AB}=$$

$$=\vec{a}+\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{(\sqrt{2}-1)\vec{a}+\vec{b}}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично $\overrightarrow{DN}=\frac{(\sqrt{2}-1)\vec{a}+\vec{c}}{\sqrt{2}}$.

Подставляя выражения для $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{DN}$ в формулу для $S$, получаем

$$16S^2=((\sqrt{2}-1)\vec{a}+\vec{b})^2\cdot((\sqrt{2}-1)\vec{a}+\vec{c})^2-(((\sqrt{2}-1)\vec{a}+\vec{b})\times\times((\sqrt{2}-1)\vec{a}+\vec{c}))^2.$$

Так как для правильного тетраэдра с ребром длины $a$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}a^2,$$

то после всех упрощений получаем

$$S=\frac{1}{8}a^2\sqrt{11-4\sqrt{2}}.$$

Решите самостоятельно следующие задачи:

1. Дан произвольный четырехугольник $ABCD$. Точки $A_1$ и $C_1$ являются образами вершин $A$ и $C$ при некотором параллельном переносе. Докажите, что четырехугольник $A_1BC_1D$ равновелик данному четырехугольнику $ABCD$.

2. В тетраэдре $ABCD$ известны длины всех шести ребер: $|DA|=a$, $|DB|=b$, $|DC|=c$, $|BC|=a_1$, $|AC|=b_1$, $|AB|=c_1$. Через середину ребра $DB$ проведена плоскость параллельно ребрам $AD$ и $BC$. Найдите площадь сечения тетраэдра этой плоскостью.

3. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен $\alpha$, а длина бокового ребра равна $a$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и середину противоположного бокового ребра.

# задачник Кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 октября 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта» М391 М392» или «...Ф403». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

В этом и следующих номерах «Задачник «Кванта»» составлен в основном из задач, предлагавшихся на последней Всесоюзной олимпиаде. После задач заключительного тура олимпиады в скобках указан класс, для учеников которого предлагалась задача.

## Задачи

### М391—М395; Ф403—Ф407

**М391.** *а*) В последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ числа $x_0$ и $x_1$ — натуральные и меньше 1000, а каждое из остальных чисел равно модулю разности двух предыдущих. Докажите, что одно из чисел $x_1, x_2, \ldots x_{1500}$ равно 0. (10 кл.)

б) В последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ числа $x_0$ и $x_1$ — натуральные и меньше 10000, а каждое из чисел $x_2, x_3, \ldots$ равно наименьшей из разностей двух каких-то предыдущих чисел. Докажите, что $x_{20}=0$. (8 кл., 9 кл.)

*С. Фомин*

**М392.** По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз. (10 кл.)

*Н. Васильев*

**М393.** Найти сумму

$$\varphi(0)+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+\varphi\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+\varphi(1),$$

если $\varphi(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$.

*М. Левин*

**М394.** а) На плоскости даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, сумма которых равна $\vec{0}$. Докажите неравенство

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}| \geqslant |\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{b}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|.$$

Докажите аналогичное неравенство:

б) для четырех чисел и

в)* четырех векторов в трехмерном пространстве, сумма которых равна $\vec{0}$. (9 кл., 10 кл.)

*Ю. Ионин*

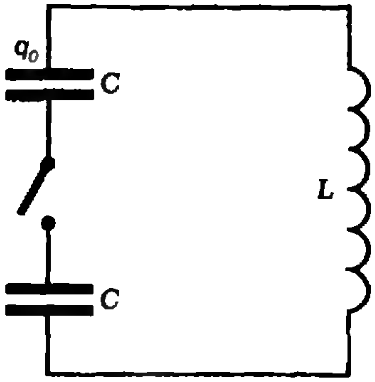


Рис. 1.

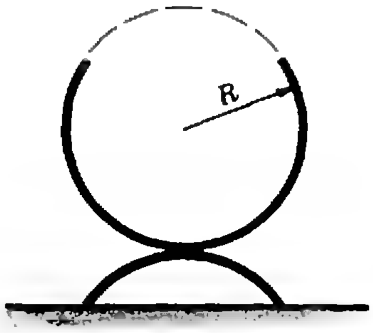


Рис. 2.

**М395*.** В вершинах правильного $n$-угольника с центром в точке $O$ расставлены числа $(+1)$ и $(-1)$. За один шаг разрешается изменить знак у всех чисел, стоящих в вершинах какого-либо правильного $k$-угольника с центром $O$ (при этом мы допускаем и 2-угольники, понимая под 2-угольником отрезок с серединой в точке $O$). Докажите, что в случаях а), б), в) существует такое первоначальное расположение $(+1)$ и $(-1)$, что из него ни за какое число шагов нельзя получить набор из одних $(+1)$:

а) $n=15$,

б) $n=30$,

в)* $n$ — любое целое число, большее 2.

г)* Попробуйте выяснить для произвольного $n$, сколько существует различных расстановок $(+1)$ и $(-1)$ таких, что никакую из них нельзя получить ни из какой другой за несколько шагов. Докажите, например, что для $n=2100$ существует $2^{480}$ таких расстановок. (10 кл.)

*С. Фомин*

**Ф403.** В электрической цепи из двух одинаковых конденсаторов емкости $C$ и катушки индуктивности $L$, соединенных последовательно (рис. 1), в начальный момент один из конденсаторов имеет заряд $q_0$, второй не заряжен.

Как будут изменяться со временем заряды конденсаторов и ток в контуре после замыкания ключа? Предложите механическую колебательную систему, аналогичную данной электрической. (10 кл.)

**Ф404.** Определить к. п. д. ракетного двигателя как тепловой машины и его силу тяги. Ракетный двигатель использует в качестве горючего водород, в качестве окислителя — жидкий кислород. Секундный расход водорода 24 *кг/сек*. Скорость истечения газов из сопла ракеты $4{,}2\cdot 10^3$ *м/сек*. Теплотворная способность водорода $1{,}1\cdot 10^8$ *дж/кг*. (9 кл.)

**Ф405.** Однородную тонкостенную сферу радиуса $R$ разрезали на две части и скрепили, как показано на рисунке 2. На какой высоте находится центр тяжести получившегося бокала, если высота его ножки $h$? (8 кл.)

**Ф406.** Спутник движется по круговой орбите на расстоянии от поверхности Земли, равном ее радиусу $R$. В некоторый момент со спутника запускается станция на другую планету, после чего оставшаяся часть спутника движется по эллиптической орбите, касающейся поверхности Земли в точке, противоположной точке старта станции.

Какую максимальную часть массы спутника может составлять масса межпланетной станции? (Потенциальная энергия тела массы $m$ в поле тяготения тела массы $M$ равна $U=-\gamma\frac{mM}{r}$). (10 кл.)

**Ф407.** Машинист пассажирского поезда, двигавшегося со скоростью $v_1=108$ *км/час*, заметил на расстоянии $s_0=180$ *м* впереди движущийся в ту же сторону со скоростью $v_2=32{,}4$ *км/час* товарный поезд. Машинист сразу включил тормоз, благодаря чему пассажирский поезд начал двигаться с ускорением $a=-1{,}2$ *м/сек*$^2$. Достаточно ли этого ускорения для того, чтобы поезда не столкнулись? (8 кл.)

# Решения задач

## М351—М353, Ф358—Ф361

**М351.** *Восстановите треугольник, если на плоскости отмечены три точки: $O$ — центр описанной окружности, $P$ — центр тяжести и $H$ — основание одной из высот этого треугольника.*

Пусть $ABC$ — искомый треугольник. Рассмотрим конгруэнтный ему треугольник $AB_1C$ (рис. 1). Заметим, что:

1) Прямая $BB_1$ параллельна прямой $AC$.

2) Точка $B_1$ лежит на окружности, описанной вокруг треугольника $ABC$.

3) Точка $B$ лежит на окружности с диаметром $B_1H$.

4) Точка пересечения медианы $BM$ треугольника $ABC$ с отрезком $B_1H$ совпадает с точкой $P$ и делит отрезок $B_1H$ в отношении $2:1$.

Первые три свойства очевидны. Докажем четвертое свойство. Пусть отрезки $BM$ и $B_1H$ пересекаются в некоторой точке $N$. Треугольники $BB_1N$ и $MHN$, очевидно, подобны. Кроме того, нетрудно установить, что $|BB_1|=2|MH|$. Отсюда следует, что $|BN|=2|NM|$ и $|B_1N|=2|NH|$. А поскольку $BM$ — медиана треугольника $ABC$ и точка $N$ делит ее в отношении $2:1$, то эта точка является центром тяжести треугольника $ABC$, что и требовалось доказать.

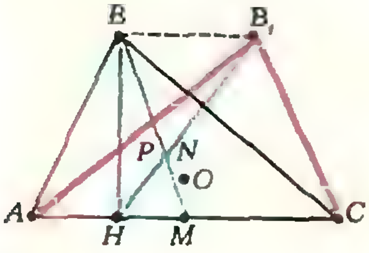


Рис. 1.

Перейдем теперь к построению треугольника $ABC$.

Пользуясь свойством 4), построим точку $B_1$. Для этого проведем прямую $PH$ и отложим от точки $P$ отрезок $PB_1$, равный по длине $2|PH|$.

Проведем окружность с центром в точке $O$ радиусом $|OB_1|$. На основании свойства 2) эта окружность будет описанной вокруг искомого треугольника $ABC$. В частности, на ней лежит точка $B$. На основании свойства 3) точка $B$ лежит и на окружности с диаметром $|B_1H|$. Проведем эту окружность. Точками пересечения построенных окружностей будут точки $B$ и $B_1$ (рис. 2).

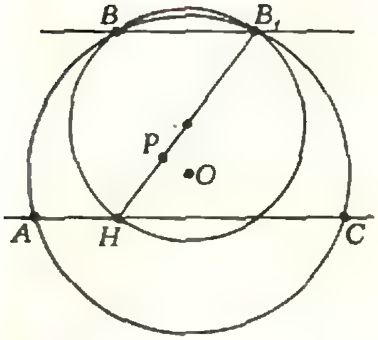


Рис. 2.

Соединим точки $B$ и $B_1$ и проведем через точку $H$ прямую, параллельную отрезку $BB_1$. На основании свойства 1) на этой прямой лежат точки $A$ и $C$, которые являются точками ее пересечения с уже построенной окружностью, описанной вокруг треугольника $ABC$. Таким образом, треугольник $ABC$ построен. Покажите самостоятельно, что по заданным трем точкам $O$, $P$ и $H$ треугольник $ABC$ восстанавливается однозначно.

*А. Савин*

**М352.** *Пусть $n$ — целое число, для которого*

$$n < (45 + \sqrt{1975})^{30} < n + 1.$$

*Докажите, что $n$ нечетно.*

Заметим предварительно, что

$$45 - \sqrt{1975} = \frac{45^2 - 1975}{45 + \sqrt{1975}} = \frac{2025 - 1975}{45 + \sqrt{1975}} = \frac{50}{45 + 44} = \frac{50}{89} < 1.$$

Сложим два числа:

$$\alpha = (45 + \sqrt{1975})^{30} = 45^{30} + C_{30}^{1} 45^{29} \sqrt{1975} + C_{30}^{2} 45^{28} (\sqrt{1975})^2 + \ldots + C_{30}^{29} 45 (\sqrt{1975})^{29} + (\sqrt{1975})^{30}$$

и

$$\beta = (45 - \sqrt{1975})^{30} = 45^{30} - C_{30}^{1} 45^{29} \sqrt{1975} + C_{30}^{2} 45^{28} (\sqrt{1975})^2 - \ldots - C_{30}^{29} 45 (\sqrt{1975})^{29} + (\sqrt{1975})^{30}.$$

Ясно, что число $\alpha + \beta$ целое и четное, а $\beta < 1$. Поэтому $n < \alpha < n + 1 = \alpha + \beta$, где $n$ нечетно. Точно так же можно доказать, что для натуральных $a$, $b$, $n$ и $m$, где $a - 1 < \sqrt{b} < a$, $n < (a + \sqrt{b})^m < n + 1$, число $n$ нечетно.

*Н. Васильев*

◆

**М353.** *Пусть $ABCD$ — произвольный тетраэдр. Докажите, что:*

*а) сумма всех двугранных углов тетраэдра, ребрами которых являются $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$, меньше $2\pi$;*

*б) сумма всех двугранных углов тетраэдра больше $2\pi$, но меньше $3\pi$;*

*в) сумма косинусов всех двугранных углов тетраэдра положительна и не превосходит 2, причем эта сумма равна 2 в том и только том случае, когда все грани тетраэдра — равные треугольники;*

*г) если $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$, то сумма двух двугранных углов, ребрами которых являются $AB$ и $CD$, равна сумме двух других двугранных углов тетраэдра, ребрами которых являются $BC$ и $DA$.*

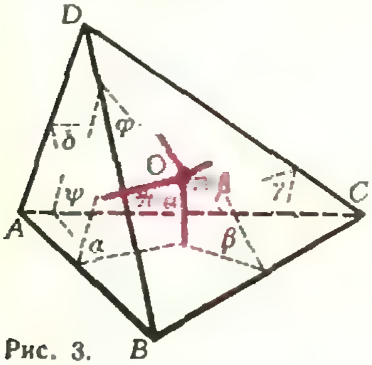


Рис. 3.

Возьмем произвольную точку внутри тетраэдра и опустим из нее перпендикуляры на грани тетраэдра (рис. 3). Тогда величина каждого двугранного угла тетраэдра дополняет до $\pi$ величину угла между соответствующими перпендикулярами. Обозначим величины двугранных углов с ребрами $AB$, $BC$, $CD$, $AD$, $BD$ и $AC$ через $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varphi$ и $\psi$; через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ обозначим векторы, направления которых соответственно перпендикулярны граням $BCD$, $ACD$, $ABD$ и $ABC$, а длины численно равны их площадям. Имеем $\widehat{(\mathbf{b}, \mathbf{c})} = \pi - \delta$, $\widehat{(\mathbf{c}, \mathbf{d})} = \pi - \alpha$, $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{d})} = \pi - \beta$, $\widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \pi - \gamma$.

Заметим теперь, что сумма векторов, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ равна нулю. (Попытайтесь доказать это утверждение самостоятельно; мы же ограничимся лишь «физическим» объяснением этого факта. Наполним сосуд, имеющий вид нашего тетраэдра, газом; тогда направление силы давления газа на каждую грань перпендикулярно плоскости грани, а величина силы пропорциональна площади этой грани. Отсюда и следует равенство нулю суммы соответствующих векторов.) Это означает, что из векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ можно составить замкнутую пространственную ломаную (рис. 4). Сумма углов получающегося пространственного четырехугольника равна как раз $\alpha + \beta + \gamma + \delta$. С другой стороны, *сумма углов пространственного четырехугольника всегда меньше $2\pi$.* В самом деле, разобьем этот четырехугольник «диагональю» $MN$ на два треугольника. Сумма углов этих треугольников равна $2\pi$, а плоские углы $\alpha$ и $\gamma$ каждого из двух трехгранных углов с вершинами $M$ и $N$ соответственно меньше суммы двух других их плоских углов. Отсюда и следует, что $\alpha + \beta + \gamma + \delta < 2\pi$. Аналогично доказывается, что $\alpha + \varphi + \gamma + \psi < 2\pi$ и $\beta + \varphi + \delta + \psi < 2\pi$.

Сложив эти три неравенства, получим, что $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varphi + \psi < 3\pi$. А поскольку сумма двугранных углов любого трехгранного угла больше $\pi$ (возьмем, например, трехгранный угол $A$ с углами $\alpha$, $\delta$ и $\psi$; тогда трехгранный угол, образованный векторами $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$, имеет плоские углы $\pi - \alpha$, $\pi - \delta$, $\pi - \psi$; но $(\pi - \alpha) + (\pi - \delta) + (\pi - \psi) < 2\pi$, откуда $\alpha + \delta + \psi > \pi$), сумма всех двугранных углов тетраэдра больше $2\pi$, чем завершено доказательство пункта б).

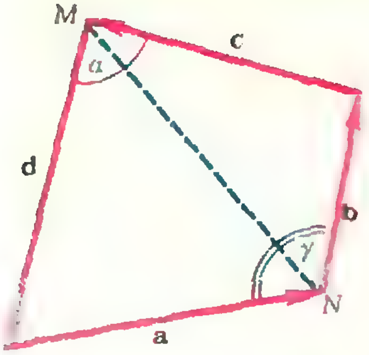


Рис. 4.

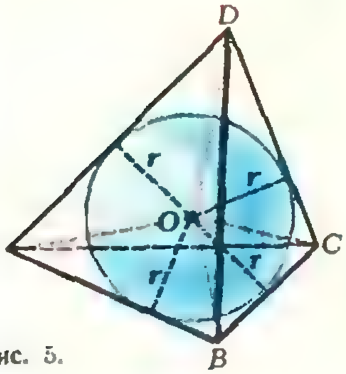


Рис. 5.

Для доказательства пункта в) воспользуемся понятием *скалярного произведения векторов*: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ (его свойства см. на с. 21). Из определения следует, что произведение единичных векторов равно косинусу угла между ними. Обозначим через $\mathbf{e}_a$, $\mathbf{e}_b$, $\mathbf{e}_c$ и $\mathbf{e}_d$ единичные векторы, имеющие те же направления, что и векторы **a**, **b**, **c** и **d** соответственно. Легко видеть, что

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta+\cos\varphi+\cos\psi=$$

$$=-\frac{1}{2}((\mathbf{e}_a+\mathbf{e}_b+\mathbf{e}_c+\mathbf{e}_d)\cdot(\mathbf{e}_a+\mathbf{e}_b+\mathbf{e}_c+\mathbf{e}_d))+2=$$

$$=-\frac{1}{2}\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}+2=-\frac{|\mathbf{k}|^3}{2}+2, \qquad (1)$$

где $\mathbf{k}=\mathbf{e}_a+\mathbf{e}_b+\mathbf{e}_c+\mathbf{e}_d$.

Из равенства (1) следует, что сумма косинусов двугранных углов тетраэдра не превосходит 2 и равна 2 тогда и только тогда, когда $\mathbf{k}=\mathbf{e}_a+\mathbf{e}_b+\mathbf{e}_c+\mathbf{e}_d=0$. Но поскольку всегда $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=0$, в случае $\mathbf{k}=0$ мы получаем, что длины векторов **a**, **b**, **c** и **d** равны, т. е. что все грани равновелики. Из равновеликости граней тетраэдра следует их конгруэнтность (см. решение задачи М319, «Квант», 1975, № 12). Поэтому для завершения доказательства утверждений пункта в) осталось показать, что написанная в левой части равенства (1) сумма косинусов положительна, или что $|\mathbf{k}|<2$.

Для удобства будем считать, что $|\mathbf{a}|=1$, $|\mathbf{b}|\leqslant 1$, $|\mathbf{c}|\leqslant 1$ и $|\mathbf{d}|\leqslant 1$. Тогда $\mathbf{e}_a=\mathbf{a}$, $|\mathbf{k}|=|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+(\mathbf{e}_b-\mathbf{b})+(\mathbf{e}_c-\mathbf{c})+(\mathbf{e}_d-\mathbf{d})|\leqslant|\mathbf{e}_b-\mathbf{b}|+|\mathbf{e}_c-\mathbf{c}|+|\mathbf{e}_d-\mathbf{d}|=3-|\mathbf{b}|-|\mathbf{c}|-|\mathbf{d}|\leqslant 3-|\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}|=3-|\mathbf{a}|=2$. Равенство может иметь место лишь в том случае, когда все векторы **a**, **b**, **c** и **d** коллинеарны; поскольку это не так, $|\mathbf{k}|<2$, и все утверждения пункта в) доказаны.

Для доказательства пункта г) заметим, что условие $|AB|+|CD|=|BC|+|DA|$ является необходимым и достаточным для существования шара, касающегося ребер $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ (доказательство этого факта совершенно аналогично доказательству необходимости и достаточности условия $|AB|+|CD|=|BC|+|DA|$ для того, чтобы вокруг плоского четырехугольника $ABCD$ можно было бы описать окружность). Пусть $O$ — центр этого шара (предположим, что точка $O$ внутри тетраэдра). Имеем (рис. 5):

$$(\widehat{\text{пл. } OAB, \text{пл. } ABC}) = (\widehat{\text{пл. } OBC, \text{пл. } ABC}),$$
$$(\widehat{\text{пл. } OAB, \text{пл. } ABD}) = (\widehat{\text{пл. } OAD, \text{пл. } ABD}),$$
$$(\widehat{\text{пл. } ODC, \text{пл. } BCD}) = (\widehat{\text{пл. } OBC, \text{пл. } BCD}),$$
$$(\widehat{\text{пл. } ODC, \text{пл. } ACD}) = (\widehat{\text{пл. } OAD, \text{пл. } ACD}).$$

Сложив эти равенства, получаем утверждение г).

Случай, когда точка $O$ вне тетраэдра, рассматривается аналогично.

*И. Шарыгин*

◆

**Ф358.** *Неоднородный стержень длины $l$ может стоять у вертикальной стены, образуя угол не менее 45° с полом. Коэффициент трения*

Силы, действующие на неоднородный стержень, опирающийся на пол и вертикальную стену, изображены на рисунке 6. Здесь $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ — силы нормальной реакции пола и стены, $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ — силы сухого трения о пол и стену, $m\mathbf{g}$ — сила тяжести стержня. Направления сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ очевидны —

*стержня о пол и о стену равен $1/\sqrt{3}$. На какой высоте находится центр тяжести стержня?*

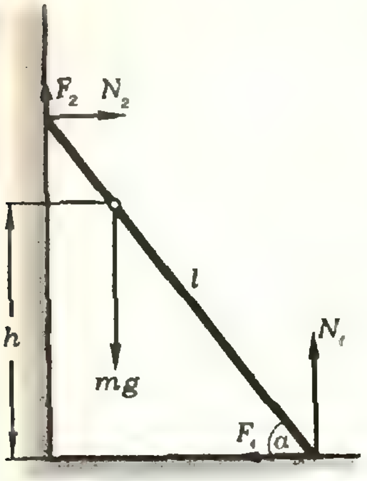


Рис. 6.

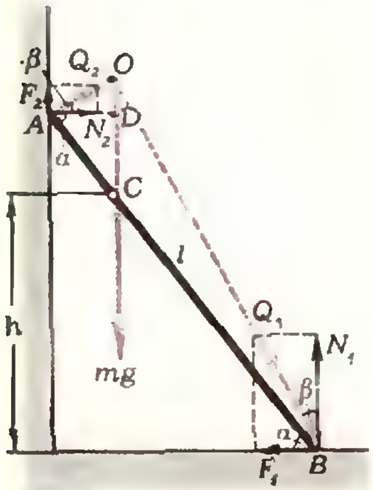


Рис. 7.

они должны препятствовать вращению стержня против часовой стрелки. Поэтому эти силы направлены так, как показано на рисунке 6. Будем считать, что сила тяжести стержня $mg$ приложена в точке, находящейся на искомой высоте $h$.

Для того чтобы тело находилось в равновесии, необходимо, чтобы сумма проекций всех приложенных к телу сил на любое направление и сумма моментов этих сил относительно любой неподвижной оси были равны нулю. Запишем условия равновесия для проекций сил на горизонтальное и вертикальное направления и для моментов сил относительно оси, проходящей через нижнюю точку стержня перпендикулярно к плоскости рисунка:

$$N_2 - F_1 = 0, \tag{1}$$

$$F_2 + N_1 - mg = 0, \tag{2}$$

$$mgh \operatorname{ctg} \alpha - F_2 l \cos \alpha - N_2 l \sin \alpha = 0. \tag{3}$$

В случае покоя абсолютные величины сил сухого трения связаны с абсолютными величинами сил нормального давления следующими неравенствами:

$$F_1 \leqslant \mu N_1, \quad F_2 \leqslant \mu N_2,$$

где $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ — коэффициент трения стержня о пол и о стену. Для предельного случая, когда $\alpha = 45°$,

$$F_1 = \mu N_1 \text{ и } F_2 = \mu N_2. \tag{4}$$

Из равенств (1)—(4) получаем

$$h = l\,\frac{\mu(\mu + \operatorname{tg}\alpha)\sin\alpha}{\mu^2 + 1} = \frac{\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})}{8}\,l \approx 0{,}48\,l.$$

(Если же $\mu = \sqrt{3}$, как было ошибочно указано в условии задачи, то $h = (3 + \sqrt{3})\,\sqrt{2}\,\dfrac{l}{8} \approx 0{,}84\,l$, между тем как верхний конец стержня расположен на высоте $H = l\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71\,l$.)

Данную задачу можно решить проще, если воспользоваться «правилом трех сил». Это правило заключается в том, что при равновесии тела, к которому приложены три силы, лежащие в одной плоскости, линии действия этих сил должны пересекаться в одной точке. В противном случае суммарный момент этих сил относительно любой оси, перпендикулярной к упомянутой плоскости, будет отличен от нуля, и тело не будет в равновесии.

Тремя силами, действующими на стержень, являются силы $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{N}_1$, $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{N}_2$ и сила тяжести $mg$. Вектор $\mathbf{Q}_1$ направлен под углом $\beta \leqslant \operatorname{arctg}\mu$ к вектору $\mathbf{N}_1$ (рис. 7). Вектор $\mathbf{Q}_2$ составляет такой же угол с вектором $\mathbf{N}_2$, т. е. векторы $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ перпендикулярны друг другу. В предельном случае $\beta = \operatorname{arctg}\mu$. Из рисунка 7 видно, что $h = (AB - AC)\sin\alpha$. Но $AC = AD/\cos\alpha = AO\cos\beta/\cos\alpha = AB\cos(\alpha + \beta)\cos\beta/\cos\alpha$. Тогда

$$h = AB\sin\alpha - AB\cos(\alpha + \beta)\cos\beta\operatorname{tg}\alpha = l\sin\alpha\sin\beta\,(\sin\beta + \operatorname{tg}\alpha\cos\beta).$$

Подставляя $\alpha = 45°$ и $\beta = \operatorname{arctg}\mu = 30°$, получаем тот же ответ: $h = \dfrac{\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{3})}{8}\,l \approx 0{,}48\,l$.

**Ф359.** *В цилиндрическом сосуде под поршнем находится насыщенный водяной пар при температуре $t = 20$ °С. При изотермическом медленном вдвигании поршня в цилиндр было отведено количество тепла $Q = 20$ ккал. Какая работа была совершена при этом внешними силами, действующими на поршень?*

При медленном вдвигании поршня в цилиндрический сосуд насыщенный пар конденсируется. Чтобы процесс был изотермическим, выделяющееся при конденсации количество теплоты необходимо отводить. Если первоначально масса водяного пара в сосуде была $m_1$, а затем $m_2$, то количество выделившейся теплоты

$$Q = L(m_1 - m_2),$$

где $L = 539$ *ккал/кг* — удельная теплота парообразования воды.

Известная из таблиц величина $L$ получена опытным путем, при этом испарение воды производится в условиях постоянного давления. Следовательно, потребленное количество теплоты равно сумме приращения внутренней (потенциальной) энергии воды и работы расширения водяного пара. При конденсации пара такое же количество теплоты выделится.

Массу пара в сосуде можно выразить через его объем с помощью уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$m_1 = \frac{p\mu}{RT}V_1, \quad m_2 = \frac{p\mu}{RT}V_2.$$

Здесь $p$ — давление насыщенного пара при температуре $T = 293$ °К ($t = 20$ °С), $V_1$ и $V_2$ — соответственно первоначальный и последующий объемы сосуда, $\mu = 0{,}018$ *кг/моль* — молярная масса водяного пара. Таким образом,

$$Q = \frac{p\mu L}{RT}(V_1 - V_2). \qquad (1)$$

Работа, совершенная над паром внешними силами,

$$A = p(V_1 - V_2). \qquad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), получаем

$$A = \frac{QRT}{L\mu} \approx 5020 \text{ дж}.$$

◆

**Ф360.** *Для измерения ускорения используется изогнутая трубка, заполненная водой, в которой имеется пузырек воздуха (рис. 8). Трубка изогнута по дуге окружности. Как связано положение пузырька с ускорением трубки?*

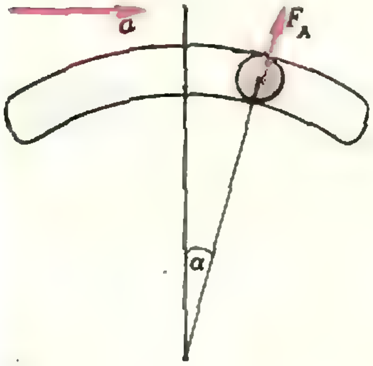


Рис. 8.

Внутри трубки, изогнутой по дуге окружности и заполненной водой, пузырек воздуха будет перемещаться до тех пор, пока касательная к трубке составляющая силы Архимеда не станет равной нулю (силой тяжести воздушного пузырька мы пренебрегаем).

Сила Архимеда представляет собой результирующую сил давления, приложенных к телу, находящемуся в жидкости. Следовательно, эта сила всегда направлена перпендикулярно к поверхностям равного давления, в сторону уменьшения давления. Чтобы найти поверхности равного давления, рассмотрим несколько иную задачу. Пусть сосуд прямоугольного сечения движется с постоянным ускорением $a$ (рис. 9). Покажем, что в этом случае поверхности равного давления, а значит и поверхность жидкости в сосуде, представляют собой плоскости, составляющие угол $\alpha = \operatorname{arctg}(a/g)$ с горизонтом.

Выделим в жидкости два очень тонких столбика жидкости $AC$ и $CB$ таких, что точки $A$ и $B$ лежат на линии, наклоненной к горизонту под углом $\alpha$. Сравним давления в точках $A$ и $B$. Для этого запишем второй закон Ньютона для столбика $AC$ в проекции на вертикальную ось, а для столбика $CB$ — в проекции на горизонтальную ось:

$$p_C S - \rho g h S - p_A S = 0,$$
$$p_C S - p_B S = \rho l S a.$$

Здесь $p_A$, $p_B$, $p_C$ — давления в соответствующих точках, $S$ — площадь поперечного сечения каждого из столбиков, $h$ — высота столбика $AC$, $l$ — длина столбика $CB$. С учетом того, что $\operatorname{tg}\alpha = h/l = a/g$, получаем

$$p_A = p_B.$$

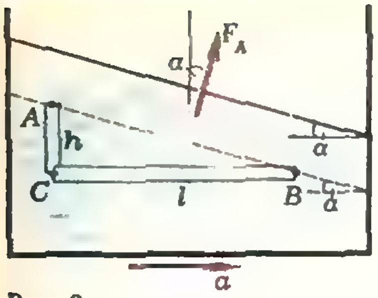


Рис. 9.

Таким образом, сила Архимеда, перпендикулярная к поверхностям равного давления, составляет с вертикалью угол $\alpha = \mathrm{arctg}\,(a/g)$ (см. рис. 9).

В изогнутой трубке поверхности равного давления расположены так же. Поэтому пузырек будет покоиться относительно трубки, когда касательная к ней составляющая силы Архимеда станет равной нулю. Окончательное положение пузырька показано на рисунке 8, где

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,(a/g).$$

◆

**Ф361.** *Прямолинейный проводник длины $l$ и массы $m$ подвешен на двух пружинах жесткости $k$ в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией $B$ (рис. 10). При замыкании ключа $K$ конденсатор емкости $C$, заряженный до разности потенциалов $U$, замыкается на проводник и разряжается. При этом возникают колебания проводника. Определить амплитуду этих колебаний, если время разряда конденсатора много меньше периода колебаний проводника.*

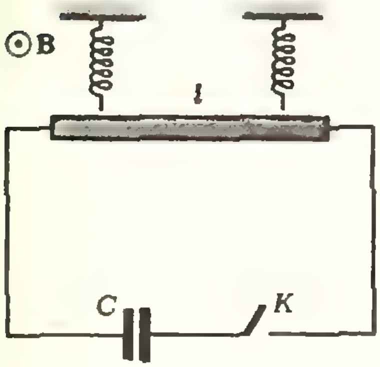


Рис. 10.

При протекании тока $I$ по проводнику длины $l$, находящемуся в магнитном поле с индукцией $B$, на проводник действует сила $F = IBl$, направленная в нашем случае вверх или вниз. За малый промежуток времени $\Delta t$, в течение которого ток можно считать приблизительно постоянным, на проводник действует импульс силы

$$F\,\Delta t = IBl\,\Delta t = Bl\,\Delta q,$$

где $\Delta q = I\Delta t$ — заряд, протекший по проводнику за тот же малый промежуток времени. Импульс силы изменяет количество движения (импульс) проводника на величину

$$\Delta p = m\,\Delta v = F\,\Delta t = Bl\,\Delta q.$$

За все время протекания тока, т. е. за время разрядки конденсатора, проводник приобретает импульс

$$p = mv = \Sigma\, m\,\Delta v = \Sigma\, Bl\,\Delta q = Blq.$$

Здесь $q = CU$ — общий заряд, прошедший через поперечное сечение проводника (заряд конденсатора).

По условию задачи импульс $p$ проводник получает за такое короткое время, что его смещением за это время можно пренебречь. Силы натяжения пружин также остаются неизменными и уравновешивают силу тяжести проводника. Следовательно, за время начального толчка работой всех сил, кроме электрической силы $F$, можно пренебречь. Все последующее движение определяется состоянием системы в конце толчка. Такой режим движения обычно называют баллистическим (известны, например, баллистический маятник, баллистический гальванометр и т. п.).

Проводник на пружинах представляет собой пружинный маятник. Считая его исходное положение за положение равновесия с нулевой потенциальной энергией, запишем закон сохранения энергии для начального состояния и состояния наибольшего отклонения при колебаниях с амплитудой $A$:

$$\frac{mv^2}{2} = 2\,\frac{kA^2}{2}.$$

Это уравнение совместно с уравнением

$$mv = BlCU$$

определяет амплитуду колебаний:

$$A = \frac{BlCU}{\sqrt{2km}}.$$

*Б. Буховцев*

**В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М346—М355, Ф353—Ф362. Жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач.**

## Математика

Мы не включали в список фамилии читателей, правильно решивших задачи **М346**, **М348**, **М351**, **М355** а), б), в), г). Остальные задачи правильно решили: *А. Алексеев* (Пермь) **9а), б), 0а), 2, 4**; *О. Аполонский* (Жуковский) **9а)**; *Б. Аронов* (Саратов) **4**; *Ю. Атласкин* (д. Хорной Чув. АССР) **4**; *Г. Атоян* (Чаренцаван) **2, 4**; *О. Бабаев* (Нахичевань) **4**; *М. Берелович* (Одесса) **4**; *П. Билер* (ПНР) **2, 4, 5д)**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **9а)**; *В. Бондаренко* (Тростянец) **4**; *В. Бугаенко* (Киев) **7**; *Ю. Булавский* (Новосибирск) **9а), б)**; *И. Вайсбурд* (Томск) **7**; *В. Варин* (Воронеж) **9а), б), 4**; *А. Варламов* (Ленинград) **9а), б)**; *А. Ворович* (Москва) **9а)**; *А. Гадельшин* (д. Байряки Тат. АССР) **4**; *К. Гаджиев* (с. Ганшима Даг. АССР) **4**; *А. Гарнаев* (Таллин) **4**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **0а),б)**; *Р. Геворкян* (Ереван) **9а)**; *В. Гензер* (Киев) **4**; *Гибадуллин* (Бугульма) **9а), б)**; *Р. Гилязов* (Навои) **9а), б), 4**; *И. Гладков* (Баку) **9а), б)**; *О. Годин* (Симферополь) **9а), б)**; *А. Гончаров* (Никополь) **9а), б), в), 0а), б)**; *М. Григорьев* (Новосибирск) **2, 4**; *С. Гришин* (Рыбное) **9а), б)**; *В. Гроссман* (Одесса) **0а), б), 2**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **7, 9а), б), 0а), б), 4**; *А. Данилов* (Шумерля) **9а), б), 4**; *В. Деркачев* (Усть-Каменогорск) **9а), б)**; *В. Ерпылев* (Ашхабад) **7, 9а), б)**; *Р. Измайлов* (Баку) **4**; *Ю. Исат* (Даугавпилс) **4**; *И. Калика* (Киев) **9а), б), 0а), 2, 4, 5д)**; *А. Камалян* (Иджеван) **7, 4**; *Ю.* и *Я. Камень* (Днепропетровск) **9а)**; *Б. Каплан* (Киев) **9а), б), 2, 3б), 4**; *В. Карташев* (Елец) **4**; *В. Качалов* (Харцызск) **9а), б)**; *В. Ким* (Фрунзе) **9а), б)**; *А. Князюк* (Киев) **2, 3б), г), 4, 5д)**; *С. Козявкин* (Киев) **2, 4, 5д)**; *Д. Копелиович* (Челябинск) **9а**; *Н. Крайнюков* (Куйбышев) **2**; *К. Купалов-Ярополк* (Москва) **7, 9а)**; *В. Купцов* (Аша) **0а), 2**; *Ш. Кухалейшвили* (Тбилиси) **4, 5д)**; *А. Лалаян* (Красноводск) **4**; *Я. Ланцман* (Ташкент) **2**; *Р. Леманн* (ГДР) **2**; *В. Липкин* (Москва) **7, 9а), б), 0а), 2, 4, 5д)**; *Л. Лисничук* (Васильков) **7, 9а), б)**; *С. Лифиц* (Харьков) **7, 9а), б)**; *К. Лукаш* (Свердловск) **9а)**; *И. Малинин* (Киев) **9а), б), 4**; *А. Малышев* (пос. Курагино Красноярского края) **9а), б), 0а), б), 4**; *Г. Мамедов* (Баку) **2, 4**; *В. Медведь* (Молодечно) **9а), б), 4**; *М. Меладзе* (Тбилиси) **9а)**; *М. Морайнэ* (ПНР) **7, 9а), б), 2, 4**; *И. Морозов* (Горький) **9а), б), 4**; *Ф. Мурсакулиев* (Сиазань) **9а), б), в)**; *В. Нейман* (Ленинград) **7, 0а), б)**; *А. Ненашев* (Ленинград) **4**; *О. Окунев* (Казань) **7, 9а), б)**; *А. Османов* (с. Демурло ГрССР) **2**; *В. Палей* (Харьков) **7**; *Н. Панкратьев* (Москва) **0а)**; *Д. Папуш* (Харьков) **7, 9а), б), 4**; *М. Пекарь* (Одесса) **4**; *А. Перфилов* (Воронеж) **9а)**; *А. Петухов* (Новокузнецк) **9а), 4**; *С. Пискун* (Киев) **9а), б)**; *М. Питателев* (Москва) **9а), б)**; *П. Побылица* (Ленинград) **4**; *С. Попов* (Москва) **9а), 0а), 2**; *С. Пославский* (Харьков) **7, 0а), б), 4**; *Ю. Пошехонов* (Энгельс) **7, 0а), б), 4**; *А. Радул* (Кишинев) **4, 5д)**; *В. Решетов* (Троицк) **2**; *А. Родников* (Москва) **4**; *В. Розенбаум* (Курган) **7**; *А. Романов* (Ташкент) **9а), б), 2, 4**; *Р. Романов* (Москва) **9а)**; *С. Самилянов* (Бар) **9б)**; *С. Сергеев* (Минск) **9а), б)**; *Е. Синельщикова* (Ленинград) **2, 5д)**; *М. Ситников* (Москва) **9а), 0а)**; *А. Смирнов* (Москва) **0а), б)**; *В. Смирнов* (Уфа) **9а), б)**; *М. Стойков* (Москва) **9а)**; *А. Таекин* (Волгоград) **7**; *Д. Татария* (Тбилиси) **4**; *С. Трегуб* (Ташкент) **0а), б), 2, 4, 5д)**; *Н. Тренев* (Москва) **7**; *В. Трофимов* (Москва) **4**; *В. Угриновский* (Хмельник) **2**; *В. Фальков* (Харьков) **7, 9а), б)**; *Ю. Философов* (Саратов) **9а), б)**; *Д. Флаасс* (Новосибирск) **9а), 0а)**; *С. Флоря* (Сату-Ноу) **2**; *Д. Чирадзе* (Тбилиси) **2, 4, 5д)**; *А. Шенкерь* (Киев) **3б)**; *В. Шпильрайн* (Москва) **4, 5д)**; *С. Шполянский* (Воронеж) **4**; *В. Штепин* (Москва) **7, 4**; *В. Шубин* (Пермь) **9а), б), в), 0а), б), 4**; *С. Эминов* (с. Джиниси ГрССР) **2**; *Б. Яцало* (с. Морочно Ровенской обл.) **2**.

## Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф353 — Ф362**, справились с задачами **Ф354**, **Ф355** и **Ф357**. Остальные задачи правильно решили: *Х. Абдуллин* (Алма-Ата) **3, 9, 0, 2**; *С. Аванесян* (Степанакерт) **9**; *А. Алмазов* (Пушкин) **3, 6, 8—0**; *А. Алексеев* (Днепропетровск) **3**; *В. Адоменас* (Москва) **8**; *Г. Айзин* (Брест) **9—2**; *С. Антонюк* (Киев) **8, 9**; *М. Аронов* (Володарск) **3, 6, 8—2**; *И. Астров* (Таллин) **8, 1, 2**; *Р. Ахметзянов* (Николаев) **8**; *М. Бабаев* (Баку) **8**; *Ф. Багдасарян* (Баку) **8, 9**; *В. Бакиров* (Куйбышев) **8—2**; *С. Балашов* (Москва) **8**; *Ю. Балашов* (Москва) **8**; *М. Барташевич* (Свердловск) **9**; *О. Баркалов* (п. Черноголовка Московской обл.) **6**; *Т. Бейко* (Киев) **8—1**; *Г. Бетин* (Генический р-н Херсонской обл.) **6, 0**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **8, 9**; *В. Бурсиан* (Ленинград) **3, 6**; *В. Буртовой* (Килия) **6, 9, 0, 2**; *В. Вайчайтис* (Куршенай) **0—2**; *Б. Васиев* (Самарканд) **6, 9—1**; *А. Вечер* (Минск) **3**; *Б. Виноградова* (Великие Луки) **8—0, 2**; *Н. Высквaрко* (п/о Лешня Минской обл.) **2**; *В. Гаркавый* (Лида) **6**; *В. Гармаш* (Запорожье) **1**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **3, 6, 8—2**; *А. Гейм* (Нальчик) **3**; *А. Гетман* (Моздок) **3**; *И. Гиззатуллин* (д. Старый Ашит ТАССР) **8**; *О. Годин* (Симферополь) **6, 8—2**; *Ю. Гоник* (Брянск) **6, 8—2**; *Г. Горлачев* (Белорецк) **2**; *Б. Грибов* (Воронеж) **8**; *А. Грищук* (Дрогичин) **9**; *А. Давыденко* (Таллин) **6, 0**; *Д. Данильчин* (Рязань) **3, 6**;

*(Окончание см. на с. 64)*

# Варианты вступительных экзаменов

## Донецкий государственный университет

В 1965 году в столице индустриального Донбасса был основан научный центр АН УССР, в состав которого вошли ряд научно-исследовательских институтов и университет. За 10 лет существования Донецкий государственный университет (ДонГУ) стал одним из крупнейших вузов Украины. В настоящее время на девяти факультетах ДонГУ готовятся специалисты высшей квалификации для народного хозяйства, научных учреждений, высшей и средней школы по специальностям: математика, прикладная математика, физика, техническая кибернетика, химия, биология, экономическая кибернетика, биология, физиология растений и животных, планирование народного хозяйства и др.

Самым крупным факультетом ДонГУ является математический. В его составе 7 кафедр, которые готовят специалистов по теории вероятностей и математической статистике, теории функций и функциональному анализу, дифференциальным уравнениям, вычислительной математике, теории упругости, теоретической и прикладной механике, математическому обеспечению АСУ.

Важное место в подготовке математиков занимает приобретение навыков работы с вычислительной техникой. Все выпускники факультета подготовлены к работе на современных ЭВМ. Этому способствует хорошая математическая база университета: вычислительный центр ДонГУ является крупнейшим на Украине.

Около 75% выпускников факультета направляются на работу в научные учреждения, вычислительные центры, на предприятия, остальные — преподавателями средних школ, профтехучилищ, техникумов, вузов. В июле при ДонГУ работают месячные подготовительные курсы для рабочей и сельской молодежи, читаются обзорные лекции по математике для всех абитуриентов.

В университете работает также подготовительное отделение для рабочей и сельской молодежи.

Ниже приводятся варианты письменного вступительного экзамена по математике на ряд специальностей в 1975 году.

### Вариант 1
(специальность — прикладная математика)

1. В шар радиуса $R$ вписана правильная треугольная пирамида с двугранным углом при боковом ребре $2\alpha$. Найти объем пирамиды.

2. Решить уравнение

$$\sqrt[n]{(x+1)^2}+4\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1}.$$

3. Решить уравнение

$$\cos^4 x+\sin^4 x-2\sin 2x+\frac{3}{4}\sin^2 2x=0.$$

4. Решить неравенство

$$\log_{x-2}(x^2-8x+15)>0.$$

5 Сосуд в 20 *л* наполнен спиртом. Из него выливают некоторое количество спирта в другой, равный ему, и, дополнив остальную часть водой, дополняют этой смесью первый сосуд. Затем из первого отливают $6\frac{2}{3}$ *л* во второй, после чего в обоих сосудах содержится одинаковое количество спирта. Сколько отлито первоначально спирта из первого сосуда во второй?

### Вариант 2
(специальность — математика)

1. Велосипедист отправляется с некоторой скоростью из пункта $A$ в $B$, отстоящий от $A$ на расстоянии 60 *км*. Затем он выезжает обратно с той же скоростью, но через один час после выезда он делает остановку на 20 *мин*. После этого он продолжает путь, увеличив скорость на 4 *км/час*. В каких границах заключена скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь от $B$ до $A$ он потратил времени не более, чем от $A$ до $B$?

2. В правильной треугольной пирамиде угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\alpha$. Определить двугранный угол при боковом ребре.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2.$$

5. Решить уравнение

$$\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}=\lg\sqrt{1-x^2}+2.$$

Вариант 3

(специальность — биохимия)

1. Из точки $A$ плоскости $M$ проведена наклонная $AD$ под углом $\alpha$ к плоскости; через $AD$ проведена плоскость $P$ под углом $\beta$ к плоскости $M$. Определить угол между $AD$ и линией пересечения плоскостей $M$ и $P$.

2. Турист отправляется в поход из $A$ в $B$ и обратно и проходит весь путь за 3 *час* 41 *мин*. Дорога из $A$ в $B$ идет сначала в гору, потом по ровному месту, а затем под гору. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту, если скорость ходьбы туриста составляет: в гору 4 *км/час*, по ровному месту 5 *км/час* и под гору 6 *км/час*, а расстояние $AB$ равно 9 *км*?

3. При каких значениях $x$ функция

$$y=\sin x-\cos x$$

принимает наибольшее значение? Найти это наибольшее значение.

4. Пусть $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$. Не решая уравнения, выразить через его коэффициенты величину

$$\frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}.$$

5. Решить уравнение

$$\lg 8+4\lg 2=\lg 3-\lg 12+\lg 2^{3x^2-20x+2}.$$

Вариант 4

(специальность — экономическая кибернетика)

1. Прямой круговой конус рассечен на две части, равные по объему, плоскостью, проходящей через центр вписанного шара перпендикулярно оси. Вычислить угол между образующей и плоскостью основания.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2},\\ xy-x-y=0.\end{cases}$$

3. При каких значениях $x$ верно равенство

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1},$$

где $0<\varphi<45^\circ$?

4. Решить уравнение

$$\lg(x-9)+2\lg\sqrt{2x-1}=2.$$

5. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\cos 13x=\cos 5x+\sin 5x.$$

*Я. Бродский, А. Слипенко*

# Московский институт управления им. С. Орджоникидзе

В практической деятельности человеку постоянно приходится решать разнообразные задачи, связанные с принятием решений, и каждый раз человек старается из всех возможных решений выбрать оптимальное, наиболее выгодное, часто опираясь на здравый смысл и имеющийся у него опыт. Анализ хозяйственных ситуаций и принятие решений составляет основное содержание труда руководителей производства всех рангов, и увеличение масштабов производства, его усложнение приводит к повышению ответственности за принимаемые решения. Этим объясняется необходимость создания научных методов оценки принимаемых решений и подготовки кадров организаторов производства на всех уровнях.

В последние десятилетия бурно развивается новая область прикладной математики — математическая экономика. Потребность в специалистах по применению ЭВМ и экономико-математических методов в управлении социалистической экономикой растет из года в год. Первым в нашей стране высшим учебным заведением, специализированным на подготовке управленческих кадров для различных отраслей народного хозяйства, является Московский институт управления им. С. Орджоникидзе. Мы расскажем об одном из факультетов этого института — факультете экономической кибернетики (ФЭК).

Формирование кибернетики относят к сороковым годам нашего столетия. Молод и факультет экономической кибернетики МИУ, он организован в 1969 году. В настоящее время ФЭК является ведущим факультетом института, на нем обучается 600 студентов. Будущие специалисты изучают экономическую кибернетику, научные основы управления производством, автоматизированные системы управления, теорию систем, теорию информации, математическое программирование и теорию игр, исследование операций, традиционные экономические дисциплины, основы программирования на ЭВМ. Вычислительный центр института оснащен современными ЭВМ второго и третьего поколения.

На факультете активно функционирует студенческое научное общество, научные кружки, студенческие технико-экономические бюро, работая в которых, студенты совместно с преподавателями участвуют в создании более совершенных систем управления предприятиями и отраслями народного хозяйства, разрабатывают математические модели производства, потребления и экологии. Регулярно проводятся студенческие научные конференции.

Ниже приводятся варианты вступительного письменного экзамена по математике в МИУ в 1975 году.

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике $ABC$ гипотенуза $AB = a$, $\angle A = \alpha$. Найти радиус окружности, касающейся катета $AC$, гипотенузы $AB$ и окружности, описанной около треугольника $ABC$.

2. Решить уравнение

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6.$$

3. Решить неравенство ($a > 1$)

$$\log_a^2 (x^{\sqrt{x}}) > \log_a (a^{4x}\cdot x^{3x}).$$

4. Решить уравнение

$$(\sin 2x+3)\sin^4 x-(\sin 2x+3)\sin^2 x+1=0.$$

5. Найти отношение двух чисел, если отношение их среднего геометрического к среднему арифметическому равно $^3/_5$.

Вариант 2

1. Внутри угла $\alpha$ взята точка $M$. Ее проекции $P$ и $Q$ на стороны угла удалены от вершины на расстояния $OP = p$ и $OQ = q$. Найти $MP$ и $MQ$.

2. Решить уравнение

$$\log_x (125x)\cdot\log_{25}^2 x = 1.$$

3. Решить неравенство

$$|x^2-|x|+3| < 5.$$

4. Решить уравнение

$$\sec x = 4\sin x + 6\cos x.$$

5. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, то

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leqslant \sqrt[4]{ab}.$$

*В. Машурцев, И. Шарыгин*

# Московский институт электронного машиностроения

Подробно о Московском институте электронного машиностроения мы рассказывали в «Кванте» № 7 за 1973 год. В этом номере мы приводим варианты вступительного письменного экзамена по математике в МИЭМ в 1975 году.

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$3^{x\lg 5-1}-\frac{2}{3}=|5^{x\lg 3+1}-24|.$$

2. Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии с положительными членами равно 13,5, а сумма четвертого и пятого членов равна 7,5. Найти эту прогрессию. Определить также наименьшее возможное значение указанной суммы для всех арифметических прогрессий с положительными членами, у которых произведение третьего и шестого членов равно 13,5.

3. В правильной четырехугольной пирамиде, у которой высота $H$ составляет с боковым ребром угол $\alpha$, через диагональ основания проведена плоскость под углом $\beta$ к плоскости основания. Определить площадь сечения.

4. Решить уравнение

$$\frac{a\sin x-2}{a-2\cos x}=\frac{a\cos x-2}{a-2\sin x}$$

и определить число его корней на отрезке $[20\pi,\ 29\pi]$.

5. Решить систему

$$\begin{cases} x-y=10a, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{a^2-25} \end{cases}$$

и доказать, что при любом целом $a \neq \pm 5$, $a \neq 0$ система имеет два решения $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ таких, что произведение $x_1x_2y_1y_2$ является целым кратным 900.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\log_3 (1-x) < \log_{\frac{1}{3}} (x+2).$$

2. Угол при вершине осевого сечения конуса равен $2\alpha$. В каком отношении делится объем конуса плоскостью, проведенной через окружность касания вписанного в этот конус шара с боковой поверхностью конуса?

3. Число 150 разделили с остатком на некоторое целое положительное число. Затем к делителю прибавили 2 и разделили 151 с остатком на новый делитель. Оказалось, что второе частное на 5 меньше первого. Чему равен первоначальный делитель?

4. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{2\sin x+1}{-\cos x-2}}=\sqrt{\frac{2\cos x+1}{-\sin x-2}}.$$

5. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a+3}-\dfrac{y}{a+2}+1=0, \\ \dfrac{y}{x}-\dfrac{2}{y-2}=1 \end{cases}$$

($a > 0$) и доказать, что если $a$ — целое число, то для каждого из решений $(x, y)$ данной системы число $1+xy$ является квадратом целого числа. Верно ли обратное утверждение?

*В. Тонян*

# Белорусский институт инженеров железнодорожного транспорта

Белорусский институт инженеров железнодорожного транспорта располагает всеми условиями для подготовки высококвалифицированных инженеров путей сообщения и строительства. В институте 97 лабораторий и кабинетов, оснащенных современным оборудованием, вычислительный центр с современными электронными вычислительными машинами, учебная и научно-техническая библиотека с фондом около 500 тыс. книг. Институт находится в Гомеле — одном из красивейших городов Белоруссии.

В институте имеется пять факультетов дневного обучения: механический факультет со специальностями «тепловозы и тепловозное хозяйство» (проектирование, эксплуатация и ремонт тепловозов и сооружений локомотивного хозяйства), «вагоностроение и вагонное хозяйство» (проектирование, постройка и эксплуатация вагонов и сооружений вагонного хозяйства); электротехнический факультет со специальностями «автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте» (проектирование, сооружение и эксплуатация устройств автоматики и телемеханики), «системы передачи информации» (проектирование, сооружение и эксплуатация устройств связи и систем передачи информации на железнодорожном транспорте); эксплуатационный факультет со специальностью «эксплуатация железных дорог» (организация движения поездов, проектирование станций и узлов, коммерческая и грузовая работа); строительный факультет со специальностью «строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство» (изыскания, проектирование, постройка и содержание железнодорожного пути и сооружений), факультет промышленного и гражданского строительства со специальностью «проектирование и строительство промышленных и гражданских зданий и сооружений».

Вечерний факультет готовит инженеров по специальностям: «тепловозы и тепловозное хозяйство», «вагоностроение и вагонное хозяйство», «автоматика и телемеханика на железнодорожном транспорте», «промышленное и гражданское строительство»

Заочный факультет готовит инженеров по специальностям: «тепловозы и тепловозное хозяйство», «автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте», «вагоностроение и вагонное хозяйство», «эксплуатация железных дорог», «строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство», «экономика и организация железнодорожного транспорта», «промышленное и гражданское строительство».

Срок обучения в институте: на дневных факультетах — 5 лет, на вечернем и заочном — 6 лет.

Окончившие институт получают квалификацию инженеров соответствующей специальности и работают на предприятиях железнодорожного транспорта, строительства, в проектных и научно-исследовательских организациях.

При институте работает подготовительное отделение. С 1 июля функционируют 4-недельные подготовительные курсы.

Ниже приведены варианты письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в БелИИЖТе в 1975 году.

## Математика

Вариант 1

1. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Две смежные боковые грани перпендикулярны к основанию а две другие образуют углы $\alpha$ и $\beta$ Высота пирамиды $h$. Определить площадь боковой поверхности.

2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{x+y}=2^{y-x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x}=y^4-5. \end{cases}$$

4. Упростить выражение

$$\frac{4x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4-1}.$$

Вариант 2

1. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания $d$, угол между диагоналями основания $\alpha$, а угол, образуемый диагональной плоскостью, проведенной через большую сторону основания, с плоскостью основания, $\beta$ Определить объем параллелепипеда

2 Решить уравнение

$$\log_2\left(9^{x-1}+7\right)=2+\log_2\left(3^{x-1}+1\right).$$

3. Решить уравнение

$$\sin 2x\sin 3x+\cos 5x=0.$$

4. Упростить выражение $(a>0)$

$$\frac{a^3-a-2b-\dfrac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a^2}}\right)\cdot\left(a+\sqrt{a+b}\right)}:$$

$$:\left(\frac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right).$$

Вариант 3

1. В шар, объем которого равен $V$, вписан конус. Угол, составленный двумя образующими конуса, проведенными к концам одного и того же диаметра основания конуса, равен $\alpha$. Определить объем конуса.

2. Решить уравнение

$$\sin 2x + 3\cos 2x = 1.$$

3. Упростить выражение

$$\left\{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} + (a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1} + \left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} - (a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}\right\} : \left\{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} + (a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1} - \left[(a+b)^{-\frac{1}{2}} - (a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}\right\}.$$

4. Решить уравнение

$$\log_2^2 (x-1)^2 - \log_{0,5} (x-1) = 5.$$

Вариант 4

1. В цилиндре параллельно его оси на расстоянии $a$ от нее проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу $\alpha$. Площадь сечения равна $S$. Определить объем цилиндра.

2. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x = \sin 3x.$$

3. Решить уравнение

$$2 \log_x 3 \cdot \log_{3x} 3 = \log_{9\sqrt{x}} 3.$$

4. Упростить выражение

$$\left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) : (a-b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

### Физика

В каждый экзаменационный билет по физике, кроме задачи, входило два вопроса по теории. Задача подбиралась так, чтобы для ее решения необходимо было применить знания из разделов, не охваченных этими двумя вопросами.

1. Небольшой шарик массой $m$ брошен вертикально вниз с высоты $H$. При падении он уходит в песок на глубину $h$. Определить среднюю силу сопротивления грунта, если скорость бросания $v$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Грузик, подвешенный на невесомой и нерастяжимой нити, вращается в горизонтальной плоскости так, что расстояние от точки подвеса до плоскости, в которой происходит вращение, равно $h$. Найти частоту вращения грузика.

3. Какую работу необходимо произвести, чтобы телеграфный столб массой 200 *кг*, к вершине которого прикреплена крестовина массой 30 *кг*, перевести из горизонтального положения в вертикальное? Длина столба 10 *м*.

4. Кусок стекла падает в воде с ускорением 5,8 *м/сек*². Найти плотность стекла, если вода пресная. Сопротивлением воды пренебречь.

5. В ампуле при 0 °C находится азот под давлением $10^{-6}$ *мм рт. ст.* Сколько молекул газа содержится в 1 *см*³ при таком давлении?

6. Электровоз движется со скоростью 54 *км/час* и развивает среднюю силу тяги 68 600 *н*. Определить величину потребляемого тока, если напряжение в линии 1500 *в*, а к. п. д. двигателя 92%.

7. Имеется 6 элементов с э. д. с. по 2 *в* и внутренним сопротивлением по 3 *ом* каждый. Внешнее сопротивление цепи 6 *ом*. Определить мощность, которая выделяется во внешней цепи, при последовательном и при параллельном соединениях элементов.

8. Определить среднее значение э. д. с. индукции, индуцируемой в кольце, если кольцо, помещенное перпендикулярно к магнитному полю, повернуть на угол 90° за $10^{-1}$ *сек*. Радиус кольца 5 *см*. Индукция магнитного поля 1 *тл*.

9. Изображение предмета, удаленного от тонкой собирающей линзы на расстояние 0,4 *м*, больше предмета в 5 раз. Определить возможные значения оптической силы линзы, если предмет плоский и установлен перпендикулярно к главной оптической оси линзы.

10. Красная граница фотоэффекта для цинка составляет 0,37 *мкм*. Какова длина волны света, облучающего цинк, если фотоэффект был прекращен при задерживающем потенциале 0,2 *в*?

*Н. Савченко, Л. Савченко*

## Донецкий политехнический институт

Донецкий ордена Трудового Красного Знамени политехнический институт — старейшее высшее учебное заведение Донбасса. Организованный как горный техникум в 1921 году при поддержке Артема (Сергеева), в 1926 году он был преобразован в горный, а в 1935 году — в индустриальный институт. С 1959 года институт становится политехническим.

Сейчас в институте имеются следующие стационарные факультеты: горный, горно-электромеханический, геолого-маркшейдерский, металлургический, механический, химико-технологический, экономический, энергетический, вычислительной техники и автоматизированных систем управления. В Горловском филиале находятся автомобильный и автодорожный факультеты.

Институт имеет вечерние и заочные факультеты, а также филиалы в Горловке, Красноармейске и Торезе.

На всех факультетах студенты получают физико-математическую подготовку в объеме программ инженерно-технических и инженерно-экономических вузов.

На факультете вычислительной техники и АСУ ведется подготовка и специалистов по прикладной математике с присвоением квалификации «инженер-математик». Большая часть изучаемых студентами этой специальности дисциплин — математические и «околомашинные»: математический анализ, общая и линейная алгебра, численные методы, программирование на ЭВМ и алгоритмические языки, дифференциальные уравнения и математическая физика, теория графов и комбинаторика, функциональный анализ, теория вероятностей и математическая статистика, теория случайных процессов и др.

Выпускники этой специальности направляются на работу в вычислительные центры, научно-исследовательские институты, проектно-конструкторские бюро.

Ниже помещены примеры вариантов письменного экзамена по математике, билеты устного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в Донецком политехническом институте в 1975 году. Звездочкой отмечены более трудные варианты.

## Математика

### Письменный экзамен

Вариант 1*

1. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу и встретились через $2\,{}^2/_9$ *час*. За какое время пройдет все расстояние каждый из них, если первый из них придет на то место, из которого вышел второй, на 1 *час* позже, чем второй придет на то место из которого вышел первый?

2. Угол при вершине осевого сечения конуса равен $\varphi$, а сумма длин его высоты и образующей равна $a$. Найти объем конуса.

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1.$$

4. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 2x=1.$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}}=2,\\ x+y=12.\end{cases}$$

Вариант 2*

1. Поезд за некоторое время должен был пройти расстояние 250 *км*. Но через 3 *час* после начала движения его задержали на 20 *мин*, и для того чтобы прибыть вовремя к месту назначения, он увеличил скорость на 2 *км/час*. Найти скорость поезда по расписанию.

2. В конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол $\alpha$, вписан шар. Найти отношение объема шара к объему конуса.

3. Решить уравнение

$$\lg (x-5)^2+\lg (x+6)^2=2.$$

4. Доказать тождество

$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^3\dfrac{\alpha}{2}}=-\frac{1}{4}\sin^2\alpha.$$

5. Решить неравенство

$$\frac{5-2x}{7x-22}>1.$$

Вариант 3

1. При совместной работе двух подъемных кранов разной мощности самоходная баржа была загружена за 4 *час* 12 *мин*. Сколько требуется времени, чтобы ту же баржу загрузить каждым краном в отдельности, если более мощным краном ее можно загрузить на 8 *час* быстрее, чем менее мощным?

2. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны нижнего и верхнего оснований соответственно равны $a$ и $b$, двугранный угол при нижнем основании $\alpha$. Определить объем пирамиды.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2\operatorname{tg} x.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{10}{x+3}<4-x.$$

5. Решить уравнение

$$8\sqrt{(0,125)^{4-\frac{x}{3}}}=2^{\sqrt{x-6}}.$$

### Устный экзамен

Билет 1

1. Докажите теорему о трех перпендикулярах.

2. Выведите формулу общего члена геометрической прогрессии и суммы ее членов.

3. Докажите, что $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqslant 2$, если $a$ и $b$ имеют одинаковые знаки.

4. Постройте график функции

$$y=|\operatorname{ctg} x|.$$

Билет 2

1. Параллелепипед; свойства его граней и диагоналей, соотношение между диагональю прямоугольного параллелепипеда и тремя измерениями.

2. Перечислите и укажите свойства десятичных логарифмов.

3. При каких значениях $x$ трехчлен $y = 3x + 5 - 2x^2$

а) принимает наибольшее значение;
б) обращается в нуль;
в) положителен?

4. Решить уравнение

$$\cos x = \cos 2x \cdot \cos 3x.$$

Билет 3

1. Докажите теорему о свойствах средней линии треугольника.

2. Выведите формулу для $\sin(\alpha \pm \beta)$.

3. Решить неравенство

$$\frac{x}{3} - \frac{4}{x} > \frac{4}{3}.$$

4. Вычислить

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x},$$

если $\sin x \quad \cos x = 0{,}4$.

## Физика

1. Освещенную щель высотой $h=5$ *см* проектируют с помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=10$ *см* на экран, находящийся от линзы на расстоянии $f=12$ *см*. Найти размер изображения щели на экране.

2. Какой наибольшей мощности электропечь можно установить в конце двухпроводной линии, имеющей сопротивление $R=10$ *ом*, если источник тока развивает мощность не более $P=6$ *квт* при напряжении $U=1000$ *в*?

3. В электрическом чайнике мощностью 800 *вт* можно вскипятить $V=1{,}5$ *л* воды, имеющей температуру $t_1=20$°C, за время $t=20$ *мин*. Найти к. п. д. чайника.

*С. Жеданов З. Филер*

# Марийский политехнический институт

## им. М. Горького

**Письменный экзамен по математике, 1975 год**

Вариант 1

1. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом $\alpha$. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $\varphi$. Определить объем пирамиды, если радиус круга, вписанного в ромб, равен $r$.

2. Решить уравнение

$$\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1).$$

3. Решить уравнение

$$\sin 3x + \sin 2x = \sin x.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1} > 0.$$

5. Упростить выражение

$$2\left(x^2 + \sqrt{x^4 - 1}\right) \times \\ \times \left[\sqrt[3]{(x^2+1)\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} + \right. \\ \left. + \sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}\right]^{-2}.$$

Вариант 2

1. Образующие конуса касаются шара, вписанного в конус, по параллели в 60°. Найти объем конуса, если радиус шара равен 2.

2. Решить уравнение

$$4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} = 0.$$

3. Решить уравнение

$$\cos 4x = -2\cos^2 x.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{\lg(35 - x^3)}{\lg(5 - x)} > 0.$$

5. Упростить выражение

$$\left[(a-b)\cdot\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + a - b\right] \times \\ \times \left[(a-b)\cdot\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - 1\right)\right].$$

*Г. Мелетьева*

# Ярославский политехнический институт

Подробно о Ярославском политехническом институте рассказывалось в «Кванте» № 7 за 1974 г. В 1975 году на инженерно-строительном факультете впервые проводился прием по новой специальности «гидромелиорация». Приводим варианты вступительного экзамена по математике и задачи из билетов экзамена по физике в ЯПИ в 1975 году.

### Математика

Вариант 1

1. В цилиндр вписана правильная четырехугольная призма. Диагональ призмы образует с боковой гранью угол $\alpha$, высота призмы равна $h$. Найти боковую поверхность цилиндра.

2. Решить уравнение

$$|1+\log_{\frac{1}{3}}x| = 3+|2-\log_{\frac{1}{3}}x|.$$

3. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-3x}-2{,}5}+\frac{1}{\sqrt{\log_3 x-\log_2 x}}.$$

4. Решить уравнение

$$\sin^2 2x-4\cos^4 x=\sin 4x.$$

Вариант 2

1. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с радиусом описанной окружности, равным $R$. Определить площадь сечения, образованного диагоналями наибольшей и наименьшей боковых граней и стороной основания, если диагонали наклонены к основанию под углами $\alpha$ и $3\alpha$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{7}{\sqrt{xy}}+1,\\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78.\end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\log_4(2x^3+x+1)-\log_2(2x-1)\leqslant -\operatorname{tg}\frac{7}{4}\pi.$$

4. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\sin 2x}=\sqrt{2}\cos 3x,$$

если $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$.

### Физика

1. С поверхности длинной ровной горы, наклоненной под углом $\alpha=30°$ к горизонту, брошен камень в горизонтальном направлении со скоростью $v_0=20$ *м/сек*. Определить время $t$ полета камня. Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Поверхностная плотность заряда равномерно заряженной бесконечной плоскости, расположенной вертикально, $\sigma=1{,}73\cdot10^{-4}$ *к/м²*. На невесомой нити в поле этой плоскости висит шарик массой $m=1$ *г*. Заряд шарика $q=3$ ед. заряда СГСЭ. Какой угол $\alpha$ образует нить с плоскостью? Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ *ф/м*.

3. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}02$ *тл* находится проводник длиной $l=10$ *см*, расположенный перпендикулярно к линиям магнитной индукции. По проводнику течет ток $I=2$ *а*, величина которого поддерживается постоянной. Под действием сил поля проводник переместился на расстояние $s=5$ *см*. Найти работу $A$ сил поля.

4. На главной оптической оси выпуклого зеркала с радиусом кривизны $R=72$ *см* расположена светящаяся точка. Расстояние от точки до зеркала $d=150$ *см*. Найти расстояние $f$ от изображения этой точки до зеркала. Построить изображение.

*В. Колпаков, Н. Рахманова*

## Московский государственный педагогический институт

## им. В. И. Ленина

О Московском ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственном педагогическом институте им. В. И. Ленина подробно рассказывалось в «Кванте» № 7 за 1973 и 1974 годы.

Здесь мы публикуем образцы вариантов письменного экзамена по математике и задач устного экзамена по физике в 1975 году на физическом факультете МГПИ им. В. И. Ленина.

### Математика

Вариант 1

1. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол $\alpha$ и равна 1. Определить объем усеченного конуса.

2. Решить уравнение

$$\cos 2x-3\cos x=4\cos^2\frac{x}{2}.$$

3. Решить систему уравнений ($a>0$, $b>0$)

$$\begin{cases}\log_a x+\log_a y=2,\\ \log_b x-\log_b y=4.\end{cases}$$

4. Решить неравенство

$$0<\frac{x}{3-x}<1.$$

Вариант 2

1. В основании прямой четырехугольной призмы лежит равнобочная трапеция,

у которой боковая сторона и равна меньшей стороне основания, а острый угол равен $\alpha$. Найти объем призмы, если высота ее равна диагонали основания

2. Решить уравнение

$$\log_2(5\cdot 2^{x+1}-1)=2x+4.$$

3. Решить уравнение

$$1+\operatorname{tg} 2x=\frac{1-\sin 2x}{\cos^2 2x}.$$

4. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{1+4x}{x}}<1.$$

## физика.

Устный экзамен по физике для поступающих на физический факультет МГПИ им. В. И. Ленина проводится в точном соответствии с программой по физике.

Экзаменационный билет состоит из двух вопросов и одной задачи. Каждый из билетов составлен так, чтобы охватить проверкой возможно большее число разделов физики. Для примера приводим текст одного из билетов:

1. Понятие об абсолютном нуле. Абсолютная температурная шкала. Объединенный закон Бойля — Мариотта — Гей-Люссака.

2. Световой поток. Сила света. Освещенность.

3. Задача. Медный шар с внутренней полостью весит в воздухе 2,64 *н*, в воде — 2,21 *н*. Определить объем внутренней полости шара. Плотность меди принять равной 8,8 *г/см*³.

Предлагаем вашему вниманию еще десять задач, взятых из экзаменационных билетов.

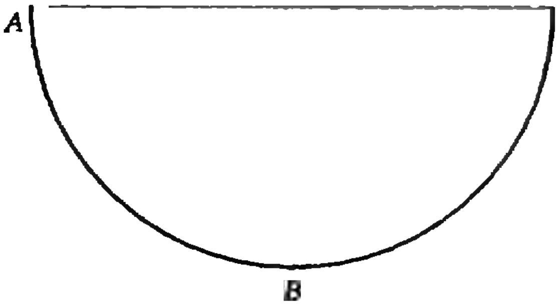
1. На сколько секунд в сутки будут отставать маятниковые часы, поднятые зондом на высоту 400 *км*, если на Земле они ходили правильно ($T_0=1$ *сек*)? Принять радиус Земли равным 6 400 *км*.

2. Медный шар с внутренней полостью весит в воздухе 2,64 *н*, в воде — 2,21 *н*. Определить объем внутренней полости шара. Плотность меди принять равной 8,8 *г/см*³.

3. Плоское тело массой 4 *кг* движется по круговому желобу, расположенному в вертикальной плоскости (см. рисунок). Определить силу давления тела на желоб в точке *B*, если оно отпущено с нулевой скоростью из точки *A*.

4. По наклонной плоскости длиной 18 *м*, образующей с горизонтом угол 30°, скользит тело массой 2 *кг*. Какое количество тепла выделяется при трении тела о плоскость, если начальная скорость тела была равна нулю, а у основания — 6 *м/сек*?

5. В баллоне емкостью 36 *л* находится кислород под давлением 20 *атм* при температуре 20 °C. Какой объем занимал этот газ при нормальных условиях?



6. Найти э. д. с. и внутреннее сопротивление батареи аккумуляторов, если при силе тока 5 *а* потребляемая во внешней цепи мощность равна 12,5 *вт*, а при силе тока 8 *а* она равна 16,8 *вт*.

7. Какой силы ток потребляет электрический кипятильник емкостью 8 *л*, если при к. п. д., равном 80%, вода в нем нагревается от 20 °C до 100 °C за 25 *мин*? Напряжение в сети 220 *в*.

8. Какое количество алюминия выделится на катоде за 6 *час* при электролизе $Al_2(SO_4)_3$ при пропускании через электролит тока силой 1,5 *а*? Атомный вес алюминия 27.

9. Приемный контур состоит из катушки с индуктивностью $2\cdot 10^{-6}$ *гн* и из конденсатора с емкостью 1800 *пф*. На какую длину волны рассчитан контур?

10. Экран находится от собирающей линзы на расстоянии 2,45 *м*. Фокусное расстояние линзы 25 *см*. На каком расстоянии от линзы следует расположить предмет, чтобы на экране получить отчетливое изображение?

*Г. Шадрин, Д. Мур*

# Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

Московский областной педагогический институт был основан в 1931 году по инициативе Н. К. Крупской, и в 1958 году ему было присвоено ее имя.

В составе института много факультетов, мы расскажем о математическом и физическом. Оба факультета готовят в основном учителей для работы в средней школе.

Современный учитель должен иметь очень высокий уровень подготовки, и новые учебные программы предусматривают подготовку специалистов весьма высокой квалификации. Значительное место в программах занимают курсы педагогики, психологии, эстетики, а также методики преподавания математики и физики. На всех курсах студенты работают с учениками (в пионерлагерях, кружках). На двух последних курсах в рамках педагогической практики студенты самостоятельно проводят уроки в школах.

На математическом факультете студенты изучают математический анализ, теорию функций действительного переменного, комплексного переменного, высшую алгебру, аналитическую геометрию, другие разделы геометрии, теорию вероятностей, программирование для электронно-вычислительных машин, курс физики, астрономию.

Будущие физики изучают теоретическую механику, другие разделы теоретической физики, электротехнику, акустику, астрономию, а также специальные разделы математики: математический анализ, аналитическую геометрию. На физическом факультете есть отделение физики на иностранном языке; окончившие это отделение могут преподавать физику не только на своем родном, но также и на иностранном языке (английском).

В институте много лабораторий с современным оборудованием· электротехники, радиотехники, молекулярной акустики и др. Имеется лаборатория, в которой студенты занимаются программированием и работой на ЭВМ «БЭСМ-4». В рамках студенческого научного общества (НСО) студенты ведут научные исследования, в той или иной мере самостоятельные. Для тех, кто хорошо проявил себя в этом отношении, имеется аспирантура.

Выпускники института работают учителями средних школ, окончившие аспирантуру преподают также в высшей школе. Выпускники отделения физики на иностранном языке работают за рубежом, в школах развивающихся стран, а также в советских школах с увеличенным объемом преподавания иностранного языка.

При МОПИ имеется подготовительное отделение со сроком обучения 1 год.

Ниже приведены варианты письменного экзамена по математике и задачи из билетов устного экзамена по физике в МОПИ в 1975 году (задачи по математике составил М. Д. Бронфман, по физике — В. В. Никитин).

## Математика

### Математический факультет

Вариант 1

1. В основании параллелепипеда — ромб $ABCD$ с углом 60° при вершине $A$. Перпендикуляр к плоскости основания, восставленный в вершине $A$, проходит через точку пересечения диагоналей другого основания. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол $\alpha$. Сторона основания равна $a$. Определить объем параллелепипеда.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-12xy+13y^2+18x-2y-18=0, \\ x+4\sqrt{xy}+3y=0. \end{cases}$$

3. У подножья горы, по разные стороны от перевала $C$, расположены пункты $A$ и $B$, расстояние между которыми по соединяющей их дороге равно 8 *км*. Перевал считается точкой. Скорость трактора на спуске на 1 *км/час* превосходит скорость его на подъеме. Время, затрачиваемое трактором на переход от $A$ к $B$, равно $t_1$, а время, затрачиваемое на обратный переход от $B$ к $A$, равно $t_2$.

а) Определить скорость трактора на спуске, если известно, что $t_1=5$ *час* [illegible] *мин* 17 *сек*, а $t_2=6$ *час* 56 *мин* 43 *сек*.

б) Полагая, что на переход туда и обратно трактор затрачивает в общей сложности 12 *час*, указать пределы, в которых можно задавать параметр $t_1$ для того, чтобы задача имела решение.

Вариант 2

1. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной $a$. Высота пирамиды проходит через середину высоты треугольника, лежащего в основании. Наибольшая по площади боковая грань наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. Определить объем пирамиды.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+\sqrt{xy}-14y=21, \\ x+12\sqrt{xy}-28y=56. \end{cases}$$

3. Огибая остров, река у пункта $A$ разделяется на два рукава $ACB$ и $ADB$, а у пункта $B$ снова сходится. Скорость течения в обоих рукавах одинакова и равна 3 *км/час*. На обход острова в направлении $ACBDA$ моторная лодка затрачивает время $t_1$, а на обход его в направлении $ADBCA$ — время $t_2$. Один из рукавов на 6 *км* длиннее другого.

а) Определить скорость лодки в стоячей воде, полагая $t_1=7$ *час*, $t_2=7$ *час* 10 *мин*.

б) Считая $t_2-t_1=10$ *мин*, указать область возможных значений параметра $t_1$, при которых задача может иметь решение.

### Физический факультет

Вариант 3

1 Наибольший угол между двумя боковыми ребрами правильной шестиугольной пирамиды равен $\alpha$, а сторона основания равна $a$. Определить объем пирамиды.

2. Дано уравнение

$$x^4-31x^2+184=0.$$

а) Решить это уравнение.

б) Вычислить с точностью 0,01 с недостатком и с избытком значение выражения $\alpha_1-14\alpha_2$, где $\alpha_1$ — наименьший, а $\alpha_2$ — наибольший из положительных корней уравнения.

3. Путь, по которому проехал мотоциклист, состоит из трех последовательных участков. При этом средняя скорость на всем пути равна скорости на втором участке, скорость на первом участке на 2 *км/час*

меньше средней скорости, а скорость на третьем участке на 15 *км/час* меньше удвоенной средней скорости. Протяженность первого участка в шесть раз больше третьего. Определить среднюю скорость мотоциклиста.

Вариант 4

1. Угол между боковым ребром и стороной основания правильной четырехугольной пирамиды равен $\alpha$, а боковое ребро равно $a$. Определить объем пирамиды.

2. Дано уравнение

$$x^4 - 60x^2 + 899 = 0.$$

а) Решить это уравнение.

б) Вычислить с точностью до 0,01 с недостатком и с избытком значение выражения $\alpha_1 + 8\alpha_2$, где $\alpha_1$ — наименьший положительный, $\alpha_2$ — наибольший по абсолютной величине отрицательный корень этого уравнения.

3. Путь экспресса состоит из трех последовательных участков. Весь начальный участок и часть среднего экспресс прошел со скоростью, которая оказалась на 30 *км/час* больше средней скорости на всем пути. Затем, уменьшив скорость на 54 *км/час*, экспресс прошел, не меняя скорости, до конца пути. Средняя скорость на среднем участке равна средней скорости на всем пути. Точка изменения скорости делит средний участок в отношении 5:4. Определить скорость на начальном участке.

### Физика

1. Найти начальную и конечную скорости камня, брошенного горизонтально с высоты 20 *м*, если по горизонтали он пролетел 15 *м*. Ускорение свободного падения принять равным 10 *м/сек*$^2$.

2. На каком расстоянии от центра диска, вращающегося с частотой 120 *об/мин*, нужно поместить тело, чтобы оно не соскальзывало с него? Коэффициент трения между диском и телом равен 0,2.

3. Водяной пар при температуре 100 °С впускают в калориметр, содержащий 200 *г* воды и 50 *г* льда при 0 °С. Сколько воды будет в калориметре, когда температура станет равной 50 °С? Удельная теплоемкость воды 1 *кал/(г·град)*; удельная теплота плавления льда 80 *кал/г*; удельная теплота парообразования воды 539 *кал/г*.

4. Какая температура установится в калориметре, содержащем 200 *г* воды при температуре 20 °С, если в него положить 5 *г* льда при температуре — 20 °С? Теплоемкость калориметра 20 *кал/град*; удельная теплоемкость льда 0,5 *кал/(г·град)*, воды 1 *кал/(г·град)*; удельная теплота плавления льда 80 *кал/г*.

5. Газ находится в цилиндре под невесомым поршнем, площадь которого равна 100 *см*$^2$. При температуре 7 °С на поршень положили гирю массой 10 *кг*. При этом поршень несколько опустился. До какой температуры нужно нагреть газ в цилиндре, чтобы поршень оказался на прежней высоте? Атмосферное давление нормальное.

6. Во сколько раз увеличится объем пузырька воздуха при его подъеме со дна водоема к поверхности? Глубина водоема 50 *м*, температура на дне 4° С, у поверхности 18 °С, атмосферное давление нормальное.

7. При подключении к источнику амперметра с сопротивлением 3 *ом* амперметр показывает 3 *а*, а при подключении амперметра с сопротивлением 1 *ом* амперметр показывает 6 *а*. Каковы э. д. с. и внутреннее сопротивление источника тока?

8. Два сопротивления при последовательном включении в сеть с напряжением 100 *в* потребляют из сети мощность 40 *вт*. При параллельном включении в ту же сеть они потребляют суммарную мощность 250 *вт*. Найти величины этих сопротивлений.

9. Расстояние между светящимся предметом и экраном равно 90 *см*. На каком расстоянии от предмета нужно поместить линзу с фокусным расстоянием 15 *см*, чтобы получить на экране четкое изображение предмета?

10. Собирающая линза дает действительное изображение с увеличением в 2 раза. Определить фокусное расстояние линзы, если расстояние между линзой и изображением равно 24 *см*.

*О. Романов*

---

## Задачи наших читателей

1. Дано уравнение

$$x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+\ldots+(x+n)(x+n+1)=1000x+13.$$

Имеет ли это уравнение целочисленный корень хотя бы при одном натуральном $n$?

2. Что больше: $5^{16}$ или $3^{23}$?

3. Какое двузначное число равно квадрату суммы его цифр?

*Н. Антонович*
(г. Новосибирск)

4. Два игрока играют в крестики-нолики в кубе $3\times3\times3$ (состоящем из 27 кубиков $1\times1\times1$). Одним ходом каждый «зачеркивает» один кубик. Цель игры — первым поставить 3 своих значка на одной прямой. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер?

*А. Клепицын*
(г. Ульяновск)

5. В множестве треугольников с заданным периметром $p$ найти треугольник, произведение длин биссектрис которого максимально.

*А. Аляев*
(Пензенская обл.)

# Московская городская олимпиада школьников

**«Поздравляя вас с победой, хочу предупредить, что никто так не сможет определить, насколько вы заслужили награду, как вы сами. Главное, из чего должна исходить оценка, — это не азарт, не удовлетворенное тщеславие, а то, успели ли вы полюбить математику. Успехи придут. Если уж вы взялись всерьез за математику, то у вас не раз еще будут возможности для творческого труда и раскрытия своих способностей. Но никогда не забывайте, что прежде всего должны быть вы для математики, а не она для вас...»**

*Из выступления председателя жюри олимпиады по математике доктора физико-математических наук профессора А. В. Архангельского.*

Мартовским воскресным утром к зданиям Московского университета, Педагогического института им. В. И. Ленина, Института инженеров железнодорожного транспорта и Физико-технического института спешили ребята. Это — участники Московской городской олимпиады, третьего этапа Всесоюзной олимпиады школьников по математике и физике.

В предыдущем, районном этапе участвовало свыше 9 000 юных математиков и более 3 500 юных физиков. В городской олимпиаде по математике приняли участие почти 2 000 школьников, а по физике — около 1 400. Теперь немного о победителях среди них.

Около 150 математиков и почти 80 физиков были награждены различными дипломами и премиями, а некоторые из них получили право дальнейшего участия во Всесоюзной физико-математической олимпиаде.

Юрий Буров

Петр Чистяков

Илья Гаврилов

Наталья Рунова

Сергей Яковенко

В состав команды города Москвы для выступления на заключительном (пятом) этапе Всесоюзной физико-математической олимпиады вошли

**по математике:**

*Степан Оревков* (с. ш. 57, 8 кл.),
*Марк Спиваковский* (с. ш. 57, 9 кл.),
*Юрий Буров* (с. ш. 2, 10 кл.);

**по физике:**

*Сергей Рылов* (с. ш. 2, 8 кл.),
*Петр Чистяков* (с. ш. 2, 9 кл.),
*Сергей Яковенко* (с. ш. 179, 10 кл.).

В состав команды города Москвы для участия в республиканском (четвертом) этапе олимпиады вошли

**по математике:**

*Виктор Гальперин* (с. ш. 57, 8 кл.),
*Юрий Барышников* (с. ш. 91, 9 кл.),
*Юрий Буров* (с. ш. 2, 10 кл.);

**по физике:**

*Илья Гаврилов* (с. ш. 19, 8 кл.),
*Наталья Рунова* (с. ш. 179, 9 кл.),
*Александр Семенов* (с. ш. 179, 10 кл.).

О том, какие задачи были на Московской физико-математической олимпиаде, вы можете судить по «Задачнику «Кванта», опубликованному в предыдущем номере нашего журнала.

*В. Березин, В. Тихомирова*
*Фото Д. Германа*

**В этом номере мы помещаем рецензии на две книги, вышедшие в издательстве «Просвещение» в 1975 году, посвященные программированию на ЭВМ.**

# «Математические машины»

Историю технических изобретений каждый из нас знает неплохо: паровую машину изобрел Уатт, первый паровоз был построен Ползуновым, идея телефона принадлежит Беллу, первый фонограф (прообраз современного электрофона) построил Эдисон и т. д. и т. п. Но славе изобретателей всех времен не уступит фантастическое изобретение нашего века — электронная вычислительная машина (ЭВМ). А вот о ней мы подчас знаем прискорбно мало.

Любая машина призвана расширять границы возможностей отдельного человека, коллектива, иногда — страны или даже группы стран (если речь идет о крупной электростанции или ретрансляционном спутнике.

Вычислительные машины расширили наиболее деликатную и важную сферу человеческой деятельности — интеллектуальную. Сейчас вычислительные машины умеют решать уравнения и системы уравнений, проводить бухгалтерские и экономические расчеты в масштабе семьи (есть и такие мини-ЭВМ), завода, страны и сообщества стран, обрабатывать результаты переписей в отдельных странах и во всем мире, рассчитывать химическую формулу и пространственную структуру молекулы нового химического соединения, из миллионов фотографий процессов, происходящих в пузырьковой камере, выбирать тот снимок, на котором запечатлен след нейтрино, расшифровывать письмена давно исчезнувших народов, по текстам «Илиады» и «Одиссеи» устанавливать подлинность авторства Гомера, рассчитывать траектории искусственных космических объектов на много месяцев вперед, помогать космонавту производить маневры вблизи поверхности Луны перед посадкой, играть в шахматы и шашки, обыгрывать профессионалов-картежников в игорных домах США, помогать футурологам строить модели будущего для отдельных стран и всего человечества, рисовать чертежи и разрабатывать проектные сметы по наметкам архитекторов, составлять расписание занятий в институтах и университетах, вести индивидуальные практические занятия с каждым студентом университета по нескольким предметам, находя ошибки в решении заданий, задавая наводящие вопросы и, в зависимости от результатов, выбирая индивидуальную программу обучения, составлять набор для печати книг в типографиях по собственному макету, руководить плавкой стали в современных электропечах.

Список этот, разумеется, далеко не полон, но и из этого беглого и поверхностного перечня видно, какой универсальностью и «понятливостью» обладает ЭВМ.

Жаль, что наши школьники, студенты (прямо не специализирующиеся в этой области) и преподаватели так мало пока знают о том, как работает ЭВМ, как она устроена, как работает с ней человек.

Этот пробел в знаниях вызван, конечно, почти полным отсутствием достаточно популярной литературы на подобные темы, не говоря уже об учебных пособиях или (а почему бы и нет?) стабильных учебниках. Поэтому следует приветствовать инициативу издательства «Просвещение», выпустившего в свет в 1975 году книгу «Математические машины». Что же найдет читатель в этой интересной книге*)?

После краткого описания ЭВМ дискретного действия (цифровых ЭВМ) и ЭВМ непрерывного действия (аналоговых ЭВМ) читатель прочтет, пожалуй, наиболее удачную (и уже заведомо одну из самых интересных) главу книги, посвященную истории вычислительных инструментов и вычислительной техники — от абака, соробана и счетов через логарифмические таблицы Джона Непера, вычислительные машины Леонардо да Винчи, Блеза Паскаля и Готфрида Лейбница до суммирующей машины Уильяма С. Берроуза, аналитической машины Чарльза Бэббеджа и, наконец, современной ЭВМ.

Всего в книге восемь глав, три из которых посвящены устройству ЭВМ — ее «архитектуре», принципам физической реализации памяти (внутренней и внешней), устройствам ввода и вывода и, наконец, электронной технологии современных и будущих «поколений» ЭВМ («машины первого, второго, третьего поколения» — так принято называть основные этапы развития электронно-вычислительной техники; сейчас конструируются и строятся первые представители четвертого поколения ЭВМ).

---

*) Р. С. Гутер, Ю. Л. Полунов. Математические машины. М., «Просвещение», 1975.

Еще две главы («Элементы программирования» и «Алгоритмические языки») могут служить неплохим введением в программирование. Разумеется, прочтя эти главы, читатель не научится программировать, но он сможет уверенно сказать, что первое знакомство состоялось и теперь можно приступить к более глубокому изучению предмета.

Наконец, последняя глава книги посвящена применениям ЭВМ (в экономике, инженерных расчетах, медицине). Там же рассказывается об «эвристическом программировании», когда выбор того или иного пути в вычислительном процессе определяется не строгими формульными указаниями, а интуитивными, «содержательными», наводящими соображениями (эти соображения должны быть, конечно, сформулированы и обоснованы).

Авторы в этой главе осветили обширный фактический материал, приведя десятки примеров применения ЭВМ не только в точных и инженерных науках, но и в литературоведении, медицине, музыке, археологии, истории, шахматах и ряде других областей.

Книга «Математические машины» принесет несомненную пользу широкому кругу читателей (вспомним известное высказывание Горация: «Самая лучшая книга — та, которая одновременно учит и развлекает»).

*Э. Белага*

# «АЛГОЛ 60»

Одним из современных и широко известных средств общения человека с ЭВМ является алгоритмический язык АЛГОЛ 60, созданный специально для описания алгоритмов решения задач. На этом языке можно «разговаривать» со многими вычислительными машинами: программист составляет описание алгоритма на АЛГОЛе и передает его машине, она понимает текст, решает задачу и сообщает результат.

Учащимся старших классов, проявляющим интерес к математике и желающим изучить программирование на АЛГОЛе, мы советуем познакомиться с книгой «Алгоритмический язык АЛГОЛ 60»*), изданной в 1975 году. Достоинством книги является то, что читатель, прочитавший только первые четыре параграфа, уже сможет составлять простейшие программы на АЛГОЛе.

В книге подобрано большое число примеров, упражнений и задач. При подготовке задачи к решению на ЭВМ значительное внимание уделяется математической стороне дела. Детально обсуждаются вопросы разработки алгоритмов решения задач, возможности улучшения этих алгоритмов и построения хороших программ. Особенно ярко это показано на примерах обработки таблицы хоккейного чемпионата, упорядочивания массива, разложения числа на простые множители и др. Иногда доказательства тех или иных положений приводятся в тексте, иногда это предлагается сделать самостоятельно — в упражнениях.

Так, например, после разъяснения сути метода поиска элемента массива делением пополам дается следующее упражнение.

Упражнение 135. *Доказать, что если для некоторого целого S число n элементов массива удовлетворяет неравенствам* $2^{s-1} < n \leq 2^s$*, то при выполнении метода поиска элемента делением пополам будет осуществлено не более* $s-1$ *сравнений и, таким образом, можно сказать, что число осуществляемых сравнений не превосходит* $\log_2 n$.

Любознательный школьник сможет найти немало трудных, но интересных задач (упражнений), для решения которых необходима сообразительность и изобретательность. Некоторые задачи ценны не только в смысле содержания, но и с точки зрения оригинальности их программной реализации. Приведем еще некоторые примеры заданий для учащихся.

Упражнение 148. *Гольдбахом было высказано предположение, что каждое четное число, большее или равное 4, представимо в виде суммы двух простых. Это предположение до сих пор не доказано и не опровергнуто. Написать программу проверки этой гипотезы для данного четного числа.*

Задание 19. *Доказать, что любую целочисленную денежную сумму, большую семи рублей, можно выплатить без сдачи трешками и пятерками; написать программу выработки по данному целому числу* $n > 7$ *пары целых неотрицательных чисел* $a$ *и* $b$ *таких, что* $n = 3a + 5b$.

В некоторых задачах сформулированы правила (или дано объяснение) какой-либо игры, например карточной игры «квартеты», «морского боя», «Ханойской башни», и предлагается написать программы разыгрывания партии соответствующей игры.

При вдумчивом чтении книги и выполнении большого числа упражнений школьник может достичь достаточно высокого уровня программирования.

*Л. Кармазина, Н. Меллер*

---

*) С. А. Абрамов, И. Н. Антипов. Алгоритмический язык АЛГОЛ 60. М., «Просвещение», 1975.

# Новые книги

В этом номере журнала мы помещаем краткие аннотации на книги по математике и по физике, вышедшие во II квартале 1976 года, которые представляют интерес для наших читателей.

## Математика

**Издательство «Наука»**

1. Алексеев В. Б. *Теорема Абеля в задачах и решениях.* Объем 10 л., тираж 30 000 экз., цена 33 к.

Из этой книги вы узнаете, как решать алгебраические уравнения 3-й и 4-й степени с одним неизвестным, почему для решения уравнений более высокой степени не существует общих формул (в радикалах). Одна из основных целей этой книги — дать возможность читателю попробовать свои силы в математике. Для этого почти весь излагаемый материал представлен в виде определений, примеров и большого числа задач, снабженных указаниями и решениями.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся серьезной математикой (начиная со школьников старших классов), и не предполагает каких-либо специальных предварительных знаний. Она может быть использована и в работе математического кружка.

2. Любич Ю. И., Шор Л. А. *Кинематический метод в геометрических задачах.* Издание 2-е, исправленное. (Популярные лекции по математике). Объем 3 л., тираж 50 000 экз., цена 10 к.

Оказывается, для решения геометрических задач может быть полезной «теория скоростей» — кинематика. Иногда связи между величинами отрезков, углов и т. п. в геометрических фигурах являются более сложными, чем связи между скоростями изменения этих величин в процессах деформации фигур. Поэтому, решая геометрическую задачу, полезно представить себе, что будет происходить с элементами рассматриваемой фигуры, если некоторые ее точки начнут двигаться; зависимость одних элементов от других может стать наглядно очевидной, и решение задачи буквально бросится в глаза.

В брошюре Любича и Шора на нескольких примерах демонстрируется применение кинематики к задачам элементарной геометрии и приводятся задачи для самостоятельного решения. Предварительно излагаются необходимые сведения из кинематики и векторной алгебры.

Книга рассчитана на учащихся старших классов.

3. Зайцев В. В., Рыжков В. В., Сканави М. И. *Элементарная математика.* Издание 3-е. Объем 36 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 11 к.

Книга содержит систематическое изложение курса элементарной математики и состоит из двух частей: 1) алгебра и элементарные функции и 2) геометрия. Она полностью соответствует программе вступительных экзаменов по математике в высшие учебные заведения. Помимо теоретического материала, в книге помещено большое число задач, из которых многие решены в тексте.

Эта книга может быть полезна учащимся старших классов, готовящимся к конкурсным экзаменам. В частности, ее можно рекомендовать в качестве учебного пособия на подготовительных отделениях вузов.

4. Никифоровский В. А., Фрейман Л. С. *Рождение новой математики.* Объем 12 л., тираж 25 000 экз., цена 80 к.

В книге рассказывается о творчестве четырех выдающихся ученых XVII века — Декарта, Ферма, Торричелли и Роберваля. Эти ученые разрабатывали основы новой математики, они участвовали в создании дифференциального и интегрального исчисления, окончательно оформленного и завершенного позднее Ньютоном и Лейбницем.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся историей математики.

**Издательство «Просвещение»**

5. Кордемский Б. А. *Математика изучает случайности.* Объем 7 л., тираж 120 000 экз., цена 27 к.

В школьных программах нет элементов теории вероятностей. Не очень обширен и выбор доступных школьных книг по этому предмету. Книга Кордемского, по-видимому, пока единственная книга, увлекательно вводящая читателей в теорию вероятностей, помогающая самостоятельно овладеть первоначальными понятиями и методами этой науки, а также простейшим аппаратом математической статистики.

В начальной части книги преобладает свободная форма изложения с привлечением игрового материала; постепенно книга «серьезнеет», но не теряет доступности для школьников.

**Издательство «Вища школа» (Киев)**

6. Яглом И. М. *Проблема тринадцати шаров.* Объем 3 л., тираж 40 000 экз., цена 12 к.

Эта книга состоит из двух глав. Первая глава посвящена задачам о кругах и шарах, в ней формулируется «проблема 13 шаров», с которой связаны имена таких выдающихся ученых, как Д. Грегори и И. Ньютон, и рассказывается об истории ее решения, а вторая глава — задачам о многоугольниках, многогранниках и произвольных фигурах. Задача, тесно связанная с «проблемой 13 шаров», открыла новый большой раздел геометрии, называемой *дискретной* или *комбинаторной* геометрией. Эта геометрия изучает экстремальные геометрические задачи, связанные с отысканием «достаточно хороших» расположений конечного числа точек или фигур.

Основную роль в книге Яглома играют 16 задач, связанных тематически, но математически почти независимых; так что задачи, которые покажутся читателю очень трудными или же малоинтересными, он может смело пропустить. В книге сформулировано также несколько не решенных до сих пор задач; некоторые из них вполне могут служить темой для самостоятельной работы в области комбинаторной геометрии.

Книга доступна школьникам старших классов и может быть полезной в работе математических кружков.

## Физика

### Издательство «Наука»

1. Селицер С. И. *Блиц-вопросы, сборник задач.* Объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 14 к.

Книга представляет собой сборник задач по физике и охватывает весь программный материал школьного курса. В основе задач, представленных в книге, лежат различные явления природы, на которые обычно не обращают внимания.

Книга предназначена для учащихся 8—10 классов средней школы. Она с успехом может быть использована для факультативных занятий, для занятий физических кружков, а также при самостоятельной подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

2. Эскин В. Е. *Мир невидимых великанов.* Объем 8 л., тираж 25 000 экз., цена 27 к.

Производству синтетических полимеров принадлежит сейчас одно из ведущих мест в народном хозяйстве. Исключительно велика роль природных полимеров в функционировании живых организмов. Изучение сложной структуры полимеров составляет предмет физики макромолекул.

В книге понятно и живо рассказывается об особенностях строения и свойствах полимерных молекул, о физических явлениях и методах, используемых для их изучения.

Книга доступна для учащихся старших классов и представляет интерес для широкого круга читателей, впервые знакомящихся с полимерами.

3. Каганов М. И., Лифшиц И. М. *Квазичастицы (идеи и принципы квантовой физики).* Объем 6 л., тираж 50 000 экз., цена 20 к.

Книга, написанная видными физиками-теоретиками, посвящена рассказу о мире разнообразных квазичастиц. Авторы популярно разъясняют читателю удивительные свойства фононов и магнонов, плазмонов и экситонов, электронов и «дырок». Объясняют, почему, исследуя свойства твердых тел, можно познать мир квазичастиц.

Книга доступна школьникам старших классов и может быть с успехом применена на факультативных занятиях.

### Издательство «Мир»

4. Бова Б. *Новая астрономия.* Перевод с англ. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 52 к.

Эта книга посвящена изложению современных вопросов астрономии — радиоастрономии, инфракрасной, рентгеновской, гамма-астрономии и т. д.

В ней также отражены сенсационные открытия последних десятилетий — квазары, сверхзвезды, пульсары, «черные дыры», взрывающиеся галактики и пр. Живой и яркий язык, образное увлекательное повествование делают книгу интересной для самого широкого круга читателей.

### Издательство «Знание»

5. Рыдник В. И. *Поле.* Объем 8 л., тираж 100 000 экз. цена 25 к.

В этой книге рассказывается о природе физических взаимодействий. Уже в далеком прошлом ученые и философы создавали различные гипотезы об «устройстве» реального мира, пытались объяснить все многообразие физических взаимодействий, в частности, с помощью представления об эфире, заполняющем все мировое пространство. Автор живо и увлекательно рассказывает о смене этих представлений понятием физического поля.

Книга вполне доступна школьникам старших классов и может быть использована на факультативных занятиях.

6. Левантовский В. И. *Транспортные космические системы.* Объем 3,5 л., тираж 50 000 экз., цена 11 к.

В брошюре рассказывается об одной актуальной проблеме современной космической техники — переходу от ракетоносителей одноразового использования к транспортным космическим аппаратам многократного использования.

Брошюра рассчитана на самый широкий круг читателей.

*И. Клумова, М. Смолянский*

## Задачи

1. В некотором царстве каждые двое — либо друзья, либо враги. Каждый человек может в некоторый момент поссориться со всеми друзьями и помириться со всеми врагами. Оказалось, что каждые три человека могут таким образом стать друзьями. Докажите, что тогда и все люди в государстве могут стать друзьями.

2. Для каких простых чисел $p$ числа $2p+1$ и $4p+1$ тоже простые?

3. Найти множество центров тяжести треугольников $OBA$, у которых вершина $O$ фиксирована, а вершины $A$ и $B$ лежат на двух окружностях одинакового радиуса. А что получится, если радиусы окружностей не равны?

4. Докажите, что плоскость можно раскрасить 9 красками так, что никакие две точки одного цвета не будут находиться на расстоянии 1 *м*.

5. Пароход плывет из города $A$ в город $B$ и обратно. Одинаковое ли время затратит пароход, если города находятся:

а) на берегу реки;
б) на берегу озера?

Скорость парохода относительно воды постоянна.

*А. Орлов*

# Поиск предмета

### Номер квартиры

Послушайте, какую историю рассказала мне моя соседка Люся *).

— В нашем новом восьмиэтажном доме два подъезда. На каждую лестничную клетку выходят двери четырех квартир. Вчера во дворе меня встретили ребята и спросили, в какой квартире я живу. Я ответила:

— А вы отгадайте. Можете задавать мне вопросы, только имейте в виду, что я буду отвечать лишь «да» или «нет».

Один мальчишка сразу сказал:

— Нет ничего проще. Я буду тебя спрашивать, верно ли, что ты живешь в квартире № 1, № 2, № 3, № 4, ... ..., № 63, пока ты не скажешь «да». А если ты все время будешь говорить «нет», то ты живешь в квартире № 64. Мне понадобится самое большее шестьдесят три вопроса.

Но тут его перебила девочка:

— Подумаешь, шестьдесят три! Мне хватит и тридцати двух вопросов! Сначала я узнаю, в каком подъезде ты живешь. Я спрошу: «Ты живешь в первом подъезде?» Ответишь «да» — значит, в первом; ответишь «нет» — во втором. А затем переберу по порядку все квартиры в подъезде.

— А мне хватит и четырнадцати! — радостно закричал самый маленький из всей компании. — Этаж я узнаю за семь вопросов, а квартиру на этаже — еще за семь!

— А как вы думаете, — спросила Люся меня, — сколько вопросов понадобится, чтобы узнать номер моей квартиры?

Я сразу ответил Люсе: «Пяти вопросов мало, а шести хватит». Сначала я спросил:

— Верно ли, что ты живешь в первом подъезде?

Люся ответила: «Нет», — и я понял, что ее квартира находится во втором подъезде. Второй вопрос был хитрее:

— Верно ли, что ты живешь ниже пятого этажа?

— Да.

— А верно ли, что ниже третьего?

— Нет.

— На третьем?

— Нет.

Значит, Люся живет во втором подъезде на четвертом этаже. У меня осталось два вопроса на четыре «подозрительные» квартиры — № 45, № 46, № 47 и № 48 (легко подсчитать, что на площадку четвертого этажа во втором подъезде выходят двери этих четырех квартир).

— Верно ли, что номер твоей квартиры больше 46?

— Нет.

— Ты живешь в квартире № 45?

— Нет.

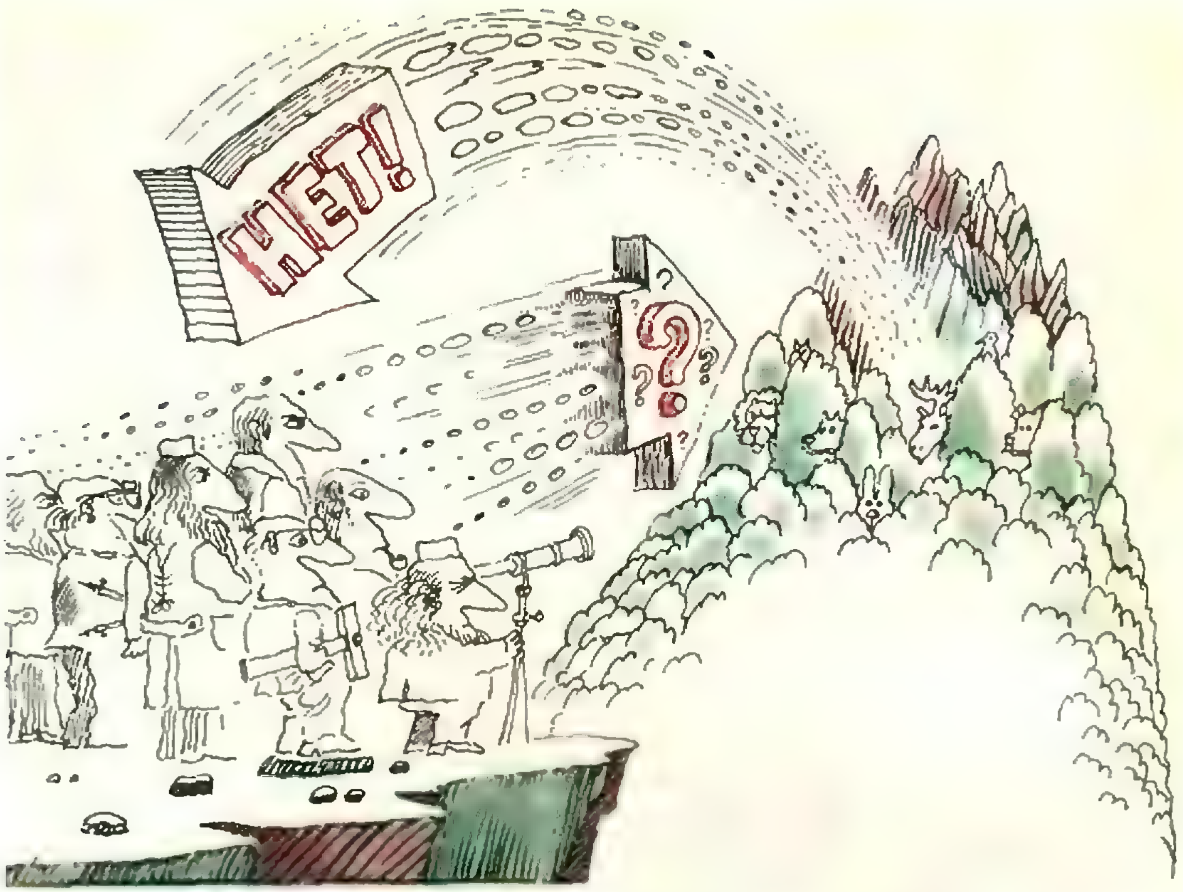
— Значит, ты живешь в квартире № 46, — сказал я с торжеством.

Поняли ли вы, почему понадобилось так мало вопросов? Каждый мой вопрос делил номера «подозрительных» квартир (тех, среди которых находится Люсина) на две равные части: номера, для которых ответ «да», и номера, для которых ответ «нет». В любом случае число «подозрительных» квартир уменьшалось ровно вдвое.

Можно доказать, что наверняка уложиться в пять вопросов нельзя.

---

*) См. также «Квант», 1976, № 2, с. 60.



Здесь нам поможет такая таблица:

0 0 0 0 0
0 0 0 0 1
0 0 0 1 0
0 0 0 1 1
0 0 1 0 0
. . . . .
. . . . .
1 1 1 1 0
1 1 1 1 1

Люсины ответы мы запишем с помощью цифр 1, 0. Если она отвечает «да», будем писать «1», а если нет», то «0». Первый ответ запишем в разделе единиц, второй — в разделе десятков и так далее. Тогда мы можем единицами и нулями записать любое сочетание из пяти ответов, оно будет пятизначным числом, каждая цифра которого — нуль или единица. Выпишем все такие числа в порядке возрастания — получится наша таблица. Всего в ней 32 числа.

Теперь допустим, что нам всегда удается угадать квартиру за пять вопросов. Это означает, что, зная, какое получилось пятизначное число из нулей и единиц, мы можем точно назвать номер квартиры. Но так как пятизначных чисел у нас 32, то и квартир мы можем назвать лишь 32, а не 64, как в условии.

### Номер телефона

Вы хотите узнать семизначный номер моего телефона, задавая мне вопросы, на которые я буду отвечать только «да» или «нет». Придумайте способ, гарантирующий успех за наименьшее число вопросов.

### Одна фальшивая монета

Имеются 26 одинаковых по виду монет. Среди них одна фальшивая, она легче остальных. Есть чашечные весы (без стрелки и гирь). За какое наименьшее число взвешиваний можно найти фальшивую монету?

Эту задачу можно решать точно так же, как и предыдущую. Только число «подозрительных» монет надо попытаться уменьшать не в два раза, а в три: ведь у каждого взвешивания три возможных результата — левая чашка перевесила, правая чашка перевесила, чашки уравновесились. Поэтому сначала положим на каждую чашку по 9 монет. Если левая чашка перевесила, то фальшивая монета на правой чашке; если правая чашка перевесила, то фальшивая монета на левой чашке; если же чашки уравновесились, то фальшивая монета — среди восьми монет, не положенных на весы. Значит, после первого взвешивания остается 9 или даже 8 «подозрительных» монет. Потом положим на чашки по три «подозрительные» монеты. После второго взвешивания останутся три или две «подозрительные» монеты. Положив по одной из них на чашки, выясним, какая монета фальшивая.

Способа наверняка обнаружить фальшивую монету за два взвешивания нет, потому что фальшивой может оказаться любая из 26 монет, а возможных исходов двух взвешиваний всего 9 (каждый из трех исходов первого взвешивания может комбинироваться с каждым из трех исходов второго), и 9 меньше, чем 26.

### Обсуждение

Понимаете ли вы, что общего в рассмотренных нами задачах? Там — квартиры, здесь — монеты; там — вопросы, здесь — взвешивания. И все же в них много общего. И тут, и там мы задаем вопросы: в одном случае Люсе, в другом — весам, и получаем ответы: в одном случае от Люси, в другом — от весов.

То же самое делают ученые, когда ставят опыт, — они задают вопросы. Известно выражение: «Физический эксперимент — это вопрос, который мы задаем природе». Конечно, так могут сказать о своих опытах не только физики, но и химики, и биологи — все, кто изучает природу. И если вы хотите быть настоящими математиками, то вам надо уметь задавать вопросы.

Наши задачи связаны с одним из современных разделов математики — теорией информации. Скажем, как быстрее всего передать сообщение о номере телефона, если в нашем распоряжении есть сигналы только двух видов? Это — типичная задача теории информации. Подробно об этой теории можно прочитать в книге «Вероятность и информация» А. М. Яглома и И. М. Яглома (М., «Наука», 1973).

### Еще две фальшивые монеты

а) Перед вами лежат шесть одинаковых по виду монет, две из которых фальшивые (каждая из них тяжелее настоящей на 1 *г*). Еще у вас есть чашечные весы без стрелки и гирь. Весы эти, правда, не очень чувствительны и реагируют на разность грузов не менее 2 *г*. Найдите способ за четыре взвешивания выявить обе фальшивые монеты.

б) Имеются шесть одинаковых по виду монет. Четыре из них настоящие, по 4 *г* каждая, а две — фальшивые, общей массой 8 *г*: одна чуть более тяжелая, другая более легкая. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без стрелки и гирь потребуется, чтобы выявить обе фальшивые монеты и установить, какая из них легче, а какая — тяжелее?

### Универсальные гири

Подберите массы четырех гирь так, чтобы ими можно было отмерить на чашечных весах любое число граммов от 1 до 40. (Гири можно класть на обе чашки.)

### Отгадки с препятствиями

Вы опять отгадываете семизначный номер телефона, но теперь на один из ваших вопросов я могу дать неправильный ответ. Какие тогда вопросы вы будете задавать и какое наименьшее число вопросов вам понадобится?

### К статье «Об одном методе решения задач по электростатике»

1. $q' = -q\frac{r}{a}$.

2. $q' = -q\frac{r_1}{r_2}$.

### К статье «Донецкий государственный университет»

#### Вариант 1

1. $\frac{8R^3 \sin(\alpha - 30^\circ)\sin(\alpha + 30^\circ)}{9\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^4\alpha\sin^2\alpha}$. 2. $x = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$. 3. $x = \frac{(-1)^k}{2}\arcsin(4 - 2\sqrt{3}) + \frac{k\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$. 4. $4 - \sqrt{2} < x < 3$, $x > 4 + \sqrt{2}$. 5. 10 *л*.

#### Вариант 2

1. 0 *км/час* $< x <$ 20 *км/час* ($x$ — первоначальная скорость велосипедиста). 2. $2\,\mathrm{arcctg}(\sqrt{3}\sin\alpha)$. 3. $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = 3$, $y_2 = 2$. 4. $x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x_3 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ 5. Уравнение не имеет решений.

#### Вариант 3

1. $\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)$. 2. 4 *км*. 3. $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$. 4. $\frac{(b^2 - 2ac)^2 - 2a^2c^2}{c^4}$. 5. $x_1 = 7$, $x_2 = -\frac{1}{3}$.

#### Вариант 4

1. $\arccos\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)$. 2. $x_1 = 3$, $y_1 = 1{,}5$; $x_2 = \frac{24}{23}$, $y_2 = 24$. 3. $x > 2$. 4. $x = 13$. 5. $x_1 = -\frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{72} + \frac{k\pi}{9}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

### К статье «Московский институт управления им. С. Орджоникидзе»

#### Вариант 1

1. $R = a\left(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} - 1\right)/\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. 2. $x = 3/2$. 3. $0 < x < \frac{1}{a}$, $x > a^4$. 4. $x = \pi/4 + k\pi$ ($k$ — целое). 5. 1:9.

#### Вариант 2

1. $MP = (q - p\cos\alpha)/\sin\alpha$, $MQ = (p - q\cos\alpha)/\sin\alpha$. 2. $x_1 = 5$, $x_2 = 1/625$. 3. $-2 < x < 2$. 4. $x_1 = \mathrm{arctg}\,5 + k\pi$, $x_2 = -\pi/4 + k\pi$ ($k$ — целое).

### К статье «Московский институт электронного машиностроения»

#### Вариант 1

1. Обозначим $3^{x\lg 5} = 5^{x\lg 3}$ через $y$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{1}{3}y - \frac{2}{3} = |5y - 24|,$$

откуда $y_1 = 5$, $y_2 = \frac{37}{8}$ и

$$x_1 = \frac{1}{\lg 3},\quad x_2 = \frac{\lg\frac{37}{8}}{\lg 3\cdot\lg 5}.$$

2. Имеем

$$\begin{cases} a_3\cdot a_6 = 13{,}5,\\ a_4 + a_5 = 7{,}5 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a + 2d)(a + 5d) = 13{,}5,\\ 2a + 7d = 7{,}5. \end{cases}$$

Если положить $a + 2d = x$, $a + 5d = y$, то последняя система перепишется так:

$$\begin{cases} xy = 13{,}5\\ x + y = 7{,}5. \end{cases}$$

Отсюда, с учетом положительности членов, $x = 3$, $y = 4{,}5$ или $a = 2$, $d = \frac{1}{2}$.

Теперь требуется найти наименьшее значение $z = x + y$ при $xy = 13{,}5$. Подставляя значение $y = \frac{13{,}5}{x}$ в исследуемую функцию $z$, найдем

$$z = x + \frac{13{,}5}{x} = \sqrt{13{,}5}\left(\frac{x}{\sqrt{13{,}5}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{13{,}5}}{x}\right) \geqslant 2\sqrt{13{,}5};$$

минимум достигается при $x = y = \sqrt{13{,}5}$.

3. Из $\triangle BOS$ (рис. 1) $a = BO = H \operatorname{tg} \alpha$. Из $\triangle EOC$ (рис. 2) по теореме синусов

$$\frac{OE}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{a}{\sin\left(\pi - \beta - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)},$$

откуда $OE = a\frac{\cos\alpha}{\cos(\beta - \alpha)}$ и $S_{\text{сеч}} = BO \times$ $\times OE = H^2 \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\cos(\beta - \alpha)}$.

4. В ОДЗ ($a - 2\cos x \neq 0$, $a - 2\sin x \neq$ $\neq 0$) исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$(\sin x - \cos x)[2a(\sin x + \cos x) - a^2 - 4] = 0,$$

откуда

а) $\sin x - \cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$;

а) $\sin x + \cos x = \frac{a^2 + 4}{2a}$, корней нет, так как $\left|\frac{a^2 + 4}{2a}\right| \geqslant 2$.

Подставляя корни в неравенства, определяющие ОДЗ, получим: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, если $a \neq \pm\sqrt{2}$; $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, если $a =$ $= -\sqrt{2}$; $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, если $a = \sqrt{2}$.

Уравнение имеет 9 корней на $[20\pi, 29\pi]$ при $a \neq \pm\sqrt{2}$; 5 при $a = -\sqrt{2}$; 4 при $a = \sqrt{2}$.

5. ОДЗ: $a \neq 5$, $a \neq -5$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Подставляя выражение для $x$ из первого уравнения во второе, после очевидных преобразований получим

$$y^2 - y(a^2 - 25 - 10a) - 5a(a^2 - 25) = 0,$$

откуда $y_1 = -5(a + 5)$, $y_2 = a(a - 5)$, $x_1 = 5(a - 5)$, $x_2 = a(a + 5)$ (при $a = 0$ есть только одно решение $x_1$, $y_1$).

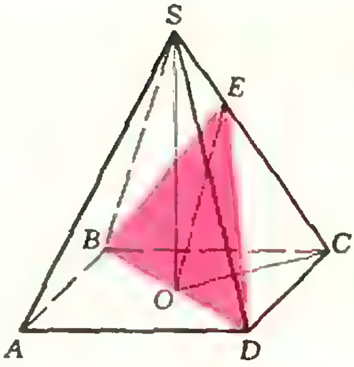


Рис. 1.

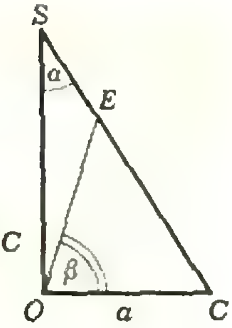


Рис. 2.

Имеем $x_1x_2y_1y_2 = -25a^2(a + 5)^2(a - 5)^2$. Требуется показать, что $a(a + 5)(a - 5)$ кратно 6. Но $a(a^2 - 5) = a^3 - a - 24a$, $a^3 - a = (a - 1)a(a + 1)$, как произведение трех последовательных целых чисел, делится на 6 и $24a$ делится на 6.

### Вариант 2

1. ОДЗ: $-2 < x < 1$. При этих $x$ исходное неравенство эквивалентно неравенству $(1 - x)(x + 2) < 1$, т. е. $x^2 + x - 1 > 0$, откуда с учетом ОДЗ $-2 < x <$ $< \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < x < 1$.

2. $[1 - (1 - \sin\alpha)^3] : (1 - \sin\alpha)^3$.

3. Пусть первоначальный делитель равен $x$, а частное $y$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{150}{x} - 1 < y \leqslant \frac{150}{x}, \\ \frac{151}{x + 2} - 1 < y - 5 \leqslant \frac{151}{x + 2}. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{cases} \frac{151}{x + 2} + 4 < \frac{150}{x}, \\ \frac{150}{x} < \frac{151}{x + 2} + 6, \end{cases}$$

или $4 < \frac{150}{x} - \frac{151}{x + 2} < 6$, откуда

$$\begin{cases} 4x^2 + 9x - 300 < 0, \\ 6x^2 + 13x - 300 > 0, \end{cases}$$

$6 < x < 8$, т. е. $x = 7$.

4. ОДЗ определяется системой

$$\begin{cases} 2\sin x + 1 \leqslant 0, \\ 2\cos x + 1 \leqslant 0. \end{cases}$$

Возведение в квадрат после простых преобразований дает

а) $\sin x - \cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$;

б) $2(\sin x + \cos x) + 5 = 0$,

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{5}{2\sqrt{2}}$ (нет решений).

Подставив найденные корни в неравенства, определяющие ОДЗ, находим ответ: $x = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k$ ($k$—целое).

**5**. Из второго уравнения системы мы имеем

$$y(y - x - 2) = 0,$$

откуда $y = 0$ или $y = x + 2$. Подставляя каждое из этих значений в первое уравнение, получим следующие решения системы: $x_1 = -a - 3$, $y_1 = 0$ и $x_2 = a(a + 3)$, $y_2 = (a + 1)(a + 2)$.

Переходя ко второй части задачи, заметим, что $1 + x_1y_1 = 1^2$, $1 + x_2y_2 = 1 + a(a + 1)(a + 2)(a + 3) = [a(a + 3) + 1]^2$.

Обратное утверждение неверно, что видно из примера: $a = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 1}$ — иррациональное число, но $1 + xy = 2^2$.

## К статье «Белорусский институт инженеров железнодорожного транспорта»

### Математика

Вариант 1

**1.** $S_{\text{бок}} = 2h^2 \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \sin\left(45^\circ + \frac{\beta}{2}\right) \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) : (\sin\alpha \sin\beta)$.

**2.** $x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **3** $x = 0,5$; $y = -1,5$. **4.** $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Вариант 2

**1.** $V = \frac{1}{2} d^3 \sin\alpha \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta$ (где $\alpha$ — меньший из углов, образуемых диагоналями). **2.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. **3.** $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **4.** $a - b$.

Вариант 3

**1.** $V_{\text{конуса}} = \frac{V}{2} \sin^2\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$. **2.** $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **3.** $-\sqrt{\frac{a - b}{a + b}}$. **4.** $x_1 = 3$, $x_2 = 1 + \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

Вариант 4

**1.** $V = \frac{\pi a S}{\sin\alpha}$. **2.** $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **3.** $x_1 = 9$, $x_2 = \frac{1}{9}$. **4.** 1.

### Физика

1. $F_c = m\left(g + \frac{Hg}{h} + \frac{v^2}{2h}\right)$.

2. $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}$.

3. $A = gl(M/2 + m) = 12,7$ *кдж*.

4. $\rho = \rho_в \frac{g}{g - a} = 2,45 \cdot 10^3$ *кг/м³*.

5. $n = \frac{p}{kT} \approx 3,5 \cdot 10^{10}$ $см^{-3}$.

6. $I = \frac{Fv}{\eta U} \approx 746$ *а*.

7. $P_1 = \frac{36\mathscr{E}^2 R}{(6r + R)^2} = 1,5$ *вт*, $P_2 = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(r/6 + R)^2} \approx 0,57$ *вт*.

8. $\mathscr{E}_{ср} = \frac{BS}{t} = 78,5 \cdot 10^{-3}$ *в*.

9. $D_1 = 3$ *дптр* при $d > F$ (изображение действительное); $D_2 = 2$ *дптр* при $d < F$ (изображение мнимое).

10. $\lambda = \frac{1}{eU/hc + 1/\lambda_0} \approx 0,35$ *мкм*.

## К статье «Донецкий политехнический институт»

### Математика

Вариант 1

**1.** $t_1 = 5$ *час*, $t_2 = 4$ *час*. **2.** $\pi a^3 \cos\frac{\varphi}{2} \times \sin^3\frac{\varphi}{2} \Big/ 24\cos^6\frac{\varphi}{4}$. **3.** $x_1 = 100$, $x_2 =$

$= 1000$. 4. $x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x_3 = \frac{5\pi}{6} + \pi k$ ($k$ = целое). 5 $x = 5, y = 7$.

Вариант 2

1. 30 *км/час*. 2. $4\operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2} \Big/ \operatorname{tg}\alpha$. 3. $x_1 = 4$, $x_2 = -5$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{161}}{2}$. 5. $3 < x < \frac{22}{7}$.

Вариант 3

1. 6 *час*, 14 *час*. 2. $(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha/24$. 3. $x = \pm \pi/4 + \pi k$ ($k$ — целое). 4. $x < -3$, $-1 < x < 2$. 5. $x_1 = 6$, $x_2 = 10$.

**Физика**

1 $H = h\frac{f - F}{F} = 1$ *см*.

2. $P_э = P\left(1 - \frac{PR}{U^2}\right) = 5640$ *вт*.

3. $\eta = \frac{\rho_в V}{Pt}\,[c_в (t_к - t_1)]\cdot 100\% = 52\%$.

## К статье «Марийский политехнический институт им. М. Горького»

Вариант 1

1. $V = \frac{4r^3 \operatorname{tg}\varphi}{3\sin\alpha}$. 2. $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

3. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ($k$ — целое).

4. $-1 < x < 1$, $x > 4$. 5. $\sqrt[3]{x^2}$.

Вариант 2

1. $V = \frac{8\pi(2 + \sqrt{3})^3}{3\sqrt{3}}$. 2. $x = \log_2 17$.

3. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$ ($k$ — целое). 4. $x < \sqrt[3]{34}$. 5. $2b(a - b)$.

## К статье «Ярославский политехнический институт»

**Математика**

Вариант 1

1. $\frac{\pi\sqrt{2}\,h^3 \sin\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$. 2. $0 < x \leqslant \frac{1}{9}$. 3. $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leqslant x < 1$. 4. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ($k$ — целое).

Вариант 2

1. $\frac{4\sqrt{2}\,R^3 \sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2 3\alpha}$.

2. $x_1 = 9$, $y_1 = 4$; $x_2 = 4$, $y_2 = 9$.

3. $x \geqslant 1$. 4. $x_1 = 21\pi/16$, $x_2 = 11\pi/8$.

**Физика**

1. $t = 2v_0 \operatorname{tg}\alpha/g \approx 2{,}3$ *сек*.

2. $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sigma q}{2\varepsilon\varepsilon_0 mg} = 45^\circ$.

3. $A = IBls = 2\cdot 10^{-4}$ *дж*.

4. $f = -dR/(2d + R) = -29$ *см* (знак «минус» указывает на то, что изображение точки мнимое).

## К статье «Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина»

**Математика**

Вариант 1

1. $V = \pi l^2 \sin\alpha\,(2 - \cos\alpha)/12$.

2. $x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ ($k$ — целое). 3. $x = ab^2$, $y = a/b^2$ ($a \neq 1$, $b \neq 1$).

4. $0 < x < 3/2$.

Вариант 2

1. $V = 4a^3 \sin\alpha\cos^3(\alpha/2)$. 2. $x_1 = -1$, $x_2 = -3$. 3. $x = k\pi/2$ ($k$ — целое).

4. $-1/3 < x \leqslant -1/4$.

**Физика**

1. $\Delta t = 86\,400\,T_0 h/R = 5400$ *сек* $= 1{,}5$ *час*.

2. $V_п = \frac{1}{g}\left(\frac{P_1 - P_2}{\rho_в} - \frac{P_1}{\rho_м}\right) \approx 13$ *см*$^3$.

3. $F_B = 3mg \approx 118$ *н*.

4. $Q = m(gl\sin\alpha - v^2/2) \approx 140$ *дж*.

5. $V_0 = \frac{pVT_0}{p_0 T} \approx 670$ *л*.

6. $\mathscr{E} = \frac{P_1 I_2^2 - P_2 I_1^2}{I_1 I_2 (I - {}_2 I_1)} \approx 3{,}15$ *в*;

$r = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} \approx 0{,}13$ *ом*.

7. $I = \frac{cm\,\Delta t}{\eta U t} \approx 10$ *а*.

8. $m = \frac{1}{F}\frac{A}{n}\,It \approx 3$ *г*.

9. $\lambda = 2\pi v\sqrt{LC} \approx 113$ *м* ($v = 3\cdot 10^8$ *м/сек* — скорость света).

10. $d = \dfrac{Ff}{f-F} \approx 28$ *см*.

### К статье «Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской»

**Математика**

Вариант 1

1. $3a^3 \operatorname{tg}\alpha/4$.

2. $x = y = -9$. Указание. Из второго уравнения системы получаем уравнения: $\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2 + 4\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 3 = 0$ при $y > 0$ (это уравнение не имеет решений) и $\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2 - 4\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 3 = 0$ при $y < 0$, откуда $x = 9y$ или $x = y$. Остается подставить эти выражения в первое уравнение системы и рассмотреть еще случай $y = 0$.

3. а) 2 *км/час*; б) 4 *час* $< t <$ 8 *час*. Указание. Положим $AC = s$, скорость трактора на спуске обозначим через $v$; тогда скорость на подъеме равна $v - 1$. По условию

$$\begin{cases} \dfrac{s}{v-1} + \dfrac{8-s}{v} = t_1, \\ \dfrac{8-s}{v-1} + \dfrac{s}{v} = t_2, \end{cases}$$

откуда

$$(t_1 + t_2)v^2 - (t_1 + t_2 + 16)v + 8 = 0,$$

$v = 2$ (*км/час*). Теперь $t_1 = 4 + \dfrac{s}{2}$ и $4 < t_1 < 8$, поскольку $0 < s < 8$.

Вариант 2

1. $a^3 \operatorname{tg}\alpha/16$.

2. $x = -7/10$, $y = -63/40$. Указание. Умножив первое уравнение системы на 8, второе на $-3$ и сложив их, получим

$$3x - 4\sqrt{xy} - 4y = 0,$$

откуда $x = 4y > 0$ или $x = \dfrac{4}{9}y < 0$.

3. а) 15 *км/час*; б) $t_1 > 1/3$ (*час*). Указание. Поскольку $t_2 > t_1$, рукав $ADB$ должен быть короче, чем рукав $ACB$; обозначим его длину через $s$, а скорость лодки в стоячей воде через $v$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{s+6}{v+3} + \dfrac{s}{v-3} = t_1, \\ \dfrac{s}{v+3} + \dfrac{s+6}{v-3} = t_2. \end{cases}$$

Отсюда $(t_2 - t_1)(v^2 - 9) = 36$, $v = 15$ (*км/час*), $t_1 = \dfrac{5s}{36} + \dfrac{1}{3}$, $s > 0$.

Вариант 3

1. $a^3\sqrt{3}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\Big/2$.

2. а) $\pm\sqrt{8}$, $\pm\sqrt{23}$; б) $-64{,}32 < \alpha_1 - 14\alpha_2 < -64{,}31$.

3. 35 *км/час*. Указание. Если средняя скорость на части пути равна средней скорости на всем пути, то и на остальной части пути средняя скорость та же. Пусть $s$ — длина третьего участка, $v$ — средняя скорость; тогда

$$v = \frac{7s}{\dfrac{6s}{v-2} + \dfrac{s}{2v-15}},$$

откуда $v_1 = 35$, $v_2 = 6$ (*км/час*).

Вариант 4

1. $4a^3\cos^2\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}/3$.

2. а) $\pm\sqrt{31}$, $\pm\sqrt{29}$; б) $-39{,}16 < \alpha_1 + 8\alpha_2 < -39{,}15$.

3. 150 *км/час*. Указание. Пусть $v$ — средняя скорость экспресса, $s$ — длина второго участка. Тогда

$$\frac{s}{\dfrac{\frac{5}{9}s}{v+30} + \dfrac{\frac{4}{9}s}{v-24}} = v,$$

откуда $v = 120$ (*км/час*).

**Физика**

1. $v_н = s\sqrt{\dfrac{g}{2h}} = 7{,}5$ *м/сек*, $v_к = \sqrt{v_н^2 + 2gh} \approx 21{,}4$ *м/сек*.

2. $r = \dfrac{kg}{4\pi^2 n^2} \approx 1{,}3$ *см*.

3. $m = m_в + m_л + \dfrac{m_л\lambda + (m_в + m_л)c_в\Delta t_в}{L + c_в\Delta t_в} = 278$ *г*.

$$\theta = \frac{(c_в m_в + C_к)t_в}{C_к + c_в(m_в + m_л)} - \frac{c_л m_л(0^\circ - t_л) + m_л\lambda}{C_к + c_в(m_в + m_л)} \approx 17{,}5\ ^\circ\mathrm{C}.$$

5. $T = T_0\left(1 + \frac{mg}{p_0 S}\right) = 308\,^\circ\text{K}$; $t = 35\,^\circ\text{C}$.

6. $\frac{V_2}{V_1} = \frac{(p_0 + \rho g h)\,T_2}{p_0 T_1} = 6{,}3$.

7. $r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1} = 1$ *ом*; $\mathscr{E} = I_1 \times (R_1 + r) = 12$ *в*.

8. $R_1 = 200$ *ом*; $R_2 = 50$ *ом*.

9. $d_1 \approx 71$ *см*; $d_2 \approx 19$ *см*.

10. $F = f/3 = 8$ *см*.

### К статье «Беспокойная дуга»

*(см. «Квант» № 6)*

1. Нет, не является. Опыт с дугой указанных в статье размеров получится столь же хорошо, если вместо алюминиевой пластинки использовать стеклянную. А. С. Попов, который ставил опыт в большем масштабе, нашел, что нагретая дуга на стеклянной пластинке качается меньшее время, чем на металлической.

2. При прочих равных условиях широкая дуга предпочтительнее, поскольку она имеет бо́льшую линию соприкосновения со слюдой. В этом нетрудно убедиться на опыте. Экспериментально ответить на вторую часть вопроса довольно сложно, потому что для постановки опыта придется использовать одинаковые дуги разной толщины.

3. Нет. Слюдяной листок, лежащий на алюминиевой пластинке, имеет такую же температуру, как и сама пластина. Если до этой же температуры нагреть дугу, то при соприкосновении ее со слюдой не будет происходить передачи тепла.

4. Очевидно, что время качаний дуги тем больше, чем дольше дуга остается горячей. Для продления этого времени можно предложить следующий «рецепт». Концы дуги загните кверху так, чтобы они оказались в пламени помещенной на внутреннюю поверхность дуги таблетки сухого горючего (таблетку при этом следует каким-либо образом закрепить). В этом случае дуга будет качаться в течение всего времени горения таблетки.

5. Вместо дуги в опыте можно использовать тонкостенную металлическую трубочку. Если слюдяной листочек положить на слегка изогнутую пластинку, нагретая трубка будет кататься взад и вперед.

### К статье «Московский технологический институт»

*(см. «Квант» № 6)*

**Математика**

#### Инженерно-экономический факультет

1. 2/3 при $a > 1$; 2 при $0 < a < 1$ 2. $x_1 = \pi + 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). 3. $x$ — любое действительное число. 4. $\arccos \frac{2n - 1 \pm 2\sqrt{n^2 - 2n}}{4n + 1}$.

#### Механико-технологический факультет

1. $-1$ (в ОДЗ). 2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). 3. $-4 < x < -3$, $x > 8$. 4. $\sqrt{2}a^3/2$.

#### Химико-технологический факультет

1. $\operatorname{ctg}\alpha$ (при $\operatorname{ctg}\alpha \neq -1$). 2. $5 \leqslant x \leqslant 10$. Указание. Представить уравнение в виде $\left|\sqrt{x-1} - 2\right| + \left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1$.

3. $x = 1/25$. 4. $\frac{\pi p^2 \sin\beta}{1 + \sin\beta}$.

**Физика**

1. $H = \frac{2p_0}{\rho g} \approx 20$ *м*.

2. $v = \sqrt{R\,(N/m - g)} \approx 140$ *м/сек*.

3. $\varphi = ER = 8{,}3 \cdot 10^8$ *в*.

4. $\eta = \left(1 - \frac{2\rho l P}{U^2 S}\right) 100\% \approx 97\%$.

5. $\eta = \frac{ES}{kP} = 15$ *лм/вт*.

### К задачам «Квант» для младших школьников»

*(см. «Квант» № 6)*

1. Надо вынуть шарик из коробки, на которой изображены белый и черный шарики — в ней не может быть разноцветных шаров.

2. Сила давления воды во всех трех случаях одинакова.

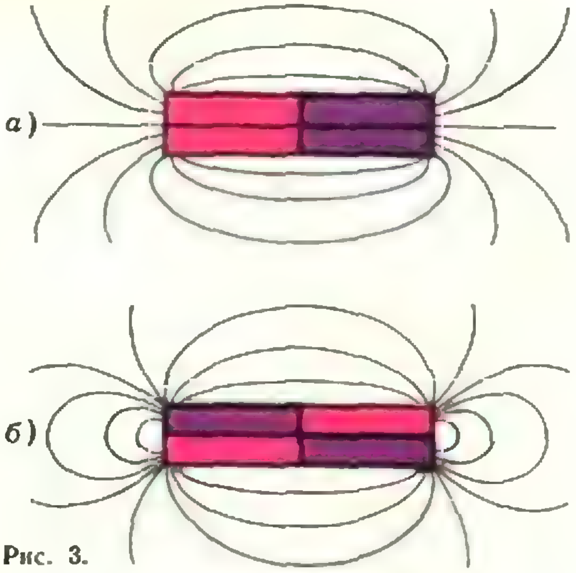


Рис. 3.

3. XII — IX = III,
X — VII = III,
VI + V = XI.
4. См. рис. 3.
5. 19275 : 75 = 257.

### К задачам

*(см. с. 47)*

1. Нет, не имеет: левая часть четна, а правая нечетна при целых $n$ и $x$.

2. $3^{23} > 5^{15}$. Указание. $5^{15} = 5\cdot(5^2)^7$; $3^{23} = 9\cdot(3^3)^7$.

3. $81 = 9^2$. Указание. Рассмотреть уравнение $10a + b = (a + b)^2$, из которого следует, что $a = 5 - b + \sqrt{25 - 9b}$.

4. Начинающий, если первым ходом он зачеркнет центральный куб.

5. Равносторонний треугольник.

### Список читателей, приславших правильные решения задач Ф353—Ф362

*(Окончание. Начало см. на с. 36)*

*С. Дваренас* (Клайпеда) 6; *М. Дворцов* (Фрунзе) 8, 1; *П. Демкин* (Донецк) 9; *А. Дзагоев* (Тбилиси) 8; *А. Дзюбенко* (Москва) 8, 9; *А. Добрынин* (Коркино) 9; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) 8, 9; *С. Ефимов* (Ленинград) 8; *Е. Загуляев* (Уфа) 8; *Н. Заламетдинова* (Альметьевск) 9; *Г. Залескис* (Вильнюс) 8—2; *А. Захаров* (Брест) 8—0; *Т. Заяц* (с. Т. Пасека Закарпатской обл.) 8, 9, 2; *А. Зубков* (Рустави) 8; *А. Измайлов* (Зеленодольск ТАССР) 6, 0, 2; *В. Кабанов* (Шахунья) 0; *А. Казачков* (Харьков) 8; *А. Калинин* (Великие Луки) 3, 8—0, 2; *А. Калустов* (Баку) 8, 9, 2; *В. Канотоп* (Харьков) 3, 8, 9, 2; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новогородское Сумской обл.) 3, 8—2; *О. Костенко* (Кировск) 1, 2; *В. Котик* (Харьков) 8, 9; *М. Краснов* (п. Кизнер УдмАССР) 8; *А. Криканов* (Лыткарино) 6; *П. Крупкин* (Димитровград) 3, 8—2; *В. Купцов* (Аша) 6, 8, 9, 0; *М. Курносов* (Лысьва) 3; *А. Лебедь* (Днепропетровск) 3, 6, 8—2; *П. Лещенко* (с. Юца Ставропольского кр.) 3, 8—2; *А. Листовничий* (Киев) 3, 6, 9—2; *Ю. Литвинович* (п/о Ситница Брестской обл.) 8—2; *О. Лищенко* (Киев) 3, 6, 8—2; *С. Люксютов* (Киев) 8—0; *М. Магид* (Даугавпилс) 3, 6, 8—2; *В. Маргвелишвили* (Кутаиси) 8; *Е. Мартынова* (Нежин) 8, 9, 1, 2; *Е. Машеров* (Ананьев) 8—2; *А. Медведков* (Бобруйск) 1, 2; *М. Меладзе* (Тбилиси) 6; *А. Минин* (Чебоксары) 2; *О. Мирзабасов* (Черновцы) 0, 1; *А. Михайлов* (Ногинск) 8, 1; *И. Морозов* (Горький) 3, 6, 8, 0—2; *Л. Морозовский* (Киев) 6, 8, 9, 2; *А. Мохов* (Бобруйск) 3; *Ю. Мухарский* (Киев) 8—2; *С. Назаренко* (п. Старая Купавна Московской обл.) 9; *Н. Никифоров* (Великие Луки) 8, 9; *В. Николайчик* (Старые Дороги) 8, 0; *И. Овсянников* (Саратов) 8, 9; *П. Оксузян* (Орджоникидзе) 8; *А. Охримчук* (Выкса) 3, 8—2; *В. Пилей* (Харьков) 3, 6, 2; *А. Перфилов* (Воронеж) 9, 1; *А. Петухов* (Новокузнецк) 9; *П. Побылица* (Ленинград) 9, 2; *А. Подолек* (Пологи) 8, *В. Позняк* (Барановичи) 8—2; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 6, 8, 9, 1; *В. Попов* (Ясногорск) 3; *В. Потемкин* (Великие Луки) 8—0; *М. Райхман* (Винница) 8, 9; *Л. Расин* (Даугавпилс) 3, 6, 8, 9, 1, 2; *С. Распономарев* (Оренбург) 3, 8, 9, 1, 2; *В. Реммель* (п/о Вайда ЭстССР) 3, 6; *В. Розовский* (Минск) 3, 5; *Б. Ротань* (Жданов) 8; *В. Рубель* (Ставрополь) 6, 8—2; *А. Рудерман* (Ленинград) 3, 8, 0—2; *И. Рудой* (Харьков) 9, 2; *Д. Русов* (Рига) 3, 1; *А. Рябов* (Майкоп) 8; *А. Савельев* (с. Колосково Белгородской обл.) 6; *С. Самиляк* (Бар) 1, 2; *Т. Саргазаков* (Новосибирск) 8; *И. Сатаев* (Саратов) 3, 8, 9, 1; *И. Светловский* (Волковыск) 6; *П. Свистун* (Магнитогорск) 6; *А. Святченко* (Кишинев) 8—1; *С. Секацкий* (п. Кант КирССР) 9; *В. Серебрянный* (Харьков) 3; *Л. Скатков* (Харьков) 3; *В. Склярчук* (Борщев) 1, 2; *Ю. Скопинцев* (Львов) 8, 9; *Ю. Скрынников* (Рустави) 3, 6, 8, 9, 2; *А. Смоляков* (Кадиевка) 3; *А. Смулько* (Пинск) 8, 2; *Ю. Солозобов* (Тамбов) 3; *В. Сорокин* (Москва) 6; *В. Старшенко* (Запорожье) 8—2; *М. Суслов* (Москва) 3, 6, 8, 9, 1, 2; *Е. Тетельман* (Тирасполь) 9; *О. Токарь* (Харьков) 3, 8, 2; *К. Третьяченко* (Киев) 3, 8, 0—2; *Г. Турабелидзе* (Кутаиси) 9; *Е. Усина* (Великие Луки) 8, 9; *М. Файнберг* (Великие Луки) 8; *А. Фарбер* (Тамбов) 8, 9; *Н. Федин* (Омск) 3, 6, 8—2; *А. Фрумкин* (Курск) 3, 6, 8—2; *Ю. Хабаров* (Павловский Посад) 8, 9, 2; *М. Хазан* (Киев) 6, 1; *И. Цацкис* (Кременчуг) 2; *М. Цодыкс* (Новокузнецк) 9; *И. Цуркис* (Калининград) 9; *В. Черченко* (Киев) 6; *Г. Шарипов* (с. Угали БАССР) 1; *Р. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) 3, 1; *К. Шахназарян* (Баку) 6; *Е. Шержухов* (Курганск) 9; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) 8; *Н. Щукин* (Кулебаки) 8; *В. Юровский* (Ташкент) 8, 9, 0, 2; *Е. Яненко* (Киев) 3, 8, 1.

Обложка этого номера (1 и 4 страницы) подготовлена по материалам Ю. Котова.

Номер оформили: Ю. Ващенко, Е. Верентинова, С. Верховский, В. Карцев, Э. Назаров

Корректор Т. С. Вайсберг

113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62. Сдано в набор 22/IV 1976 г.
Подписано в печать 9/VI 1976 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 6,11. Уч.-изд. л. 5,2 Т-12218.
Цена 30 коп. Заказ 807. Тираж 312 960 экз.

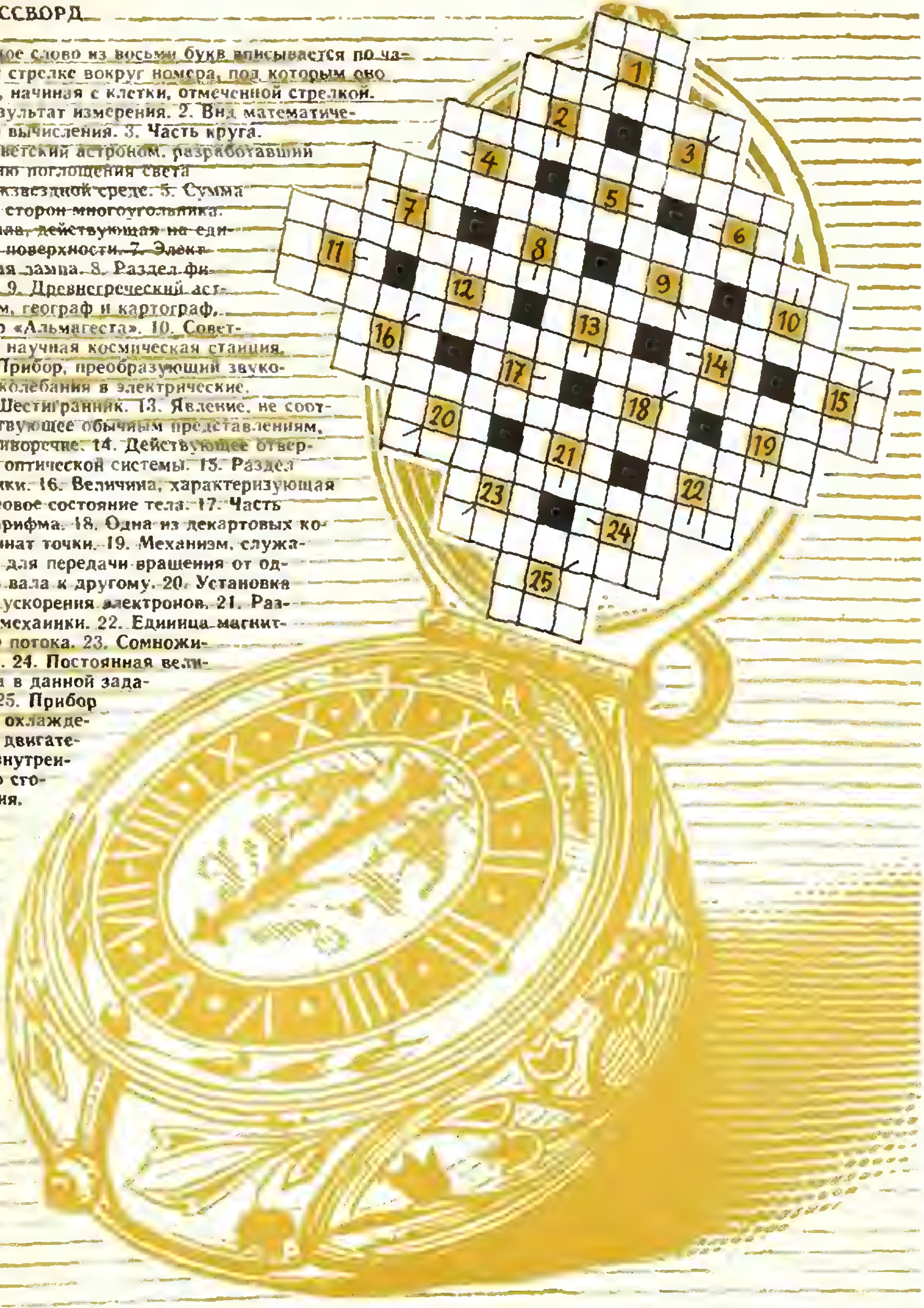
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

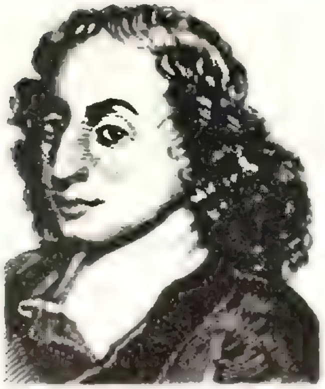
*Рукописи не возвращаются*

## КРОССВОРД

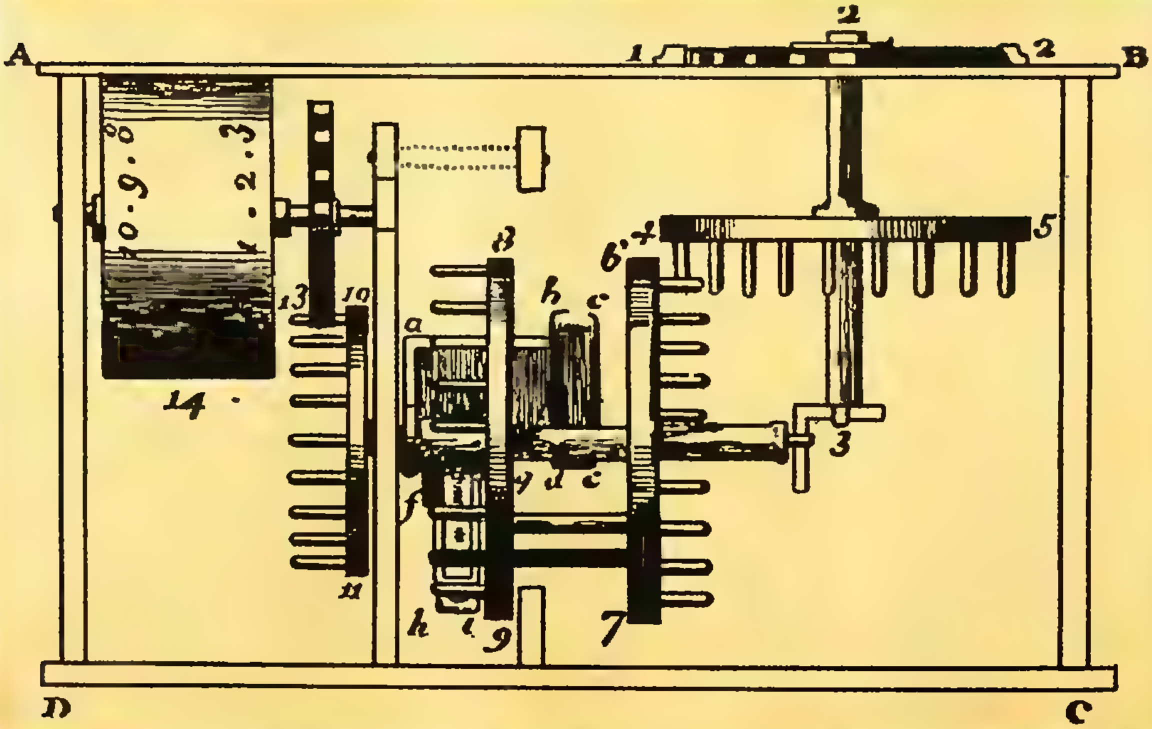
Каждое слово из восьми букв вписывается по часовой стрелке вокруг номера, под которым оно стоит, начиная с клетки, отмеченной стрелкой.

1. Результат измерения. 2. Вид математического вычисления. 3. Часть круга. 4. Советский астроном, разработавший теорию поглощения света в межзвездной среде. 5. Сумма длин сторон многоугольника. 6. Сила, действующая на единицу поверхности. 7. Электронная лампа. 8. Раздел физики. 9. Древнегреческий астроном, географ и картограф, автор «Альмагеста». 10. Советская научная космическая станция. 11. Прибор, преобразующий звуковые колебания в электрические. 12. Шестигранник. 13. Явление, не соответствующее обычным представлениям, противоречие. 14. Действующее отверстие оптической системы. 15. Раздел физики. 16. Величина, характеризующая тепловое состояние тела. 17. Часть логарифма. 18. Одна из декартовых координат точки. 19. Механизм, служащий для передачи вращения от одного вала к другому. 20. Установка для ускорения электронов. 21. Раздел механики. 22. Единица магнитного потока. 23. Сомножитель. 24. Постоянная величина в данной задаче. 25. Прибор для охлаждения двигателя внутреннего сгорания.





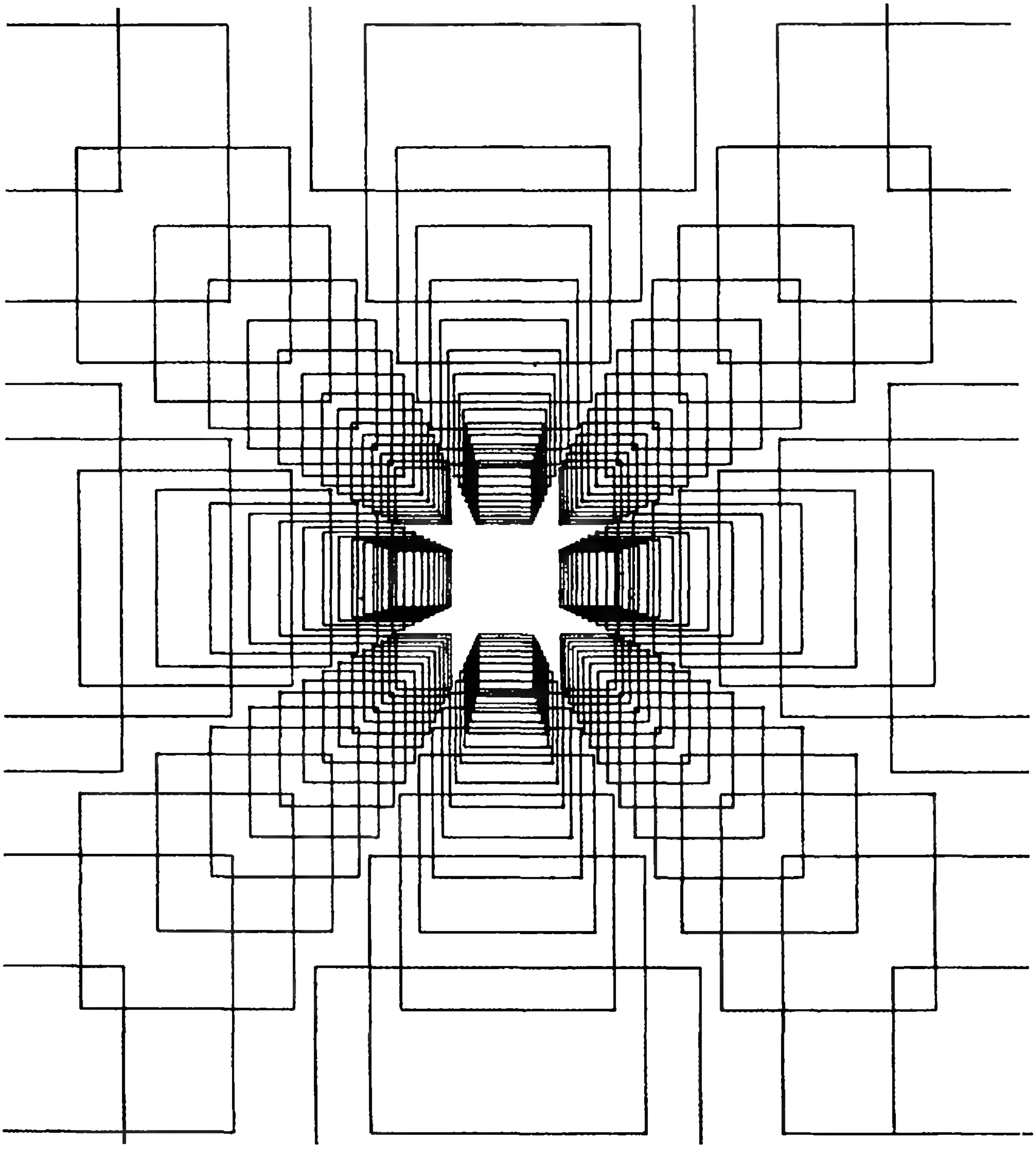
На этой странице изображены общий вид и схема суммирующей машины, сконструированной и изготовленной одним из самых знаменитых людей в истории человечества — Блезом Паскалем (1623—1662). Его портрет помещен слева. О Паскале, о его жизни, многочисленных научных достижениях, открытиях, идеях и изобретениях уже рассказывалось в «Кванте» (1973, № 8, с. 4). Там же рассказывалось и о построенной им машине (с. 10—11). Современники Паскаля называли ее «паскалевым колесом». О вычислительных машинах, об истории их изобретения, об устройстве (логическом и физическом) современных вычислительных машин и об их применениях подробно рассказано в интересной книге Р. С. Гутера и Ю. Л. Полунова «Математические машины», выпущенной издательством «Просвещение» в 1975 году. Советуем вам ее прочесть. С рецензией на эту книгу вы можете познакомиться на с. 50 этого номера журнала.



**Цена 30 коп.**
**Индекс 70465**

В этом номере мы продолжаем выставку машинного творчества. На этот раз на обложке — геометрические орнаменты, полученные с помощью программ «Алграф» в институте, занимающемся экспериментальным проектированием жилых зданий. Подобные программы помогают архитекторам в их работе.

На рисунке на первой странице обложки вы видите проекцию на полусферу ячеистой сетки, лежащей в экваториальной плоскости полусферы. (Попробуйте определить центр проецирования.) Рисунок этот машина выполнила с помощью программы, осуществляющей криволинейное преобразование координат. Принцип построения рисунка на четвертой странице обложки мы предлагаем вам определить самостоятельно.



# НОМЕР
# 8

*Основан в 1970 году*

**Квант**

1976

**8**

*Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*

*Издательство „Наука“*
*Главная редакция физико-математической литературы*

Главный редактор
*академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора
*академик* А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
*(главный художник)*
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
*(зам. главного редактора)*
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
*(зам. главного редактора)*
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

**Редакция:**
В. Н. Березин
А. Н. Виленкин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова
*(художественный редактор)*
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чернова
*(зав. редакцией)*

## В НОМЕРЕ:

3 *И. Башмакова.* Пьер Ферма
12 *Б. Мартынов.* Теорема Ферма для многочленов
17 *Л. Туриянский.* Принцип Ферма
21 *Я. Гельфер, В. Лешковцев.* Амедео Авогадро
28 *А. Есаян.* ЭВМ опровергает

**Лаборатория «Кванта»**
30 *В. Майер, Е. Мамаева.* Опыты с порошковыми фигурами

**Задачник «Кванта»**
36 Задачи М396—М400; Ф408—Ф412
38 Решения задач М354—М358, М360; Ф362—Ф368

**Рецензии, библиография**
47 *В. Бронштэн.* Как рождаются, живут и умирают звезды
48 *Е. Левитан.* Интересующимся космонавтикой

49 **Спрашивайте — отвечаем**

**Информация**
50 *В. Березин.* Заочные физико-математические школы
52 *Б. Пшеничнер.* III Всесоюзный слет юных астрономов
53 *А. Антошин.* Заочная физическая школа при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова

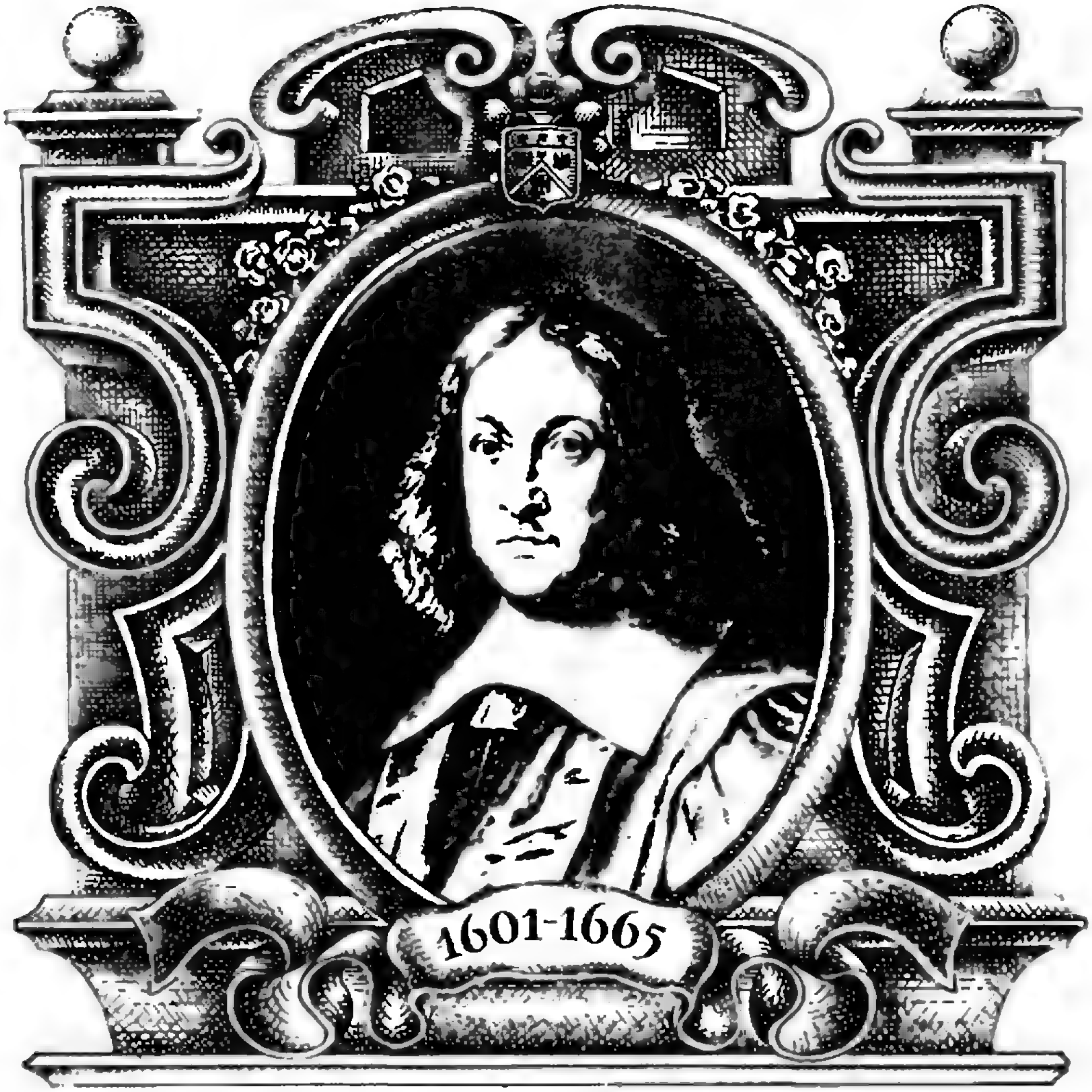
**Физики шутят**
54 *Джон Слейт.* Как расщепить атомное ядро в домашних условиях

**«Квант» для младших школьников**
56 Задачи
57 *А. Розенталь.* Правило «крайнего»

62 **Ответы, указания, решения**
**Смесь** (*с. 16, 27, 29, 35, 55*)

*Мы получили письмо от нашей читательницы из Крыма пятиклассницы Светы с эскизом рисунка, который вы видите на первой странице обложки. Такую фигуру она и ее товарищи чертили на занятии математического кружка. По эскизу, присланному Светой, была составлена программа для машины, «умеющей» рисовать. Сделанный машиной рисунок и приведен на обложке. Хотя фигура состоит только из отрезков прямых, на рисунке явно видны восемь кривых линий. Сумеете ли вы определить, что это за кривые? Правда, предупреждаем вас, что задача эта довольно трудная.*

© *Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1976 год*



В этом номере мы отмечаем юбилей крупнейшего математика XVII века Пьера Ферма. Ферма внес вклад почти во все разделы математики XVII века. Его труды непосредственно предшествовали появлению исчисления бесконечно малых и теории вероятностей. Ферма заслуженно может быть отнесен и к числу создателей аналитической геометрии. Но особенно важное значение имеют его работы в теории чисел.

Пьеру Ферма посвящены три статьи этого номера. О жизни, научных интересах и открытиях Ферма рассказано в статье И. Башмаковой. В статье Б. Мартынова формулируется и доказывается для многочленов аналог Великой теоремы Ферма. Наконец, в статье Л. Турнянского рассказывается о единственной работе Ферма, посвященной физической проблеме — закону преломления света. И к этой проблеме Ферма подошел с чисто математической точки зрения: в ней он применил свой метод решения экстремальных задач. По существу это было первым применением в физике той области математики, которая теперь называется вариационным исчислением.

* * *

**К 375-летию со дня рождения**

*И. Башмакова*

# ПЬЕР ФЕРМА

*Mi par di veder un gran lume.**)
П. Ферма

9 февраля 1665 г. в «Журнале Ученых» был помещен некролог Пьеру Ферма, в котором говорилось:

«Это был один из наиболее замечательных умов нашего века, такой универсальный гений и такой разносторонний, что если бы все ученые не воздали должное его необыкновенным заслугам, то трудно было бы поверить всем вещам, которые нужно о нем сказать, чтобы ничего не упустить в нашем похвальном слове».

И хотя уже при жизни Пьер Ферма был признан первым математиком своего времени, а после смерти слава его еще умножилась, о нем самом мы знаем очень мало.

Вот то немногое, что известно. Пьер родился в августе 1601 года на юге Франции в небольшом городке Бомон-де-Ломань, где его отец — Доминик Ферма — был «вторым консулом», т. е. чем-то вроде помощника мэра. Мать Пьера, Клер де Лонг, происходила из семьи юристов. Итак, Пьер Ферма принадлежал к «третьему сословию».

Доминик Ферма дал своему сыну очень солидное образование. В колледже родного города Пьер приобрел хорошее знание языков: латинского, греческого, испанского, итальянского и французского. Впоследствии он писал стихи на латинском, французском и испанском языках «с таким изяществом, как если бы он жил во времена Августа и провел большую часть своей жизни при дворе Франции или Мадрида».

Ферма славился как тонкий знаток античности. К нему обращались за консультациями по поводу трудных мест при издании греческих классиков. По общему мнению, он мог бы составить себе имя в области греческой филологии.

Однако всю силу своего гения Ферма направил на математические исследования. И все же он не был математиком-профессионалом. Ученые его времени не имели возможности посвятить себя любимой науке целиком. Виет был юристом и тайным советником французских королей, Декарт — офицером, Мерсенн и Кавальери — монахами. Ферма избирает юриспруденцию. Мы не знаем, в каком городе он изучал право. Эту честь оспаривают Тулуза и Бордо. Известно только, что степень бакалавра была ему присуждена в Орлеане. С 1630 года Ферма переселяется в Тулузу, где получает место советника в Парламенте (т. е. суде). О его юридической деятельности мы читаем в упоминавшемся уже «похвальном слове», что он выполнял ее «с большой добросовестностью и таким умением, что он славился как один из лучших юрисконсультов своего времени».

---

*) Мне кажется, что я вижу яркий свет (из письма к Мерсенну, 1640 г.).

В 1631 г. Ферма женился на своей дальней родственнице с материнской стороны — Луизе де Лонг. У Пьера и Луизы было пять детей, из которых старший — Самюэль — стал поэтом и ученым. Ему мы обязаны первым собранием сочинений Пьера Ферма, вышедшим в 1679 г. Пьер Ферма скончался 12 января 1665 года во время одной из деловых поездок.

Вот перечень тех сухих фактов, которые мы знаем о жизни этого замечательного математика.

К сожалению, Самюэль Ферма не оставил никаких воспоминаний об отце. Правда, жизнь ученого, как правило, бывает бедна внешними событиями. Основное ее содержание раскрывается только в творчестве, которое и составляет огромный духовный подвиг ученого.

Ни одна из работ Ферма не была опубликована при его жизни. Собрание сочинений, которое он неоднократно пытался подготовить, так и не было им написано. Однако нескольким трактатам он придал вполне законченный вид, и они стали известны в рукописи большинству современных ему ученых (это были трактаты по аналитической геометрии, о максимумах и минимумах и о квадратуре парабол и гипербол). Кроме этих трактатов осталась еще его обширная и чрезвычайно интересная переписка.

В XVII веке, когда еще не было специальных научных журналов («Журнал Ученых» был одним из первых, он начал выходить в 1665 году), переписка между учеными играла особую роль. В ней ставились задачи, сообщалось о методах их решения, обсуждались острые научные вопросы.

Корреспондентами Ферма были крупнейшие математики его времени: Р. Декарт, Этьен и Блез Паскаль, Б. Френикль де Бесси, Х. Гюйгенс, Э. Торричелли, Дж. Валлис. Письма посылались либо непосредственно адресату, либо в Париж аббату Мерсенну, который размножал их и посылал математикам, занимавшимся аналогичными вопросами. Но письма ведь почти никогда не бывают только короткими математическими мемуарами. Обычно в них проскальзывают живые чувства авторов, которые помогают воссоздать их образы.

Когда Ферма в 1636 году послал Мерсенну свой «Метод отыскания максимумов и минимумов», Декарт, не поняв метода Ферма, подверг его резкой критике. В июне 1638 года Ферма послал Мерсенну для пересылки Декарту новое, более подробное изложение своего метода. Письмо его сдержанно, но не без внутренней иронии: «...Таким образом, обнаруживается, что либо я плохо объяснился, либо г. Декарт плохо понял мое латинское сочинение... Я все же пошлю ему то, что уже написал, и он несомненно найдет там вещи, которые помогут ему отказаться от его мнения, будто я нашел этот метод случайно и его подлинные основания мне неизвестны...». Ферма ни разу не изменяет своему спокойному тону. Он чувствует свое глубокое превосходство как математика, поэтому не входит в мелочную полемику, а терпеливо старается растолковать свой метод, как это сделал бы учитель ученику.

Широкой публике (даже далекой от математики) Ферма известен прежде всего благодаря Великой теореме, носящей его имя. Однако Ферма занимался не только наиболее любимой им теорией чисел, к которой относится эта теорема, но и математическими проблемами, стоявшими в центре внимания ученых XVII века, а именно задачами определения максимумов и минимумов, нахождения касательных, вычисления площадей и длин дуг кривых, короче — теми вопросами, которые мы сейчас относим к математическому анализу. И здесь Ферма принадлежат самые крупные результаты, предшествующие созданию исчисления Ньютоном и Лейбницем. Кроме того, Ферма первый в новое время пришел к идее координат и создал аналитическую геометрию. Он занимался также задачами теории вероятностей. Ферма не ограничивался одной только математикой: он занимался и физикой, где ему принадлежит открытие закона распространения света в неоднородной среде *).

## Аналитическая геометрия

Одним из первых математических произведений Ферма было восстановление двух утерянных книг Аполлония «О плоских местах». Методы, которыми пользовался Аполлоний, мы бы сейчас отнесли к аналитической и проективной геометрии. Однако во времена Аполлония не было еще буквенной символики, поэтому ему приходилось записывать алгебраические формулы и уравнения кривых геометрически. Например, наша формула $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ записывалась (и доказывалась!) древними с помощью чертежа (рис. 1).

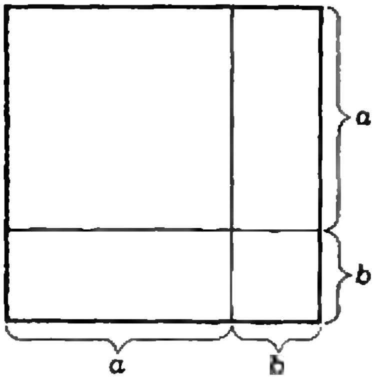


Рис. 1.

Основное отличие современных методов решения геометрических задач от методов Аполлония — в применении буквенной алгебры. Первым, кто понял, как следует применить новую алгебру к задачам геометрии, был Ферма.

В 1636 г. появилось в рукописи его сочинение «Введение в изучение плоских и пространственных мест» **), в котором последовательно строится аналитическая геометрия на плоскости. Еще при восстановлении книг Аполлония Ферма оценил преимущества метода координат и понял, что уравнение с одним неизвестным вполне определяет некоторое число, уравнение с двумя неизвестными — множество точек на плоскости (кривую), уравнение с тремя неизвестными — множество точек в пространстве (поверхность). Свое «Введение» Ферма начинает с выбора в качестве осей координат двух прямых, которые пересекают друг друга под некоторым определенным углом (не обязательно прямым).

По существу, он показывает, что любое уравнение первой степени между координатами представляет прямую линию, а уравнение второй степени — некоторое коническое сечение, причем отмечает условие, при котором соответствующее геометрическое место будет окружностью. Для приведения уравнения второй степени к одному из канонических видов, известных древним, Ферма применяет преобразование координат. Все изложение Ферма строго последовательно.

Годом позже вышло в свет сочинение Р. Декарта «Рассуждение о методе», четвертая часть которого «Геометрия» была также посвящена аналитической геометрии. Это произведение затмило «Введение» Ферма, хотя с чисто математической точки зрения оно было написано менее систематично. Дело в том, что Декарт создал новое, более удобное буквенное исчисление, которым мы пользуемся с незначительными изменениями и сейчас, тогда как Ферма применял быстро устаревшую символику Виета. Кроме того, Декарт представил новую алгебру вместе с координатным методом как «универсальную математику», общий метод для решения всех задач. Такая «реклама» не в меньшей мере, чем новая алгебра, способствовала популярности его произведения.

---

*) «Квант», 1975, № 12, с. 30 и в этом номере — с. 17.

**) Под «плоскими местами» Ферма, следуя древним, понимал прямые и окружности, под «пространственными местами»— конические сечения.

### Квадратуры парабол и гипербол. Вычисление длин кривых

До Ферма систематические методы *квадратур*, т. е. вычисления площадей, разрабатывал итальянский ученый Б. Кавальери (1598—1647). Он написал довольно толстую книгу «Геометрия неделимых» (1635), в которой вычислялась площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью абсцисс и прямой $x = 1$. Впоследствии (1647) он вычислил аналогичные площади для парабол $y = x^3$, $y = x^4$, ... ..., $y = x^9$.

Но уже в 1642 г. Ферма открыл метод *вычисления площадей фигур*, ограниченных любыми «параболами» $y = ax^{p/q}$ $(p/q > 0)$ и любыми «гиперболами» $y = \frac{a}{x^{p/q}}$. Изложение Ферма занимало всего 10 страниц. Для «гиперболы», у которой $\frac{p}{q} > 1$, он впервые вычислил площадь неограниченной фигуры, расположенной между осью абсцисс, прямой $x = x_0$ и кривой (рис. 2). Таким образом, было показано, что площадь неограниченной фигуры может быть конечной.

Ферма, один из первых, занялся задачей спрямления кривых, т. е. вычислением длины их дуг. Он сумел свести эту задачу к вычислению некоторых площадей. Так, он показал, что вычисление длины дуги параболы $y^2 = 2px$ от точки $(0, 0)$ до некоторой точки $(x_1, y_1)$ (рис. 3) сводится к нахождению площади фигуры, ограниченной гиперболой $x^2 - y^2 = p^2$, осью ординат, осью абсцисс и прямой $y = y_1$ (рис. 4).

Ферма оставался только шаг, чтобы перейти от «площади» к абстрактному понятию «интеграла». Этот шаг был сделан Ньютоном и Лейбницем уже после его смерти.

### Нахождение экстремумов. Определение касательных

Не позднее 1629 г. Ферма открыл методы нахождения экстремумов и касательных, которые с современной точки зрения сводятся к отысканию производной. В конце 1636 г. законченное изложение метода было передано Мерсенну и с ним могли позна-

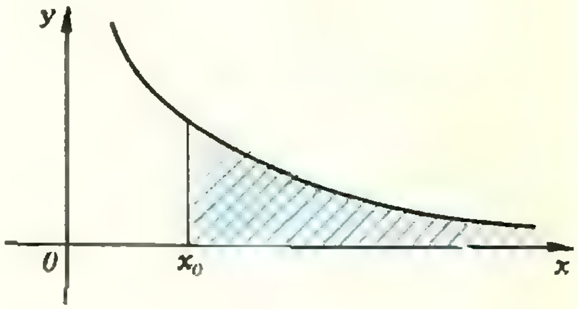


Рис. 2.

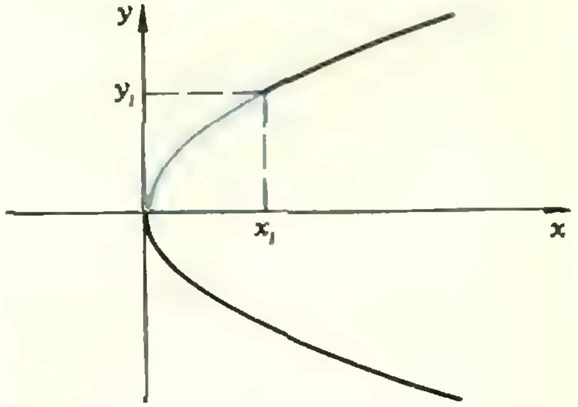


Рис. 3.

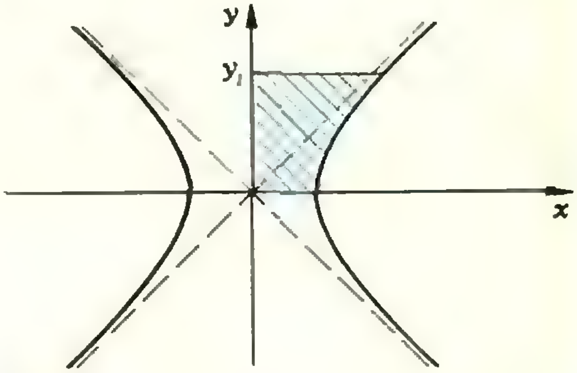


Рис. 4.

комиться все желающие. Он сообщил о своем методе и в письме к Декарту (1638 г.). Для нахождения экстремума многочлена $F(x)$ Ферма предлагает следующее правило: 1) подставляем в $F(x)$ вместо $x$ выражение $x + h$; 2) приравниваем $F(x)$ и $F(x + h)$: $F(x) = F(x + h)$; 3) после приведения подобных членов сокращаем на $h$; 4) полагаем $h = 0$. В результате получаем равенство $A(x) = 0$. Ферма утверждает, что все значения $x$, при которых многочлен $F(x)$ имеет экстремум, необходимо являются корнями уравнения $A(x) = 0$. Сама функция $A(x)$, которая по правилу Ферма получается чисто алгебраически (т. е. без предельного перехода), теперь называется производной от $F(x)$.

Как Ферма обосновывал свое правило? Он предложил несколько различных обоснований. Приведем одно из них в несколько модернизированном виде. Пусть многочлен $F(x)$ достигает максимума в точке $x_0$. Это значит, что при небольших $h > 0$ имеем $F(x_0 + h) < F(x_0)$ и $F(x_0 - h) < F(x_0)$. Располагая члены многочленов $F(x_0 \pm h)$ по степеням $h$, получим систему:

$$\begin{cases} F(x_0) + h \cdot A(x_0) + \ldots \\ \ldots + h^n \cdot Q(x_0) < F(x_0), \\ F(x_0) - h \cdot A(x_0) + \ldots \\ \ldots + (-1)^n \cdot h^n \cdot Q(x_0) < F(x_0), \end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned} &A(x_0) + h \cdot B(x_0) + \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots + h^{n-1} \cdot Q(x_0) < 0, \\ &-A(x_0) + h \cdot B(x_0) - \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots + (-1)^n \cdot h^{n-1} \cdot Q(x_0) < 0. \end{aligned}$$

Но при малых $h$ знак суммы будет зависеть только от $A(x_0)$. Тогда из первого неравенства следует, что $A(x_0) \leqslant 0$, а из второго: $A(x_0) \geqslant 0$. Итак, необходимо, чтобы $A(x_0) = 0$.

Ферма дал также общий метод для определения того, будет ли точка $x_0$, в которой $A(x) = 0$, точкой максимума, минимума или точкой перегиба функции $y = F(x)$. С современной точки зрения метод был основан на рассмотрении второй производной.

Заметим, что все методы Ферма были вполне строгими. После него математики отбросили требование строгости и перешли к некритическому оперированию с бесконечно малыми величинами, определить которые они не умели. Строгие методы в математическом анализе появились вновь только в начале прошлого века в работах Гаусса и Коши.

Ферма первым увидел связь между задачами на отыскание экстремумов и задачами на определение касательных. Он дал метод нахождения последних, основанный на том же принципе, что и его метод экстремумов. Теперь в основе обоих методов лежит нахождение производной.

Дальнейшие успехи методов определения «площадей», с одной стороны, и «касательных и экстремумов», с другой, состояли в установлении их взаимной связи. Есть указания на то, что Ферма уже знал, что «задачи на площади» и «задачи на касательные» являются взаимно обратными. Но он нигде не развил свое открытие подробно. Поэтому честь его по праву принадлежит И. Барроу, И. Ньютону и Г. В. Лейбницу, которым это открытие и позволило создать дифференциальное и интегральное исчисление.

## Теория чисел

Если в описанных нами работах Ферма исследовал вопросы, которые были в центре внимания и других математиков его времени (Кеплера, Кавальери, Торричелли, Блеза Паскаля, Валлиса), то в теории чисел он был первооткрывателем. Никто из его современников и никто из математиков, живших после него вплоть до Эйлера, не понимал ни значения поднятых им проблем, ни внутренней их связи.

От античности остались две большие работы, посвященные вопросам теории чисел: «Начала» Евклида

(III в. до н. э.) и «Арифметика» Диофанта (по-видимому, середина III в. н. э.). В первой из них были изложены элементы арифметики целых чисел, доказаны однозначность разложения на простые множители и бесконечность множества простых чисел.

«Арифметика» Диофанта до сих пор представляется одним из загадочнейших явлений в истории науки. По своему стилю она резко отличается от классических произведений Евклида, Архимеда и Аполлония. В ней вводились обозначения для неизвестного и первых его шести положительных и отрицательных степеней; кроме того, там были введены отрицательные числа и отличительный знак для них, соответствующий нашему минусу. При решении задач под «числом» понималось не натуральное число, как это было до него, а любое рациональное. Из 13 книг, составляющих «Арифметику», до нас дошло 6 *). Все они посвящены решению неопределенных уравнений в положительных рациональных числах. В этих книгах нет теорем теории чисел в собственном смысле слова, однако при решении задач иногда накладывались ограничения на те или иные целые числа, входящие в условие задачи. По существу, каждое такое «ограничение» представляло теорему теории чисел.

Долгое время замечательная книга Диофанта не была известна в Европе. Но в XVI в. рукопись ее нашли в библиотеке Ватикана и в конце того же века был издан ее латинский перевод (со множеством «темных мест», так как переводчик не был знаком с математикой). В 1621 году вышел новый перевод Баше де Мезириака, в котором приводился параллельный греческий текст и комментарии Баше. Эта книга и сделалась настольной для Ферма. Многие свои теоремы он вычитывал из нее, на другие его наводили размышления по поводу некоторых задач, и он записывал свои мысли и открытия на полях этой книги. Впоследствии все эти замечания были изданы *). Они составляют значительную часть его наследия по теории чисел. Другие его результаты в этой области сформулированы в письмах. Обычно он ставил их в виде проблем перед другими математиками.

Сам Ферма писал: «Арифметика имеет свою собственную область, теорию целых чисел, эта теория была лишь слегка затронута Евклидом и не была достаточно разработана его последователями (если только она не содержалась в тех книгах Диофанта, которых нас лишило разрушительное действие времени); арифметики, следовательно, должны ее развить или возобновить».

Несмотря на отсутствие доказательств (из них дошло только одно), трудно переоценить значение творчества Ферма для теории чисел. Ему одному удалось выделить из хаоса задач и частных вопросов, сразу же возникающих перед исследователем при изучении свойств целых чисел, те проблемы, которые стали центральными для всей классической теории чисел. Ему же принадлежит открытие мощного общего метода для доказательства теоретико-числовых предложений — так называемого метода неопределенного, или бесконечного, спуска (см. ниже). Поэтому Ферма по праву может считаться основоположником теории чисел.

### Представление чисел квадратичными формами

Ферма поставил вопрос об определении вида целых чисел, которые представляются в виде суммы двух

---

*) Недавно были найдены еще 4 книги на арабском языке, которые приписываются Диофанту.

*) Сейчас они имеются в переводе на русский язык в комментариях к «Арифметике» Диофанта.

квадратов, т. е. формой

$$x^2 + y^2, \qquad (1)$$

где $x$, $y$ — целые.

К этому вопросу его привела одна из задач Диофанта. В ней были сформулированы условия, которым должно удовлетворять число $a$, чтобы оно представлялось формой (1), однако переписчики, не понимая смысла этих условий, неправильно их воспроизводили. Ко времени Ферма текст был безнадежно испорчен, и, чтобы его восстановить, ему пришлось решать задачу заново.

Читатель легко докажет, что числа вида $4n + 3$ не представимы формой (1). С другой стороны, числа вида $4n + 1$ могут быть как представимыми (например, $5 = 1^2 + 2^2$), так и непредставимыми (например, 21). Ферма догадался, что сначала надо исследовать, какие простые числа представляются формой (1). Он обнаружил, что все *простые* числа вида $4n + 1$ представляются формой (1), и притом единственным образом. (Это утверждение впоследствии было названо *первым дополнением к закону взаимности.*) Доказательство самого Ферма до нас не дошло. Никто из его современников также не сумел его провести. Первое доказательство было дано только Леонардом Эйлером.

Установив закон представимости простых чисел, Ферма уже легко доказал, что число $a$ тогда и только тогда представимо формой (1), когда в его разложение на простые множители никакое простое число вида $4n + 3$ не входит в нечетной степени. Путеводной нитью для него послужило утверждение Диофанта о том, что произведение двух чисел, представимых формой (1), также представимо, и притом двумя различными способами, формой (1):

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = \\ = (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2 = \\ = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2.$$

От формы (1) Ферма перешел к рассмотрению форм $x^2 + 2y^2$, $x^2 - 2y^2$, $x^2 + 3y^2$. Он нашел вид простых чисел, представимых каждой из этих форм. Для формы $x^2 + 2y^2$ это будут простые числа вида $8n + 1$ и $8n + 3$. Простые же числа вида $8n + 5$ и $8n + 7$ такой формой не представляются. Это предложение получило название *второго дополнения к закону взаимности.* Оно было доказано Ж. Л. Лагранжем (1736—1813).

Эти работы Ферма положили начало плодотворным исследованиям Эйлера, Лагранжа и Лежандра. Итог всему предшествующему развитию этого вопроса подвел Гаусс, который в начале прошлого века создал стройную теорию квадратичных форм, т. е. форм вида $ax^2 + 2bxy + cy^2$, где $a$, $b$, $c$ — целые. Оказалось, что вопрос о том, какие простые числа представимы квадратичными формами с одним и тем же дискриминантом $D = ac - b^2$, полностью решается с помощью квадратичного закона взаимности. Закон взаимности был открыт Эйлером, а затем вновь открыт и доказан Гауссом *).

### Уравнение Пелля $x^2 - Ay^2 = 1$

Это уравнение (где $A$ — натуральное число, не являющееся точным квадратом) решали в целых числах еще в древности. В новое время им заинтересовался Ферма **).

Он уже четко различал два вопроса, связанные с ним: найти *наименьшее* решение $(x_0, y_0)$, т. е. решение с наименьшим $x_0 > 0$, и найти *все* решения, исходя из наименьшего.

В феврале 1657 г. в письме к английским математикам, которое получило название «второго вызова» («первый вызов» был отправлен в Англию в январе того же года), Ферма предложил доказать, что уравнение Пелля имеет бесконечно много решений. Он предложил также решить его при $A$, равном 109, 149 и 433. Наименьшее решение уравнения Пелля при таких значениях $A$ столь велико, что его нельзя найти подбором.

---

*) «Квант», 1973, № 1 и 1974, № 5, с. 30.

**) Название «уравнение Пелля» принадлежит Эйлеру. Исторически было бы справедливее назвать его уравнением Ферма.

Математические вызовы в то время играли немалое значение для поддержания чести нации. Так, в конце «первого вызова» Ферма писал:

«Я жду решения этих вопросов; если оно не будет дано ни Англией, ни Бельгийской или Кельтской Галлией, то это будет сделано Нарбонской Галлией...».

Английский математик лорд Броункер первым пришел к мысли, что для нахождения наименьшего решения уравнения Пелля надо разложить $\sqrt{A}$ в непрерывную дробь и рассмотреть подходящие дроби к ней *). Впоследствии этим уравнением занялся Л. Эйлер, который понял, что решение Броункера основано на периодичности непрерывной дроби для $\sqrt{A}$. Полное доказательство этого факта и окончательный анализ уравнения Пелля принадлежат Ж. Л. Лагранжу.

## Малая теорема Ферма

В письме к Френиклю де Бесси от 18 октября 1640 г. Ферма высказал следующее утверждение: если число $a$ не делится на простое число $p$, то существует такой показатель $\lambda$, что $a^{\lambda}-1$ делится на $p$, причем $\lambda$ является делителем числа $p-1$. В частности, $a^{p-1}-1$ всегда делится на $p$. Это утверждение получило название *малой теоремы Ферма*. Оно является основным во всей элементарной теории чисел.

Эйлер дал этой теореме несколько различных доказательств. Кроме того, Эйлер обобщил малую теорему на случай, когда число $p$ является не простым, а любым целым, взаимно простым с $a$ *).

В поисках критерия для простоты числа Ферма от чисел вида $a^{\lambda}-1$ перешел к числам вида $a^{\lambda}+1$. Исследуя числа $2^{\lambda}+1$, он заметил что если $\lambda=2^k$, то при $k=1, 2, 3, 4$ формула $2^{\lambda}+1$ дает простые числа. Он предположил, что это будет иметь место и при любом $k$. Это опроверг Эйлер, показав, что $2^{2^5}+1$ делится на 641.

## Великая теорема Ферма и «метод спуска»

В задаче 8 книги II своей «Арифметики» Диофант поставил задачу представить данный квадрат $a^2$ в виде суммы двух рациональных квадратов. На полях, напротив этой задачи, Ферма написал:

«Наоборот, невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата и, вообще, никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки».

Это и есть знаменитая *Великая теорема*. В современных обозначениях она утверждает, что уравнение $x^n+y^n=z^n$ при $n>2$ не имеет решений в натуральных числах.

В своих письмах Ферма неоднократно предлагал доказать ее различным математикам — но никогда в таком общем виде, а только для случаев $n=3$ и $n=4$.

Теорема эта имела удивительную судьбу. В прошлом веке попытки доказать ее привели к построению очень тонких теорий, относящихся к арифметике алгебраических чисел. Без преувеличения можно сказать, что она сыграла в развитии теории чисел не меньшую роль, чем задача решения уравнений в радикалах в алгебре. С той только разницей, что эта последняя проблема уже решена Э. Галуа, а Великая теорема до сих пор побуждает математиков к новым исследованиям.

---

*) «Квант», 1970, № 1 и № 8.

*) «Квант», 1972, № 10.

С другой стороны, простота формулировки этой теоремы и загадочные слова о «чудесном доказательстве» ее привели к широкой популярности теоремы среди нематематиков и к образованию целой корпорации «ферматистов», у которых, по словам Г. Дэвенпорта, «смелость значительно превосходит их математические способности». Поэтому Великая теорема стоит на первом месте по числу данных ей неверных доказательств.

Сам Ферма оставил доказательство Великой теоремы для четвертых степеней.

В своем доказательстве Ферма применил «метод неопределенного или бесконечного спуска». Этот метод он описал в письме к Каркави (август 1659 г.) следующим образом:

«Если бы существовал некоторый прямоугольный треугольник в целых числах, который имел бы площадь, равную квадрату, то существовал бы другой треугольник, меньший этого, который обладал бы теми же свойствами. Если бы существовал второй, меньший первого, который имел бы то же свойство, то существовал бы, в силу подобного рассуждения, третий, меньший второго, который имел бы то же свойство, и, наконец, четвертый, пятый, спускаясь до бесконечности. Но, если задано число, то не существует бесконечности по спуску меньших его (я все время подразумеваю целые *) числа). Откуда следует, что не существует никакого прямоугольного треугольника с квадратной площадью».

Именно этим методом были доказаны многие предложения теории чисел.

В частности, с его помощью Леонард Эйлер дал новое доказательство Великой теоремы для $n = 4$, а спустя 20 лет и для $n = 3$. Дело в том, что последнее доказательство он смог провести только с помощью совершенно новых идей, а именно, обобщения понятия целого числа. Мы привыкли связывать это понятие только с натуральными числами, однако оказалось, что есть и другие математические объекты, которые ведут себя как целые числа. Среди этих объектов можно выделить «простые числа» и развить арифметику, аналогичную обычной. Такие числа называются теперь *целыми алгебраическими*. В прошлом веке Э. Куммер, занимаясь Великой теоремой, построил арифметику для целых алгебраических чисел определенного вида. Это позволило ему доказать Великую теорему для некоторого класса простых показателей $n$. В настоящее время справедливость Великой теоремы проверена для всех показателей $n \leqslant 5500$.

Отметим также, что Великая теорема тесно связана не только с алгебраической теорией чисел, но и с алгебраической геометрией, которая сейчас интенсивно развивается *).

В вышеупомянутом письме к Каркави, который после смерти Мерсенна занял его место в кружке парижских математиков, Ферма писал:

«Быть может, потомство будет признательно мне за то, что я показал ему, что Древние не все знали, и это может проникнуть в сознание тех, которые придут после меня для traditio lampadis ad filios **), как говорит великий канцлер Англии ***), следуя чувствам и девизу которого я добавлю: Multi pertransibunt et augebitur scientia ****)».

Это письмо получило название «Завещание Ферма».

---

*) Говоря «целые», Ферма имел в виду «целые положительные» числа.

*) «Квант», 1972, № 8

**) Передачи факела сыновьям.

***) Т. е. Френсис Бэкон.

****) Многие будут приходить и уходить, а наука обогащаться.

*Б. Мартынов*

# ТЕОРЕМА ФЕРМА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ

**Все вы, конечно, слышали о Великой теореме Ферма; она сформулирована им для натуральных чисел. В этой статье доказывается теорема Ферма для многочленов. Эта статья трудная. Некоторые факты, используемые в ней, выходят за рамки школьной программы. Заинтересовавшиеся читатели найдут все необходимое в книге Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика» или во втором томе «Энциклопедии элементарной математики».**

## Постановка задачи

Предположение, высказанное Ферма, заключается в том, что уравнение $x^n+y^n=z^n$ при $n>2$ не имеет решений в натуральных числах. Доказательство этого предположения для общего случая не найдено и по сей день.

Однако оказывается, что если заменить натуральные числа $x$, $y$ и $z$ многочленами от одной переменной $t$: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — и написать уравнение

$$[x(t)]^n+[y(t)]^n=[z(t)]^n, \qquad (1)$$

то аналогичную теорему уже удается доказать.

Уточним постановку задачи. Прежде всего заметим, что многочлены $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ удовлетворяют уравнению (1) тогда и только тогда, когда ему удовлетворяют многочлены $p(t)\cdot x(t)$, $p(t)\cdot y(t)$ и $p(t)\cdot z(t)$ (здесь $p(t)$ — произвольный многочлен, отличный от нуля). Поэтому достаточно доказать, что не существует тройки взаимно простых многочленов. Многочлены называются *взаимно простыми*, если они не имеют общего множителя, отличного от константы (константа — это многочлен нулевой степени). Кроме того, надо, конечно, исключить тривиальное решение: тройку многочленов нулевой степени, поскольку для любых $a$ и $b$ тройка

$$x(t)=a,\quad y(t)=b,\quad z(t)=\sqrt[n]{a^n+b^n},$$

очевидно, является решением уравнения Ферма.

Между прочим, при $n=1$ уравнение (1) имеет решение например,

$$x(t)=t,\quad y(t)=t+1,\quad z(t)=2t+1.$$

Имеет оно решение и при $n=2$. Легко проверить, например; что тройка

$$x(t)=t^2-1,\quad y(t)=2t,\quad z(t)=t^2+1$$

является решением уравнения

$$[x(t)]^2+[y(t)]^2=[z(t)]^2.$$

Целью статьи является доказательство аналога Великой теоремы Ферма для многочленов:

*При $n>2$ не существует трех взаимно простых многочленов $x(t)$,*

*$y(t)$, $z(t)$, из которых хотя бы один ненулевой степени, удовлетворяющих уравнению* (1).

Заметим, что теорема верна для многочленов с любыми коэффициентами (целыми, рациональными, действительными или комплексными). Но какими бы ни были коэффициенты (пусть даже и целые), приводимое ниже доказательство существенно использует *комплексные числа*. Поэтому мы советуем вам прежде, чем читать дальше, познакомиться с этим разделом алгебры — например, по упомянутой книге Р. Куранта и Г. Роббинса, или же по второй части «Алгебры и элементарных функций» Е. С. Кочеткова и Е. С. Кочетковой (учебного пособия для учащихся 10 класса). А сейчас перечислим те факты, которые мы будем считать известными.

1*. *Во множестве комплексных чисел каждое число, отличное от нуля, имеет ровно n корней n-й степени.*

2*. а) *Во множестве комплексных чисел всякий многочлен n-й степени имеет в точности n корней* (если считать при этом каждый корень столько раз, какова его кратность).

б) *Если комплексные числа $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ — корни многочлена n-й степени $x(t)$ со старшим коэффициентом, равным единице, то*

$$x(t) = (t - a_1)\cdot(t - a_2)\cdot\ldots\cdot(t - a_n).$$

Кроме того, нам понадобятся некоторые простые факты из теории делимости многочленов. Свойства делимости многочленов вполне аналогичны свойствам делимости целых чисел, поэтому читатель может переводить используемые факты на язык чисел и полностью доверять этому переводу *).

Самое важное из этих свойств — это аналог утверждения об однозначности разложения любого натурального числа в произведение простых множителей.

3*. *Любой многочлен степени $n \geqslant 1$ однозначно разлагается в произведение «простых» многочленов.*

Те читатели, которых заинтересует этот факт, найдут его строгую формулировку и доказательство в дополнении к статье.

## Доказательство теоремы

Доказывать теорему будем «от противного». Допустим, что $n > 2$ и существуют три многочлена $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1°. Многочлены $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ взаимно просты.

2°. Выполняется равенство

$$[x(t)]^n + [y(t)]^n = [z(t)]^n.$$

3°. Хотя бы один из многочленов

$$x(t),\ y(t),\ z(t)$$

не является константой.

Из приведенных условий следует, что каждый из многочленов $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ не равен тождественно нулю.

В дальнейшем мы будем опускать букву $t$ в записи всех встречающихся многочленов.

Мы будем действовать по следующему плану: вначале покажем, что существуют многочлены $x_0$, $y_0$, $z_0$, удовлетворяющие условиям 1°—3° и такие, что наибольшая из их степеней будет меньше, чем наибольшая из степеней многочленов $x$, $y$, $z$. Затем, повторив то же рассуждение, снова уменьшим наибольшую степень многочленов, образующих решение уравнения Ферма, и т. д. Ясно, что это не может продолжаться бесконечно, поскольку степень многочлена — натуральное число. Это противоречие и докажет теорему.

---

*) О делимости целых чисел в «Кванте» уже рассказывалось, правда,— давно: см. статью В. Н. Вагутена «Алгоритм Евклида и разложение на простые множители», «Квант», 1972, № 6, с. 30.

Разобьем наше доказательство на несколько этапов.

1. Из условий 1—3 следует, что *каждые два из многочленов $x$, $y$, $z$ тоже взаимно просты.* В самом деле, если, скажем, $x$ и $y$ имеют общий делитель $d$, то $z^n$ делится на $d^n$, и тогда $z$ делится на $d$, то есть $d$ является общим множителем многочленов $x$, $y$ и $z$. Это противоречит условию 1*.

2. *Пусть $m$ — наибольшая из степеней многочленов $x$, $y$, $z$* (по условию 3 $m > 0$). *Можно считать, что степень $m$ имеет многочлен $z$.* Действительно, исходное уравнение можно при желании сделать симметричным относительно $x$, $y$, $z$: надо заменить $z$ на $\varepsilon z$, где $\varepsilon$ — комплексное число, $n$-я степень которого равна $-1$: $\varepsilon^n = -1$. Получим

$$x^n + y^n + z^n = 0.$$

3. *Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ — все различные корни $n$-й степени из числа $-1$.* (Мы пользуемся тем, что у всякого комплексного числа, отличного от нуля, есть ровно $n$ различных корней $n$-й степени (см. п. 1*).) *Тогда многочлен $x^n + y^n$ раскладывается на множители*

$$x^n + y^n = \\ = (x - \varepsilon_1 y)(x - \varepsilon_2 y) \cdot \ldots \cdot (x - \varepsilon_n y).$$

Для доказательства можно поступить так: взять многочлен $u^n + 1$, корнями которого являются числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, разложить его на множители: $u^n + 1 = (u - \varepsilon_1) \cdot (u - \varepsilon_2) \cdot \ldots \cdot (u - \varepsilon_n)$ (п. 2*), а затем подставить вместо $u$ дробь $\frac{x}{y}$ и освободиться от знаменателя.

4. *Многочлены $x - \varepsilon_i y$ попарно взаимно просты.* Действительно, если бы отличный от константы многочлен $d$ был бы общим делителем многочленов $x - \varepsilon_i y$ и $x - \varepsilon_k y$ ($i \neq k$), то разность этих многочленов, равная $(\varepsilon_k - \varepsilon_i)\,y$, тоже делилась бы на $d$, а значит, и многочлен $y$ делился бы на $d$ (ведь $\varepsilon_k - \varepsilon_i$ — константа, отличная от нуля). Тогда и многочлен $x = (x - \varepsilon_i y) + \varepsilon_i y$ делился бы на многочлен $d$, что противоречит взаимной простоте $x$ и $y$ (п. 1).

5. *Если произведение попарно взаимно простых многочленов есть $n$-я степень, то каждый множитель есть $n$-я степень.* (Это — важное место; именно для его доказательства и нужен п. 3*. Попробуйте доказать п. 5 и аналогичное утверждение для целых чисел, используя однозначность их разложения на простые множители.

Доказательство п. 5 мы приводим в дополнении к статье.)

6. Так как $x^n + y^n = (x - \varepsilon_1 y) \times \times (x - \varepsilon_2 y) \ldots (x - \varepsilon_n y) = z^n$, и множители $x - \varepsilon_i y$ попарно взаимно просты, *каждый множитель $x - \varepsilon_i y$ есть $n$-я степень многочлена.* Пусть $x - \varepsilon_i y = u_i^n$, где $u_i$ — многочлен. Обозначим степень многочлена $u_i$ через $m_i$.

Выберем среди многочленов $u_i$ тот, который имеет наибольшую степень. Будем считать, что наибольшую степень имеет многочлен $u_1$.

7. $m_1 < m$.

Действительно, очевидно, что $m_1 \leqslant m$ (напомним, что $m$ — степень $z$). Если бы выполнялось равенство $m_1 = m$, то все остальные множители $x - \varepsilon_i y$ при $i > 1$ были бы константами. Возьмем $x - \varepsilon_2 y$ и $x - \varepsilon_3 y$ (это можно — ведь $n \geqslant 3$). Если $x - \varepsilon_2 y = A$, $x - \varepsilon_3 y = B$, то

$$(B - A)\,x - (B\varepsilon_2 - A\varepsilon_3)\,y = 0,$$

т. е. $x = Cy$ (ведь $A \neq B$ — докажите!), а это противоречит взаимной простоте $x$ и $y$.

Заметим также, что $m_1 > 0$, т. е. $u_1$ — не константа.

Мы хотим от многочленов $x$, $y$, $z$ перейти к трем многочленам без общего множителя, удовлетворяющим уравнению Ферма и имеющим максимальную степень, меньшую чем $m$. Покажем, что в качестве таких многочленов могут быть взяты многочлены $u_1$, $u_2$ и $u_3$ (см. п. 6), умноженные на некоторые константы.

8. Имеем:

$$\begin{cases} x-\varepsilon_1 y = u_1^n, \\ x-\varepsilon_2 y = u_2^n, \\ x-\varepsilon_3 y = u_3^n. \end{cases}$$

Подберем три числа $c_1$, $c_2$, $c_3$ (не все равные нулю) так, чтобы при сложении этих равенств с коэффициентами $c_1$, $c_2$, $c_3$ левая часть обратилась в нуль. Ясно, что для этого надо, чтобы выполнялась система

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0, \\ c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2+c_3\varepsilon_3=0. \end{cases}$$

Найти хотя бы одно ненулевое ее решение легко — например, положить $c_3=1$ и решить полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными. Проделайте это вычисление сами.

Найдя $c_1$, $c_2$ и $c_3$ получим

$$c_1u_1^n+c_2u_2^n+c_3u_3^n=0.$$

«Загоняя» коэффициенты под $n$-е степени, получим:

$$\left[\sqrt[n]{c_1}u_1\right]^n+\left[\sqrt[n]{c_2}u_2\right]^n=\left[\sqrt[n]{-c_3}u_3\right]^n.$$

Легко проверяется, что новые три многочлена удовлетворяют тем же условиям, что и $x$, $y$, $z$. При этом наибольшая степень их уменьшилась (оставаясь положительным числом).

Наш метод доказательства, придуманный еще Ферма, носит название метода *«бесконечного спуска»*. К сожалению, этот метод не проходит для доказательства неразрешимости уравнения Ферма в натуральных числах, поскольку на числа вида $x-\varepsilon_i y$, где $x$ и $y$ — целые числа, не переносится теорема об однозначности разложения на простые множители (см. п. 3*, с. 13). Исследованием этого интересного вопроса занимается «высшая арифметика» — *теория алгебраических чисел* — активно развивающаяся сейчас область математики.

## Дополнение

**А.** Докажем утверждение, сформулированное в п. 3* статьи (см. с. 13), т. е. докажем, что *любой многочлен однозначно разлагается в произведение неприводимых многочленов* (с точностью до порядка множителей и до множителя, являющегося константой). (Неприводимый многочлен — это аналог простого числа в множестве натуральных чисел: многочлен $q$ называется неприводимым, если его нельзя разложить в произведение многочленов ненулевой степени, отличных от $q$.)

Вначале покажем, что всякий многочлен можно разложить в произведение неприводимых. В самом деле, если $Q$ — неприводим, то $Q=Q$, и все в порядке. Если же $Q$ — приводим, то $Q=G_1\cdot G_2$, где $G_1$ и $G_2$ — какие-то многочлены. Если $G_1$ и $G_2$ — неприводимы, то нужное разложение получено; если же какой-то из $G_i$ ($i=1, 2$) приводим, то снова $G_i=S_1^{(i)}\cdot S_2^{(i)}$, и т. д. Ясно, что этот процесс через конечное число шагов оборвется, поскольку степень многочлена $Q$ конечна. Таким образом мы получим разложение многочлена в произведение неприводимых.

А теперь мы хотим доказать, что если для неприводимых многочленов выполнено равенство $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_l=q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_s$, то $l=s$, и для каждого $i$ найдется такое $k$, что $q_i=c\cdot p_k$. Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение: *если произведение $u\cdot v$ двух многочленов $u$ и $v$ делится на неприводимый многочлен $q$, то либо $u$, либо $v$ делится на $q$.* Разделим многочлены $u$ и $v$ на многочлен $q$ с остатком (пользуясь *алгоритмом Евклида*). Мы получим в остатке многочлены $\bar u$ и $\bar u$, степень каждого из которых меньше степени многочлена $q$, а произведение $\bar u\cdot\bar v$ делится на $q$. Нам нужно доказать, что либо $\bar u=0$ (тогда $u$ делится на $q$), либо $\bar v=0$ (тогда $v$ делится на $q$). Докажем это утверждение методом математической индукции (по степени многочлена $q$).

База индукции. Минимальная степень отличного от константы неприводимого многочлена равна 1. Пусть $q$ — линейный многочлен. Тогда, если ни $\bar u\neq 0$, ни $\bar v\neq 0$, то $\bar u=\mathrm{const}$ и $\bar v=\mathrm{const}$. Но тогда и $\bar u\cdot\bar v$ — тоже константа, а потому $\bar u\cdot\bar v$ не может делиться на $q$. Поэтому для линейных неприводимых многочленов утверждение справедливо.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение справедливо для всех неприводимых многочленов степени меньшей, чем степень нашего многочлена $q$. Докажем его для многочлена $q$. Допустим, что $\bar u\cdot\bar v\neq 0$. Поскольку $\bar u\cdot\bar v$ делится на $q$, имеем: $\bar u\cdot\bar v=q\cdot\bar q$, $\bar q\neq 0$, и степень многочлена $\bar q$ строго меньше степени многочлена $q$ (так как степень произведения $\bar u\cdot\bar v$ меньше удвоенной степени многочлена $q$). Разложим $\bar q$

в произведение неприводимых многочленов: $\bar{q} = \bar{q}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{q}_s$. Степень каждого многочлена $\bar{q}_i$ меньше степени многочлена $q$. Тогда $\bar{u} \cdot \bar{v} = q \cdot \bar{q}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{q}_s$. По предположению индукции, из того, что $\bar{u} \cdot \bar{v}$ делится на $\bar{q}_i$ (для каждого $i$), следует, что либо $\bar{u}$, либо $\bar{v}$ делится на $\bar{q}_i$. Последовательно сокращая произведение $\bar{u} \cdot \bar{v}$ на $\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_i$, получим равенство $\tilde{u} \cdot \tilde{v} = q$ ($\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ — это многочлены, полученные из $\bar{u}$ и $\bar{v}$ соответствующими сокращениями на многочлены $\bar{q}_i$). Но $q$ — непроводимый многочлен, поэтому либо $\tilde{u} = c \cdot q$, либо $\tilde{v} = c \cdot q$. Однако эти равенства выполняться не могут (из-за степеней рассматриваемых многочленов). Следовательно, предположение, что $\bar{u} \cdot \bar{v} \neq 0$, т. е. что $\bar{q} \neq 0$, неверно; значит, либо $\bar{u} = 0$, либо $\bar{v} = 0$, и утверждение доказано.

Докажем теперь однозначность разложения в произведение неприводимых многочленов. Имеем:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_l = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s.$$

Положив $u = p_1$, $v = p_2 \cdot \ldots \cdot p_l$, получим, что либо $u$ делится на $q_1$, и тогда $p_1 = cq_1$, поскольку $p_1$ — неприводим; либо $v$ делится на $q_1$. Во втором случае положим $p_2 = u_1$, а $p_3 \cdot \ldots \cdot p_l = v_1$; получим, что либо $p_2 = c \cdot q_1$, либо $p_3 \cdot \ldots \cdot p_l$ делится на $q_1$, и т. д. до тех пор, пока не найдем номера $i$, для которого $p_i = c \cdot q_1$. Поступая аналогично с $q_2$, найдем такое $k$, что $p_k = c \cdot q_2$, и т. д., для всех $m = 1, \ldots, s$. Отсюда получаем также, что $l = s$.

**Б**. Покажем что если произведение попарно взаимно простых многочленов $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ равно $n$-й степени некоторого многочлена $q$: $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = q^n$, то каждый многочлен является $n$-й степенью некоторого многочлена $f_i$ : $p_i = f_i^n$.

Разложим многочлен $q$ на неприводимые многочлены: $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$. Тогда $q^n = q_1^n \cdot q_2^n \cdot \ldots \cdot q_m^n$. Возьмем многочлен $p_1$, и пусть $p_{11}$ — неприводимый многочлен, входящий в его разложение. В силу однозначности разложения на неприводимые многочлены, $p_{11}$ совпадает с каким-то многочленом $q_l$, то есть многочлен $p_1$ делится на $q_l$. Но многочлены $p_i$, где $i \neq 1$, на $q_l$ не делятся (поскольку $p_1, \ldots, p_k$ попарно взаимно просты), и потому многочлен $p_1$ делится и на $q_l^n$, то есть $p_1 = q_l^n \cdot \bar{p}_1$. Применяя аналогичное рассуждение к многочлену $\bar{p}_1$, найдем, что $p_1 = q_l^n \cdot q_s^n \cdot \tilde{p}_1$, и т. д. (этот процесс оборвется из-за конечности степени $p_1$), пока не получим, что $p_1 = q_l^n \cdot q_s^n \cdot \ldots \cdot q_r^n = f_1^n$, где $f_1 = q_l \cdot q_s \cdot \ldots \cdot q_r$. Аналогично поступим и с остальными многочленами $p_i$; $i \neq 1$.

# Задачи наших читателей

**1**. Дан треугольник $ABC$ со сторонами $a$, $b$, $c$ и медианами $m_a$, $m_b$, $m_c$. Доказать неравенства

$$\text{а) } \frac{m_a^2}{a^2} + \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{m_c^2}{c^2} \geqslant \frac{9}{4};$$

$$\text{б) } \frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Когда в этих неравенствах достигается равенство?

**2**. Дан произвольный выпуклый четырехугольник $ABCD$ (возможно, вырожденный — две его вершины могут совпадать). Точки $P$, $K$, $S$, $N$ — середины сторон $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ соответственно. Пусть $(AK) \cap (BN) = L$; $(KD) \cap (NC) = M$; $(PC) \cap (BS) = Q$; $(AS) \cap (PD) = T$. Доказать, что

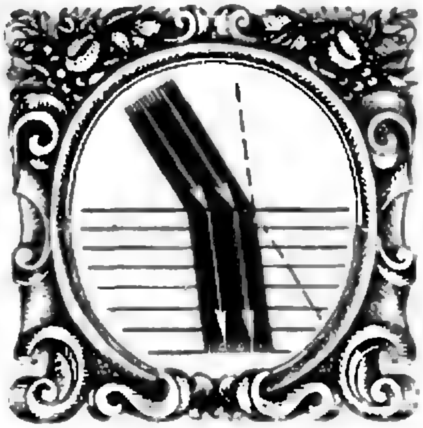
$$\text{а) } \frac{S_{KMNL}}{S_{ABCD}} \leqslant \frac{1}{3};$$

$$\text{б) } \frac{1}{3} \leqslant \frac{S_{KMNL} + S_{PQST}}{S_{ABCD}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

**3**. Снова $ABCD$ — произвольный выпуклый четырехугольник, точки $E$, $F$, $G$, $H$ — середины сторон $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ соответственно. Обозначим $(AF) \cap (BG) = K$; $(BG) \cap (CH) = L$; $(CH) \cap (DE) = M$; $(DE) \cap (AF) = N$. Доказать, что

$$\frac{1}{6} \leqslant \frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} \leqslant \frac{1}{5}.$$

*В. Матизен*
(г. Новосибирск)



*Л. Турияиский*

# ПРИНЦИП ФЕРМА

История поисков закона преломления растянулась почти на два тысячелетия. Весь необходимый «инструмент» для открытия закона был в арсенале античных ученых. Так, Клавдий Птолемей (II в. н. э.) получил экспериментально довольно точные значения углов падения и преломления света. Он же составил первые таблицы значений тригонометрических функций. Но Птолемей пытался установить закономерность в соотношении углов падения и преломления и не догадался заменить углы их тригонометрическими функциями.

В последующие века вплоть до XVII исследованием преломления света занимались многие ученые. Среди них были и крупнейший оптик средневековья Ибн-ал-Хайтан (Альхазен), и создатель небесной механики великий Кеплер. Однако никому из них не удалось установить закона преломления света.

...В 1637 году аббат Мерсенн переслал Пьеру Ферма первые главы трактата Декарта «Диоптрика» с тем, чтобы Ферма высказал свое мнение об этом труде. Одна из глав была посвящена законам отражения и преломления.

Декарт рассматривает движение мяча, брошенного под углом на слабо натянутую сетку. Если мяч прорывает сетку, то направление движения его меняется. Пользуясь простыми геометрическими соображениями, Декарт получает соотношение между тригонометрическими функциями углов падения и преломления мяча:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \text{const}.$$

А затем, без каких-либо обоснований, он переносит это условие на случай распространения света при прохождении им границы двух сред *). Во времена Декарта считали, что более плотная среда всегда сильнее преломляет свет, и чтобы увязать с этим фактом свои теоретические результаты, Декарт заключает, что скорость света в более плотной среде больше, чем в менее плотной (что, конечно, не верно!). Надо сказать, что все физические рассуждения Декарта были очень неясными, и понять, что подразумевает Декарт под светом, невозможно.

Ферма отправил свой отзыв на «Диоптрику» Мерсенну. В нем он высказал, в основном, два замечания, касавшиеся вывода закона преломления. Ферма считал совершенно неправомерным перенос свойств движения брошенных тел на распространение света. Еще менее обоснованным, по мнению Ферма, являлось утверждение, что свет должен двигаться в более плотной среде с большей скоростью, чем в менее плотной. Из всего этого Ферма делает вывод, что формулировка закона преломления, приводимая Декартом, не верна.

---

*) Раньше Декарта закон преломления открыл голландский физик, математик и астроном Снеллаус. Однако, он нигде не опубликовал своих результатов.

Мерсенн переслал отзыв Ферма Декарту. Чтобы Декарт почувствовал авторитет рецензента, с работами которого он не был знаком, Мерсенн вложил в письмо еще и работу Ферма «О методе нахождения наибольших и наименьших значений». Это была та область математики, в которой Декарт имел значительные результаты и считал себя первопроходцем.

Ответ Декарта на рецензию был резким и во многом не справедливым. После обмена несколькими письмами каждая из сторон осталась при своем мнении, и дискуссия переключилась на метод нахождения наибольших и наименьших значений.

К оптической проблеме Ферма возвратился только через 20 лет, уже после смерти Декарта. Толчком для некоторых новых идей о пути установления закона преломления ему послужила книга по оптике его друга Кюро де ла Шамбра. В этой книге были приведены выводы законов отражения света на основе «принципа кратчайшего пути», сформулированного древнегреческим ученым Героном (I в. н. э.).

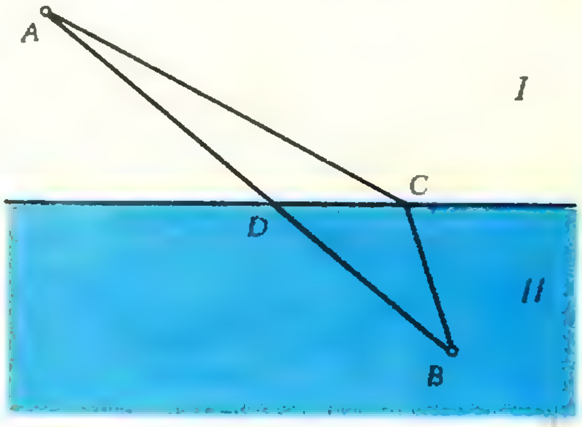
В трактате «Катоптрика» Герон, рассматривая отражение света от плоских и сферических зеркал, постулировал следующее утверждение: свет отражается таким образом, чтобы путь луча, падающего из данной точки и отражающегося в данную точку, был минимальным.

Однако во многих случаях свет этому принципу не следовал. В частности, при распространении света в неоднородной среде путь света от одной точки до другой оказывался далеко не минимальным.

Занявшись вновь поисками закона преломления, Ферма решил попытаться видоизменить принцип Герона. Основная его идея заключалась в следующем. «Кратчайшие» пути, выбираемые светом, следует понимать как самые «легкие», как пути, на которых свет испытывает наименьшее «сопротивление» со стороны среды, в которой он распространяется. Четкого физического объяснения этому «сопротивлению» Ферма не давал. Дело в том, что он считал распространение света мгновенным. Введение же понятия «сопротивление» несомненно вызывало представление о распространении света во времени. Это, конечно, понимал Ферма, но в нем говорил, прежде всего, математик. И обойдя этот вопрос туманными рассуждениями об «антипатии» света веществу, Ферма переходит к чисто математической постановке задачи.

Пусть луч света, выходящий из точки $A$ в среде $I$ (рис. 1), попадает в точку $B$ в среде $II$. Разумеется, самый короткий путь между этими точками — это прямая $AB$. В этом случае свет проходил бы границу сред в точке $D$. Но если «сопротивление» сред $I$ и $II$ различно, то путь $ADB$ может оказаться для света не самым легким.

Пусть, например, сопротивление, оказываемое свету средой $I$ на единице пути, равно $r$, сопротивление, оказываемое средой $II$, равно



$r' = 2r$. Тогда полное сопротивление, испытываемое светом на пути $ADB$, равно, очевидно

$$r \cdot AD + 2r \cdot DB = r\,(AD + 2DB).$$

Если же предположить, что свет попадает из точки $A$ в точку $B$ по пути $ACB$, преломляясь в точке $C$ (см. рис. 1), то полное сопротивление, испытываемое светом, равно

$$r \cdot AC + 2r \cdot CB = r\,(AC + 2CB).$$

Хотя $AD + DB$ всегда меньше $AC + CB$ (где бы ни лежала точка $C$), но $AC + 2CB$ может оказаться меньше, чем $AD + 2DB$. И свет, «руководствуясь» принципом наименьшего сопротивления, выбирает для себя такой путь, чтобы сумма $AC + 2CB$ была наименьшей.

Итак, Ферма свел проблему отыскания закона преломления к решению чисто геометрической задачи. Разумеется, мы проследили ход рассуждений Ферма довольно схематично, но главное, что мы пришли именно к такой формулировке задачи, какую дал Ферма: если свет попадает из точки $A$ в среде $I$ в точку $B$ в среде $II$, сопротивление которой в $k$ раз больше, чем сопротивление среды $I$, то для отыскания пути света надо найти такую точку $C$ на границе раздела сред, чтобы сумма $AC + kCB$ была наименьшей из всех аналогично образуемых сумм.

В письме к де ла Шамбру Ферма писал: «Я согласен с Вами, что эта задача не из легких. Но поскольку природа решает ее во всех преломлениях, чтобы не отклониться от своего обычного образа действия, почему мы не можем взяться за эту задачу? Я заверяю Вас, что предложу решение этой задачи, когда это Вам будет угодно...» Однако сделать это оказалось далеко не просто, несмотря на то, что к тому времени Ферма разработал блестящий метод решения экстремальных задач (задач на нахождение наибольших и наименьших значений).

Еще прежде чем Ферма взялся за задачу применения своего метода к этой оптической проблеме, появилась некоторая помеха, которая едва не расхолодила его в самом начале пути. Ферма не признавал закона преломления, выведенного в свое время Декартом. Он считал, что решение задачи методом максимума и минимума с учетом принципа наименьшего сопротивления даст верный закон преломления света, который, несомненно, будет отличаться от результата Декарта. Однако многие ученые, с мнением которых Ферма считался, располагали к тому времени обширными экспериментальными данными, которые прекрасно согласовывались с соотношением Декарта. Это несколько обескураживало Ферма. Но в конце концов он пришел к мысленному заключению, что декартовское соотношение, хотя оно и не верно, может быть столь близким к действительному закону преломления, что заметить различие чрезвычайно трудно даже самому проницательному наблюдателю. Поэтому он решился атаковать проблему, несмотря на кажущийся приговор эксперимента.

На решение задачи ушло 4 года. Как же был удивлен Ферма, когда после трудоемких математических выкладок он получил то самое соотношение, которое надеялся опровергнуть:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \mathrm{const}!$$

Результат Ферма подтверждал справедливость формулировки закона преломления, данной Декартом, а большинство физиков к тому времени не сомневались в ее абсолютной точности; принцип Ферма согласовывался с законами отражения света; и тем не менее, у многих он вызвал крайнее недоверие. Среди тех, кто ополчился на этот «злосчастный» принцип, был младший современник Ферма Гюйгенс. Его раздражала физическая незаконченность этого принципа и прежде всего неопределенность понятия «сопротивление», полная неясность в вопросе о распространении света во времени. Но мы хотим еще раз подчеркнуть, что Ферма смотрел на эти вопросы сквозь пальцы, интересуясь исключительно математической стороной проблемы.

Очень скоро резкие суждения по поводу принципа Ферма стали смягчаться. Тот же Гюйгенс, повторив расчеты Ферма и убедившись в их безукоризненности, настолько уверовал в этот принцип, что при создании волновой теории света использовал этот замечательный «феномен Ферма».

Практически все дальнейшее развитие лучевой оптики и построение волновой оптики так или иначе было связано с принципом Ферма. По мере накопления экспериментальных и теоретических данных формулировка его уточнялась и видоизменялась. Установление зависимости скорости распространения света от плотности среды позволило выявить смысл константы в законе преломления:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n = \frac{v_1}{v_2},$$

где $n = v_1/v_2$ — относительный показатель преломления, равный отношению скоростей света в средах *I* и *II* (см. рис. 1). Это устранило неясность, связанную с понятием сопротивления, и позволило сделать следующий шаг в определении путей распространения света: под «самыми легкими» путями следует понимать пути, для прохождения которых свету требуется наименьшее время. Однако в ряде случаев (в частности, при отражении от вогнутых зеркал) свет явно «предпочитал» максимальные по времени пути...

В конце концов принцип Ферма приобрел более общую формулировку, чем та, которую дал сам Ферма:

> свет распространяется по такому пути, оптическая длина которого экстремальна, то есть она либо максимальна из всех возможных, либо минимальна, либо остается постоянной.

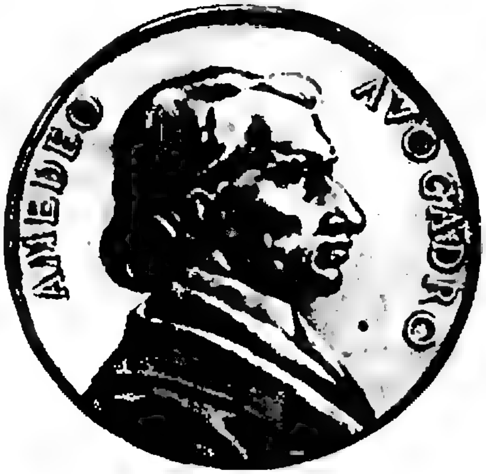
Оптической длиной пути в случае однородной среды называют произведение геометрической длины пути *s* на абсолютный показатель преломления вещества: $l = ns$. Если среда неоднородна, то оптическая длина пути равна сумме оптических длин в различных участках, показатели преломления в которых постоянны.

Принцип Ферма оказался первым четко и сознательно сформулированным экстремальным, или точнее, вариационным принципом.

И. Бернулли в конце XVIII века с помощью принципа Ферма решил задачу о брахистохроне — кривой кратчайшего спуска. (Мы рассказывали об этом в 12 номере нашего журнала за 1975 год.) Мопертюи и Эйлер в XVIII веке, отправляясь от того же принципа Ферма, открыли вариационный принцип в механике. Гамильтон в XIX веке создал обобщенный вариационный принцип и для механики, и для оптики. Современная теория квантовой механики основывается на принципе Гамильтона. Таким образом, принцип Ферма явился родоначальником целого семейства вариационных принципов в физике, и его влияние прослеживается плоть до наших дней. И в заключение мы предлагаем вам попытаться, основываясь на принципе Ферма, вывести законы отражения и преломления света.

Я. ГЕЛЬФЕР
В. ЛЕШКОВЦЕВ

# АМЕДЕО АВОГАДРО



к 200-летию со дня рождения

> *В его жизни внешне не было ничего выдающегося.*
>
> М. Джуа. «История химии»

Лоренцо Романо Амедео Карло Авогадро ди Кваренья э ди Черрето родился 9 августа 1776 года в Турине — столице итальянской провинции Пьемонт в семье служащего судебного ведомства Филиппо Авогадро. Амедео был третьим из восьми детей. Предки его с XII века состояли на службе католической церкви адвокатами, и по традиции того времени их профессии и должности передавались по наследству. Когда пришла пора выбирать профессию, Амедео также занялся юриспруденцией. В этой науке он быстро преуспел и уже в двадцать лет получил ученую степень доктора церковного законоведения.

Юридическая практика не увлекла Амедео, его интересы были далеки от юриспруденции. В юношеские годы он недолго посещал так называемую школу геометрии и экспериментальной физики. Она-то и пробудила в нем любовь к этим наукам. Но, не получив достаточно систематических знаний, он вынужден был заняться самообразованием. Когда ему уже исполнилось 25 лет, он стал все свободное время посвящать изучению физико-математических наук. Трудолюбие и настойчивость принесли свои плоды: в 1803 и 1804 годах он, совместно со своим братом Феличе, представил в Туринскую академию наук две работы, посвященные теории электрических и электрохимических явлений, за что и был избран в 1804 году членом-корреспондентом этой академии. В первой работе под названием «Аналитическая заметка об электричестве» он объяснял поведение проводников и диэлектриков в электрическом поле, в частности, явление поляризации диэлектриков. Высказанные им идеи получили затем более полное развитие в работах других ученых.

В 1806 году Авогадро получает место репетитора в Туринском лицее, а затем, в 1809 году, переводится преподавателем физики и математики в лицей города Верчелли, в котором он проработал около десяти лет. В этот период он знакомится с огромным количеством научной литературы, делая многочисленные выписки из прочитанных книг и журнальных статей. Эти выписки, которые он не прекращая вести до конца своих дней, составили 75 томов примерно по 700 страниц в каждом! Содержание этих томов свидетельствует об энциклопедичности интересов Авогадро, о колоссальной работе, которую он проделал, «переквалифицируясь» из юриста в физика.

В сентябре 1819 года Авогадро избирается членом Туринской академии наук. К этому времени он уже приобрел известность в кругу своих коллег работами в области молекулярной теории, электричества и химии. В 1820 году королевским указом Авогадро назначается первым профессором новой кафедры высшей физики (теперь бы мы сказали — математической физики) в Туринский университет.

Интересны взгляды Авогадро на преподавание физики, высказанные им при занятии этой должности. Итальянская наука в это время была еще очень слабо развита. Стремясь к тому, чтобы помочь своей родине сравняться по уровню развития естественных наук с другими европейскими странами, Авогадро наметил обширный план действий. Основная его идея заключалась в необходимости сочетания преподавания с научной деятельностью. Для этого надо организовать при кафедре физики два кабинета — один для учебных занятий, другой для проверки научных открытий и проведения оригинальных исследований. Это особенно важно для тех студентов, которые решат посвятить себя преподавательской деятельности в области физико-математических наук. Научный кабинет должен быть укомплектован современными приборами и соответствующим штатом сотрудников. Весьма важно также, чтобы на приобретение новых приборов регулярно отпускались необходимые суммы, которые руководитель кафедры мог бы тратить по своему усмотрению, представляя лишь письменный отчет о произведенных расходах. Кроме того, необходим научный журнал, в котором местные физики могли бы публиковать свои исследования.

Этим прогрессивным идеям не суждено было осуществиться из-за военных и политических событий в Италии начала двадцатых годов. В 1822 году, после студенческих волнений, Туринский университет был на целый год закрыт властями, а ряд его новых кафедр, в том числе и кафедра высшей физики, ликвидированы. Тем не менее, в 1923 году Авогадро получает почетный титул заслуженного профессора высшей физики и назначается старшим инспектором в палату по контролю за государственными расходами (должность финансово-юридическая, весьма далекая от науки. Вспомним, тем не менее, что Исаак Ньютон долгие годы был директором монетного двора!). Несмотря на новые обязанности, Авогадро продолжал заниматься научными исследованиями.

В 1832 году Туринский университет вновь получил кафедру высшей физики, но ее предложили не Авогадро, а известному французскому математику Огюстену Луи Коши, покинувшему родину в 1830 году. Только спустя два года, после отъезда Коши, Авогадро смог занять эту кафедру, где и проработал до 1850 года. В этом году он ушел из университета, передав кафедру своему ученику Феличе Кью.

Свою семейную жизнь Авогадро устроил довольно поздно, когда ему было уже за тридцать. Работая в Верчелли, он познакомился с будущей женой Анной Марией Мацце ди Джузеппе, дочерью нотариуса, которая была моложе его на 18 лет. От этого брака он имел восемь детей — двоих сыновей и шесть дочерей. Никто из них не унаследовал его профессии.

Современники в своих воспоминаниях рисуют Авогадро как человека очень скромного, впечатлительного и обаятельного. Они отмечают его доброжелательность, искренность в обращении с другими людьми. «Высокообразованный без педантизма, мудрый без чванливости, презирающий роскошь, не заботящийся о богатстве, не стремящийся к почестям, безразличный к собственным заслугам и собственной известности, скромный, умеренный, доброжелательный» — так характеризует Авогадро один из его современников. По своему безразличию к почестям он представлял редкое исключение среди ученых того времени.

После ухода из университета Авогадро некоторое время занимал должность старшего инспектора Контрольной палаты, а также состоял членом Высшей статистической комиссии, Высшего совета народного образования и председателем Комиссии мер и весов. Несмотря на почтенный возраст, он продолжал публиковать свои исследования в трудах Туринской академии наук. Последняя его работа вышла из печати за три года до смерти, когда Авогадро исполнилось 77 лет. Он умер в Турине 9 июля 1856 года и похоронен в семейном склепе в Верчелли. На следующий год после смерти Авогадро в знак признания его заслуг перед наукой в Туринском университете был установлен его бронзовый бюст.

Чем же обогатил науку, в частности физику и химию, за свою долгую жизнь этот замечательный человек?

Нет ничего удивительного в том, что Авогадро начал свою научную деятельность именно с изучения электрических явлений. Электричество и магнетизм давно уже привлекали внимание ученых. Этот интерес особенно усилился после того, как Вольта в 1800 году изобрел первый источник электрического тока (вольтов столб), а также в связи с дискуссией между Гальвани и Вольта о природе электричества. Эти вопросы находились на переднем крае науки того времени, и естественно, что молодой Авогадро решил попробовать свои силы именно здесь. Работы Авогадро, посвященные разным проблемам электричества, появлялись вплоть до 1846 года. Большое внимание уделял он также исследованиям в области электрохимии, пытаясь найти связь между электрическими и химическими явлениями, что привело его к созданию своеобразной электрохимической теории. В этом отношении его исследования соприкасались с работами знаменитых химиков Дэви и Берцелиуса. Но в историю физики Авогадро вошел как открыватель одного из важнейших законов молекулярной физики.

**Бронзовый бюст Авогадро, установленный в Туринском университете.**

Почти до самого конца XVIII века химия не знала никаких количественных законов. Первым таким законом стал закон сохранения массы участвующих в реакции веществ, открытый М. В. Ломоносовым в 1756 году и независимо от него Лавуазье в 1774 году. В начале XIX века были открыты еще два закона — закон постоянства состава и закон кратных отношений. Первый из них утверждает, что каким бы путем ни было получено данное химическое соединение, состав его всегда один и тот же. Иными словами, при образовании данного сложного вещества элементы, из которых оно состоит, всегда соединяются друг с другом так, что их массы находятся в строго определенном отношении. Например, в воде отношение масс водорода и кислорода всегда равно 1:8.

Второй закон указывает, что в различных химических соединениях, образованных одними и теми же элементами, массы этих элементов относятся друг к другу как небольшие целые числа. Например, в различных окислах азота ($N_2O$, $NO$, $N_2O_3$, $N_2O_5$) массы кислорода и азота относятся друг к другу как 1:2, 1:1, 3:2, 5:2.

OPERE SCELTE

DI

AMEDEO AVOGADRO

DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

TORINO
UNIONE TIPOGRAFICO EDITRICE TORINESE

Титульный лист «Избранных трудов» Авогадро, изданных в 1911 году.

Для объяснения этих законов знаменитый английский химик Дальтон выдвинул гипотезу о том, что все простые вещества (элементы) состоят из простых атомов, а сложные — из «сложных атомов», которые при химических реакциях могут распадаться на атомы простых веществ. До этого в химии не существовало четкого разграничения понятий «атом» и «молекула». Оба эти понятия были слиты воедино в термине «частица», которая рассматривалась как бесструктурная единица вещества. Дальтон составил первую таблицу относительных атомных масс элементов, приняв атомную массу водорода за единицу. (Как показал позднее Авогадро, эта таблица была неверной, так как Дальтон считал, что газообразный водород участвует в реакциях в виде одноатомного вещества (H), а в действительности реакции происходят с участием молекулярного водорода ($H_2$). По этой же причине оказались неправильными представления Дальтона о составе молекул.)

В 1808 году французский ученый Гей-Люссак, изучая реакции между газами, установил, что объемы вступающих в реакцию газов и газообразных продуктов реакции относятся как небольшие целые числа. (Конечно, при этом все объемы должны быть измерены при одинаковых давлениях и температурах). Например, в реакции образования водяного пара объемы водорода, кислорода и паров воды относятся как 2:1:2, т. е.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | + | 1 | = | 2 |
| объема водорода | | объем кислорода | | объема водяного пара |

В реакции образования хлористого водорода объемы водорода, хлора и продуктов реакции относятся как 1:1:2, т. е.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | + | 1 | = | 2 |
| объем водорода | | объем хлора | | объема хлористого водорода |

Согласно представлениям Дальтона указанные реакции должны были выглядеть так:

$$2H+O=H_2O, \quad H+Cl=HCl.$$

При этом должно было бы образоваться по одному объему паров воды и хлористого водорода. Так что согласовать опытные данные Гей-Люссака с теорией Дальтона было невозможно.

В такой ситуации и появилась в 1811 году статья Авогадро «Очерк метода определения относительных масс элементарных молекул тел и пропорций, согласно которым они входят в соединения». Излагая основные представления молекулярной теории, Авогадро показал, что она не только не противоречит данным, полученным Гей-Люссаком, но напротив, прекрасно согласуется с ними и открывает возможность точного определения атомных масс, состава молекул и характера происходящих химических реакций. Для этого прежде всего необходимо предположить, что молекулы водорода, кислорода, хлора и некоторых других простых веществ состоят не из одного, а из двух атомов.

В этой же работе Авогадро пришел к следующему важному заключению: «...число... молекул всегда одно и то же в одинаковых объемах любых газов». (Разумеется, что объемы измерены при одинаковых давлениях и температурах.)

Далее он писал, что теперь «имеется средство очень легкого определения относительных масс молекул тел, которые можно получить в газообразном состоянии, и относительного числа молекул в соединениях».

В самом деле, отношение масс молекул таково же, как и отношение плотностей газов при одинаковых давлениях и температурах. Если у нас есть два разных газа, массы которых равны $M_1$ и $M_2$, а объемы, измеренные при одинаковых температурах и давлениях, соответственно $V_1$ и $V_2$, то, следуя Авогадро, мы можем написать такое соотношение:

$$\frac{M_1}{M_2}=\frac{m_1 N_1}{m_2 N_2}, \tag{1}$$

где $m_1$ и $m_2$ — массы молекул первого и второго газов, а $N_1$ и $N_2$ — число таких молекул в объемах $V_1$ и $V_2$. Разделив в этом выражении числители обеих дробей на $V_1$, а знаменатели на $V_2$, получим:

$$\frac{\frac{M_1}{V_1}}{\frac{M_2}{V_2}}=\frac{m_1\frac{N_1}{V_1}}{m_2\frac{N_2}{V_2}}. \tag{2}$$

Но $M_1/V_1$ и $M_2/V_2$ — плотности газов $\rho_1$ и $\rho_2$, а $N_1/V_1$ и $N_2/V_2$ — числа молекул в единице объема. Согласно Авогадро $\frac{N_1}{V_1}=\frac{N_2}{V_2}$. При этом соотношение (2) принимает следующий вид:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{m_1}{m_2}.$$

Авогадро приводит такой пример: плотности кислорода и водорода равны 1,10359 и 0,07321 (за единицу принята плотность атмосферного воздуха). Следовательно, отношение масс молекул кислорода и водорода примерно равно $\frac{1{,}10359}{0{,}07321}\approx\frac{15}{1}$ *).

Из опытов Гей-Люссака следует, что для образования двух каких-либо одинаковых объемов водяного пара необходимо два таких же объема водорода и один объем кислорода. Значит, на каждую молекулу кислорода приходится по две молекулы водорода. Если бы молекулы водорода и кислорода состояли из одного атома, то мы имели бы реакцию $2H+O=H_2O$, в результате которой из двух объемов водорода и одного объема кислорода получился бы один объем воды. Но это противоречит результатам опытов Гей-Люссака. Следовательно, приходится предположить

---

*) По более точным данным масса молекулы кислорода в 16 раз больше массы молекулы водорода.

что в каждом элементарном акте реакции возникает по две молекулы воды ($2H_2O$), а молекулы кислорода и водорода содержат по два атома ($O_2$ и $H_2$). Так мы приходим к правильной формуле реакции:

$$2H_2+O_2=2H_2O.$$

Эта хорошо нам знакомая формула впервые была получена Авогадро.

В 1814 году появляется вторая статья Авогадро «Очерк об относительных массах молекул простых тел, или предполагаемых плотностях их газа, и о конституции некоторых из их соединений». Здесь четко формулируется закон Авогадро: «...равные объемы газообразных веществ при одинаковых давлениях и температурах отвечают равному числу молекул, так что плотности различных газов представляют собою меру масс молекул соответствующих газов». Далее в статье рассматриваются приложения этого закона для определения состава молекул многочисленных неорганических веществ.

Так как молярная масса (масса одного моля вещества) пропорциональна массе отдельной молекулы, то закон Авогадро можно сформулировать как утверждение, что моль любого вещества в газообразном состоянии при одинаковых температурах и давлениях занимает один и тот же объем. Как показали эксперименты, при нормальных условиях ($p=1$ *атм*, $t=0\,^{\circ}C$) он равен 22,414 *л*. Число молекул в грамм-молекуле любого вещества одинаково. Оно получило название числа Авогадро. Его принято обозначать буквой $N_A$. По современным данным

$$N_A=6{,}022094\cdot 10^{23}\ \textit{моль}^{-1}.$$

Это число — одна из важнейших универсальных постоянных современной физики и химии. Она используется при определении ряда других универсальных постоянных, например, постоянной Больцмана, постоянной Фарадея и т. п.

Число Авогадро можно определить многими независимыми друг от друга методами. Прекрасное совпадение полученных при этом значений является убедительным доказательством реальности молекул и справедливости молекулярно-кинетической теории.

В 1821 году в статье «Новые соображения о теории определенных пропорций в соединениях и об определении масс молекул тел» Авогадро подвел итог своей почти десятилетней работы в области молекулярной теории и распространил свой метод определения состава молекул на целый ряд органических веществ. В этой же статье он показал, что другие химики, прежде всего Дальтон, Дэви и Берцелиус, не знакомые с его работами, продолжают придерживаться неверных взглядов на природу многих химических соединений и характер происходящих между ними реакций.

Эта работа интересна еще в одном отношении: в ней впервые встречается имя Ампера, по выражению Авогадро, «одного из самых искусных физиков наших дней», в связи с его исследованиями в области молекулярной теории. Эту сторону деятельности Ампера обычно не упоминают, поскольку его заслуги в области электродинамики затмевают все остальные работы. Тем не менее, Ампер работал и в области молекулярной физики и независимо от Авогадро (но несколько позже) пришел к некоторым из идей, высказанных Авогадро. В 1814 году Ампер опубликовал письмо к химику Бертолле, в котором сформулировал положение, по существу совпадающее с законом Авогадро. Здесь же он указывал, что соответствующая работа Авогадро стала ему известна уже после написания письма к Бертолле.

Чтобы закончить рассказ о работах Авогадро в области молекулярной теории, отметим, что в 1837—1841 годах он издал четырехтомное сочинение «Физика весомых тел, или трактат об общей конституции тел».

Каждый том имел более 900 страниц. К этому времени Авогадро уже исполнилось 65 лет, но ум его по-прежнему был ясным, а любовь к науке и трудолюбие неиссякаемыми. Этот труд оказался первым в истории учебником молекулярной физики.

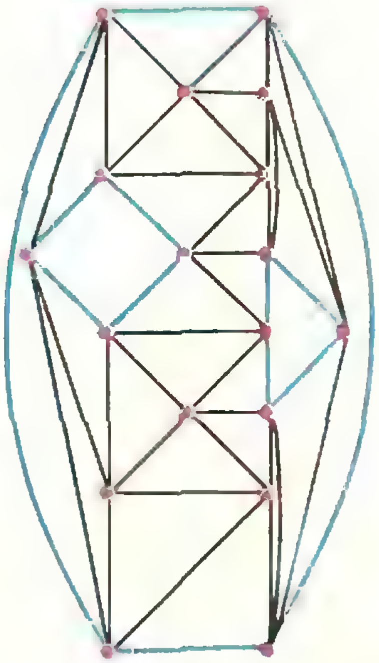
Огромный вклад Авогадро в развитие молекулярной теории долгое время оставался практически незамеченным современниками. Более того, открытый им закон большинство ученых связывало с именем Ампера. (И даже много позже этот закон в литературе часто именовали законом Авогадро — Ампера, хотя Авогадро сформулировал его на три года раньше Ампера.) Вплоть до начала 60-х годов XIX века в химии царил произвол как в оценке молекулярных масс, так и в описании химических реакций; оставалось немало неверных представлений об атомном составе многих сложных веществ. Дело доходило даже до попыток вообще отказаться от молекулярных представлений. Лишь в 1858 году итальянский химик Канниццаро, ознакомившись с письмом Ампера к Бертолле, в котором есть ссылка на работы Авогадро, заново «открыл» эти работы и с удивлением убедился, что они вносят полную ясность в запутанную картину состояния химии того времени. В 1860 году Канниццаро подробно рассказал о работах Авогадро на Первом Международном химическом конгрессе в Карлсруэ, и его доклад произвел огромное впечатление на присутствовавших там ученых. Как сказал один из них, он почувствовал, как завеса упала с глаз, сомнения исчезли, и вместо них появилось спокойное чувство уверенности. Великий русский химик Д. И. Менделеев, также участвовавший в работе конгресса, писал позднее: «Решающим моментом в развитии моей мысли о периодическом законе я считаю 1860 год — съезд химиков в Карлсруэ, в котором я участвовал, и на этом съезде — идеи, высказанные итальянским химиком Канниццаро» (то есть, по существу, идеи Авогадро). Заслуги Авогадро как одного из основоположников молекулярной теории получили с тех пор всеобщее признание.

---

# Плоский правильный граф степени 5 с 18 вершинами

В «Кванте» № 11 за 1975 год была опубликована статья М. Каца «О плоских правильных графах». Напомним, что плоский граф называется правильным, если из каждой его вершины выходит одинаковое число ребер; это число и называется степенью графа.

В этой статье, в частности, обсуждался вопрос о числе вершин правильного графа степени 5; было доказано, что число вершин правильного графа степени 5 может быть любым четным числом, не меньшим 12, кроме 14 и, быть может, 18 (см. с. 14, 15). Недавно в редакцию пришло письмо из Чехословакии от старшего ассистента кафедры математической информации Яна Ничака с примером правильного графа степени 5 с восемнадцатью вершинами *) (см. рис.). Найденный граф имеет 3 четырехреберника и 26 трехреберников (на рисунке ребра четырехреберников — голубого цвета).



---

*) Позже еще один пример прислал В. Линис из Риги.

*А. Есаян*

# ЭВМ опровергает

Великому математику Л. Эйлеру принадлежит следующая задача:

*Обойти конем все клетки шахматной доски, побывав в каждой клетке ровно по одному разу.*

В 1823 году Варнсдорф в брошюре «Простейшее и наиболее общее решение задачи о ходе коня» предложил следующее правило обхода доски:

*На каждом ходу ставь коня на такую клетку, из которой можно совершить наименьшее число ходов на еще не пройденные клетки. Если таких клеток несколько, разрешается выбирать любую из них.*

Отметим, что правило Варнсдорфа не является алгоритмом, поскольку оно не всегда однозначно указывает следующий ход коня (см. вторую фразу правила). Например, если конь начинает свое движение с поля d4, правило Варнсдорфа позволяет ему пойти первым ходом на любое из полей b3, b5, c2, e2 (рис. 1). (Однако, если конь начинает свое движение с поля c2, то даже на первом ходу правило Варнсдорфа однозначно указывает ему, куда пойти —на поле a1!)

Варнсдорф высказал утверждение: *с какого бы поля* конь ни начинал свое движение, *любой* путь, удовлетворяющий его правилу, в конце концов приведет к полному обходу доски (т. е. к решению задачи Эйлера). До недавнего времени не было известно, справедливо ли это утверждение. Еще в 1971 году Е. Я. Гик писал в «Кванте» (№ 9, с. 53), что утверждение Варнсдорфа «на практике всегда оправдывается..., хотя оно и не подтверждено теоретически».

Для ЭВМ «Проминь-2» была составлена программа перечисления некоторого множества путей коня. Первый контрпример был построен менее чем за 1 минуту. Перебрав 6464 пути, ЭВМ получила контрпримеры

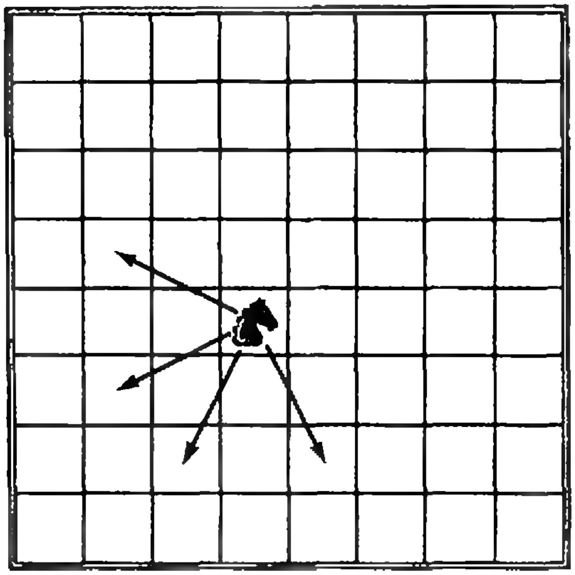


Рис. 1.

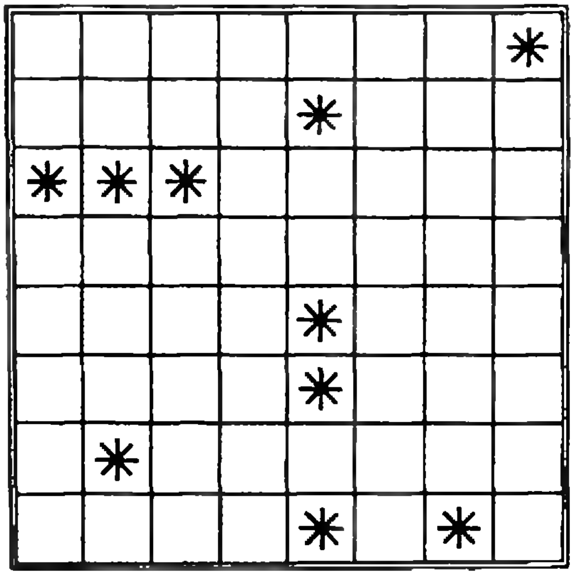
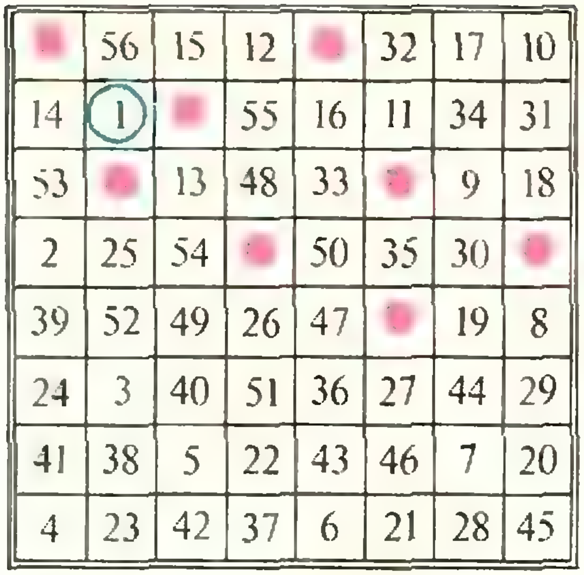
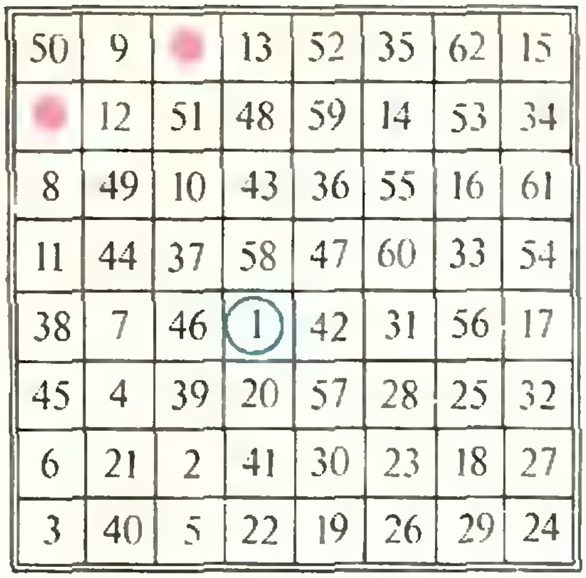


Рис. 2.



| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ● | 56 | 15 | 12 | ● | 32 | 17 | 10 |
| 14 | ① | ● | 55 | 16 | 11 | 34 | 31 |
| 53 | ● | 13 | 48 | 33 | ● | 9 | 18 |
| 2 | 25 | 54 | ● | 50 | 35 | 30 | ● |
| 39 | 52 | 49 | 26 | 47 | ● | 19 | 8 |
| 24 | 3 | 40 | 51 | 36 | 27 | 44 | 29 |
| 41 | 38 | 5 | 22 | 43 | 46 | 7 | 20 |
| 4 | 23 | 42 | 37 | 6 | 21 | 28 | 45 |

Рис. 3.



| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 9 | ● | 13 | 52 | 35 | 62 | 15 |
| ● | 12 | 51 | 48 | 59 | 14 | 53 | 34 |
| 8 | 49 | 10 | 43 | 36 | 55 | 16 | 61 |
| 11 | 44 | 37 | 58 | 47 | 60 | 33 | 54 |
| 38 | 7 | 46 | ① | 42 | 31 | 56 | 17 |
| 45 | 4 | 39 | 20 | 57 | 28 | 25 | 32 |
| 6 | 21 | 2 | 41 | 30 | 23 | 18 | 27 |
| 3 | 40 | 5 | 22 | 19 | 26 | 29 | 24 |

Рис. 4.

с 21 начального поля. Среди них были 10 контрпримеров с полей, отмеченных на рисунке 2 звездочками. Легко сообразить, что этих 10 контрпримеров достаточно, чтобы утверждать: *с какого бы поля* конь ни начинал свое движение, *существует* путь, удовлетворяющий правилу Варнсдорфа, который обрывается раньше полного обхода доски. На рисунках 3, 4 приведены 2 контрпримера (красными кружками отмечены поля, не пройденные конем).

В заключение поставим ряд задач:

1. Справедливо ли утверждение: *с какого бы поля* конь ни начинал свое движение, *существует* путь, удовлетворяющий правилу Варнсдорфа, приводящий к полному обходу доски?

2. Существует ли путь, удовлетворяющий правилу Варнсдорфа, при котором остается непройденным *нечетное* число полей? (В контрпримерах, построенных машиной, их было 2, 4, 6 или 8.)

3. Существует ли путь, удовлетворяющий правилу Варнсдорфа, при котором остается непройденным *больше* 8 полей?

4. Какое *наибольшее* количество полей может остаться непройденным при обходе доски по правилу Варнсдорфа?

---

# Задачи наших читателей

**1.** $AB$ — хорда окружности, $C$ и $D$ — точки этой окружности, лежащие по одну сторону от $AB$. Прямая $CD$ пересекает прямую $AB$ в точке $M$ ($C$ между $M$ и $D$, $A$ между $M$ и $B$). Доказать, что

$$\frac{|AC|\cdot|AD|}{|AM|}=\frac{|BC|\cdot|BD|}{|BM|}.$$

*С. Охитин* (г. Оренбург)

**2.** Решить уравнение

$$\overline{xy}^m = \underbrace{\overline{xyyy\ .\ \ .\ \ .\ y}}_{m-1},$$

где $m$ — целое число.

*Н. Михалкевич* (Минская обл.)

3. Через вершины $A$, $B$ и $C$ треугольника $ABC$ проведены прямые, пересекающиеся в одной точке $O$. Обозначим $\alpha = \widehat{OAC}$, $\beta = \widehat{OBA}$, $\gamma = \widehat{OCB}$, причем каждый из этих углов будем считать положительным, если он содержит соответствующий внутренний угол треугольника или сам содержится в нем, равным нулю, если его стороны совпадают, и отрицательным в противном случае. Пусть $O$ — одна из шести замечательных точек треугольника $ABC$ — центр вписанной или центр описанной окружности, ортоцентр или один из трех центров вневписанных окружностей. Доказать, что тогда

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}.$$

*В. Колбасенко* (г. Суходольск)

*В. Майер, Е. Мамаева*

# Опыты с порошковыми фигурами

Какое отношение имеет пыль — мелкий сыпучий порошок — к физике? Если вы думаете, что физик вспоминает о пыли только в те не очень приятные моменты, когда ему надо почистить свою экспериментальную установку, то глубоко заблуждаетесь. Невозможно даже перечислить все то, что дало науке и технике изучение свойств мелких порошков и их взвесей (суспензий), или указать те области, где эти свойства нашли применение. Вот несколько примеров. С помощью порошка впервые была достаточно точно измерена длина звуковой волны в воздухе; порошок и сейчас применяется при изучении звуковых колебаний различных пластинок и мембран. Взвешенный в жидкости порошок позволил установить реальность молекулярного движения (вспомните броуновское движение). Металлический порошок используется для наблюдения доменов ферромагнетиков. Ферромагнитные порошки применяются в дефектоскопии.

Разрабатываются и применяются колоссальные установки для улавливания пыли (без знания свойств пыли здесь не обойтись). Но столь же интенсивно ведутся работы по созданию распыляющих различные вещества установок.

Любые опыты с мелкими порошками интересны сами по себе. Кроме того, они поучительны еще и тем, что показывают, как много дает изучение обыденных вещей, на которые мы зачастую не обращаем внимания.

Предлагаем вам несколько простых, но очень эффектных опытов. Они не требуют никакого сложного оборудования, поэтому вы их сможете провести даже в домашних условиях.

## Получение порошковых фигур

На алюминиевую пластинку равномерным тонким слоем насыпем порошок зубоврачебной пластмассы «Протакрил» (продается во всех аптеках). Пластинку проводником соединим с конденсатором (емкость конденсатора $C = 0{,}01$ *мкф*, рабочее напряжение 400 *в*). Второй конец конденсатора припаяем к проводнику со штекером. Включим штекер в одно из гнезд розетки электроосветительной сети (127 или 220 *в*). Пальцем проведем по порошку, насыпанному на алюминиевую пластинку, — на пластинке останется прерывистый след (рис. 1).

Попробуем объяснить результат опыта. Переменный электрический ток в розетки квартиры поступает по двум проводам. Один из этих проводов заземлен — потенциал его равен потенциалу земли, который обычно считают равным нулю. Человеческое тело также более или менее хорошо заземлено, так что и его потенциал можно принять равным нулю. Алюминиевая пластинка через конденсатор соединена с другим проводом сети, который называют фазовым. Конденсатор «пропускает» переменный ток. Таким образом, между проводящим по порошку пальцем и самой алюминиевой пластинкой имеется переменная разность потенциалов.

Когда палец движется по порошку, в результате трения порошок электризуется, заряжаясь, например, положительно (быть может, он заряжается и отрицательно, но суть дела от этого не меняется, а выяснять, каков именно заряд порошка, мы не будем). Поскольку между алюминиевой пластинкой и движущимся пальцем имеется переменная разность потенциалов, порошок притягивается к пластинке, когда ее потенциал отрицательный, и прилипает к пальцу в те моменты, когда он имеет отрицательный потенциал относительно пластинки. Так получается тот прерывистый след, который вы видите на рисунке 1.

Описанную экспериментальную установку можно видоизменить. Заменим алюминиевую пластинку электропроводной бумагой. Ее приготовить нетрудно. Обычный лист бумаги (размером примерно 20×30 *см*) надо покрыть с одной стороны густоразведенной черной гуашью. После высыхания краски образуется тонкий электропроводный слой, имеющий довольно высокое сопротивление. Лист электропроводной бумаги кнопками следует прикрепить к фанере. Проводник можно соединить с электропроводной бумагой с помощью обычной канцелярской скрепки.

Вместо порошка пластмассы «Протакрил» в опытах лучше использовать сухой зубной порошок — прерывистый след получается более устойчивым. На электропроводную бумагу его можно нанести тонким равномерным слоем, применяя ватный тампон. При необходимости зубной порошок можно подсушить на электроплитке, насыпав порошок в металлическую баночку. Можно также использовать ликоподий или «серный цвет» (мелко истолченная сера). Первый порошок продается в аптеках, второй можно найти в школьном химическом кабинете.

Может оказаться, что для опытов нужна меньшая разность потенциалов, чем та, которая получается при непосредственном использовании напряжения сети. Для регулирования разности потенциалов между электропроводной бумагой и землей следует воспользоваться потенциометром (рис. 2; сопротивление потенциометра $R=470$ *ком*). С целью соблюдения правил техники безопасности цепь нужно смонтировать в корпусе из изоляционного материала (можно использовать подходящую пластмассовую баночку). Общий вид установки для опытов представлен на рисунке 3.

## Для чего можно использовать порошковые фигуры?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим два опыта. Разорвем проводник, идущий от конденсатора к электропроводной бумаге. В разрыв проводника включим диэлектрик: например, очищенные концы проводов несколько раз обмотаем вокруг стеклянной трубки так, чтобы расстояние между витками составляло 1—2 *см*. Проведем пальцем по насыпанному

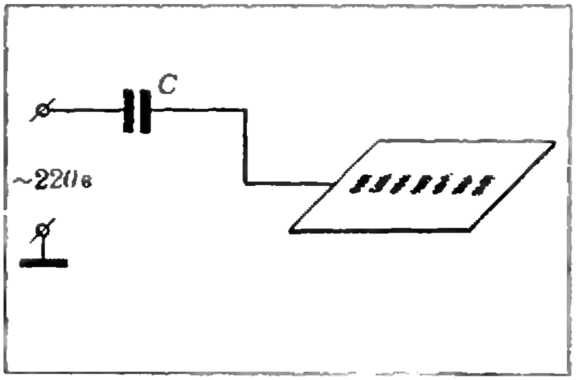


Рис 1.

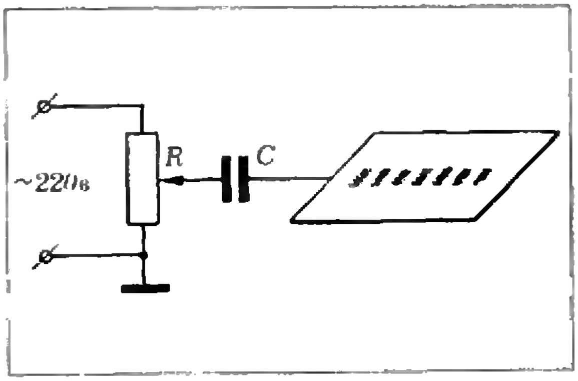


Рис. 2.

на электропроводную бумагу зубному порошку. При этом на бумаге остается, хотя и менее резкий, чем изображенный на рисунке 3, но все же отчетливый прерывистый след.

Стекло — очень хороший диэлектрик, через который электрический ток *практически* не проходит (точнее, проходит очень малый ток). Но на бумаге появился прерывистый след! Следовательно, с помощью порошковых фигур можно регистрировать чрезвычайно малые токи.

Поставим еще один опыт. В разрыв проводника, идущего от конденсатора к электропроводной бумаге, включим переключатель (тумблер), позволяющий размыкать и замыкать цепь. Проводя по порошку пальцем, включим и быстро выключим тумблер, не прекращая движения пальца. При этом на время включения тумблера след становится прерывистым. Получившиеся на траектории движения пальца светлые или темные участки мы будем называть временны́ми метками. Время, прошедшее от момента возникновения одной метки до момента появления соседней, должно составлять 0,02 *сек* (частота переменного тока $f = 1/T = 50$ *гц*). Таким образом, сосчитав число меток на траектории движения пальца, можно определить время, в течение которого был включен тумблер.

В опыте удобно использовать делитель напряжения (см. рис. 2). Дело в том, что тела, которые мы привыкли считать непроводниками, отнюдь не диэлектрики в полном смысле этого слова. Поэтому даже когда тумблер, разрывающий фазовый провод, выключен, по цепи идет небольшой ток, и на бумаге появляются порошковые фигуры. Чтобы устранить это нежелательное явление, необходимо уменьшить разность потенциалов между электропроводной бумагой и пальцем. Подобрать оптимальную разность потенциалов и позволяет делитель напряжения (потенциометр). Заметим, что этот опыт удобнее проводить вдвоем (можно предложить своему товарищу проверить его реакцию на включение и выключение тумблера).

Итак, описанные опыты показывают, что порошковые фигуры могут быть использованы для обнаружения небольших токов и измерения малых промежутков времени.

Теперь — несколько конкретных примеров.

### Ионизация воздуха пламенем

В разрыв фазового проводника сети, сделанный после конденсатора, впаяем две латунные или жестяные полоски размером примерно 10×80 *мм*. Получившиеся электроды укрепим в спичечных коробках, которые будут выполнять роль штативов. Расположим электроды параллельно друг другу так, чтобы промежуток между ними составлял 2—5 *мм* (рис. 4). Проведем пальцем по слою зубного порошка на электропроводной бумаге — след получается сплошным, без временны́х меток.

Внесем в промежуток между электродами пламя зажженной спички или горящей свечи и вновь проведем по бумаге пальцем. Сразу же на траектории движения пальца появляются временны́е метки (см. рис. 4).

В этом и аналогичных ему опытах удобно непрерывно водить пальцем по кругу; тогда нетрудно будет заметить момент появления и исчезновения временны́х меток. Проделанный опыт показывает, что в обычных условиях воздух является диэлектриком. Внесенное пламя ионизирует воздух, делает его проводником. Электрическая цепь замыкается, в цепи возникает электрический ток.

### Измерение ускорения свободного падения

Возможность с помощью порошковых фигур измерять небольшие промежутки времени можно использовать в опыте по определению ускорения свободного падения.

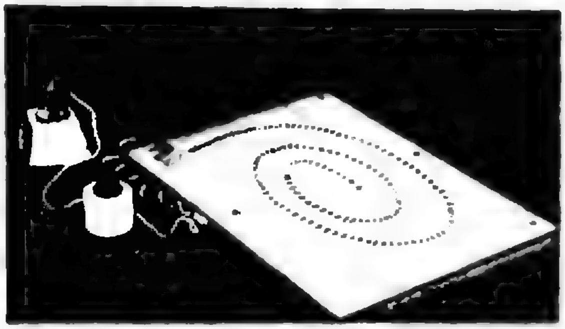


**Рис. 3. Внешний вид установки для опытов с порошковыми фигурами. Установка состоит из розетки электроосветительной сети, делителя напряжения с конденсатором и листа электропроводной бумаги с порошком.**

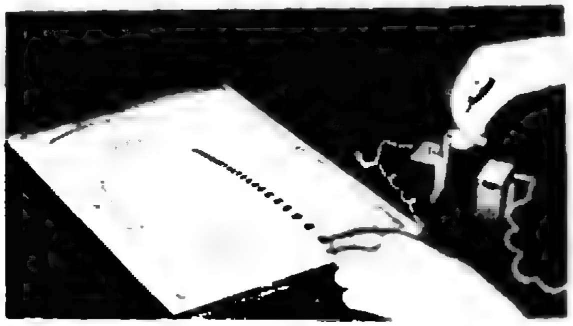


**Рис. 4. Ионизация воздуха пламенем. До внесения пламени в промежуток между электродами движущийся палец оставляет на электропроводной бумаге сплошной след; сразу после внесения пламени след становится прерывистым.**

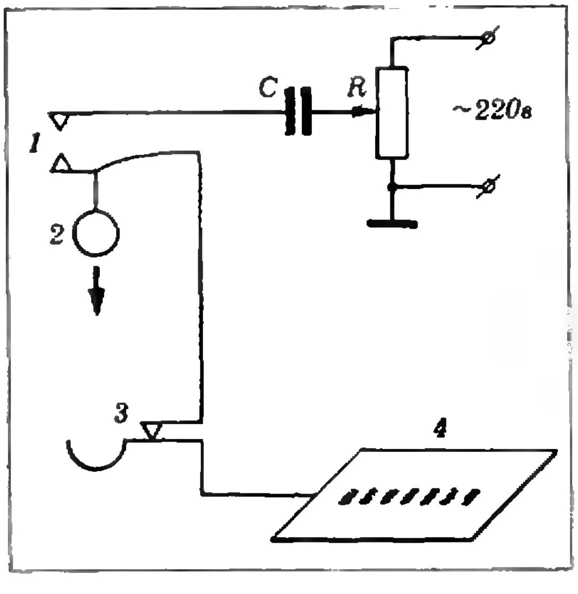


**Рис. 5. Схема установки для определения ускорения свободного падения. *1* — нормально разомкнутые контакты, *2* — падающее тело, *3* — нормально замкнутые контакты, *4* — лист электропроводной бумаги с порошком.**

Если поднятое над землей тело начинает падать, то, как известно из механики, путь $h$ оно пройдет за время $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Следовательно, ускорение свободного падения может быть найдено по формуле

$$g = \frac{2h}{t^2}, \qquad (*)$$

если известны высота $h$, с которой падает тело, и время падения $t$. Высоту можно измерить линейкой, а время падения — определить методом порошковых фигур.

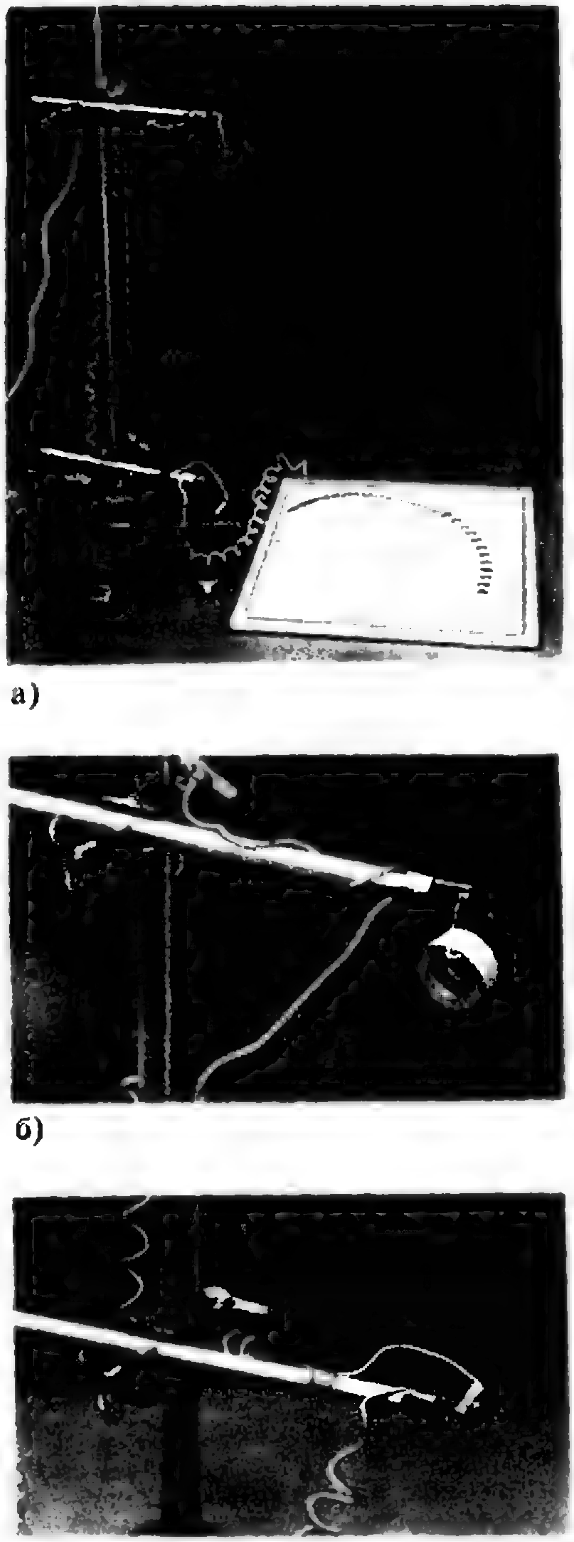
Схема экспериментальной установки приведена на рисунке 5. Проводник, идущий от конденсатора к листу электропроводной бумаги, разорван двумя парами контактов. Контакты *1* — нормально разомкнутые (к нижнему контакту с помощью нитки подвешено тело *2*, оттягивающее его вниз). Контакты *3* — нормально замкнутые. В исходном состоянии цепь разомкнута. Когда тело начинает падать, контакты *1* соединяются, и цепь становится замкнутой на промежуток времени, в течение которого тело падает. При этом на траектории движения пальца (на электропроводной бумаге *4*) образуются временные метки. Как только тело попадает на нижний контакт *3*, цепь вновь размыкается, и появление меток прекращается.

Внешний вид установки изображен на рисунке 6, *а*. Верхняя пара контактов (рис. 6, *б*) изготовлена из прикрепленных изоляционной лентой к карандашу упругих латунных полосок (можно использовать контактную пару от подходящего реле). Нижняя пара контактов устроена еще проще: на карандаше закреплена латунная полоска, на которой свободно лежит вторая полоска, припаянная к мягкому проводнику (рис. 6, *в*). Когда падающее тело ударяется о первую полоску, вторая полоска падает, и цепь размыкается.

Опыт проводится в следующем порядке. Ниткой привязывают тело к нижнему контакту верхней пары. Линейкой измеряют расстояние между телом и нижней контактной парой. Начинают вести пальцем по зубному порошку на электропроводной бумаге, и затем, не прекращая движения пальца, спичкой пережигают нить. На траектории движения пальца образуется область с отчетливыми временны́ми метками. Сосчитав число полученных меток, определяют время падения тела, и по формуле (*) рассчитывают ускорение свободного падения.

В нашем опыте путь, проходимый телом при падении, составлял 27 *см*. Число меток оказалось равным 12. Следовательно, тело падало 0,24 *сек*. Исходя из этих данных, ускорение свободного падения $g \approx 9{,}4$ $м/сек^2$. Учитывая простоту эксперимента, этот результат следует признать достаточно хорошим. Точность измерения ускорения свободного падения можно значительно повысить, если увеличить высоту, с которой падает тело.

Для успешной постановки опыта необходимо с помощью делителя напряжения подобрать такую разность потенциалов, чтобы при разомкнутой цепи метки не появлялись (напомним, что плохая изоляция приводит к фактическому замыканию цепи, и метки образуются даже тогда, когда контакты разомкнуты). Штатив в экспериментальной установке использовать совсем не обязательно: в домашних условиях карандаши с контактами можно привязать к деревянной рейке или к спинке и ножке стула.


а)

б)

в)

**Рис. 6. Экспериментальная установка для определения ускорения свободного падения. В качестве падающего тела использована массивная шайба. а) — общий вид установки. б) и в) — устройство верхней и нижней контактных пар.**

### Упражнения

1. Проведя пальцем по зубному порошку на электропроводной бумаге, получите прерывистый след. Теперь прикоснитесь пальцем другой руки к электропроводной бумаге и вновь повторите опыт. Почему в последнем случае на траектории движения пальца не остаются временны́е метки?

2. Объясните, почему порошковые фигуры могут быть использованы для регистрации малых токов?

3. Поставьте опыт, демонстрирующий фотоэффект.

# Таинственный остров

Вы узнали, конечно, иллюстрацию к роману Жюля Верна «Таинственный остров»? Колышки в песок втыкает в конец тени от шеста всезнающий и все умеющий инженер Сайрус Смит. С часами стоит журналист Гедеон Спилет... А вот подробность, которую вы могли и забыть: остров, где происходили описываемые в романе события, находился южнее 30° южной широты.

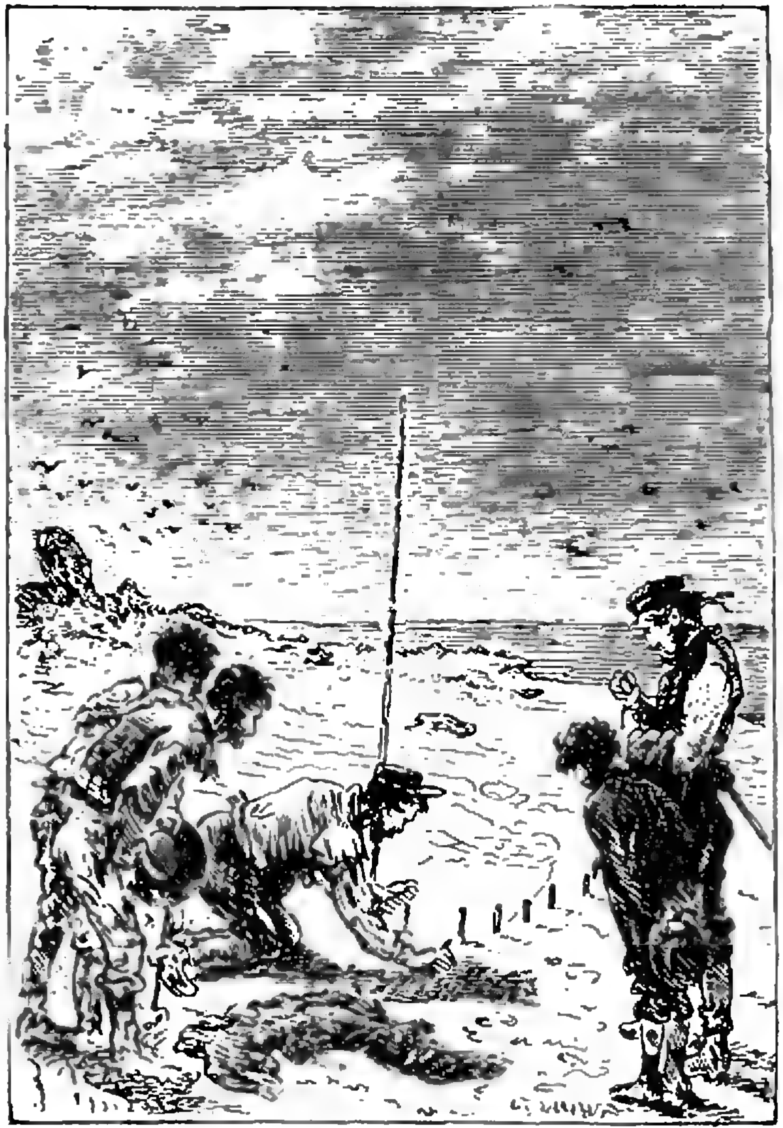
Гравер Ж. Барбан и художник П. Фера, иллюстрировавшие романы Ж. Верна, как правило, прекрасно справлялись со своей задачей.

Но в данном случае...

Попробуйте ответить на следующие вопросы:

1. Верно ли изображены тени на иллюстрации?
2. В какую сторону должна быть выпукла кривая, которую можно провести через основания колышков — от шеста или к шесту?
3. Верно ли, что колышки втыкались слева направо?

Попробуйте нарисовать кривую, которую описывает конец тени от шеста в течение дня на разных широтах. Шест направлен параллельно оси вращения Земли.



*В. Тихонов*

# Задачи-близнецы

Шахматистам знакомы так называемые «задачи-близнецы», условия которых имеют небольшое различие, а решения совершенно разные. Вот забавный пример двух математических задач-близнецов.

Между *А* и *В* произошел следующий диалог.

*А*: У вас есть дети?

*В* (1): Да, есть.

*В* (2): Да, трое.

*А*: Какого возраста?

*В*: Произведение их возрастов равно 36, а сумма — числу окон вон в том доме.

*А* (подумав): Я не могу определить их возраст.

*В*: Добавлю: старший — мальчик.

*А*: Теперь все ясно.

Требуется определить количество и возраст детей при двух вариантах ответа на первый вопрос ((1) и (2)). Самое удивительное заключается в том, что хотя ответы разные, но в том и другом случае детей трое.

*В. Шарафутдинов*
(г. Новосибирск)

# задачник Кванта

## Задачи

### М396—М400; Ф408—Ф412

**Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 ноября 1976 г. по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М396» или «...Ф408». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).**

**В этом номере «Задачник «Кванта» составлен в основном из задач, предлагавшихся на последней Всесоюзной олимпиаде. В скобках (после задач заключительного тура олимпиады) указан класс, для учеников которого предлагалась задача.**

**Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.**

**М396.** Треугольник, все стороны которого больше 1 *см*, назовем «большим». Дан правильный треугольник $ABC$ со стороной 5 *см*. Докажите, что а) из треугольника $ABC$ можно вырезать 1000 «больших» треугольников; б) треугольник $ABC$ можно разрезать на 1000 «больших» треугольников; в)* треугольник $ABC$ можно триангулировать на 1000 «больших» треугольников, то есть разбить его так, чтобы любые два треугольника либо не имели общих точек, либо имели только общую вершину, либо имели общую сторону; г) сделайте пункты б) и в) для правильного треугольника со стороной 3 *см*. (8—9 кл.)

*С. Фомин*

**М397.** На плоскости даны три окружности одинакового радиуса.

а) Докажите, что если все они пересекаются в одной точке, как показано на рисунке 1, то сумма отмеченных дуг $AK$, $CK$, $EK$ равна 180°.

б) Докажите, что если они расположены так, как показано на рисунке 2, то сумма отмеченных дуг $AB$, $CD$, $EF$ равна 180°. (8 кл.)

**М398.** На окружности расположены $n$ действительных чисел ($n \geqslant 3$), сумма которых равна нулю. Одно из этих чисел равно 1.

а) Докажите, что есть два соседних числа, различающихся не менее чем на $4/n$.

б) Докажите, что есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $8/n^2$.

в) Оценку, предложенную в предыдущем пункте, можно улучшить. Попробуйте заменить в ней число 8 каким-нибудь большим числом так, чтобы утверждение этой задачи по-прежнему выполнялось для всех натуральных чисел.

г)* Докажите, что для $n=30$ на окружности есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на 2/113. Приведите пример набора 30 чисел на окружности,

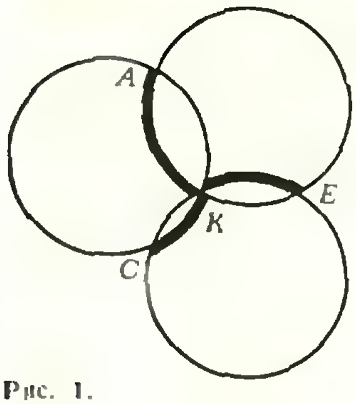


Рис. 1.

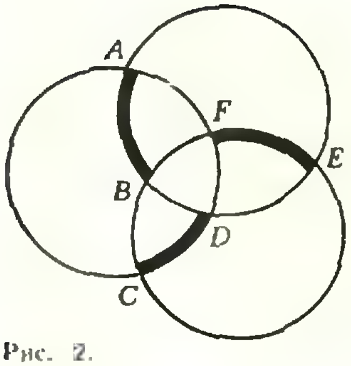


Рис. 2.

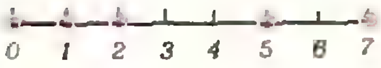


Рис. 3.

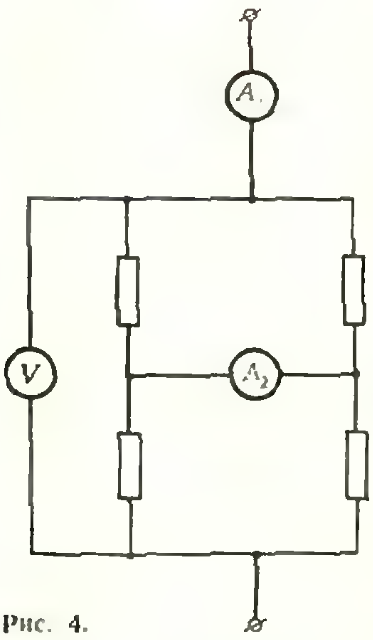


Рис. 4.

в котором ни одно число не отличается от среднего арифметического двух своих соседей более чем на 2/113.

д)* Найдите в этой задаче точную оценку разности между числом и средним арифметическим его соседей для любого $n$. (9 кл.)

**М399***. На отрезке длины 7 можно поставить пять точек (см. рис. 3) так, чтобы для любого $m = 1, 2, \ldots, 7$ нашлись две из этих пяти точек на расстоянии $m$.

Попробуйте выяснить, какое наименьшее число $k_n$ точек нужно поставить на отрезке длины $n$ так, чтобы для любого $m = 1, 2, \ldots, n$ нашлись две из этих $k_n$ точек на расстоянии $m$.

а) Решите эту задачу для нескольких первых значений $n$ (нам известно $k_n$ для $n \leqslant 13$).

б) Получите оценки для $k_n$ для любого $n$. Известны оценки $(\sqrt{8n+1}+1)/2 \leqslant k_n \leqslant \sqrt{4n+5}-1$. Постарайтесь доказать эти неравенства и, если сможете, найдите более точные оценки.

*А. Савин*

**М400**. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ назовем универсальной для данного $N$, если из нее можно получить вычеркиванием части членов любую последовательность из $N$ чисел, в которую каждое из чисел $1, 2, \ldots, N$ входит по одному разу.

а) Приведите пример универсальной последовательности из $N^2$ членов.

б) Приведите пример универсальной последовательности из $N^2-N+1$ членов.

в) Докажите, что любая универсальная последовательность состоит не менее чем из $\frac{N(N+1)}{2}$ членов.

г) Докажите, что при $N=4$ самая короткая универсальная последовательность состоит из 12 членов.

д) Попробуйте найти для данного $N$ как можно более короткую универсальную последовательность. (9 кл.)

*Г. Гуревич*

**Ф408**. Из сопротивлений в 1, 2, 3 и 4 *ом* собрана схема, показанная на рисунке 4. Какой ток течет через амперметр $A_2$, если ток через амперметр $A_1$ 5 *а*? Показания вольтметра 10 *в*. Измерительные приборы идеальные. (8 кл.)

**Ф409**. Почему с помощью линзы можно зажечь бумагу светом от Солнца, но нельзя светом от звезды? (10 кл.)

**Ф410.** В электровакуумном приборе чистый вольфрамовый катод находится в большой колбе, содержащей остатки кислорода при давлении $p = 10^{-7}$ *атм* и температуре $T = 300°$ K. Считая, что каждая молекула, попавшая на катод, прилипает к нему, оценить время образования мономолекулярного слоя. Молекулы можно считать шариками диаметром $d \approx 3 \cdot 10^{-8}$ *см*. (9 кл.)

**Ф411.** Одним U-образным ртутным манометром можно измерять давления до 1 *атм*. Какое наибольшее давление можно измерить, если соединить последовательно два таких манометра короткой трубкой? (9—10 кл.)

**Ф412.** Учитель, отвернувшись к доске, следит за классом по отражениям в стеклах очков. При этом он видит два отражения ученика, сидящего от него в 5 *м*: одно на расстоянии 5 *м*, другое — на расстоянии $\frac{5}{7}$ *м*. Повернувшись лицом к классу, он через очки видит изображение того же ученика на расстоянии 2,5 *м*. Определить показатель преломления стекла, из которого изготовлены линзы очков. (10 кл.)

# Решения задач

## М354 — М358, М360; Ф362 — Ф368

**М354.** *Можно ли расставить числа 1, 2, 3, . . ., $4n + 2$ в вершинах и серединах сторон правильного $(2n + 1)$-угольника так, чтобы сумма трех чисел, стоящих в концах и середине каждой стороны, была для всех сторон одинаковой?*

*Рассмотрите в качестве примеров случаи $n = 3$, $n = 8$.*

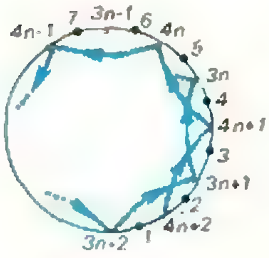


Рис. 1.

О т в е т. Можно.

Приведем один из способов расстановки. В серединах сторон многоугольника поставим по порядку числа от 1 до $2n + 1$. Расставить оставшиеся числа $2n + 2, \ldots, 4n + 2$ помогает такое соображение. Найдем сумму $S$ трех чисел, стоящих в конце и середине каждой стороны. Очевидно, $S = \frac{\Sigma + \Sigma'}{2n + 1}$, где $\Sigma = 1 + 2 + \ldots + (4n + 2) = (2n + 1) \times (4n + 3)$ — сумма всех выписанных чисел, $\Sigma' = (2n + 2) + \ldots + (4n + 2) = (2n + 1)(3n + 2)$ — сумма чисел, которые нужно расставить в вершинах; поэтому $S = 7n + 5$. Поставим теперь в вершине, общей для сторон с числами 1 и 2 посередине, число $4n + 2$, а числа $4n + 1$, $4n$, ..., $2n + 2$ будем ставить в вершинах *через одну*, считая вершину с числом $4n + 2$ начальной — см. рисунок 1 (на этом рисунке все точки расположены на одной окружности; черные точки — это «середины», красные — «вершины»). Покажем, что таким образом в каждую вершину будет поставлено нужное число (то, что это будут именно числа $2n + 2, \ldots, 4n + 2$, сомнений не вызывает). В самом деле, через $n$ шагов мы первый раз попадем в вершину, соседнюю с начальной, причем в эту вершину будет поставлено число $(4n + 2) - n = 3n + 2$, так что сумма чисел на стороне с единицей посередине окажется равной как раз $(3n + 2) + 1 + (4n + 2) = 7n + 5$. Теперь уже очевидно, что дальше эта сумма не меняется: в оставшийся «свободным» конец каждой стороны мы ставим число на единицу меньше числа, поставленного на другом конце смежной с ней стороны; зато в середине этой стороны стоит число на единицу больше, чем то, которое стоит в середине смежной стороны.

Как расставлять числа при $n = 8$, видно из рисунка 2.

*С. Берколайко*

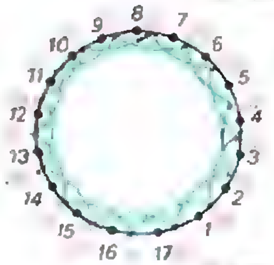


Рис. 2.

◆

**М355.** *$N$ ребят перекидываются $N$ мячами. В начале игры каждый из них бросает свой мяч кому-нибудь из своих товарищей и сам ловит брошенный кем-нибудь мяч (он может подбросить и поймать свой собственный мяч) так, что снова у всех оказывается по мячу. Затем ребята опять бросают мячи тем же, кому они бросали их в первый раз и так далее. Игра останавливается, когда все мячи вернулись к своим владельцам (чтобы мячи не перепутались, будем считать их разноцветными).*

*Докажите, что*

*а) к каждому из участников мяч вернется впервые не более чем через $N$ бросаний;*

*б) игра обязательно закончится;*

*в) для 5, 10 и 15 участников она может закончиться самое большее через соответственно 6, 30 и 105 бросаний (а какова максимальная возможная длительность игры для $N=7$, $N=8$, $N=20$?);*

*г) длительность игры всегда является делителем числа $N! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot N$;*

*д) длительность игры не может превышать $3^{\frac{N}{3}}$.*

Пусть игрок $A_1$ передал свой мяч игроку $A_2$, игрок $A_2$ — игроку $A_3$ и т. д. Поскольку игроков — конечное число, в этой последовательности рано или поздно один из игроков встретится дважды. Ясно, что первым таким игроком будет игрок $A_1$. Действительно, пусть игрок $A_n$ передает свой мяч игроку $A_k$, где $k < n$ и $k > 1$. Тогда игроки $A_n$ и $A_{k-1}$ передают мячи одному и тому же игроку, и из условия задачи следует, что игроки $A_{k-1}$ и $A_n$ — это одно и то же лицо. Поэтому игроков $A_1, A_2, \ldots$ можно расставить по кругу так, чтобы каждый игрок передавал и получал мячи от своих соседей. Всех же игроков можно расставить в несколько таких кругов. Поскольку в каждом из таких кругов стоит не более $N$ человек, мяч к любому из игроков вернется не более чем через $N$ бросаний.

Пусть всего у нас получилось $s$ кругов, в которых стоят $l_1, l_2, \ldots, l_s$ человек соответственно. Если в круге стоят $l$ человек, то после $m\cdot l$ бросаний все мячи в нем окажутся у владельцев. Поэтому игра закончится после $T =$ Н. О. К. $(l_1, l_2, \ldots, l_s)$ бросаний. (Н. О. К. $(l_1, \ldots, l_s)$ — это наименьшее общее кратное чисел $l_1, \ldots, l_s$). Поскольку все $l_i \leqslant N$, ясно, что $T$ — делитель $N!$. Таким образом, мы ответили на пункты а), б) и г) задачи. Разберем пункт д).

Заметим, что $l_1 + l_2 + \ldots + l_s = N$, и все $l_i$ — целые числа. Покажем, что $l_1\cdot l_2\cdot\ldots\cdot l_s \leqslant 3^{\frac{N}{3}}$. (В условии задачи, опубликованном в «Кванте» № 11 за 1975 год, в пункте д) была допущена опечатка: длительность игры не может превышать $3^{\frac{N}{3}}$, а не $3N/3$.) Действительно, если некоторое $l_s \geq 4$, то, заменив его на $2 + (l - 2)$, мы не изменим сумму $l_1 + l_2 + \ldots + l_s$ и не уменьшим произведения $l_1\cdot l_2\cdot\ldots\cdot l_s$. Поэтому от произведения $l_1\cdot l_2\cdot\ldots\cdot l_s$ можно перейти к не меньшему, в котором уже все сомножители не больше трех. Заменяя, если это окажется возможным, $1 + 1$ на $2$, $1 + 3$ на $2 + 2$ и $2 + 2 + 2$ на $3 + 3$, мы получим произведение вида $3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3$, $3\cdot 3\ldots 3\cdot 2$ или $3\cdot 3\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 2$ в зависимости от остатка, получающегося при делении $N$ на 3, которое не меньше любого произведения $l_1\cdot l_2\cdot\ldots\cdot l_s$. А именно: если $N$ нацело делится на 3, то возьмем $\frac{N}{3}$ троек, и получим нужную оценку; если в остатке получится 1, то возьмем $\left[\frac{N}{3}\right] - 1$ троек и две двойки; тогда $l_1\cdot l_2\cdot\ldots\cdot l_s < 2\cdot 2\cdot 3^{\left[\frac{N}{3}\right]-1} = 4\cdot 3^{\frac{N-4}{3}}$; но $4\cdot 3^{\frac{N-4}{3}} < 3^{\frac{N}{3}}$, поскольку $4^3 > 3^4$. Если же в остатке получится 2, то возьмем $\left[\frac{N}{3}\right]$ троек и одну двойку;

тогда $l_1\cdot l_2\cdot\ldots\cdot l_s < 2\cdot 3^{\left[\frac{N}{3}\right]} = 2\cdot 3^{\frac{N-2}{3}}$ и $2\cdot 3^{\frac{N-2}{3}} < 3^{\frac{N}{3}}$, так как $2^3 < 3^2$. Тем самым нужная оценка получена.

Перейдем к пункту в). Заметим, что для того, чтобы длительность игры $T =$ Н.О.К. $(l_1, l_2, \ldots, l_s)$ была максимальной, нужно разбивать число $N$ на $s$ слагаемых $l_1, \ldots, l_s$ так, чтобы они были попарно взаимно просты (если есть слагаемые $p_1q_1$ и $p_1q_2$, где $p_1$, $q_1$ и $q_2$ попарно взаимно просты, то можно перейти к слагаемым $p_1, q_1, q_2, [p_1(q_1+q_2)-p_1-q_1-q_2]$) и чтобы каждое из $l_1, \ldots, l_s$ было либо простым числом, либо степенью простого (убедитесь в этом самостоятельно). Непосредственной проверкой получаем, что наилучшее разбиение для 5 — это $2+3$; тогда $2\cdot3=6$; для 10 — это $2+3+5$, и $2\cdot3\cdot5=30$; для 15 — это $3+5+7$, и $3\cdot5\cdot7=105$.

Наконец, если $N=7$, то максимально возможная длительность игры получится, если взять $7=4+3$, — тогда $T_{\max}=4\cdot3=12$; если $N=8$, — то $8=3+5$ и $T_{\max}=15$; если $N=20$, — то $20=4+5+11$, и $T_{\max}=220$.

*Л. Лиманов*

◆

**М356.** *Из точки $M$, взятой внутри треугольника $A_1B_1C_1$, опущены перпендикуляры $MA_2$, $MB_2$, $MC_2$ на прямые $B_1C_1$, $A_1C_1$, $A_1B_1$ соответственно, затем из той же точки $M$ опущены перпендикуляры $MA_3$, $MB_3$, $MC_3$ на прямые $B_2C_2$, $A_2C_2$, $A_2B_2$ и так далее. Докажите, что в полученной последовательности треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ... треугольник $A_{3n+1}B_{3n+1}C_{3n+1}$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$.*

Докажем прежде всего такое вспомогательное соотношение: $\widehat{A}_{i+1} = B_i\widehat{M}C_i - \widehat{A}_i$ (соответственно $\widehat{B}_{i+1} = A_i\widehat{M}C_i - \widehat{B}_i$, $\widehat{C}_{i+1} = A_i\widehat{M}B_i - \widehat{C}_i$).

Действительно, поскольку $MA_{i+1}\perp B_iC_i$, $MB_{i+1}\perp A_iC_i$ и $MC_{i+1}\perp A_iB_i$, вокруг четырехугольников $MA_{i+1}C_iB_{i+1}$ и $MA_{i+1}B_iC_{i+1}$ можно описать окружности с диаметрами $MC_i$ и $MB_i$ соответственно. Поэтому $M\widehat{A_{i+1}}B_{i+1} = M\widehat{C_i}B_{i+1}$ и $M\widehat{A_{i+1}}C_{i+1} = M\widehat{B_i}C_{i+1}$ (как вписанные углы, опирающиеся на одни и те же дуги), и для угла $A_{i+1}$ имеем (см. рис. 3):

$$\widehat{A}_{i+1} = C_{i+1}\widehat{A}_{i+1}B_{i+1} = M\widehat{A_{i+1}}B_{i+1} + M\widehat{A_{i+1}}C_{i+1} =$$
$$= M\widehat{C_i}B_{i+1} + M\widehat{B_i}C_{i+1} = (\widehat{C}_i - M\widehat{C_i}B_i) + (\widehat{B}_i - M\widehat{B_i}C_i) =$$
$$= (\widehat{B}_i + \widehat{C}_i) - (M\widehat{B_i}C_i + M\widehat{C_i}B_i) =$$
$$= (180^\circ - \widehat{A}_i) - (180^\circ - B_i\widehat{M}C_i) = B_i\widehat{M}C_i - \widehat{A}_i.$$

Посчитаем теперь углы треугольника $A_4B_4C_4$. Имеем:

$$\widehat{A}_4 = B_3\widehat{M}C_3 - \widehat{A}_3 = (180^\circ - \widehat{A}_2) - (B_2\widehat{M}C_2 - \widehat{A}_2) =$$
$$= (180^\circ - B_2\widehat{M}C_2) = \widehat{A}_1.$$

Аналогично $\widehat{B}_4 = \widehat{B}_1$, $\widehat{C}_4 = \widehat{C}_1$; то есть $\triangle A_4B_4C_4 \backsim \triangle A_1B_1C_1$. Приняв треугольник $A_4B_4C_4$ за исходный ($\triangle A_1'B_1'C_1'$), точно так же докажем, что

$$\triangle A_7B_7C_7 \backsim \triangle A_4B_4C_4 \backsim \triangle A_1B_1C_1,$$

затем, что

$$\triangle A_{10}B_{10}C_{10} \backsim \triangle A_7B_7C_7 \backsim \ldots \backsim \triangle A_1B_1C_1,$$

и так далее, так что

$$\triangle A_{3n+1}B_{3n+1}C_{3n+1} \backsim \triangle A_{3n-2}B_{3n-2}C_{3n-2} \backsim \ldots \backsim \triangle A_1B_1C_1,$$

что и требовалось доказать.

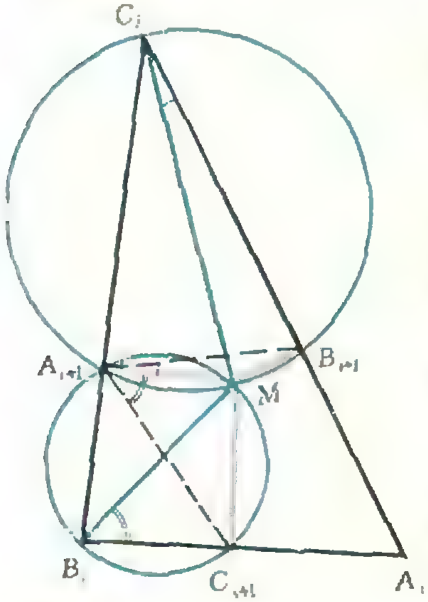


Рис. 3.

*Я. Суконник*

**М357.** *Докажите, что если* $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$, *то* $x=y=z$ *или* $x^2y^2z^2=1$.

Из условий задачи следует, что

$$x-y=\frac{y-z}{yz},\quad y-z=\frac{z-x}{xz}\text{ и } z-x=\frac{x-y}{xy}.$$

Из первых двух соотношений $x-y=\frac{z-x}{xyz^2}$; подставляя вместо разности $z-x$ ее выражение через $x$ и $y$ (последнее соотношение), получим, что $x-y=\frac{x-y}{x^2y^2z^2}$. Отсюда либо $x=y$ и тогда $z-x=0$, $y-z=0$, то есть $x=y=z$, — либо же $1=\frac{1}{x^2y^2z^2}$, то есть $x^2y^2z^2=1$.

*И. Клумова*

◆

**М358.** *Докажите, что у любого n-угольника* ($n\geqslant 4$) *есть хотя бы одна диагональ целиком лежащая внутри n-угольника, и выясните, какое наименьшее число таких диагоналей может иметь n-угольник (при каждом n).*

Прежде всего заметим, что все диагонали выпуклого $n$-угольника лежат внутри него, причем число этих диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$. Не менее очевидно, что для каждого данного $n$ число $\frac{n(n-3)}{2}$ лежащих внутри диагоналей не является минимальным: на рисунке 4 изображен четырехугольник, внутри которого лежит всего одна диагональ, в то время как у любого выпуклого четырехугольника внутри расположены обе диагонали.

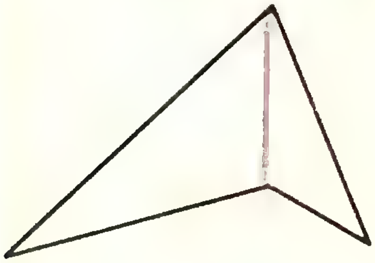


Рис. 4.

Докажем, что у невыпуклых $n$-угольников ($n\geqslant 4$) хотя бы одна диагональ целиком лежит внутри.

Рассмотрим угол $ABC$ нашего невыпуклого $n$-угольника, превосходящий 180°. Лучи $BA$ и $BC$, образующие этот угол, делят всю плоскость на две части: голубую часть $I$ и белую часть $II$ (см. рис. 5).

Возьмем теперь вершину $n$-угольника — обозначим ее буквой $D$, — лежащую в части $II$ (такая вершина есть, поскольку $\widehat{ABC}>180°$); и проведем диагональ $BD$. Если диагональ $BD$ пересекает какую-либо сторону нашего $n$-угольника, то эта сторона не лежит целиком в части $I$; следовательно, по крайней мере один из ее концов — обозначим его буквой $E$ — лежит в части $II$. Если и диагональ $BE$ пересекает какую-то сторону $n$-угольника, то, рассуждая аналогично, получаем, что один из концов этой стороны лежит в части $II$, и можно провести диагональ $BF$. Продолжим этот процесс. Поскольку ни одна из вершин не может встретиться в нашей последовательности дважды (проверьте это) и всего их конечное число, рано или поздно мы получим диагональ, целиком лежащую внутри многоугольника.

Обозначим теперь через $x_n$ наименьшее возможное число диагоналей, лежащих целиком внутри $n$-угольника (при каждом $n$; ясно, что $n$-угольник с наименьшим возможным числом таких диагоналей будет невыпуклым). Очевидно, что $x_4=1$ (см. рис. 4), а $x_3=0$ (в треугольнике вообще нет диагоналей). Исходя из этих примеров, можно предположить, что при каждом $n$ число $x_n=n-3$. Докажем, что это действительно так, методом математической индукции.

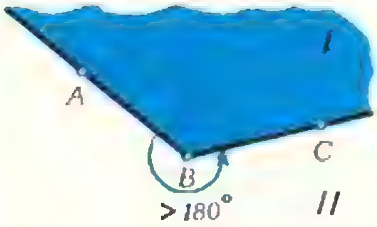


Рис. 5

**База индукции.** $n=4$, $x_n=1=4-3$.

**Шаг индукции.** Допустим, что для всех $n\leqslant k$ утверждение верно: $x_5=5-3$, …, $x_k=k-3$. Докажем, что $x_{k+1}=(k+1)-3$.

Возьмем невыпуклый $(k+1)$-угольник с наименьшим возможным среди всех $(k+1)$-угольников числом целиком лежащих внутри диагоналей и рассмотрим ту его вершину

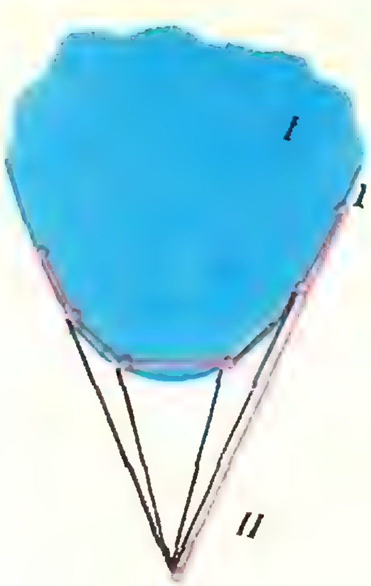


Рис. 6.

$B$, угол при которой превосходит 180°. Выше мы доказали, что из такой вершины исходит диагональ $BQ$, целиком лежащая внутри этого $(k+1)$-угольника. Диагональю $BQ$ наш $(k+1)$-угольник разбивается на два многоугольника с меньшим числом сторон: $m \geqslant 3$ и $[(k+1)-m+2]=k-m+3$, каждый из которых имеет наименьшее возможное число целиком лежащих внутри диагоналей среди $(m)$- и $(k-m+3)$-угольников соответственно. По предположению индукции для первого многоугольника $x_m=m-3$, для второго $x_{k-m+3}=k-m$. Число же диагоналей, лежащих целиком внутри нашего $(k+1)$-угольника, не меньше, чем сумма числа таких диагоналей в $(m)$- и $(k-m+3)$-угольниках, плюс единица (сама диагональ $BQ$); то есть

$$x_{k+1} \geqslant (m-3)+(k-m+1)=(k+1)-3.$$

Итак, пока доказано, что для $n>k$ число $x_n \geqslant n-3$. Осталось для каждого данного $n$ привести пример $n$-угольника, у которого внутри было бы ровно $n-3$ диагонали. Возьмем любую *выпуклую* кривую $\Gamma$ — как на рисунке 6 (например, параболу), и возьмем на $\Gamma$ $n-1$ точку. Кривая $\Gamma$ делит всю плоскость на две области: $I$ и $II$. Возьмем в области $II$ еще одну точку и соединим ее с каждой из $(n-1)$ точек, расположенных на $\Gamma$. Мы получим нужный $n$-угольник: легко видеть, что внутри у него ровно $n-3$ диагонали.

*И. Клумова, Л. Лимонов*

◆

**М360***). *Про последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ известно, что $|a_1|=1$ и $|a_{k+1}|=|a_k+1|$ при каждом $k=1,2,\ldots$ Найдите наименьшее возможное значение суммы $|a_1+a_2+\ldots+a_n|$, если*

*а) $n=1975$;*
*б) $n=1976$.*

Ответ. Наименьшее возможное значение суммы $|a_1+a_2+\ldots+a_n|\left(\min\limits_{\{a_i\}}|a_1+a_2+\ldots+a_n|\right)$ при $n=1975$ равно 20; при $n=1976$, равно 24.

Решение. Для последовательности $\{a_i\}$ из условия задачи имеем:

$$\begin{cases} a_1^2=1, \\ a_2^2=a_1^2+2a_1+1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n+1}^2=a_n^2+2a_n+1. \end{cases}$$

Сложив эти равенства, получим:

$$a_{n+1}^2=n+1+2\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=\frac{a_{n+1}^2-(n+1)}{2}$$

(это целое число, поскольку четность числа $a_k$ совпадает с четностью $k$). Итак,

$$|a_1+\ldots+a_{1975}|=\left|\frac{a_{1976}^2-1976}{2}\right|,$$

$$|a_1+\ldots+a_{1976}|=\left|\frac{a_{1977}^2-1977}{2}\right|.$$

Заметим, теперь, что любое целое число $x$, $|x|\leqslant n$, четность которого совпадает с четностью числа $n$, может быть реализовано как $a_n$ для некоторой последовательности $\{a_i\}$ (докажите это самостоятельно!). Далее, $44^2<1976<45^2$, и $44^2<1977<45^2$, так что ближайший к 1976 квадрат четного числа — это $1936 = 44^2$, а ближайший к 1977 квадрат нечетного числа — это $2025 = 45^2$. Поэтому сумма $|a_1 + a_2 + \ldots + a_{1975}|$ принимает наименьшее возможное значение $\left|\frac{1936 - 1976}{2}\right| = 20$ (это значение достигается для таких последовательностей $\{a_i\}$, у которых $|a_{1976}| = 44$), а сумма $|a_1 + a_2 + \ldots + a_{1976}|$ принимает наименьшее возможное значение $\left|\frac{2025 - 1977}{2}\right| = 24$ (для таких последовательностей $\{a_i\}$, у которых $|a_{1977}| = 45$).

---

*) Задача М359 — это задача 12 из статьи А. Землякова «Математика биллиарда», опубликованной в «Кванте» № 5 за 1976 год. Ее решение см. в «Кванте», 1976 № 6, с. 77.

*В. Голубятников*

◆

**Ф362.** *Слоистый конденсатор состоит из трех металлических параллельных пластин площадью S. Пространства между пластинами заполнены диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ и удельными сопротивлениями $\rho_1$ и $\rho_2$. Толщины слоев диэлектриков $d_1$ и $d_2$. Конденсатор находится под постоянным напряжением U. Определить заряд средней пластины при установившемся токе в цепи.*

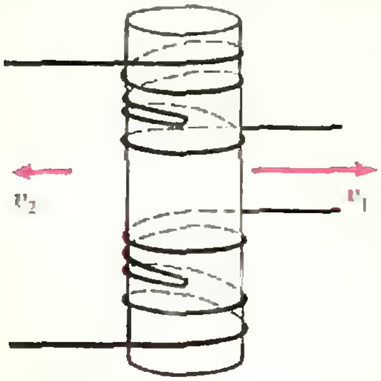


**Рис. 7.**

Указанный слоистый конденсатор представляет собой комбинацию двух конденсаторов. Обозначим напряженности электрических полей в них через $E_1$ и $E_2$, поверхностные плотности зарядов на их обкладках — $\sigma_1$ и $\sigma_2$ и напряжения на конденсаторах — через $U_1$ и $U_2$, соответственно.

Заряды на обеих сторонах средней пластины имеют разные знаки, поэтому общий заряд средней пластины равен

$$q = (\sigma_2 - \sigma_1) S.$$

При стационарном распределении зарядов можно пользоваться формулами электростатики. Тогда

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}, \qquad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2},$$

$$U_1 = E_1 d_1, \quad U_2 = E_2 d_2, \quad U_1 + U_2 = U.$$

С другой стороны, по отношению к электрическому току конденсаторы можно рассматривать как проводники с соответствующими сопротивлениями $R_1 = \rho_1 d_1 / S$ и $R_2 = \rho_2 d_2 / S$. По закону Ома

$$U_1 = I \frac{\rho_1 d_1}{S} \quad \text{и} \quad U_2 = I \frac{\rho_2 d_2}{S}.$$

Решив полученную систему восьми уравнений, найдем

$$q = \frac{\varepsilon_2 \rho_2 - \varepsilon_1 \rho_1}{d_2 \rho_2 + d_1 \rho_1} \varepsilon_0 U S.$$

◆

**Ф363.** *На цилиндр намотаны нити, как показано на рисунке 7. Правые концы нитей тянут со скоростью $v_1$, левые — со скоростью $v_2$. С какой угловой скоростью вращается при этом цилиндр вокруг своей оси? Радиус цилиндра равен R.*

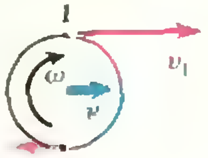


**Рис. 8.**

На рисунке 7 изображен способ намотки нитей на цилиндр, при котором возможно вращение цилиндра вокруг своей оси. Обозначим через $\omega$ угловую скорость этого вращения. В свою очередь ось цилиндра перемещается равномерно параллельно самой себе. Обозначим ее скорость через $v$.

Скорости точек 1 и 2 поверхности цилиндра можно представить как алгебраическую сумму линейной скорости $\omega R$ и скорости $v$ поступательного перемещения цилиндра (рис. 8):

$$v_1 = v + \omega R, \; v_2 = v - \omega R.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{|v_1 - v_2|}{2R}$$

(заметим, что $v_1$ и $v_2$ имеют разные знаки).

**Ф364.** *Каким должен быть коэффициент трения $k$ резины о внешнюю поверхность конуса с углом при вершине $2\alpha$, чтобы мотоциклист мог двигаться по поверхности конуса по горизонтальной окружности радиуса $R$ со скоростью $v$ (рис. 9)?*

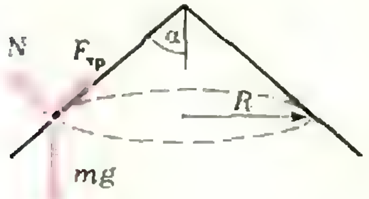


**Рис. 9.**

Будем считать мотоциклиста материальной точкой, исключив тем самым все проблемы, связанные с его устойчивостью по отношению к опрокидыванию. Силы, действующие на мотоциклиста, изображены на рисунке 9. Это — сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила реакции $\mathbf{N}$ и сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$F_{\text{тр}}\sin\alpha - N\cos\alpha = m\frac{v^2}{R},$$

$$F_{\text{тр}}\cos\alpha + N\sin\alpha - mg = 0.$$

Сила сухого трения резины о внешнюю поверхность конуса

$$F_{\text{тр}} \leqslant kN.$$

Решая полученную систему, найдем

$$k \geqslant \frac{gR + v^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{gR\,\mathrm{tg}\,\alpha - v^2},$$

если $v < \sqrt{gR\,\mathrm{tg}\,\alpha}$. Иначе мотоциклист по окружности радиуса $R$ двигаться не сможет.

*Б. Буховцев*

◆

**Ф365.** *Найти емкость системы конденсаторов, соединенных так, как показано на рисунке 10.*

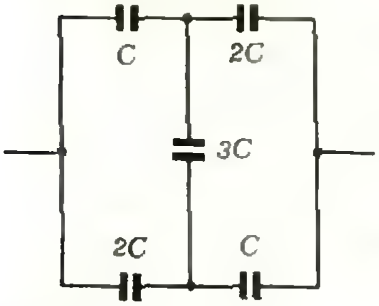


**Рис. 10.**

Обозначим через $U_i$ и $q_i = C_iU_i$ напряжение и заряд на конденсаторе емкостью $C_i$ (рис. 11). Если данную систему конденсаторов подключить к батарее с электродвижущей силой $\mathscr{E}$, то общая емкость системы

$$C_{\text{общ}} = \frac{q_1 + q_2}{\mathscr{E}} = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{\mathscr{E}}. \qquad (*)$$

Запишем очевидные соотношения (см. рис. 11):

$$U_1 + U_2 = \mathscr{E}, \qquad (1)$$

$$U_4 + U_5 = \mathscr{E}, \qquad (2)$$

$$U_1 + U_3 + U_5 = \mathscr{E}. \qquad (3)$$

С учетом предполагаемой полярности заряда на конденсаторе емкости $C_3$ закон сохранения заряда, записанный для выделенных участков цепи (см. рис. 11), дает

$$q_1 - q_2 - q_3 = 0, \quad q_3 + q_1 - q_5 = 0.$$

Эти уравнения после подстановки соответствующих значений емкости приводятся к виду

$$U_1 - 2U_2 - 3U_3 = 0, \qquad (4)$$

$$3U_3 + 2U_4 - U_5 = 0. \qquad (5)$$

Решая систему уравнений (1) — (5), можно найти напряжения $U_1$ и $U_2$:

$$U_1 = \frac{5}{9}\mathscr{E}, \quad U_2 = \frac{4}{9}\mathscr{E}.$$

Тогда окончательно согласно выражению (*) имеем

$$C_{\text{общ}} = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{\mathscr{E}} = \frac{13}{9}C.$$

*В. Белонучкин*

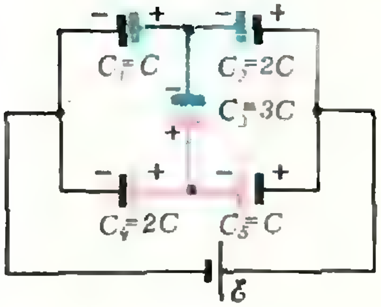


**Рис. 11**

**Ф366.** *Колба-шар емкостью $V = 1$ л была откачана и закрыта. На стенках колбы остался мономолекулярный слой воздуха. Оценить давление, которое будет в колбе, нагретой до 300°C, если известно, что при такой температуре стенки колбы полностью обезгаживаются.*

Число молекул, оставшихся на стенках колбы, равно примерно $N \sim \frac{4\pi R^2}{d^2}$, где $R \approx 0{,}06$ м — радиус колбы, $d \sim 10^{-10}$м — диаметр молекулы газа. После обезгаживания стенок концентрация молекул в колбе будет равна

$$n = \frac{N}{V} \sim \frac{3}{d^2 R},$$

и искомое давление

$$p = nkT \sim \frac{3kT}{d^2 R} \approx 40 \text{ н/м}^2.$$

Здесь $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ дж/град — постоянная Больцмана, $T \approx 600$ °К.

Сравним полученное давление с нормальным атмосферным давлением $p_0 \approx 10^5$ н/м²:

$$\frac{p}{p_0} \approx \frac{40}{10^5} \sim 10^{-4}.$$

Этот простой пример показывает, как сильно может ухудшаться «вакуум» в запаянном сосуде, если не обезгазить предварительно стенки сосуда.

*А. Митрофанов*

◆

**Ф367.** *Построить изображение квадрата, даваемое собирающей линзой (рис. 12). Середина стороны квадрата, лежащей на главной оптической оси линзы, находится от линзы на расстоянии, равном фокусному*

Для построения изображения квадрата удобнее всего воспользоваться лучами, проходящими через фокусы линзы. Самым необходимым из них является луч $ABGF$ (рис. 12), идущий вдоль верхней стороны квадрата, поскольку изображения всех точек этой стороны должны лежать на самом луче $GF$ или его продолжении. Построим еще ход луча $AM$, проходящего через левый фокус $F$ линзы, и луча $BN$, как бы выходящего из того же фокуса. После линзы оба луча идут параллельно главной оптической оси линзы.

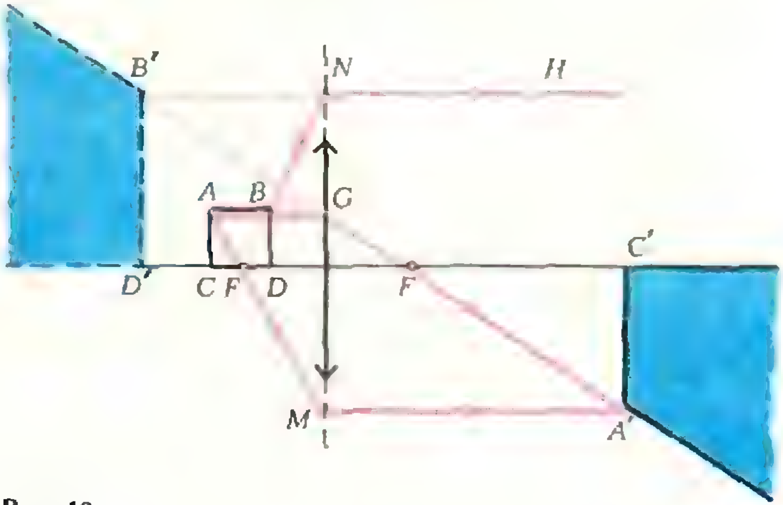


Рис. 12.

Действительное изображение $A'$ точки $A$ находится на пересечении лучей $GF$ и $MA'$. Аналогично, мнимое изображение $B'$ точки $B$ находится на пересечении продолжений лучей $GF$ и $NH$. Для определения положения изображений $C'$ и $D'$ соответствующих точек $C$ и $D$ достаточно из $A'$ и $B'$ опустить перпендикуляры на главную оптическую ось. Изображения сторон $AC$ и $BD$, перпендикулярных к оптической оси линзы, должны тоже быть перпендикулярными к оптической оси.

Для построения хода лучей $AM$ и $BN$ пришлось продолжить линзу в обе стороны так, как если бы она была большего размера. Это можно сделать на основании того, что любая часть линзы создает такое же изображение, как и целая линза (отличие лишь в освещенности).

Таким образом, изображение квадрата состоит из двух частей: действительной (часть угла справа от $A'C'$) и мнимой (часть угла слева от $B'D'$). Действительная часть является изображением половины квадрата, лежащей дальше фокальной плоскости, а мнимая — изображением половины квадрата, лежащей ближе фокальной плоскости линзы.

*Б. Буховцев*

◆

**Ф368.** *Ракета массы $m$ стартует под углом $\alpha$ к горизонту. Двигатели ракеты работают $t$ секунд, создавая тягу $F$ и обеспечивая прямолинейное движение ракеты. Пренебрегая изменением массы ракеты и сопротивлением воздуха, определить высоту $h$, на которой прекращается работа двигателя.*

При решении задачи будем полагать, что система отсчета, связанная с Землей, является инерциальной и что движение ракеты ограничено пространством, где ускорение свободного падения $\mathbf{g}$ постоянно.

Запишем уравнение движения ракеты во время работы ее двигателей:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F} = \mathbf{R}.$$

Здесь $\mathbf{a}$ — ускорение ракеты, $\mathbf{R}$ — равнодействующая всех сил, действующих на ракету. Из условия задачи и предположения об инерциальности выбранной системы отсчета следует, что сила $\mathbf{R}$ (как и ускорение $\mathbf{a}$) должна оставаться постоянной в течение всего времени работы двигателей и составлять с горизонтом угол $\alpha$ (рис. 13). Поэтому высота $h$, на которую поднимется ракета за время $t$, равна

$$h = \frac{a_y t^2}{2} = \frac{R_y t^2}{2m},$$

где $a_y$ и $R_y$ — проекции векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{R}$ на координатную ось $OY$, направленную вертикально вверх.

Как видно из рисунка 13, должно выполняться равенство

$$(R_y + mg)^2 + (R_y \operatorname{ctg}\alpha)^2 = F^2.$$

Отсюда

$$R_y = mg\left(\sqrt{(F/mg)^2 - \cos^2\alpha} - \sin\alpha\right)\sin\alpha,$$

и окончательно

$$h = \frac{R_y t^2}{2m} = \frac{gt^2}{2}\left(\sqrt{(F/mg)^2 - \cos^2\alpha} - \sin\alpha\right)\sin\alpha.$$

*В. Погожев*

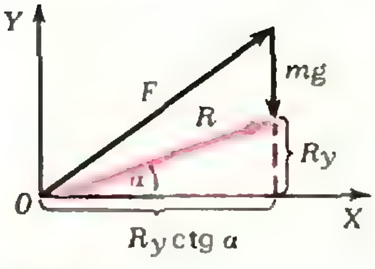


Рис. 13.

# Как рождаются, живут и умирают звезды

Кто из вас, юные читатели, глядя в ночное небо, усеянное звездами, не задумывался о том, как и из чего рождаются звезды, как они проходят свой жизненный путь, какой их ожидает конец... Эти вопросы не раз ставили перед собой и ученые, специалисты по физике звезд. И ответы приходили не сразу, а лишь после многих лет упорных поисков. Некоторые вопросы звездной эволюции не решены до сих пор.

Книга члена-корреспондента АН СССР И. С. Шкловского *) знакомит читателя с современным состоянием этой нелегкой проблемы. Автор ее — крупнейший астрофизик, широко известный своими трудами в СССР и за рубежом. В то же время И. С. Шкловский — прекрасный популяризатор науки. Его книга «Вселенная, жизнь, разум» была с интересом встречена широкими кругами читателей, выдержала несколько изданий **).

Интересно читать книгу, в которой рассказывается об удивительном мире звезд и туманностей, о пульсарах и сверхновых звездах, о черных дырах и гравитационных волнах. Но еще интереснее читать эту книгу, если знаешь, что ее автор сам «приложил руку» к решению многих описанных в ней проблем, что получаешь сведения, как говорится, из первых рук.

Перелистаем книгу. Короткое введение. В нем автор показывает нам, как развитие методов астрономии (создание радиотелескопов, применение спектрального анализа и т. п.) приводит к расширению наших знаний о Вселенной, и ее эволюции. Но, нарисовав грандиозную картину развития Вселенной, автор вдруг ставит на этом точку и обращается к совсем другому вопросу, который и составляет тему его книги: к эволюции звезд. Почему? «Ну хотя бы потому, — поясняет автор, — что 97% вещества в нашей Галактике сосредоточено в звездах».

И вот перед нами первая часть книги: «Звезды рождаются». Сначала автор знакомит нас с физическими свойствами звезд, с их основными типами. Мы узнаем, что есть звезды спокойные (стационарные), а есть пульсирующие и даже вспыхивающие. Затем следует знакомство с межзвездной средой — тем материалом, из которого образуются звезды. Но как происходит образование звезд? Где, при каких условиях? И автор ведет за собой читателя через облака межзвездной материи к газово-пылевым комплексам, которые он называет колыбелями звезд.

Теперь заглянем во вторую часть книги. В излучении звезд — смысл их существования. Таков лейтмотив этой главы, которая называется «Звезды излучают». Если бы звезды не излучали, они не были бы звездами. Излучение звезд делает их видимыми, оно дает нам все сведения, которыми мы располагаем об этих небесных телах. С другой стороны, исследование звездного излучения принесло огромную помощь физике — ведь земные источники излучения находятся в иных условиях, и ученые пока не могут воспроизвести звездное вещество в лаборатории.

Итак, звезда — это газовый шар, находящийся в состоянии равновесия. О каком равновесии идет речь? Оказывается, в применении к звездам понятий равновесия несколько. Приведем некоторые примеры. Давление внешних слоев звезды, обусловленное силами тяготения, уравновешивается суммой газового давления и давления, созданного излучением. Излучение находится в равновесии с веществом: количества энергии, излучаемой и поглощаемой веществом, одинаковы. Каждый выделенный объем звезды получает примерно столько же энергии, сколько отдает; это называется локальным термодинамическим равновесием.

Откуда же берется энергия, излучаемая звездами? Отвечая на этот вопрос, автор рассказывает о термоядерных реакциях, подводит читателя к одной из наиболее трудных проблем современной астрофизики — к проблеме нейтринного излучения Солнца. Это излучение могло бы рассказать нам о реакциях в недрах Солнца, но его мощность оказывается намного меньше, чем нужно.

Третья часть книги называется «Звезды взрываются». В ней речь идет о так называемых сверхновых звездах, вспышки, а точнее, взрывы которых связаны с конечным этапом звездной эволюции. Сначала (как и в предыдущих частях) дается общее знакомство, потом — обзор последствий вспышек сверхновых: образование радиотуманностей, генерация космических лучей. А в заключение — основной, но самый трудный вопрос: почему взрываются эти звезды? И автор, вложивший немалый вклад в решение проблем радиоизлучения остатков сверхновых и причин их взрыва, знакомит читателя с современным состоянием наших знаний о том и о другом.

---

*) И. С. Шкловский. Звезды. Их рождение, жизнь и смерть. М., «Наука», 1975.

**) Рецензию на эту книгу вы можете прочитать в «Кванте», 1973, № 10.

И наконец, последняя часть книги: «Звезды умирают». Да, звезды, как и люди, прожив более или менее долгую жизнь (сроки которой измеряются сотнями миллионов и миллиардами лет), приходят к концу их жизненного пути. Кончаются запасы ядерного горючего: выгорел водород, выгорает гелий. Недолго и не у всех звезд дают энергию реакции с участием углерода и кислорода. Источники энергии иссякли. Звезда сжимается — давление, обусловленное излучением в ее недрах, упало, и одно газовое давление не в состоянии преодолеть гравитационное сжатие. Дальше перед звездой три пути, три возможных судьбы. Нет, звезда не вольна сделать выбор между ними, все зависит от ее массы, хотя приходится учитывать и некоторые другие факторы (например, вращение звезды, наличие магнитного поля).

Первый путь — для звезд с массой меньше солнечной (точнее, менее 1,2 массы Солнца) — превратиться в белого карлика, «сбросив» существенную часть своей массы, а затем постепенно остывать до полного прекращения свечения (автор называет это состояние «черным карликом»).

Другая судьба уготована звездам с массами от 1,2 до 2,4 массы Солнца. Звезда испытывает катастрофическое сжатие до очень малых размеров (в несколько десятков километров в диаметре) с одновременным «сбрасыванием» оболочки. Это и есть взрыв сверхновой звезды. Конечная стадия такого взрыва — образование нейтронной звезды (вещество такой звезды состоит из плотно «упакованных» нейтронов). Быстро вращающиеся нейтронные звезды, обладающие к тому же мощным магнитным полем, посылают радиосигналы в виде узкого направленного пучка лучей. Один раз за каждый оборот звезды (а период этого оборота порядка секунды) луч может задеть Землю. И тогда земные радиотелескопы примут короткий импульс. Периоды между импульсами выдерживаются с точностью до миллиардных долей секунды. Сколько волнений и споров породило их открытие в 1967 году! Источники этих радиоимпульсов, названные пульсарами, вскоре были отождествлены с давно предсказанными, но до тех пор не наблюдавшимися нейтронными звездами.

Звезды третьей судьбы — самые массивные. Они не могут удержаться на стадии даже нейтронной звезды: так велики гравитационные силы, сжимающие звезду. Звезда раздавливает самое себя, превращается в так называемую «черную дыру». Хотите знать, что это такое? Почитайте Шекспира. Да, да, Вильяма Шекспира, замечательного английского драматурга. Его слова приведены как эпиграф к четвертой части книги И. С. Шкловского. Вот они: «Быть званным в большую сферу и чтобы не было видно, как ты там движешься, — вот это и есть дыра!» («Антоний и Клеопатра»).

Много интересного найдет читатель в книге И. С. Шкловского. Но читать ее нелегко. Автор не боится приводить формулы, выражающие те или иные физические закономерности или соотношения, обсуждает сложные физические вопросы. Изложение не содержит ни малейших признаков упрощенчества, чем порой грешат некоторые популяризаторы. Шкловский не скрывает трудностей, стоящих перед наукой в том или ином вопросе. Может быть, юному читателю придется некоторые места читать по два-три раза или обращаться за помощью к старшим товарищам, к преподавателям, к специалистам. Но многое будет понятно и при «первом чтении». Конечно, браться за эту книгу должен только тот, кто искренне любит науку о Вселенной и стремится узнать, чем она живет и дышит в наши дни.

*В. Бронштэн*

# Интересующимся космонавтикой

В наше время трудно найти людей, равнодушных к сообщениям о новых полетах космонавтов. Но задумывались ли вы над тем, какую колоссальную работу выполнили ученые, инженеры, рабочие и сами космонавты, прежде чем наступил заветный момент старта? Кому из вас не интересно научиться рассчитывать скорость движения ракеты, выводящей космический аппарат на заданную орбиту, разбираться в конструктивных характеристиках ракет, определять время разгона ракеты, рассчитывать необходимое количество горючего и окислителя, строить траектории полета космических аппаратов? Помочь в этом вам сможет новая книга «Основы космонавтики», написанная кандидатом педагогических наук, доцентом А. Марленским *).

Книга начинается с рассказа об истории космонавтики, с рассмотрения вопросов устройства и движения ракет (в частности, анализируются свободное движение ракеты в поле тяготения и движение ракеты под действием силы тяги двигателя). Затем автор рассказывает об искусственных спутниках Земли, о полетах к Луне и различным планетам. Заключительные главы книги посвящены вопросам, касающимся условий космических полетов (рассказывается о различных опасностях, поджидающих космонавтов, о системах жизнеобеспечения космических кораблей и т. п.), а также научному и практическому применению космонавтики.

---

*) А. Марленский. Основы космонавтики. М., «Просвещение», 1975.

«Основы космонавтики» — это книга не для развлекательного чтения: в ней достаточно много физики и математики, различных задач и упражнений. Автор знакомит читателей со многими важными понятиями, без которых невозможно представить себе современную космонавтику. Прочитав книгу, вы узнаете о формуле Циолковского, о разновидностях ракетных двигателей и наиболее эффективных видах топлива; познакомитесь с основами астродинамики и небесной механики. Но главное, пожалуй, в том, что, вдумчиво изучив книгу и решив предлагаемые задачи, вы многому научитесь.

Работать с этой книгой, наверное, лучше всего группами на факультативных занятиях.

В заключение мы хотим дать вам несколько советов для дальнейшего чтения. Несомненно, очень интересна книга В. Левантовского «Механика космического полета в элементарном изложении» (М., «Наука», 1974), Маленькая энциклопедия «Космонавтика» (М., «Советская энциклопедия», 1970), а также статьи научно-популярного журнала АН СССР «Земля и Вселенная».

*Е. Левитан*

# Спрашивайте — отвечаем

**Читатель Н. Романенко спрашивает: могут ли металлы при каких-то условиях быть изоляторами? Возможно ли, чтобы изоляторы проводили ток?**

На эти вопросы отвечает консультант отдела физики А. Володин.

Вещества, которые мы называем металлами, обладают рядом свойств, отличающих их от прочих веществ — неметаллов. Наиболее характерными из них являются большая электропроводность в сочетании с хорошей теплопроводностью. Противоположность металлам в этих свойствах составляют диэлектрики, или изоляторы. Следует, кроме того, отметить, что иногда какое-либо вещество по одному из этих свойств можно отнести к металлам, а по другому — нет. Поэтому между металлами и неметаллами не удается провести отчетливую границу.

Под действием внешних факторов, таких, например, как изменение температуры, давления и т. п., могут происходить как обратимые, так и необратимые переходы металл — диэлектрик и диэлектрик — металл. Приведем ряд примеров.

Такой типичный металл, как олово, при понижении температуры (и наличии затравок серого олова) может перейти в другую, неметаллическую модификацию — серое олово.

Некоторые окислы металлов претерпевают так называемые переходы Мотта: при достижении некоторой температуры они практически скачком из типичных диэлектриков становятся хорошими проводниками — металлами.

В последнее время в Институте высоких давлений АН СССР были обнаружены переходы в проводящее состояние таких совершенных изоляторов, как кварц ($SiO_2$) и окись алюминия ($Al_2O_3$). Эти переходы происходят при очень высоком давлении — порядка миллиона атмосфер. И, конечно, любой металл, переведенный в парообразное состояние при не слишком высоких давлениях, становится типичным диэлектриком.

# Заочные физико-математические школы

За последние годы у нас в стране широкий размах приняло заочное физико-математическое обучение школьников. Вот неполный перечень заочных школ: Всесоюзная заочная математическая школа (ВЗМШ), Заочная физико-техническая школа при МФТИ (ЗФТШ), Северо-Западная ЗМШ, ЗМШ при Вильнюсском университете, ЗМШ при Минском университете, ЗМШ при Киевском университете, ЗМШ при Новосибирском университете.

В декабре 1975 года в Москве проходила первая Всесоюзная научно-практическая конференция по проблемам заочного математического обучения школьников, организованная научно-исследовательским институтом содержания и методов обучения (НИИ СиМО) Академии педагогических наук СССР и ВЗМШ. Конференция была приурочена к десятилетию работы старейшей из заочных школ — ВЗМШ, во многом она касалась опыта именно ВЗМШ.

Конференция была весьма представительной. В ее работе приняли участие 117 человек из 37 городов — преподаватели университетов, педагогических и технических вузов, научные работники, учителя средних школ, представители Министерства высшего и среднего специального образования СССР, редакций журналов «Математика в школе», «Квант», «Пионер».

В работе конференции приняли деятельное участие такие ведущие математики и педагоги нашей страны, как академик А. Н. Колмогоров, действительный член Академии педагогических наук СССР А. И. Маркушевич, член-корреспондент Академии педагогических наук СССР С. И. Шварцбурд, профессор Р. С. Черкасов, заведующая лабораторией обучения математики НИИ СиМО Г. Г. Маслова и др.

Перед заочной школой стоят большие задачи:

1) привить школьникам интерес к математике и ее приложениям в различных отраслях знания;

2) повысить уровень математической культуры учащихся;

3) предоставить возможность сельским школьникам углубленно и систематически заниматься математикой;

4) повысить общий уровень преподавания математики и связанных с нею учебных предметов.

На конференции отмечалось, что в ВЗМШ успешно решают эти задачи. Учащиеся заочной школы получают в свое распоряжение мастерски изложенные пособия, углубляющие и расширяющие материалы школьного курса математики. Выполняя задания, ребята учатся ориентироваться в мире книг и работать с научной литературой. Практика показывает, что эти пособия можно использовать в работе школьных математических кружков, летних математических школ.

Лучшие, многократно испытанные в работе ВЗМШ учебные пособия, созданные авторским коллективом под руководством члена-корреспондента Академии наук СССР И. М. Гельфанда, издаются массовым тиражом в серии «Библиотечка физико-математической школы» издательством «Наука». Вот некоторые из них: Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А. «Метод координат»; Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э. «Функции и графики (основные приемы)»; Башмаков М. И. «Уравнения и неравенства»; Васильев Н. Б., Гутенмахе́р В. Л. «Прямые и кривые»; Кириллов А. А. «Пределы»; Гельфанд С. И., Гервер М. Л., Кириллов А. А., Кушниренко А. Г. «Комбинаторика, последовательности, пределы».

Интересные пособия издаются и в союзных республиках. Так, в издательстве «Вища школа» (УССР) вышли книги Дороговцева А. Я., Ядренко М. И. «Метод координат»; Ежова И. И., Скорохода А. В., Ядренко М. И. «Элементы комбинаторики»; Кованцова Н. И. «Геометрические преобразования». В издательстве «Минтис» — (ЛитССР) Ионушаускаса А. «Что такое топология» и др.

Другой «секрет» успеха ВЗМШ — в том, что ее руководители добились гармонического сочетания энтузиазма преподавателей и учащихся с прекрасной, продуманной до мелочей

- **Выступает академик А. Н. Колмогоров**
- **Отчет редакции журнала «Квант»**
- **Выступает действительный член Академии педагогических наук СССР профессор А. И. Маркушевич**

организацией работы. Энтузиазм стал в ВЗМШ традицией. Это и педагогическая увлеченность около 500 математиков: преподавателей, аспирантов, студентов, стремящихся передать ученикам страсть к любимому делу, и увлеченность самих учащихся математикой. Выполнив по два-три задания, учащиеся начинают чувствовать, что серьезные занятия точными науками немыслимы без задора так же, как без дисциплины и организованности труда. Правильный ответ на задачу без объяснения хода решения задачи в ВЗМШ, как правило, не засчитывается. Качество объяснения, его оригинальность, рациональность, полнота, ясность, постепенно вырабатывающаяся математическая культура языка — вот что в ВЗМШ ценится наиболее высоко.

Все эти факторы приводят к тому, что число учащихся в заочных школах все время растет. Так, если в 1964 году в ВЗМШ было 1300 учащихся, то сейчас в одной московской ее группе учатся около 2500 школьников. Массовость ВЗМШ придают группы «Коллективный ученик» — школьные математические кружки, которые работают по заданиям Всесоюзной математической школы под руководством своего учителя математики. Таких групп в ВЗМШ сейчас более 700, в них обучается более 10 тысяч человек. Группы «Коллективный ученик», составленные из учащихся 8—9 классов, принимаются в ВЗМШ без конкурса в сентябре — октябре по заявлению учителя математики. Кроме московской группы, ВЗМШ объединяет 29 филиалов при различных университетах и педагогических вузах, в которых обучается еще около 3700 школьников.

О работе Киевской заочной школы рассказала представитель этой школы Л. В. Коваццона. Она отметила большую роль, которую играет телевидение в процессе заочного обучения. Другой формой заочного обучения является, как об этом говорил на конференции заместитель главного редактора «Кванта» М. Л. Смолянский, активное использование во внеклассной работе материалов, публикуемых в журнале «Квант». Школьники решают задачи, помещенные в журнале, изучают публикуемые статьи, знакомятся с новым для них изложением традиционного школьного материала, ведут переписку с редакцией журнала по всем этим вопросам.

Получившие в последнее время широкое распространение заочные предметные школы (математические, физические, физико-математические, физико-технические, биологические и др.) являются перспективной и эффективной формой работы преподавателей вузов, ученых, научных работников и студентов со школьниками. Заочные школы вносят значительный вклад в решение поставленной партией и правительством задачи повышения научно-методического уровня преподавания в школах сельской местности, рабочих поселков, небольших городов, осуществления реального постоянного и квалифицированного руководства внеклассными занятиями школьников, проживающих вдали от научных и педагогических центров.

На конференции было подчеркнуто, что при заочном обучении учащимся очень важно время от времени встречаться со своими преподавателями — живого контакта ничто не заменит, — и поэтому ЗМШ должны участвовать в организации летних математических лагерей для школьников, проводить очные собеседования. Многое могут сделать организаторы из детских технических станций.

Даже из этого краткого обзора видно, как много полезного может принести школьникам учеба в ЗМШ. Мы призываем всех школьников, особенно сельских, попробовать свои силы, участвуя в работе заочных физико-математических школ. Приведем адреса, по которым вы можете обратиться в некоторые ЗМШ:

Москва — МГУ, мех-мат, ВЗМШ.
Долгопрудный, Московской обл., ЗФТШ при МФТИ.
Ленинград — Северо-Западная ЗМШ при ЛГУ.
Киев — ЗМШ при госуниверситете.
Минск — ЗМШ при госуниверситете.
Целиноград — пединститут, ЗМШ.
Вильнюс — ЗШЮМЛ при госуниверситете.
Тарту — ЗМШ при госуниверситете.
Пермь — ЗМШ при госуниверситете.
Уфа — Политехнический институт, ЗМШ.
Брянск — ЗЮМШ, газета «Брянский комсомолец».

*В. Березин*

# III Всесоюзный слет юных астрономов

Необычно молодым будет в августовские дни и ночи состав наблюдателей Шемахинской астрономической обсерватории Академии наук Азербайджанской ССР.

Здесь, в живописной горной долине, на территории Обсерватории с 16 по 26 августа расположится палаточный городок «Звездный» III Всесоюзного слета юных астрономов. Из многих тысяч юных любителей науки о Вселенной на слет приглашено только 200 школьников — лучших представителей союзных республик.

Слет организуют и проводят Центральный Комитет ВЛКСМ, Министерство Просвещения СССР, Всесоюзное астрономо-геодезическое общество при АН СССР, Всесоюзное общество «Знание». Для участия в работе слета приглашены ученые из Москвы, Ленинграда, Одессы, Душанбе, Иркутска.

Программа слета обширна и разнообразна: конференция юных астрономов и смотр-выставка их творческих достижений, лекции ученых по актуальным проблемам исследования Космоса и диспут о внеземных цивилизациях, олимпиада и вечер вопросов и ответов, знакомство с работой Шемахинской обсерватории и, конечно, ежесуточные астрономические наблюдения. Наиболее опытные любители астрономии смогут повысить свою квалификацию в факультативах по астрофизике, астроприборостроению, по наблюдению Солнца, Луны, планет, комет, метеоров и переменных звезд. В исследовании именно этих астрономических объектов могут принимать участие сегодняшние школьники.

Выбор места слета не является случайным. Давняя дружба связывает юных астрономов Бакинского дворца пионеров им. Ю. Гагарина с учеными Шемахинской обсерватории. Каждое лето выезжают сюда для наблюдений кружковцы из Баку. Нередкий гость в астрономических лабораториях дворца пионеров директор Обсерватории академик АН Азербайджанской ССР Г. Ф. Султанов. Этим летом в Шемахинской обсерватории вступают в строй две новые астрономические башни. И сами башни, и установленные в них телескопы — дело умелых рук юных астрономов из Бакинского дворца пионеров и их руководителя С. И. Сорина.

Слет — не только школа юных астрономов. Организаторы слета видят одну из его задач в организации силами ребят Всесоюзной службы неба. Такая служба позволит привлечь школьников к систематическим патрульным наблюдениям комет, ярких болидов, новых звезд...

*Б. Пшеничнер*

# Заочная физическая школа
## при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова

Дорогие ребята! Заочная физическая школа при физическом факультете Московского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственного университета объявляет набор учащихся на 1976—77 учебный год.

В ЗФШ принимаются ученики *9 и 10 классов*. Зачисление в школу производится на основании результатов решения вступительного задания, публикуемого ниже.

Для поступления в ЗФШ необходимо выслать решения вступительного задания *до 15 октября* по адресу: Москва, 117234, Ленинские горы, МГУ, физический ф-т, Заочная физическая школа. Работа должна быть написана аккуратно на русском языке в школьной тетради. Вместе с решениями задач в конверт нужно вложить анкету, заполненную по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество . . . . . . . . . . *Петров Николай Иванович*
Класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *10*
Номер и адрес школы . . . . . . . . . *школа № 6, ул. Перова, 3*
Профессия родителей и занимаемая ими должность
отец . . . . . . . . . . . . . . . . *токарь, мастер участка*
мать . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *бухгалтер*
Подробный домашний адрес . . *246045, БССР, г. Гомель, ул. Садовая, д. 31, кв. 24*
Член КПСС, ВЛКСМ *член ВЛКСМ.*

Зачисленные в ЗФШ получают в течение года задания Заочной физической школы по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Выполненные задания рецензируются и вместе с последующим заданием высылаются учащимся.

Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных задач. Успешно окончившие ЗФШ получают справку об окончании Заочной физической школы при физическом факультете МГУ.

### Вступительное задание
### 9 класс

1. Тело массы $M$ лежит на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен $\mu$. Какую минимальную силу нужно приложить к телу, чтобы сдвинуть его с места?

2. Два пластилиновых шарика одинаковой массы летят навстречу друг другу со скоростями $v_1$ и $v_2$ соответственно. Количество теплоты, выделившееся при столкновении, равно $Q$. Найти массу шариков (в результате столкновения шарики слипаются).

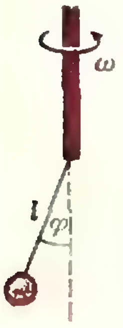


Рис. 1.

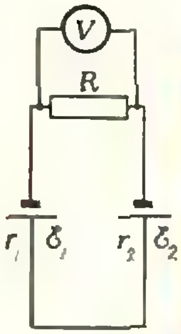


Рис. 2.

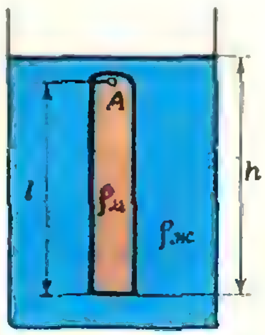


Рис. 3.

3. В жидкости с постоянной скоростью медленно опускается шарик радиуса $R$ и массы $m$. Какой массой должен обладать шарик того же радиуса, чтобы он поднимался с той же скоростью, с какой опускается первый шарик? Плотность жидкости $\rho$; сила сопротивления пропорциональна скорости.

### 10 класс

1. К тонкому, вертикальному, вращающемуся вокруг своей оси стержню прикреплена нить длиной $l$. На другом конце нити подвешен шарик (рис. 1). Построить график зависимости расстояния $r$ между шариком и осью стержня от угловой скорости вращения стержня $\omega$. Считать, что при любом значении $\omega$ движение шарика успевает установиться. Объяснить полученную зависимость.

2. Два элемента с э. д. с. $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ и внутренними сопротивлениями $r_1$ и $r_2$ соответственно замкнуты одноименными полюсами через сопротивление $R$ (рис. 2). Определить напряжение, показываемое вольтметром (сопротивление вольтметра велико).

3. В жидкость плотности $\rho_ж$ погружена пробирка с маслом плотности $\rho_м$ (рис. 3). Найти давление в точке $A$ внутри пробирки. Геометрические размеры заданы на чертеже. Капиллярными явлениями пренебречь.

*А. Антошин*

# Как расщепить атомное ядро в домашних условиях

*Джон Слейт*

Все вокруг нас — кровати, портсигары, резиновые сапоги — сделано из атомов (рис. 1). Более того, каждый из этих атомов имеет ядро, которое заслуживает расщепления ничуть не меньше прочих ядер. И все же простой человек не рискует заняться этим делом без помощи государства. Однако ядерному распаду давно пора по праву занять свое место в наших жилищах.

Руководствуясь нижеследующей инструкцией, каждый может соорудить свое собственное ядерное устройство. Атомы есть всюду, и принадлежат они всем.

## Выбор атомов

Осмотревшись вокруг — дома или на улице, — соберите несколько атомов. Но лишь самые высококачественные из них пойдут в дело. С дешевым товаром хлопот не оберешься — это уж факт. Поэтому погнутые или поломанные атомы лучше не брать.

Натуральные атомы лучше по качеству, но обезвоженные тоже годятся. Нужно лишь добавить к ним воды. Больше всего для расщепления подходят атомы дерева. Возьмите длинноволокнистую древесину, только не узловатую, потому что эти узлы просто невозможно развязать, если они зажаты в синхротроне.

Рис. 1.

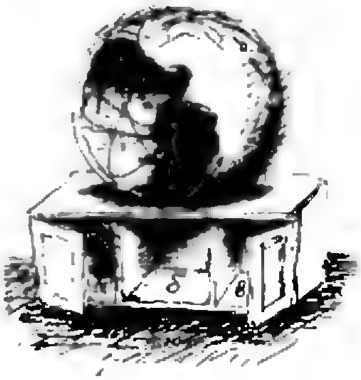


Рис. 2.

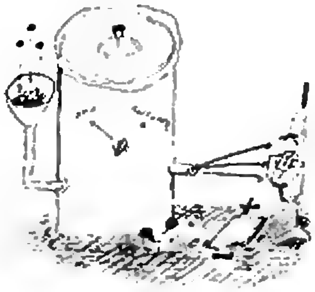


Рис. 3.

## Разберите атом

На рисунке 2 дано схематическое изображение атома. Ядро находится в центре. Частицы внутри ядра — это ядерные частицы. Все остальное — всего лишь электроны, и, прежде чем приступить к делу, их непременно нужно отложить в сторону.

Целые атомы следует держать в камере *а* (см. рис. 2), ядра — в средней камере, а электроны — в дальнем конце. Такое расположение поможет в дальнейшем сразу найти то, что вам нужно и когда нужно. Небесполезно запомнить следующее: электроны совсем не выкидывайте. Они понадобятся потом.

Рисунок 2 выполнен с нарушением масштаба. Ядра всегда мельче целых атомов, поэтому камера *б* может быть сужена по вашему усмотрению.

Следите, чтобы под рукой всегда был запас атомов.

## Соберите атом

Поскольку ядро слишком мало, вам понадобится ядерная ловушка. Считают, что наиболее эффективная ловушка — это сам атом. Так что возьмите ядро и окружите его электронами. Готовый атом поместите в атомный зажим, как показано на рисунке 3. Теперь это будет атом-цель (*АЦ*).

## Сделайте синхротрон

После того как вы прочно закрепили *АЦ* лицевой частью наружу, ядро нужно чем-нибудь расщепить. Обычно его «бомбардируют» атомными частицами. Поскольку частицы движутся беспорядочно, их следует ускорить и направить в нужном направлении — обычно слева направо.

Для этого необходим синхротрон с переменным углом наклона. Чтобы собрать синхротрон, вам потребуется немного проволоки, магниты, транзисторы, спи-

Рис. 4.

рали, переключатели, диоды, регуляторы и, последнее (не по значению), генератор. Расположите все детали так, чтобы направить атомные частицы на ядро атома-цели с достаточной для его расщепления силой.

Синхротрон в атомных лабораториях Брукхейвена расположен по кругу с диаметром в одну милю. Если вы вспомните формулу $C = 2\pi R$, то мгновенно сообразите, что длина окружности приспособления будет равна 3,1416 мили. И хотя в конечном итоге вам захочется, видимо, иметь дело с сооружением брукхейвенского типа, лучше всего начать с атомов помельче, а к более крупным перейти как-нибудь в другое время.

### Включение и выключение

Поместите атомные частицы в ускоритель, как показано на рисунке 3. Поставьте переключатель в положение «вкл.». Частицы поступят в синхротрон и ...«понеслось».

### Дополнительные сведения

Вышеозначенная инструкция касается расщепления отдельного ядра. Однако, воодушевившись, вы захотите расщеплять все больше и больше. Поэтому сделайте следующее: каждое ядро обеспечьте синхротроном и поставьте все их в ряд параллельно друг другу. Понадобится еще какое-то количество проволоки.

### Техника безопасности на первом плане

Во-первых и прежде всего, нужно найти способ защиты от неуправляемой реакции распада. Сначала решите, какое ядро расщепить, и добейтесь расщепления именно этого и никакого другого ядра. Значит, нужно как-то пометить выбранные ядра, скажем, краской. Другой способ — удалить из данной зоны все другие ядра. Затем можно без шума и крика расщепить оставшиеся.

### Не забудьте улыбнуться

Наконец, об опасностях радиоактивности. Даже заядлые радиоактивисты не всегда принимают их в расчет.

Значит, накапливая атомное сырье, вы должны обезопасить себя и своих близких от гамма-лучей и прочих вещей, которые могут излучаться из бункера. Так что вдобавок к популярным у коллекционеров плакатам, вроде «Идет работа» и «Не забудьте улыбнуться», почему бы не вывесить такой: «Держитесь подальше».

### Без аварий

Не забудьте, что с проблемой безопасности связана и критическая масса (*КМ*). Поскольку вы, наверное, не ставите себе целью аварию, то стоит попытаться взять под контроль факторы, ведущие к аварии. Один из них — *КМ*. Поэтому ваше сооружение должно быть рассчитано лишь на массы ниже критической. По ходу дела вы скоро наберетесь необходимого опыта.

### Эдисон

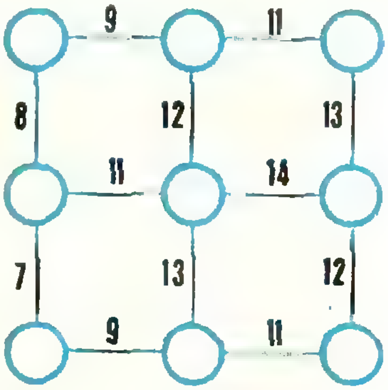
Не поддавайтесь унынию. Вспомните Томаса Эдисона. Он ведь изобрел электрическую лампочку (рис. 4) не в один присест. Сначала он работал на железной дороге и был бит.

*Публикацию подготовил*
*В. Л.*

## Головоломки

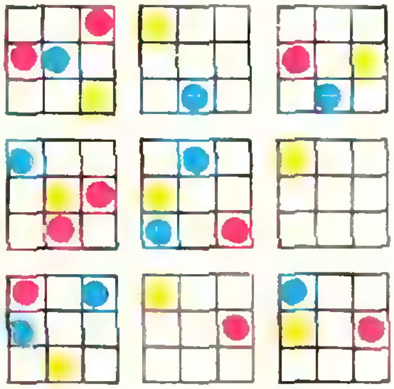
### Квадрат цифр

Впишите в кружочки на рисунке цифры от 1 до 9 так, чтобы сумма цифр в любых двух соседних кружочках равнялась числу, написанному между этими кружочками.



### Всюду по три

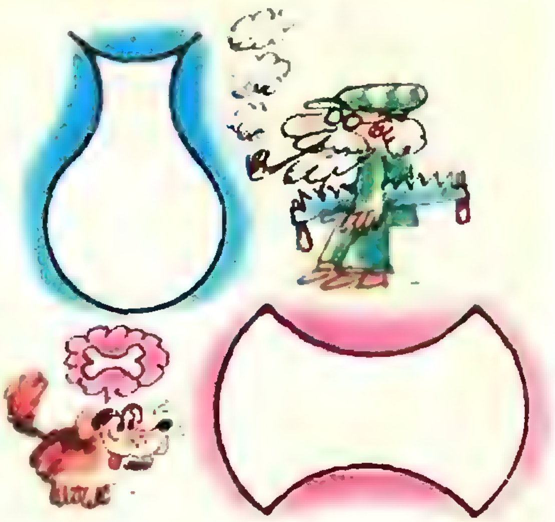
Вырежьте из картона девять квадратиков размером 3×3 клетки и нарисуйте на них цветные кружки так, как изображено на рисунке.



А теперь сложите из этих квадратиков квадрат 9×9, на больших диагоналях, вертикалях и горизонталях которого было бы ровно по одному кружку каждого цвета.

*Л. Мочалов*

## Задачи



1. На рисунке изображен контур колбы, состоящий из дуг равных окружностей. Разрежьте ее по двум прямым так, чтобы из получившихся частей можно было сложить квадрат. Можно ли сложить аналогичным образом квадрат из второй фигуры?

ФУНДУК
200
ШТУК

2. Группа из 21 мальчика получила 200 орехов. Доказать, что как бы ребята ни разделили эти орехи, найдутся двое, которым достанется поровну орехов (может быть, ни одного ореха).

3. В 1815 году английский физик Чилдрен проделал такой опыт. Две платиновые проволочки одинаковых длин, но разных диаметров, он подключал к батарее Вольта. Один раз проволочки были соединены последовательно, а другой — параллельно. В первом случае раскалялась только тонкая проволочка, а во втором — только толстая.

И целых 25 лет не могли ученые объяснить результаты этого эксперимента. А вы можете?

Указание: считать, что количество теплоты, отдаваемое проводником окружающему пространству, пропорционально площади поверхности проводника и разности температур проводника и окружающего пространства.

4. Найти все выпуклые многоугольники, обладающие следующим свойством: основание перпендикуляра, опущенного из любой точки внутри многоугольника на любую сторону, лежит внутри этой стороны.

*Рис. Э. Наварова*

# ПРАВИЛО „КРАЙНЕГО“

А. РОЗЕНТАЛЬ

Если вы хотите научиться решать математические задачи, вам надо попытаться овладеть более или менее общими подходами, приемами и методами математических рассуждений. Рассмотрим один весьма общий подход, который мы будем называть *правилом «крайнего»*.

Правило «крайнего» может быть кратко выражено словами «Рассмотрите крайнее!». Это правило есть попросту рекомендация рассмотреть объект, обладающий какими-либо «крайними», или, как говорят математики, *экстремальными* свойствами. Если речь в задаче идет о множестве точек на прямой, то правило «Рассмотри крайнее!» советует нам сосредоточить свое внимание на самой крайней точке множества (самой левой или самой правой). Если в задаче фигурирует некоторый набор чисел, то правило «крайнего» рекомендует рассмотреть наибольшее или наименьшее из этих чисел. Вот несколько примеров.

Задача 1. *На плоскости задано некоторое множество точек $M$ такое, что каждая точка из $M$ является серединой отрезка, соединяющего какую-либо пару точек того же множества $M$. Докажите, что множество $M$ содержит бесконечно много точек.*

Очень часто бывает так, что ключ к решению задачи находят, решая более простую аналогичную задачу. Поэтому, прежде чем решать данную задачу, попробуем решить следующую задачу.

Задача 2. *На прямой задано множество точек $M$ такое, что каждая точка из $M$ является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из $M$. Докажите, что множество $M$ бесконечно.*

Предположим, что множество $M$ конечно. Применим правило «крайнего»: если множество $M$ — конечное, то среди его точек есть крайние — самая левая и самая правая. Рассмотрим одну из них, например, самую левую; обозначим ее буквой $A$. Точка $A$ — крайняя и потому не может лежать внутри отрезка, соединяющего две другие точки множества $M$; значит, она не принадлежит $M$. Полученное противоречие и доказывает, что множество $M$ не может быть конечным.

Приведем еще одно решение этой задачи, использующее правило «крайнего». Допустим снова, что множество $M$ конечно, и рассмотрим длины отрезков, соединяющих точки из $M$. Этот набор чисел конечен. Применим к нему наше правило в форме: «Рассмотри наибольшее!» — рассмотрим отрезок $BC$ наибольшей длины. Ясно, что вне отрезка $BC$ нет точек из $M$, иначе существовали бы отрезки с бо́льшими длинами. Таким образом, все точки множества $M$ лежат на отрезке $BC$ и, значит, ни $B$, ни $C$ не удовлетворяют условию, то есть не принадлежат множеству $M$. Противоречие.

Вернемся теперь к задаче 1. Допустим, что множество $M$ конечно. Снова применим правило «крайнего». Для этого зафиксируем положение плоскости и рассмотрим самую левую точку множества $M$, а если «самых левых» точек несколько, то возьмем самую нижнюю из них. Легко убедиться, что эта точка, обозначим ее через $A$, не может лежать внутри отрезка, соединяющего две точки множества $M$. Действительно, если бы такой отрезок существовал, то один из его концов находился бы либо левее $A$, либо на одной вертикали с точкой $A$, но ниже ее. Ни того, ни другого не может быть в силу выбора точки $A$.

Здесь, как и в задаче 2, тоже существует решение, основанное на рассмотрении попарных расстояний между точками множества $M$. Если множество $M$ конечно, то и попарных расстояний конечное число, и среди них, руководствуясь правилом «крайнего», можно отыскать наибольшее. Пусть это будет расстояние между точками $A$ и $B$. Но точка $B$ является серединой некоторого отрезка $CD$, концы которого по условию принадлежат множеству $M$ (рис. 1). Тогда легко доказать, что либо $|AD|$, либо $|AC|$ больше $|AB|$ (сделайте это самостоятельно, воспользовавшись тем, что медиана $m$, проведенная к одной из сторон треугольника, меньше полусуммы двух других сторон).

Задача 3. *На полях бесконечной шахматной доски написаны натуральные числа так, что каждое число равно среднему арифметическому четырех соседних чисел — верхнего, нижнего, правого и левого. Докажите, что все числа на доске равны между собой.*

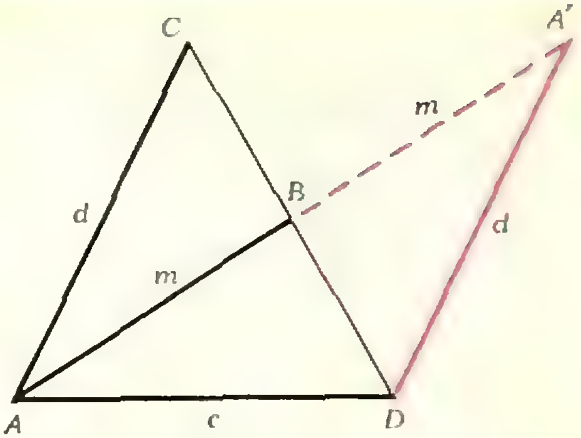


Рис. 1.

Решить эту задачу нам поможет правило «крайнего» в форме «Рассмотри наименьшее!». Среди натуральных чисел, записанных на полях шахматной доски, непременно существует наименьшее. В этом нетрудно убедиться. Пусть $k$ — одно из данных чисел. Если среди чисел, записанных на доске, имеется единица, то она и является таким наименьшим числом (не существует натуральных чисел, меньших единицы). Если единицы на доске нет, посмотрим, нет ли там двойки. Если есть, то она и является наименьшим числом, если же нет, то поищем на доске тройку, и т. д. Не более чем за $k$ шагов мы отыщем таким образом наименьшее число $m$. Рассмотрим поле $P$, на котором оно записано. Обозначим числа, записанные на соседних полях, буквами $a$, $b$, $c$ и $d$. По условию $m=(a+b+c+d)/4$. Отсюда $a+b+c+d=4m$. В силу выбора числа $m$ имеем $a\geqslant m$, $b\geqslant m$, $c\geqslant m$, $d\geqslant m$. Если хоть одно из этих неравенств было бы строгим, то мы имели бы $a+b+c+d>4m$, что противоречит условию. Значит, $a=b=c=d=m$.

Таким образом, если на некотором поле записано число $m$, то и на соседних полях записано число $m$. Отсюда следует, что на горизонтали, содержащей поле $P$, записаны одни только числа $m$. Но любая вертикаль пересекает эту горизонталь, то есть она содержит число $m$, и, значит, все числа на вертикалях равны $m$. Значит, вообще все числа на доске равны $m$.

Задача 4. *На квадратной шахматной доске размером $n \times n$ расставлены ладьи с соблюдением следующего условия: если некоторое поле свободно, то общее количество ладей, стоящих на одной с этим полем горизонтали и на одной с ним вертикали, не меньше $n$. Докажите, что на доске находится не менее $n^2/2$ ладей.*

Эта задача — трудная. Однако умелое применение правила «крайнего» может существенно облегчить поиск решения. Именно, правило «крайнего» наталкивает на мысль рассмотреть ту из $2n$ линий доски — вертикалей и горизонталей, — на которой стоит меньше всего ладей. Может случиться, что есть несколько таких линий, «одинаково нагруженных» ладьями. Тогда выберем любую из них. Пусть эта линия — горизонталь (в противном случае повернем доску на 90° — вертикали станут горизонталями). Число ладей на этой горизонтали обозначим через $k$. Если $k \geqslant \frac{n}{2}$, то на каждой из $n$ горизонталей не менее $\frac{n}{2}$ ладей, а всего на доске не менее $\frac{n^2}{2}$ ладей.

Пусть теперь $k < \frac{n}{2}$. На рассматриваемой горизонтали $n-k$ свободных полей, и каждая вертикаль, проходящая через такое свободное поле, содержит, как видно из условия, не менее $n-k$ ладей, а все такие вертикали — не менее $(n-k)^2$ ладей. Остальные $k$ вертикалей содержат не менее чем по $k$ ладей каждая (в силу выбора числа $k$). Всего на доске стоят не менее чем $(n-k)^2+k^2$ ладей. Остается доказать, что $(n-k)^2+k^2 \geqslant \frac{n^2}{2}$. Это можно сделать разными способами, вот один из них:

$$[(n-k)^2+k^2]-\frac{n^2}{2}=$$

$$=\frac{n^2}{2}-2nk+2k^2=2\left(\frac{n^2}{4}-nk+k^2\right)=$$

$$=2\left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \geqslant 0.$$

Если $n$ — число четное, то можно найти удовлетворяющую условию расстановку, содержащую в точности $\frac{n^2}{2}$ ладей — достаточно поставить ладьи на все черные поля (или на все белые). Если число $n$ — нечетное, то $\frac{n^2}{2}$ ладей расставить, соблюдая условия задачи, нельзя, так как число $\frac{n^2}{2}$ нецелое, но $\frac{n^2+1}{2}$ ладей расставить можно: одну ладью ставим на одно из угловых полей, а остальные — на поля того же цвета.

Аналогично решается следующая задача.

Задача 5. *Пусть $n^2$ неотрицательных целых чисел расположены в виде таблицы, содержащей $n$ строк и $n$ столбцов. При этом выполнено следующее условие: если на некотором месте таблицы записан нуль, то сумма чисел столбца и строки, содержащих этот нуль, не меньше $n$. Докажите, что сумма всех $n^2$ чисел не меньше $n^2/2$*

Задача 6. *На плоскости заданы $n$ точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, проходящая через три данные точки, не содержащая внутри ни одной из данных точек.*

Проведем окружность через каждую тройку точек. Получим некоторое множество окружностей (некоторые из них могут слиться в одну). Требуется доказать, что хотя бы одна из этих окружностей не содержит внутри себя ни одной из данных точек. Правило «крайнего» может навести на мысль рассмотреть наименьшую окружность (окружность наименьшего радиуса), но это в данном случае ничего не даст (достаточно рассмотреть конфигурацию из таких точек: 4 вершины квадрата и его центр; наименьшей будет окружность, описанная около квадрата, а она условию не удовлетворяет). Поступим иначе. Попробуем решить более простую задачу, а именно, будем искать окружность, проходящую через две из данных точек и не содержащую точек внутри себя. Измерим расстояния между каждыми двумя данными точками и, воспользовавшись правилом «крайнего» в форме «Рассмотри наименьшее!», возьмем пару точек $A$ и $B$, находящихся на наименьшем расстоянии друг от друга. Легко убедиться, что окружность, построенная на отрезке $AB$ как на диаметре, удовлетворяет условию: остальные $(n-2)$ данные точки удалены и от $A$, и от $B$ не менее чем на $|AB|$, а потому расположены вне этой окружности. Теперь проведем окружности через точки $A$ и $B$ и через каждую из остальных $(n-2)$ точек. Вот среди этих окружностей выберем наименьшую, как нам подсказывает правило «Рассмотри наименьшее!». Пусть это будет окружность, проходящая через точки $A$, $B$, $C$. Она — искомая, потому что любая окружность, проведенная через точки $A$ и $B$ и некоторую точку $C'$ «серпа» (рис. 2), меньше окружности, проходящей через точки $A$, $B$, $C$ (докажите это самостоятельно).

Задача 7. *На плоскости проведено $n$ прямых ($n \geqslant 3$). Никакие две из них не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. Эти прямые разрезают плоскость на части. Докажите, что какую бы из $n$ прямых мы ни взяли, хотя бы одна из примыкающих к ней частей плоскости является треугольником.*

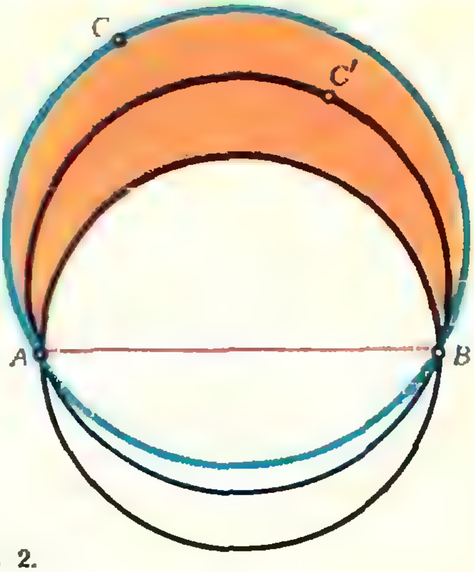


Рис. 2.

Пусть $l_1$ — одна из данных прямых. Руководствуясь правилом «крайнего», из всех точек пересечения остальных прямых выберем ту, которая находится на наименьшем расстоянии от прямой $l_1$. Пусть в этой точке, обозначим ее буквой $P$, пересекаются прямые $l_2$ и $l_3$. Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что треугольник, образуемый прямыми $l_1$, $l_2$ и $l_3$, составляет одну часть плоскости и, следовательно, удовлетворяет условию задачи.

Задача 8. *Докажите, что не существует четверки натуральных чисел $x$, $y$, $z$, $u$, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=3(z^2+u^2)$.*

Допустим, что такие четверки существуют. Рассмотрим ту из них, для которой величина $x^2+y^2$ минимальна (если есть несколько четвёрок, у которых эта величина одинакова и минимальна, рассмотрим одну из них, любую). Пусть это будет четверка $a$, $b$, $c$, $d$. Из уравнения $a^2+b^2=3(c^2+d^2)$ видно, что $a^2+b^2$ кратно трем. Но легко доказать, что $a^2+b^2$ делится на три тогда и только тогда, когда и $a$, и $b$ делятся на три, потому что квадрат числа, не делящегося на три, дает при делении на три в остатке единицу.

Следовательно, $a=3m$, $b=3n$, откуда

$$a^2+b^2=9m^2+9n^2=3(c^2+d^2).$$

Сокращая последнее равенство на 3, получим:

$$c^2+d^2=3(m^2+n^2).$$

Мы нашли четверку чисел $c$, $d$, $m$, $n$, удовлетворяющую данному уравнению, причем для этой четверки

$$c^2+d^2<a^2+b^2,$$

а это невозможно в силу выбора четверки $a$, $b$, $c$, $d$.

Задача 9. *На плоскости расположены $n$ прямых ($n\geqslant 3$). Любые две прямые пересекаются и через каждую точку пересечения проходят не менее трех из данных прямых. Докажите, что все прямые пересекаются в одной точке.*

Пусть $M$ — одна из точек пересечения прямых. Допустим, что она — не единственная. Тогда найдется прямая $l$ данной системы, не проходящая через $M$. Множество точек пересечения прямых, не лежащих на $l$, непусто — оно содержит, например, точку $M$. Рассмотрите точку этого множества, ближайшую к $l$ (а если имеется несколько точек, находящихся на минимальном расстоянии от $l$, то выберите одну из них, любую), и получите противоречие.

Вот еще одна аналогичная задача.

Задача 10. *На плоскости заданы $n$ точек ($n\geqslant 3$). Известно, что на всякой прямой, проходящей через 2 данные точки, расположена по крайней мере еще одна из данных точек. Докажите, что тогда все $n$ точек лежат на одной прямой.*

Развитием правила «крайнего» является «правило расположения», которое звучит так: «Расположите элементы исследуемого множества в порядке возрастания или в порядке убывания (или еще как-нибудь)!».

Задача 11. *Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем никакие двое не собрали одинакового числа грибов. Докажите, что есть трое грибников, собравших вместе не менее 50 грибов.*

Составим «таблицу первенства», поместив в ней грибников в порядке убывания числа собранных ими грибов. Ясно, что рассматривать надо грибников, занявших первые 3 места — они собрали грибов больше, чем любая другая тройка. Попробуем доказать, что они собрали не менее 50 грибов. Если грибник, занявший 3-е место, собрал 16 грибов или больше, то на 2-м месте — грибник, собравший не менее 17 грибов, а на первом — не менее 18 грибов. Вместе они собрали не меньше $16+17+18=51$ гриба. Если же грибник, занявший 3-е место, собрал не более 15 грибов, то грибники, занявшие места с 4-го по 7-е, собрали не более $14+13+12+11=50$ грибов. На долю первой тройки и в этом случае остается не менее 50 грибов.

## К статье «Принцип Ферма»

1. Вывод закона отражения (см. рис. 1). При распространении света в однородной среде пути наименьшего времени соответствует кратчайший путь. Пусть свет попадает из точки $A$ в точку $B$, отразившись от зеркала в точке $O$. Путь, проходимый светом, равен

$$l = AO + OB = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}.$$

Для нахождения минимума функции $l(x)$ надо взять производную от $l(x)$ по $x$ и приравнять ее нулю:

$$\frac{dl}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-2(c - x)}{2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0,$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}};$$

$$\sin\alpha = \sin\beta, \quad \alpha = \beta.$$

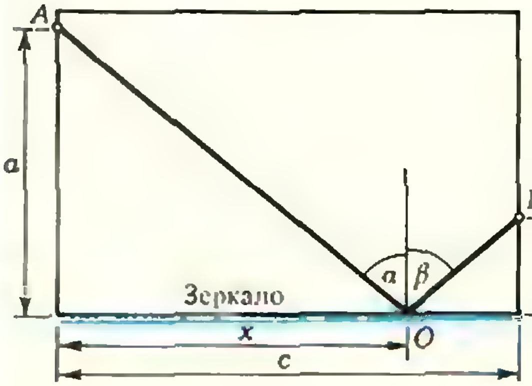


Рис. 1.

2. Вывод закона преломления (см. рис. 2):

$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2};$$

$$l_1 = \sqrt{a^2 + x^2};$$

$$l_2 = \sqrt{b^2 + (c - x)^2};$$

$$t = \frac{1}{v_1}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{b^2 + (c - x)^2};$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1}\frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{-2(c - x)}{2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = 0;$$

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}};$$

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2},$$

или

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

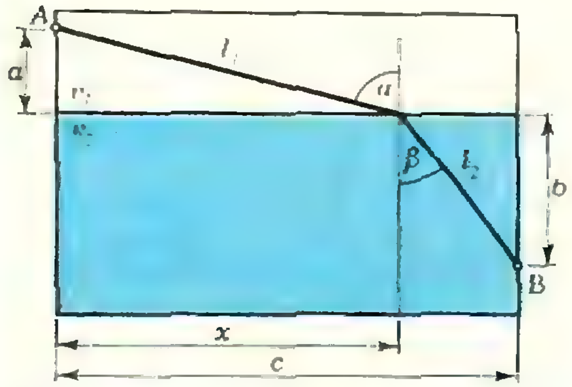


Рис. 2.

## К статье «Опыты с порошковыми фигурами»

1. Когда вы пальцем одной руки держитесь за лист электропроводной бумаги, а пальцем другой проводите по зубному порошку на бумаге, потенциал вашего тела равен потенциалу электропроводной бумаги. Поэтому разность потенциалов между движущимся пальцем и листом электропроводной бумаги равна нулю, и порошковые фигуры не образуются.

2. Для образования порошковых фигур необходима переменная разность потенциалов между пальцем и электропроводной бумагой. Если бы в цепи вообще не было тока, а существовала лишь эта разность потенциалов, то порошковые фигуры все равно бы получались. Именно поэтому малые токи в фазовом проводе сети могут быть обнаружены при помощи порошковых фигур.

3. Для опыта можно использовать любой фабричный фотоэлемент, например, типа СЦВ-4. Фотоэлемент нужно включить в разрыв фазового проводника сети после конденсатора. При освещении фотоэлемента порошковые фигуры покажут наличие фототока. Следует иметь в виду, что фотоэлемент обладает и темновым током, поэтому в опыте с помощью делителя напряжения нужно подобрать оптимальную разность потенциалов.

### К задачам

*(см. с. 16)*

1. Равенство достигается лишь при $a=b=c$.

*(см. с. 29)*

1. Указание. Если $R$ — радиус описанной окружности треугольника $ABC$, то $|BC|\cdot|AC|=2R\cdot h_c$.

2. $x=1$, $y=0$.

### К статье «Задачи на доказательство»

*(см. «Квант» № 7)*

1. а) Согласно правилу вычитания векторов $\vec{CD}=\vec{OD}-\vec{OC}$. Если точки $O$ и $D$ не совпадают, то точки $A$, $O$, $B$ и $D$ являются вершинами ромба. В обоих случаях $\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{OB}$. Следовательно, $\vec{CD}=\vec{OA}+\vec{OB}-\vec{OC}$.

Для вычисления $|CD|$ возведем это равенство в квадрат. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$. Имеем $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$, т. е. $|AB|^2=|OA|^2+|OB|^2-2\,\vec{OA}\cdot\vec{OB}$, откуда $2\,\vec{OA}\cdot\vec{OB}=2R^2-c^2$

Аналогично

$$2\,\vec{OB}\cdot\vec{OC}=2R^2-a^2,$$

$$2\,\vec{OC}\cdot\vec{OA}=2R^2-b^2.$$

Тогда получим

$$|CD|^2=3R^2+(2R^2-c^2)-(2R^2-a^2)-(2R^2-b^2)=R^2+a^2+b^2-c^2.$$

б) Из а) следует, что

$$R^2+a^2+b^2-c^2\geq 0$$

Применяя формулы $a=2R\sin\hat{A}$ и $\cos 2\hat{A}=1-2\sin^2\hat{A}$, получим нужное неравенство.

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $|CD|=0$, т. е. когда $\hat{A}=\hat{B}=30^\circ$ и $\hat{C}=120^\circ$.

2. а) Докажите, что

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

3. а) Указание. $\vec{DM}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}-\vec{OD}$. Вычислив скалярный квадрат вектора $DM$, получите формулу

$$|DM|^2=4R^2+a^2+b^2+c^2-(a_1^2+b_1^2+c_1^2),$$

где $a=|DA|$, $b=|DB|$, $c=|DC|$, $a_1=|BC|$, $b_1=|CA|$, $c_1=|AB|$, $R=|OA|$.

4. Указание. Докажите, что

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

Решения задач и 2 и 4 можно получить также с помощью известной *формулы Лагранжа* (см. «Квант», 1975, № 3, с. 41).

5. Указание. Выразите векторы, входящие в доказываемое равенство, через векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ и $\vec{OD}$, где $O$ — произвольная точка.

### К задачам «Квант» для младших школьников»

*(см. «Квант» № 7)*

1. Из условия следует, что если $A$ и $B$ — друзья, то $C$ либо их общий враг, либо их общий друг (иначе им троим не помириться). Поэтому в государстве есть два множества людей: люди из одного множества — друзья, а из разных — враги. Осталось всем людям из одного множества изменить свои отношения на противоположные.

2. $p=3$. Указание. Рассмотрите остатки, получающиеся при делении указанных чисел на 3.

3. Круг удвоенного радиуса (кольцо, если радиусы окружностей не равны).

4. Разбейте плоскость квадратной сеткой со стороной квадратов 60 *см*, в квадрате 180 *см*×180 *см* квадратики закрасьте в разные цвета, а потом периодически продолжайте раскраску.

5. Рейс займет больше времени, если города находятся на берегу реки.

### К статье «Поиск предмета»

*(см. «Квант» № 7)*

#### Номер телефона

Надо задавать вопросы так, чтобы каждый последующий вопрос вдвое уменьшал количество «подозрительных» номеров. По условию имеется всего $10^7$ вариантов, что больше $2^{23}$, но меньше $2^{24}$, поэтому 24 вопросов хватит, а 23 может и не хватить. Сами вопросы можно задавать по-разному. Например, можно спросить: «Верно ли, что ваш номер не меньше 5 000 000?». Если ответ «да», то следующий вопрос может быть такой. «Не меньше ли он 7 500 000?» и т. д.

### Еще две фальшивые монеты

а) Занумеруем монеты числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Среди монет есть пара фальшивых. Это или пара 1, 2, или пара 1, 3, или 1, 4, или 1, 5, или 1, 6, или 2, 3 и так далее до 5, 6 — всего 15 возможных пар (выпишите их все). Будем записывать слева от тире номера монет на левой чашке, справа — на правой.

1) 1, 2, 3 — 4, 5, 6.

2) 1, 2, 4 — 3, 5, 6.

Если хотя бы при одном взвешивании равновесие нарушилось, то на чашке, которая перевесила, две из трех монет — фальшивые, и на другой чашке все монеты настоящие. Докажите сами, что в этом случае для выделения фальшивых монет достаточно еще двух взвешиваний.

Если же при первых двух взвешиваниях равновесие ни разу не нарушилось, то фальшивые монеты при обоих взвешиваниях находились на разных чашках весов. Значит, фальшивыми могут быть лишь пять пар: 1, 5; 1, 6; 2, 5; 2, 6; 3, 4. Осталось сравнить вес пар 1, 5 и 2, 6, а затем 1, 6 и 2,5.

б) Ответ: четыре взвешивания (доказать, что трех не хватит, довольно трудно).

### Универсальные гири

Ответ: гири массой 1, 3, 9 и 27 граммов (попробуйте связать взвешивание с помощью этих гирь с представлением чисел в троичной системе счисления).

### Отгадки с препятствиями

Для решения задачи достаточно 29 вопросов. Сначала спросите про первые 15 цифр, содержащихся в двоичной записи телефонного номера (вопросы типа: «Верно ли, что на $k$-м месте в двоичной записи стоит 0?»). Затем спрашиваете: «Солгали ли вы в одном из 15 ответов?»

Если «да», то ложен либо один из 15 ответов, либо последний. Методом «деления пополам» четырьмя вопросами узнаете, в каком же из 16 ответов ложь, а затем девятью вопросами выясняете оставшиеся цифры.

Если же на 16-й вопрос ответ «нет», значит, действительно я ни разу не лгал, и полученные вами 15 цифр — верные (в противном случае ложь содержалась бы в двух ответах: в одном из первых 15-ти и в 16-м, а это противоречит условию). Далее спросите про следующие семь цифр и опять задаете вопрос: «Солгали ли вы в одном из последних семи ответов?»

Если ответ «да», то тремя вопросами узнаете, где ложь, и еще двумя — последние две цифры; если ответ «нет», то спрашиваете про оставшиеся две цифры и «не лгали ли вы в этих двух ответах?» Двух вопросов хватит, чтобы узнать, где ложь.

### К кроссворду

*(см. «Квант» № 7)*

1. Величина. 2. Действие. 3. Квадрант. 4. Паренаго. 5. Периметр. 6. Давление. 7. Кенотрон. 8. Механика. 9. Птолемей. 10. «Электрон». 11. Микрофон. 12. Гексаэдр. 13. Парадокс. 14. Апертура. 15. Кинетика. 16. Энтропия. 17. Мантисса. 18. Абсцисса. 19. Редуктор. 20. Бетатрон. 21. Динамика. 22. Максвелл. 23. Множимое. 24. Параметр. 25. Радиатор.

Номер оформили художники: В. Карцев, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова, Э. Смирнов, М. Дубах.

Корректор Н. Румянцева

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 21/V 1976 г.
Подписано в печать 8/VII 1976 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 5,77. Т-11869
Цена 30 коп. Заказ 1069 Тираж 313 790 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

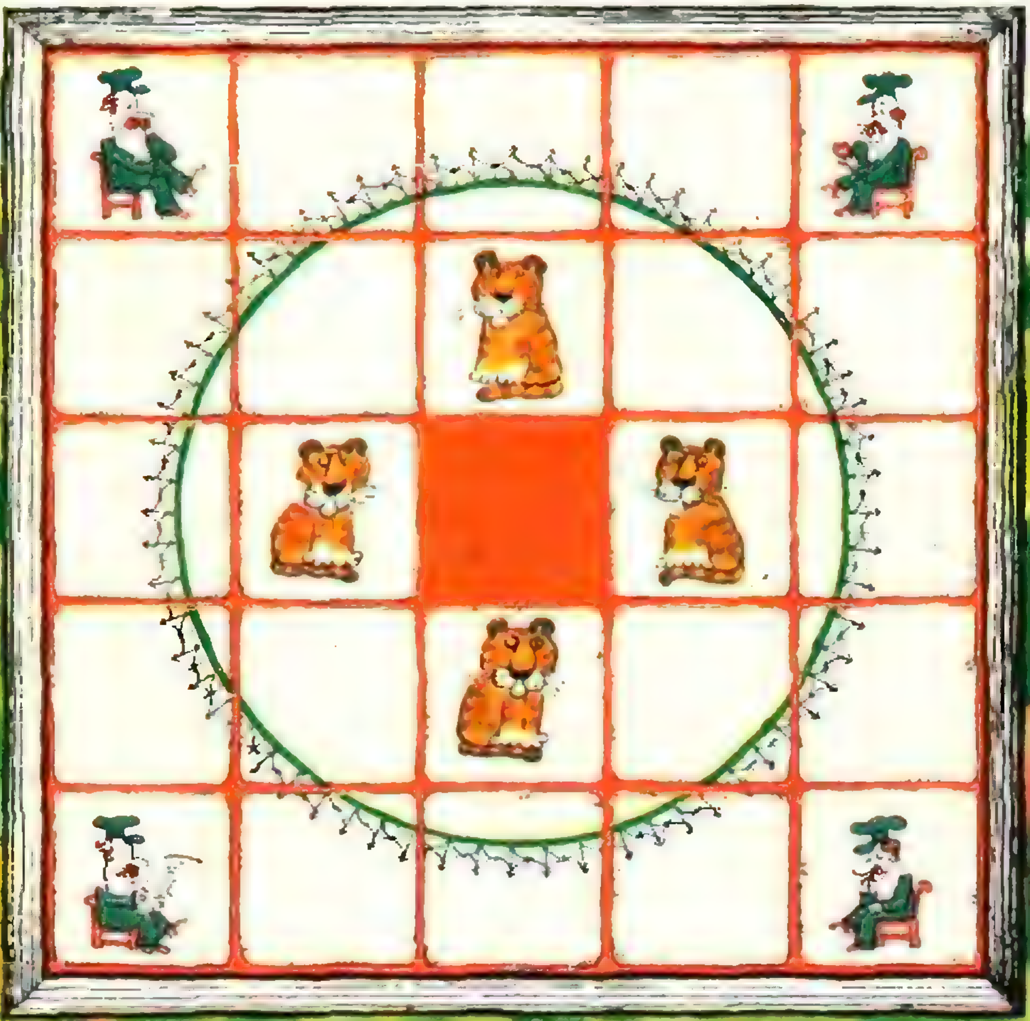
Рукописи не возвращаются

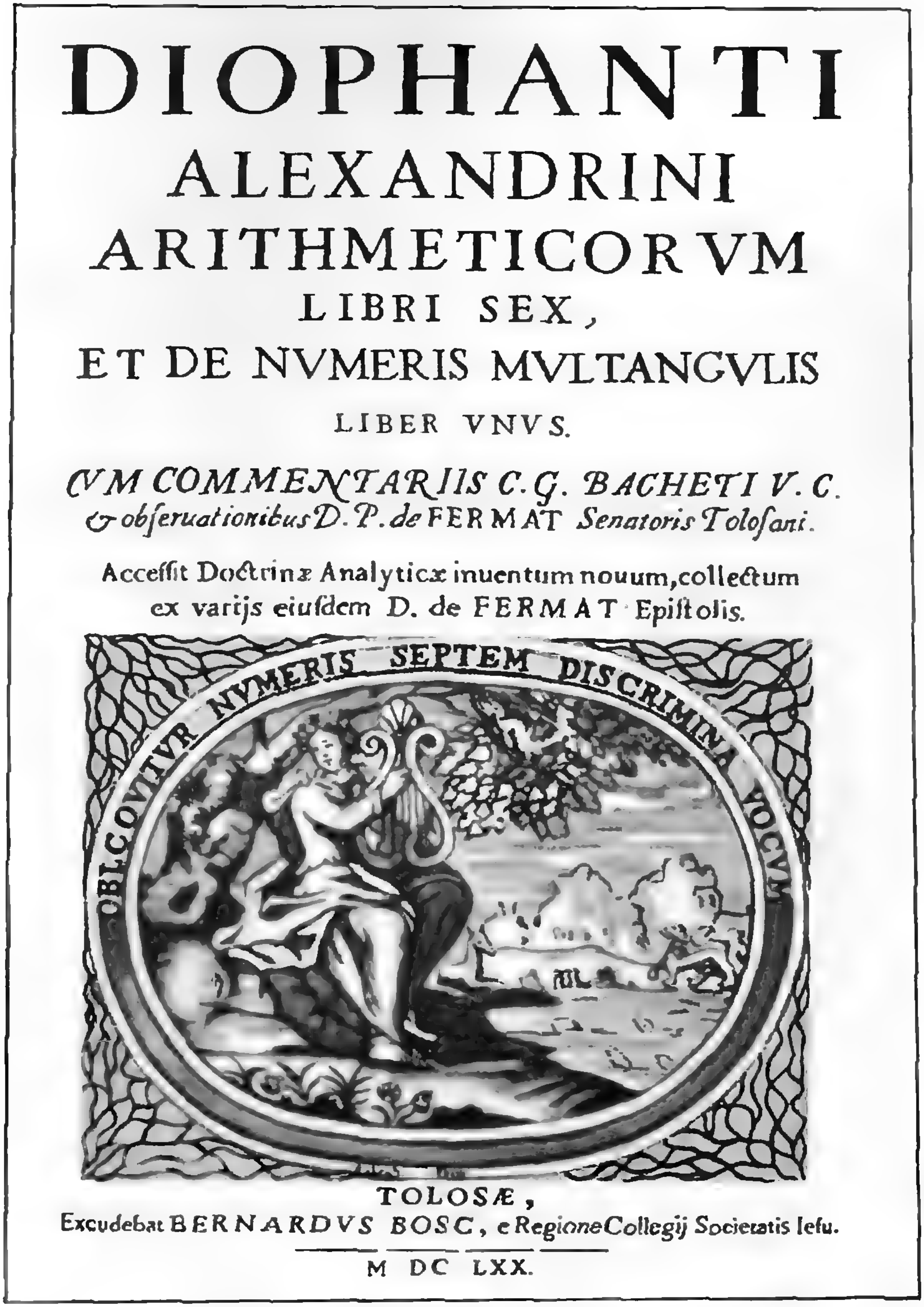
# ТИГРЫ В КЛЕТКЕ

В квадратной коробочке размером 5×5 размещены 24 плитки размером 1×1 (место одной плитки свободно). На четырех плитках нарисованы сторожа, еще на четырех — тигры, на шестнадцати — куски решетки.

В начальном положении тигры находятся в клетке, сторожа — вне клетки (пустое место — в центре коробочки). Передвигая плитки внутри коробочки, можно выпустить тигров на свободу, а сторожей спрятать от них в клетке. Как это сделать? Какое наименьшее число перемещений плиток для этого потребуется? А можно ли отдать одного сторожа «на съедение тиграм»?

*Л. Мочалов*





DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.

*CVM COMMENTARIIS C.G. BACHETI V.C.*
*& obſeruationibus D.P. de* FERMAT *Senatoris Toloſani.*

Acceſſit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiuſdem D. de FERMAT Epiſtolis.

OBLOQVITVR NVMERIS SEPTEM DISCRIMINA VOCVM

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, e Regione Collegij Societatis Ieſu.

M DC LXX.

Титульный лист латинского издания Диофанта с комментариями Баше де Мезириака и замечаниями Ферма. О Ферма мы рассказываем в статье на с. 3

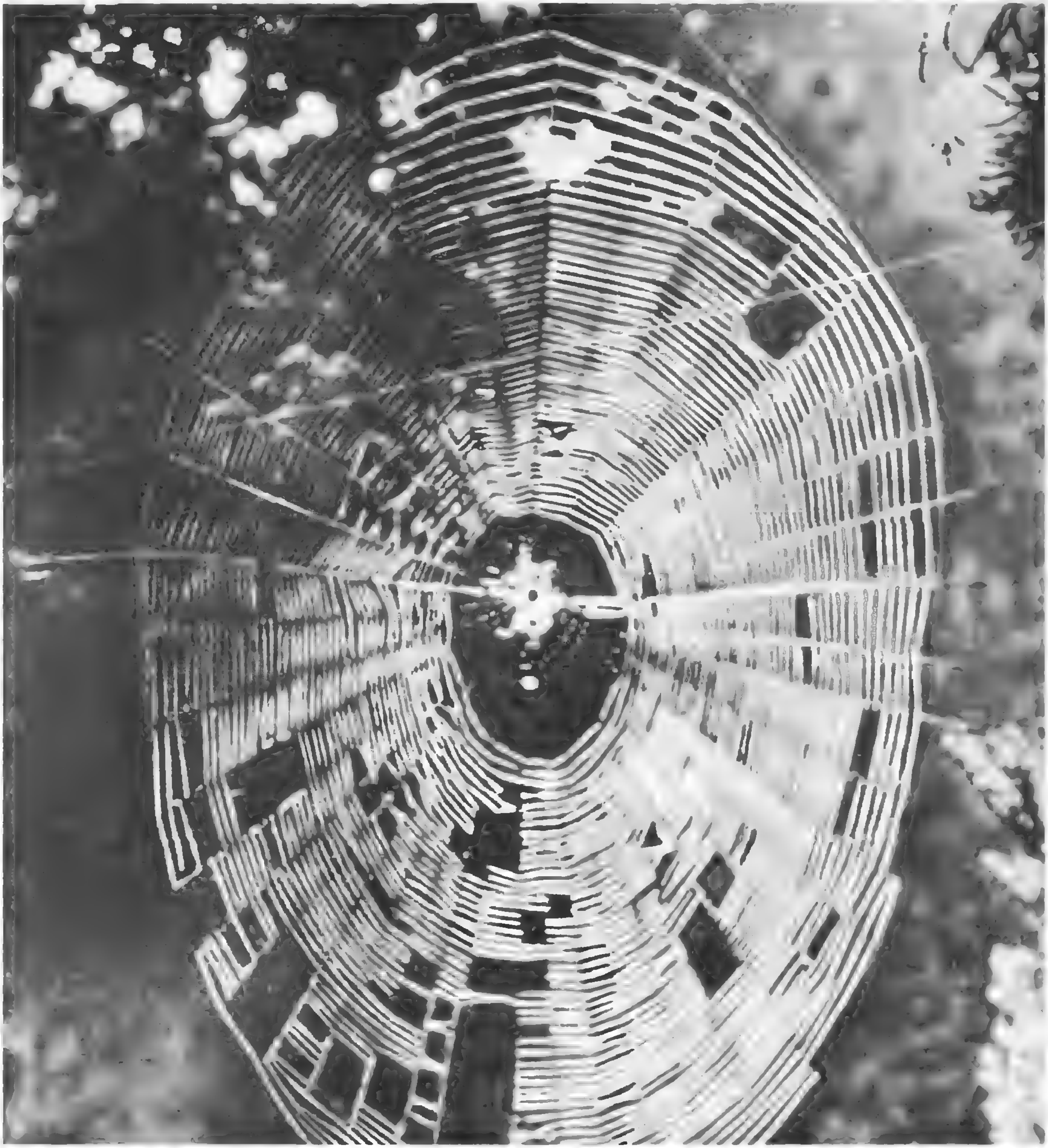
## ПАУК-ГЕОМЕТР

Кружево, сплетенное пауком-крестовиком, явно имеет форму спирали. (Точнее, это — совокупность хорд некоторой спирали.) Что это за спираль? Если верить известному французскому натуралисту Ж. А. Фабру (1823—1915), крестовики плетут равноугольную (она же — логарифмическая) спираль. Это непрерывная кривая, которая пересекает под одним и тем же углом $\alpha$ все радиусы-векторы, исходящие из общего начала $O$. Хорды, принадлежащие одному и тому же углу, параллельны. Это признак, по которому можно распознать равноугольную спираль (однако, он недостаточен). Паутину можно получить и так: строим концентрические окружности, проводим из их общего центра лучи и хорды, соединяющие точки пересечения ближайших друг к другу лучей и окружностями. Хорды, принадлежащие одному и тому же углу, будут параллельны. Для того, чтобы получить спираль, остается в одном каком-нибудь угле не замыкать ломаную в многоугольник, и сделать переход к соседнему «многоугольнику».

Какую трактовку вы считаете более подходящей для творчества пауков-геометров?

*В. Березин*

Цена 30 коп.
Индекс 70345



# НОМЕР
# 9

Основан в 1970 году

# Квант

1976
9

*Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*

*Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы*

Главный редактор
*академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора
*академик* А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
*(главный художник)*
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
*(зам. главного редактора)*
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
*(зам. главного редактора)*
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

**Редакция:**
В. Н. Березин
А. Н. Виленкин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова
*(художественный редактор)*
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чернова
*(зав. редакцией)*

**В НОМЕРЕ:**

2 *С. Гиндикин.* «Великое искусство»
11 *И. Клумова, Д. Фукс.* Формула существует, но...
17 *А. Резников.* Формула Кардано и геометрия
18 *А. Краснодемская.* Графическое решение кубических уравнений
20 *А. Иоффе.* Броуновское молекулярное движение

**У нас в гостях журнал «Земля и Вселенная»**

26 *А. Шпилевский.* Новая интерпретация таинственного радиоэха
31 *Л. Гиндилис.* Модель контакта

**Лаборатория «Кванта»**

36 *Д. Горбушина, В. Майер.* Прохождение света через плоскопараллельную пластинку

**Математический кружок**

39 *М. Балк.* Поиск решения

**Задачник «Кванта»**

46 Победители конкурса «Кванта»
47 Задачи М401—М405; Ф413—Ф417
49 Решения задач М361—М363; Ф369—Ф372

**По страницам школьных учебников**

56 *Б. Гейдман.* Осевая симметрия

**Практикум абитуриента**

59 *Е. Ирошников.* Воспоминания... о предстоящих экзаменах

**Республиканские олимпиады школьников**

63 *А. Савин, М. Смолянский, В. Тихомирова.* Всероссийская олимпиада школьников
66 *В. Березин, Л. Кованцова.* Математическая олимпиада на Украине

**Рецензии, библиография**

67 *И. Зорич.* Мир звуков
68 *И. Рахлин.* Научно-популярные книги по астрономии
69 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги

**«Квант» для младших школьников**

71 Задачи
72 *А. Бендукидзе.* Может ли часть равняться целому?
76 **Ответы, указания, решения**
**Смесь** *(с. 25, 35, 58, 65)*

На первой странице обложки изображен пространственный «слой» из ромбических додекаэдров. О том, как можно построить этот замечательный многогранник, рассказано на с. 25.

*© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1976 год*

*С. Гиндикин*

# «Великое искусство»

**Эта статья посвящена истории главного достижения математики XVI века — решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степени. Любителей математики до сих пор привлекают драматические события, связанные с этим открытием, в которых причудливо переплелись судьбы четырех ученых — дель Ферро, Тартальи, Кардано и Феррари. В 1976 г. исполняется 475 лет со дня рождения Кардано, 400 лет со дня его смерти и 450 лет со дня смерти дель Ферро.**

**В нашем рассказе об этих математиках и их открытии кое-что останется непроясненным: многого мы не знаем о событиях четырехсотлетней давности.**

**Заглавие статьи — это часть названия книги Кардано, вышедшей в 1545 году. Феликс Клейн писал о ней: «Это в высшей степени ценное произведение содержит зародыши современной алгебры, выходящие за пределы античной математики».**

XVI век был веком возрождения европейской математики после средневековой спячки. Сначала европейские ученые пытались разобраться в том, что было сделано их античными и восточными (индийскими и арабскими) предшественниками. Первые собственные достижения математиков XVI века относились к алгебре. (Это связано с тем, что в XVI веке алгебра только зарождалась, тогда как геометрия представляла из себя сложившуюся науку.)

Состояние алгебры на рубеже XV и XVI веков было подытожено в одной из первых печатных книг по математике «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности», напечатанной в Венеции в 1494 году. Книга была написана на итальянском языке. Это была одна из первых научных книг, написанных не на латыни. Ее автор — монах Лука Пачоли, друг великого Леонардо да Винчи. В конце книги Пачоли пишет: для решения кубических уравнений «искусством алгебры еще не дан способ, как не дан способ квадратуры круга». Эти слова, по-видимому, были восприняты как утверждение о невозможности формулы для решения кубических уравнений.

## Сципион дель Ферро

Нашелся человек, которого мнение Пачоли не остановило. Это был профессор математики в Болонье Сципион дель Ферро (1465—1526), сумевший найти способ решать уравнение

$$x^3 + ax = b. \qquad (1)$$

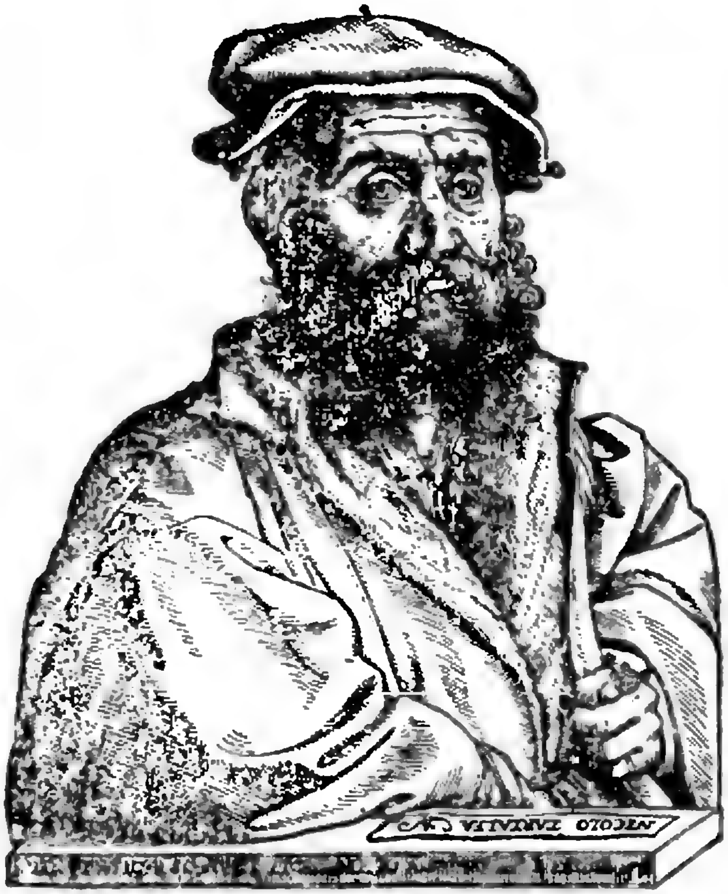
Поскольку отрицательными числами в то время еще не пользовались, буквенные коэффициенты в уравнении (1) (и всюду далее в этой статье) предполагаются положительными. Поэтому уравнения (1) и

$$x^3 = ax + b \qquad (2)$$

воспринимались как совсем разные уравнения! Изложение самого дель Ферро до нас не дошло. Свой способ дель Ферро сообщил зятю и преемнику по кафедре Аннибалу делла Наве и ученику Антонио Марио Фиоре. После смерти учителя Фиоре решил воспользоваться доверенной ему тайной, чтобы стать непобедимым в поединках по решению задач. В конце 1534 года он вызвал на поединок математика из Венеции Никколо Тарталью.

## Никколо Тарталья

Тарталья родился около 1500 года в Брешии, в семье бедного конного



**Никколо Тарталья (единственный известный портрет)**

почтальона Фонтане. В детстве, когда его родной город был захвачен французами, он был ранен в гортань и с тех пор говорил с трудом. Отсюда и его прозвище — «Тарталья» («заика»). Никколо рано остался на попечении матери. По бедности он проучился в школе всего две недели. За это время в классе письма дошли только до буквы «*К*». Тарталья покинул школу, так и не научившись писать свою фамилию. Однако он продолжает учиться самостоятельно и становится «магистром абака» (что-то вроде учителя арифметики в частном коммерческом училище). С 1534 года Тарталья живет в Венеции.

Научные занятия Тартальи стимулировались общением с инженерами и артиллеристами из знаменитого венецианского арсенала. В 1537 году он публикует книгу «Новая наука», посвященную вопросам механики. Эта книга сыграла важную роль в развитии баллистики. В 1546 г. он печатает книгу «Проблемы и различные изобретения». Если в первой из этих двух книг Тарталья вслед за Аристотелем еще утверждает, что брошенное под углом тело вначале летит по наклонной, затем по дуге окружности и, наконец, по вертикали падает вниз, то во второй книге он уже пишет, что траектория «не имеет ни одной части, которая была бы совершенно прямой». Тарталья перевел на итальянский язык (который он, в противовес латыни, называет «народным») Архимеда и Евклида.

Получив вызов Фиоре, Тарталья надеялся одержать легкую победу. Он не испугался даже тогда, когда обнаружил, что все 30 задач Фиоре содержат уравнения (1) при разных $a$ и $b$. Тарталья полагал, что Фиоре и сам не умеет решать предложенные им задачи: «Я думал, что ни одна из них не может быть решена, потому что брат Лука (т. е. Пачоли — С. Г.) уверяет в своем труде, что такого рода уравнения невозможно решить общей формулой».

Когда уже почти прошли 50 дней, после которых решения надлежало сдать нотариусу, до Тартальи дошли слухи, что Фиоре все-таки обладает каким-то таинственным способом решения уравнения (1). Перспектива угощать парадным обедом друзей Фиоре в количестве, равном числу задач, решенных победителем (таковы были правила!), не привлекала Тарталью. Он прилагает титанические усилия, и за восемь дней до назначенного срока (срок истекал 12 февраля 1535 г.) счастье улыбается ему: искомый способ найден. После этого Тарталья за два часа решил все задачи противника, в то время как Фиоре не решил к сроку ни одной задачи Тартальи (странным образом, он не справился даже с задачей, которую можно было решить методом дель Ферро).

Вскоре Тарталья нашел способ решать уравнение (2).

О поединке Фиоре — Тарталья и о победе Тартальи знали многие. К нему обращаются с просьбами раскрыть его секрет. Он отказывается, но нашелся проситель — Джероламо Кардано, который уговорил его.

## Джероламо Кардано

Кардано родился 24 сентября 1501 года в Павии, в семье юриста. Окончив университет, Джероламо решает посвятить себя медицине. Поскольку он был незаконнорожденным ребенком, ему вначале пришлось долго практиковать в провинции. Лишь в августе 1539 г., специально изменив для этого правила, Кардано приняли в коллегию врачей Милана. Позже он стал даже ректором этой коллегии. Кардано был одним из самых знаменитых врачей своего времени; вероятно, вторым — после своего друга Везалия.

На склоне лет Кардано написал автобиографию «О моей жизни». В ней он всего несколько раз упоминает о занятиях математикой и подробно рассказывает о своих исследованиях по медицине. Кардано утверждает, что он описал приемы лечения до пяти тысяч болезней, что число решенных им проблем доходит до сорока тысяч, а число мелких указаний — до двухсот тысяч. Конечно, к этим цифрам следует отнестись с должной долей скептицизма. Все же слава Кардано-врача была несомненной. Кардано утверждает, что в медицинской практике его постигли лишь три неудачи.

Однако занятия медициной не полностью поглощали Кардано. В свободное от медицины время он занимался «всем на свете»: философией, астрологией, физикой, механикой, математикой.

Кардано составлял гороскопы и живых, и мертвых (Христа, Петрарки, Дюрера, Везалия, Лютера). Услугами Кардано-астролога пользовался Папа Римский. (По одной недоброй легенде, Кардано покончил с собой, чтобы подтвердить составленный им собственный гороскоп.)

Книга Кардано «О тонких материях» (1550 г.) была переведена на французский и в течение всего XVII века служила популярным учебником по статике и гидростатике. Галилей при наблюдении над качанием естественного маятника — паникадила в соборе — пользовался указанием Кардано об использовании собственного пульса для измерения времени. Кардано писал о невозможности вечного двигателя. Некоторые его замечания можно интерпретировать как принцип возможных перемещений. Опытным путем Кардано установил отношение плотностей воздуха и воды. Для королевской кареты он изобрел систему соединения двух валов, которая ныне называется карданом (карданный подвес, карданный вал, карданное сочленение) и широко применяется в автомобилях. (Впрочем, справедливость требует отметить, что идея такой системы восходит к античности; кроме того, на одном из рисунков у Леонардо да Винчи изображен компас с карданным подвесом.)

Некоторые сочинения Кардано были своеобразными энциклопедиями. В эпоху Возрождения энциклопедии писались одиночками. Первые энциклопедии, созданные коллективным трудом, появились лишь через полтора века.

Кардано написал огромное количество книг (часть из них была напечатана, часть осталась в рукописях, часть он уничтожил, ожидая ареста (см. ниже)). Одно только их описание составило целую книгу «О собственных сочинениях». Многие годы были популярны его книги по философии и этике. Его книга «Об утешении» была переведена на английский язык и оказала влияние на Шекспира. Некоторые шекспироведы утверждают даже, что Гамлет произносит свой знаменитый монолог «Быть или не быть...», держа эту книгу в руках.

Кардано сорок лет играл в шахматы («я никогда не мог бы выразить в кратких словах, сколько ущерба, без всякого за него возмещения, причинили они моим домашним делам»), двадцать пять — в кости («но еще более шахмат повредили мне кости»). Ради игры он временами бросал все занятия. Побочным продуктом этой страсти Кардано была «Книга об игре в кости», написанная в 1526 году, но напечатанная лишь в 1663 году. В этой книге рассматриваются некоторые вопросы теории вероятностей и комбинаторики; она содержит наблюдения над психологией игроков.

## Кардано и Тарталья

К 1539 году Кардано заканчивает свою первую книгу, целиком посвященную математике «Практика общей арифметики». По его замыслу, она должна была заменить книгу Пачоли. Услышав о секрете Тартальи, он загорелся желанием украсить им свою книгу.

В январе 1539 года Кардано обращается к Тарталье с просьбой передать ему правило решения уравнения (1) или для опубликования в своей книге, или под обещание держать сообщенное в секрете. Тарталья отказывается: «Передайте его светлости, чтоб он простил меня, но если я захочу опубликовать свое открытие, то я сделаю это в моем собственном труде, а не в книге другого». 12 февраля Кардано повторяет свою просьбу. Тарталья неумолим. 13 марта Кардано приглашает Тарталью к себе в Милан, обещая представить его губернатору Ломбардии. По-видимому, эта перспектива прельстила Тарталью: он принимает приглашение. 25 марта в доме Кардано состоялась решающая беседа.

Вот отрывок из записи этой беседы (следует иметь в виду, что запись сделана Тартальей; ученик Кардано Феррари утверждает, что она не вполне соответствует действительности):

«*Никколо.* Я говорю Вам: я отказал Вам не из-за одной только этой главы и сделанного в ней открытия, но из-за тех вещей, которые можно открыть, зная его, так как это ключ, отмыкающий путь для исследования бесчисленного количества других разделов. Я бы уже давно нашел общее правило для многих других проблем, если бы не был в настоящее время занят переводом Евклида на народный язык (в настоящее время я довел перевод до конца 13-й книги). Но когда эта работа, которую я уже начал, будет закончена, я собираюсь издать труд для практического применения вместе с новой алгеброй... Если я выдам ее какому-нибудь теоретику (каким является Ваша светлость), то он легко может с помощью этого объяснения найти другие главы (ибо это объяснение легко приложить к другим вопросам) и опубликовать плоды моего открытия под собственным именем. Этим будут разбиты все мои планы.

*Мессер Джероламо.* Я клянусь Вам святым евангелием господа бога и не только даю Вам слово честного человека никогда не опубликовать этого Вашего открытия, если Вы мне его доверите, но обещаю, и да будет моя совесть истинного христианина Вам порукой, зашифровать его так, что после моей смерти никто не сможет прочитать написанное. Если я, по Вашему мнению, заслуживаю доверия, то сделайте это, если нет, то оставим этот разговор.

*Никколо.* Если бы я не поверил этой Вашей клятве, то, конечно, заслужил бы того, чтобы меня самого сочли неверующим».

Итак, Тарталья дал уговорить себя. По приведенной записи трудно понять, что его заставило изменить решение. Неужели его так потрясли клятвы Кардано? Сообщив тайну, Тарталья немедленно уезжает из Милана, отказавшись от свидания с губернатором, ради которого он предпринял путешествие. Уж не загипнотизировал ли его Кардано?

Когда Тарталья получил 12 мая свеженапечатанную «Практику общей арифметики» без своего «рецепта» (свой способ решения уравнения (1) он сообщил в форме латинского стихотворения: формул тогда писать не умели), он несколько успокоился.

Кардано получил от Тартальи готовый способ решения уравнения (1) без всяких намеков на доказательство. Он затратил много сил на тщательную проверку и обоснование правила. С нашей колокольни нелегко понять, в чем проблема: подставь в уравнение и проверь! Однако отсутствие развитой алгебраической символики делало то, что

**Милан (гравюра на дереве 1493 года)**

сегодня автоматически выполняет любой школьник, доступным лишь избранным. Не познакомившись с подлинными текстами того времени, нельзя оценить, насколько алгебраический аппарат «экономит» мышление. Читатель должен все время иметь это в виду, чтобы не заблуждаться относительно «тривиальности» проблем, вокруг которых кипели страсти в XVI веке.

## Луиджи Феррари

В математических занятиях Кардано с некоторых пор помогал юный Луиджи Феррари (1522—1565). В составленном Кардано списке его 14 учеников Феррари фигурирует как один из трех наиболее выдающихся.

В 1543 г. Кардано и Феррари поехали в Болонью, где делла Наве позволил им познакомиться с бумагами покойного дель Ферро. Там они убедились, что последнему уже было известно правило Тартальи.

По-видимому, современники почти не знали про формулу дель Ферро. Вряд ли Кардано так настойчиво атаковал бы Тарталью, если бы он знал, что ту же информацию он может получить у делла Наве.

Сейчас почти все историки математики соглашаются, что дель Ферро придумал формулу, что Фиоре знал ее и что Тарталья переоткрыл ее, зная, что у Фиоре она есть. Однако ни один из этих фактов строго не доказан!

В конце жизни Тарталья писал: «...я могу заверить, что эта описанная теорема не была еще доказана ни Евклидом, ни кем-либо другим, а одним лишь Джероламо Кардано, которому мы ее показали... и в 1534 году (в другом месте написано, что это произошло 4 февраля 1535 года — С. Г.) нашел в Венеции общую формулу уравнения...»

Трудно свести концы с концами в этой запутанной истории.

К 1545 году Кардано научился решать не только уравнения (1) и (2), но и уравнение

$$x^3 + b = ax, \qquad (3)$$

а также «полное» кубическое уравнение, т. е. уравнение, содержащее член с $x^2$. К тому же времени Феррари придумал, как решать уравнение четвертой степени.

## «Великое искусство»

Знакомство ли с бумагами дель Ферро, сильное ли давление со стороны Феррари или, скорее всего, нежелание похоронить результаты многолетней работы привели к тому, что

Кардано включил все известное ему о кубических уравнениях в вышедшую в 1545 году книгу «Великое искусство или о правилах алгебры».

В предисловии Кардано излагает историю вопроса: «... в наше время Сципион дель Ферро открыл формулу, согласно которой куб неизвестного плюс неизвестное равен числу. Это была очень красивая и замечательная работа. Так как это искусство превосходит всю человеческую ловкость и всю ясность ума смертного, то его нужно рассматривать как подарок небесного происхождения, а также как способность силы ума, и это настолько славное открытие, что от того, кто мог его достигнуть, можно ждать, что он достигнет всего. Соревнуясь с ним, Никколо Тарталья из Брешии, наш друг, будучи вызван на состязание с учеником дель Ферро, по имени Антонио Марио Фиоре, решил, дабы не быть побежденным, ту же самую проблему, и после долгих просьб передал ее мне. Я был введен в забуждение словами Луки Пачоли, который говорит, что нет общего решения такого рода уравнений, и, хотя я обладал уже многими, мною самим сделанными открытиями, я все же не отчаивался найти то, чего я не смел искать. Однако, когда я получил эту главу и добрался до ее решения, то я увидел, что с ее помощью можно многое сделать еще; и уже с повышенной уверенностью в своих делах я, при исследовании, открыл дальнейшее, частью сам, частью с Лодовико Феррари, моим бывшим учеником».

В модернизированном виде способ, которым Кардано находит решение уравнения (1), можно изложить следующим образом. Будем искать решение уравнения (1) в виде $x = \beta - \alpha$. Тогда $x + \alpha = \beta$ и

$$x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3 = \beta^3. \qquad (4)$$

Поскольку $3x^2\alpha + 3x\alpha^2 = 3x\alpha(x+\alpha) = 3x\alpha\beta$, равенство (4) можно переписать в виде

$$x^3 + 3\alpha\beta x = \beta^3 - \alpha^3. \qquad (5)$$

Попытаемся по паре $\langle a, b\rangle$ так подобрать пару $\langle \alpha, \beta\rangle$, чтобы (5) совпало с (1). Для этого необходимо, чтобы пара $\langle \alpha, \beta\rangle$ была решением системы

$$\begin{cases} 3\alpha\beta = a, \\ \beta^3 - \alpha^3 = b \end{cases}$$

или равносильной ей системы

$$\begin{cases} \beta^3\cdot(-\alpha^3) = -\dfrac{a^3}{27}, \\ \beta^3 + (-\alpha^3) = b. \end{cases}$$

По теореме Виета *) $\beta^3$ и $-\alpha^3$ будут корнями вспомогательного квадратного уравнения $y^2 - by - \frac{a^3}{27} = 0$. Поскольку ищутся *положительные корни* уравнения (1), $\beta > \alpha$. Значит, $\beta^3 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$ и $-\alpha^3 = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}$. Следовательно,

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

При положительных $a$ и $b$ корень $x$ также положителен.

Приведенная выкладка лишь в идейном отношении следует ходу рассуждений Кардано. Сам он рассуждает на геометрическом языке: если куб со стороной $\beta = \alpha + x$ разрезать плоскостями, параллельными граням, на куб со стороной $\alpha$ и куб со стороной $x$, получатся, кроме двух кубов, три прямоугольных параллелепипеда со сторонами $\langle \alpha, \alpha, x\rangle$ и три — со сторонами $\langle \alpha, x, x\rangle$; соотношение между объемами дает (4); для перехода к (5) параллелепипеды разных типов попарно объединяются.

«Так как я сознавал, что тот отдел, который передал мне Тарталья, был открыт им при помощи геометрического доказательства, то я думал, что это и есть царский путь, ведущий ко всем другим отделам».

---

*) Сам Виет (1540—1603) жил позже Кардано, но тот частный случай его теоремы, который в школе называют теоремой Виета, был по существу известен Кардано.

Уравнение (2) можно решить при помощи подстановки $x = \beta + \alpha$, но здесь уже может возникнуть случай, когда исходное уравнение имеет три действительных корня, а вспомогательное квадратное уравнение не имеет действительных корней. Это так называемый «неприводимый» случай*). Он доставил много хлопот Кардано (и, вероятно, Тарталье).

Кардано решил уравнение (3), дав очень смелое по тем временам рассуждение, обыгрывающее отрицательность корня. Никто до него не пользовался так решительно отрицательными числами, хотя и Кардано еще далек от свободного обращения с ними: уравнения (1) и (2) он рассматривает отдельно!

Кардано полностью разобрался и с общим кубическим уравнением $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (здесь уж Тарталья совсем ни при чем!), заметив, говоря на современном языке, что подстановка $x = y - \frac{a}{3}$ уничтожает член с $x^2$.

Кардано решается рассматривать не только отрицательные числа (он называет их «чисто ложными»), но и комплексные (их он называет «поистине софистическими»). Он замечает, что если с ними оперировать по некоторым естественным правилам, то квадратному уравнению, не имеющему действительных корней, можно приписать комплексные корни. Возможно, к комплексным числам Кардано пришел в связи с «неприводимым» случаем.

В «Великом искусстве» был отражен и личный вклад Феррари — решение уравнения четвертой степени.

На современном языке метод Феррари для уравнения

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (6)$$

(полное уравнение четвертой степени легко сводится к уравнению (6)) состоит в следующем.

Введя вспомогательный параметр $t$, перепишем уравнение (6) в равносильной форме:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 = 2tx^2 - bx + \left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right). \qquad (7)$$

Подберем теперь значение параметра $t$ так, чтобы квадратный (относительно $x$) трехчлен, стоящий в правой части уравнения (7), имел два совпадающих корня. Для этого нужно, чтобы дискриминант этого трехчлена равнялся нулю:

$$b^2 - 4\cdot 2t\cdot\left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right) = 0.$$

Мы получили вспомогательное кубическое уравнение для $t$. Найдем по формуле Кардано какой-нибудь его корень $t_0$. Уравнение (7) можно теперь переписать так:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + t_0\right)^2 = 2t_0\left(x - \frac{b}{4t_0}\right)^2. \qquad (8)$$

Уравнение (8) распадается на пару квадратных уравнений, дающих четыре искомых корня.

Таким образом, согласно методу Феррари, решение уравнения четвертой степени сводится к решению вспомогательного кубического уравнения и двух квадратных уравнений.

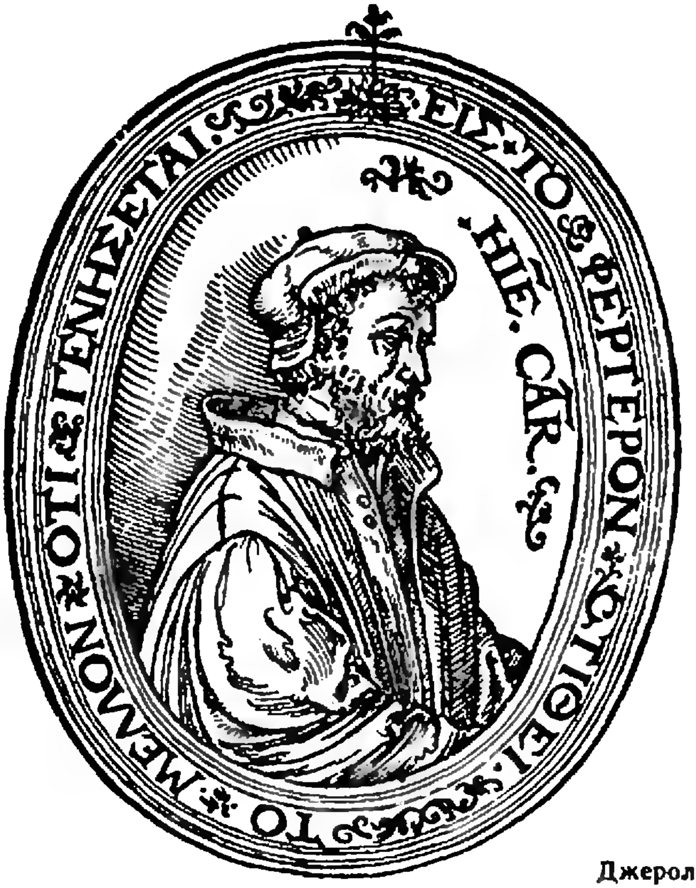
Место «Великого искусства» в истории математики определяется, в первую очередь, не конкретными результатами об уравнениях третьей и четвертой степени, а тем, что в нем впервые появляются общие алгебраические понятия (например, кратность корня) и утверждения (если уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три вещественных корня, то их сумма равна $-a$).

## Феррари и Тарталья

Нетрудно себе представить, какое впечатление произвел на Тарталью выход в свет «Великого искусства» (1545). В последней части книги «Проблемы и различные изобретения» (1546) он публикует переписку с Кардано и записи бесед с ним и обрушивается на него с бранью и упреками. Кардано не реагирует на выпад.

---

*) О нем в «Кванте» уже писалось: 1971, № 11, с. 20 и 1973, № 3, с. 30. См. также с. 11 в данном номере.



**Джероламо Кардано в возрасте 46 лет (гравюра на дереве)**

10 февраля 1547 г. Тарталье, вместо Кардано, отвечает Феррари. Он возражает против упреков Тартальи, указывает на недочеты в его книге, в одном случае упрекает его в присвоении чужого результата и в плохой памяти (похоже, что по тем временам это тяжелое обвинение). В заключение Тарталья вызывается на публичный диспут «по геометрии, арифметике или связанным с ними дисциплинам, таким, как Астрология, Музыка, Космография, Перспектива, Архитектура и др.»

19 февраля Тарталья в своем ответе пытается втянуть в перепалку самого Кардано: «Я писал там в таком горячем и оскорбительном тоне для того, чтобы заставить его светлость (а не Вас) собственноручно написать кое-что, ибо у меня с ним старые счеты».

Обсуждение условий диспута затягивается. Тарталья начинает понимать, что Кардано останется в стороне. Тогда он начинает подчеркивать несамостоятельность Феррари, именуя его «креатурой Кардано», как тот сам назвал себя в своем вызове. Свои «Вопросы», которые он по традиции послал в ответ на вызов, он адресует им обоим: «Вы, мессер Джероламо, и Вы, мессер Луиджи...»

В конце концов Тарталья согласился на диспут с Феррари. Диспут состоялся 10 августа 1548 года в Милане, в присутствии многих знатных особ, но в отсутствии Кардано. О диспуте сохранились лишь короткие записи Тартальи, по которым почти невозможно восстановить истинную картину. Похоже, что Тарталья потерпел поражение.

Впрочем, к проблеме, из-за которой возник спор, диспут не имел никакого отношения. Да и вообще к выяснению истины диспуты имели столь же малое отношение, что и дуэли.

## Дальнейшая судьба героев

За год до смерти Тартальи (он умер в 1557 году) начал выходить его «Общий трактат о числе и мере», содержащий полученные им в те годы результаты по комбинаторике и теории вероятностей. О кубических уравнениях в «Трактате» говорится очень мало. Кончил печататься «Трактат» уже после смерти автора.

Феррари после диспута получил большую известность: он читает публичные лекции в Риме, руководит управлением кадастрами в Милане, участвует в воспитании сына короля. А вот следов в науке он больше не оставил! Умер он в 43 года (1565 г.).

Дольше их обоих прожил Кардано. Но жизнь его была не легкой. Один его сын отравил из ревности жену и был казнен. Другой сын стал бродягой и ограбил собственного отца. В 1570 году сам Кардано был посажен в тюрьму, и имущество его было конфисковано. (Причина его ареста неизвестна. Известно лишь, что в ожидании ареста он уничтожил 120 своих книг.) Кончил свои дни Кардано в Риме, на положении «частного человека» (его выражение), получающего скромную пенсию от Папы. Конец своей жизни он посвятил составлению автобиографической книги «О моей жизни». Последний упоминаемый в этой книге факт датируется 28 апреля 1576 года. Кардано умер 21 сентября 1576 года.

В своей книге Кардано несколько раз вспоминает Тарталью. Он пишет, что Тарталья предпочел иметь в нем «соперника и победителя, чем друга и человека, обязанного благодеяниями». В другом месте он относит Тарталью к числу своих критиков, которые «не вышли за пределы грамматики». Однако на последних страницах он пишет: «Сознаюсь, что в математике кое-что, но в самом деле ничтожное количество, я заимствовал у брата Никколо».

Неспокойно, видимо, было у него на душе!

* * *

К проблеме Тарталья — Кардано историки математики вернулись лишь в начале XIX века, обнаружив существование обиженного Тартальи, который к тому времени был практически забыт. Почти забытая история получила огласку, и за честь Тартальи были готовы сражаться не только профессионалы, но и любители. При многократных передачах истории и проникновении ее в популярную литературу Кардано порой превращался в авантюриста и злодея, укравшего у Тартальи его открытие и давшего этому открытию свое имя.

К концу XIX века часть дискуссии стала носить характер серьезных историко-математических исследований. Математики поняли, какую большую роль сыграли в науке XVI века работы Кардано. Стало ясно то, что еще раньше отмечал Лейбниц: «Кардано был великим человеком при всех его недостатках; без них он был бы совершенством».

Крупнейший историк математики Мориц Кантор (1829—1920; не путать с создателем теории множеств Георгом Кантором!) высказал предположение, имевшееся еще у Феррари, что Тарталья не переоткрыл правило дель Ферро, а узнал его в готовом виде из вторых рук.

Полтора века то утихали, то вновь разгорались страсти. Но, может быть, это один из тех вопросов, на которые теперь уже нельзя дать однозначный ответ?

А за формулой для решения кубического уравнения прочно укоренилось название «формула Кардано».

*И. Клумова, Д. Фукс*

# Формула существует, но...

Вряд ли можно найти школьника, который никогда бы не слышал о том, что наряду с формулой для решения квадратных уравнений есть формула для решения кубических уравнений. Обычный запас сведений об этой формуле сводится к тому, что она имеется, но настолько громоздка, что знать ее совершенно не нужно. Во всяком случае, в школьных учебниках этой формулы нет.

Однако иной школьник, сталкиваясь с задачами, которые сводятся к кубическим уравнениям, начинает сомневаться в полной бесполезности такой формулы, сколь бы сложна она ни была. Окружающая эту формулу таинственность подогревает его любопытство — и он принимается искать ее в разных книгах и справочниках.

Там он находит примерно следующее.

## 1. Как выглядит формула?

Кубическим уравнением называется уравнение вида

$$x^3+ax^2+bx+c=0. \qquad (1)$$

Для его решения мы прежде всего заметим, что простым преобразованием можно уничтожить член с $x^2$. Для этого достаточно положить $x=y-\frac{a}{3}$. Тогда $x^3+ax^2+bx+c=\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+$

$$+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=$$

$$=y^3-ay^2+\frac{a^2}{3}y-\frac{a^3}{27}+ay^2-$$

$$-\frac{2}{3}a^2y+\frac{a^3}{9}+by-\frac{ab}{3}+c=y^3+$$

$$+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)y+\left(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}\right)=0.$$

Таким образом, всякое кубическое уравнение сводится к уравнению без квадратичного члена, или, короче, к уравнению вида

$$x^3+px+q=0. \qquad (2)$$

А такое уравнение решается по формуле:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \qquad (3)$$

И дальше идет то, что в школе называют «выводом формулы» — полстранички выкладок.

## 2. Что-то в этой формуле неблагополучно

Оставим пока «вывод» в стороне и попробуем применить эту формулу к решению конкретных уравнений.

Первый пример:

$$x^3+6x-2=0.$$

Здесь $p=6$ и $q=-2$. Наша формула дает:

$$x=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}.$$

В школе ас приучили, что все корни должны извлекаться, и полученный ответ может показаться вам недостаточно красивым. Но согласитесь, что никакой подбор не помог бы вам узнать, что эта разность двух кубических корней является решением такого простого уравнения. Так что этот результат можно записать нашей формуле в актив.

Второй пример: $x^3 + 3x - 4 = 0$.

Формула (3) дает:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Ответ более громоздок. Это число можно найти приближенно с помощью таблиц, и чем точнее будут таблицы, тем ближе будет результат к единице. Причина проста: это число равно единице *). Но из формулы этого не видно, и это, пожалуй, недостаток формулы: ведь решая квадратные уравнения с целыми коэффициентами, мы сразу видим, является ли решение рациональным.

Третий пример: $(x+1)\times(x+2)(x-3)=0$.

Сразу видно, что это уравнение имеет три решения: $-1$, $-2$ и $3$. Но попробуем решить его по формуле. Раскрываем скобки

$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

и применяем формулу (3):

$$x = \sqrt[3]{3+\sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{-\frac{100}{27}}}.$$

Под знаком квадратного корня стоит отрицательное число. Сталкиваясь с подобной ситуацией при решении квадратных уравнений, мы делаем вывод, что уравнение не имеет решений («уравнение не имеет действительных решений», — скажут более образованные; но образованность в данном случае мало помогает). Однако, мы знаем, что уравнение решения имеет, даже целых три. Формула наша в данном случае просто провалилась.

Эти примеры и другие подобные примеры наводят на мысль, что причина непопулярности формулы (3) лежит не в ее громоздкости (не так уж она и громоздка!), а в ее ненадежности: то она вовсе не дает решений, то дает их в неудовлетворительной форме.

Такое заключение, в общем, справедливо.

Попытаемся все же разобраться, что дает и чего не дает наша формула. Начнем с самого простого.

## 3. Теорема

*Если выражение* $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ *неотрицательно, то правая часть формулы* (3) *является решением уравнения* (2).

Доказательство. Положим

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Очевидно, правая часть формулы (3) как раз равняется сумме $\alpha+\beta$. А произведение $\alpha\beta$ равно $-\frac{p}{3}$:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\times$$

$$\times\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}=$$

$$=\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}=-\frac{p}{3}.$$

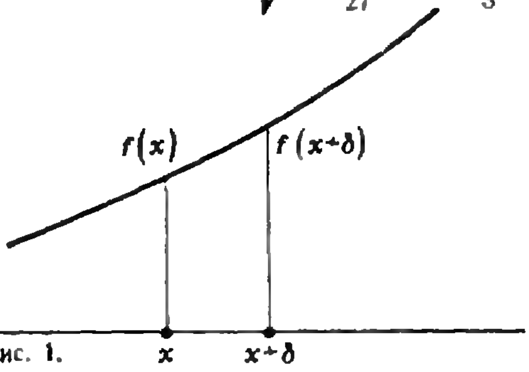


Рис. 1.

---

*) Доказательство: единица есть, очевидно, корень нашего уравнения, а наше уравнение имеет только одно решение — см. ниже п. 4.

Теперь подставим $\alpha+\beta$ в левую часть уравнения (2):

$$(\alpha+\beta)^3+p(\alpha+\beta)+q=\alpha^3+3\alpha^2\beta+$$
$$+3\alpha\beta^2+\beta^3+p(\alpha+\beta)+q=$$
$$=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+$$
$$+p(\alpha+\beta)+q=$$
$$=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}-$$
$$-p(\alpha+\beta)+p(\alpha+\beta)+q=0.$$

Теорема доказана.

## 4. Сколько решений имеет уравнение (2)?

Это естественный вопрос: ведь решить уравнение — значит найти все его решения, а для этого полезно знать, сколько оно имеет решений.

Выясним сначала, при каких $x$ функция $y=x^3+px+q$ возрастает, а при каких — убывает *). Для этого сравним значения нашей функции в точке $x$ и в точке $x+\delta$, где $\delta$ — маленькое положительное число (см. рис. 1). Что больше:

$$x^3+px+q$$

или

$$(x+\delta)^3+p(x+\delta)+q?$$

Вычисляем разность:

$$(x+\delta)^3+p(x+\delta)+q-(x^3+$$
$$+px+q)=\delta(3x^2+p+3\delta x+\delta^2).$$

Знак этой разности определяется знаком сомножителя $3x^2+p+3\delta x+\delta^2$ (поскольку $\delta>0$). Что же касается этой суммы, то:

1) если $3x^2+p>0$, то при достаточно малом $\delta$ она положительна;

2) если $3x^2+p<0$, то при достаточно малом $\delta$ она отрицательна.

Таким образом:

1) если $3x^2+p>0$, то функция $y=x^3+px+q$ в достаточно небольшой окрестности точки $x$ возрастает;

2) если $3x^2+p<0$, то убывает.

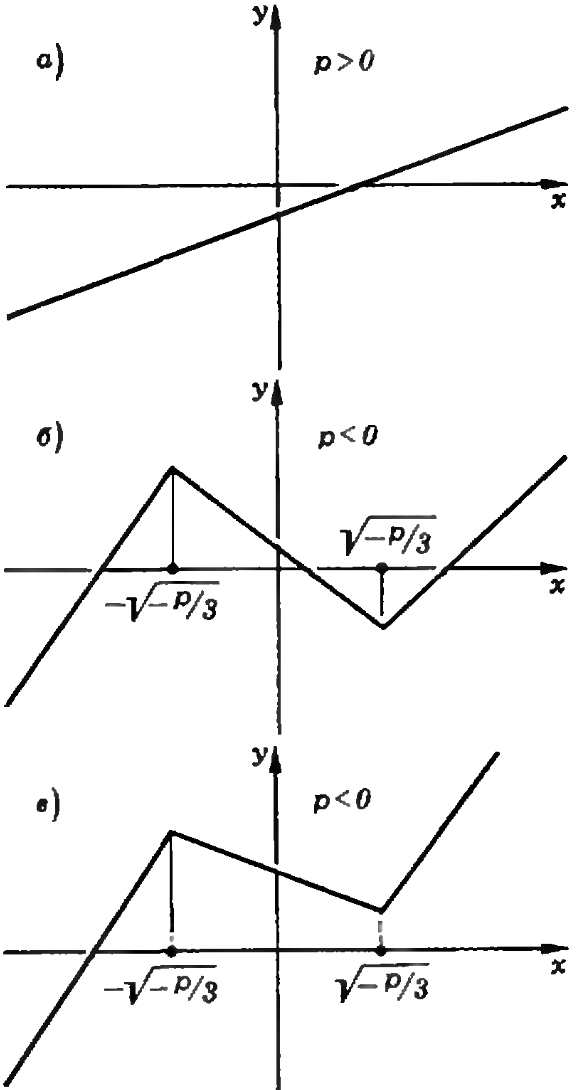


Рис. 2.

Далее, хорошо известно, что

1) если $p>0$, то $3x^2+p>0$ при всех $x$;

2) если $p<0$, то $3x^2+p>0$ при $x>\sqrt{-p/3}$ и при $x<-\sqrt{-p/3}$, и $3x^2+p<0$ при $-\sqrt{-p/3}<x<$ $<\sqrt{-p/3}$.

Поэтому

1) если $p>0$, то функция $y=$ $=x^3+px+q$ возрастает при всех $x$;

2) если $p<0$, то функция $y=x^3+px+q$ возрастает при $x<-\sqrt{-p/3}$, убывает при $-\sqrt{-p/3}<x<\sqrt{-p/3}$ и снова возрастает при $x>\sqrt{-p/3}$.

---

*) То, что делается дальше, представляет собой очень распространенный в математике прием, называемый *дифференцированием*. Конечно, многие читатели знакомы с этим приемом, но мы постарались сделать изложение понятным и для тех, кто его не знает.

Заметим, что при достаточно большом $x$ выражение $x^3 + px + q$ заведомо положительно, а при достаточно большом по модулю отрицательном $x$ оно заведомо отрицательно. Теперь мы можем схематически нарисовать график функции $y = x^3 + px + q$ (рис. 2а)—в)).

На этих схематических графиках отражены только зоны возрастания и убывания функции $y = x^3 + px + q$ и еще тот факт, что $y > 0$ при достаточно больших $x$ и $y < 0$ при отрицательных достаточно больших по модулю $x$. Но уже этих схематических графиков достаточно, чтобы судить о числе решений уравнения. Мы видим, что:

1) уравнение имеет одно решение, если $p > 0$; или если $p < 0$ и значения функции в точках $-\sqrt{-p/3}$, $\sqrt{p/3}$ имеют одинаковые знаки — рис. 2а) и 2в).

2) если же $p < 0$ и значения функции в точках $-\sqrt{-p/3}, \sqrt{-p/3}$ имеют противоположные знаки, то уравнение имеет три решения — рис. 2б).

Можно сформулировать этот результат в более удобной форме. Для того чтобы узнать, одинаковые или противоположные знаки имеют значения функции в точках $-\sqrt{-p/3}$, $\sqrt{-p/3}$, можно вычислить эти значения и перемножить их: если произведение положительно, то знаки сомножителей одинаковы, а если оно отрицательно, то — различны. Проделаем это вычисление:

$$\left[\left(-\sqrt{-p/3}\right)^3 + p\left(-\sqrt{-p/3}\right) + q\right] \times$$

$$\times \left[\left(\sqrt{-p/3}\right)^3 + p\sqrt{-p/3} + q\right] =$$

$$= \left[p/3\sqrt{-p/3} - p\sqrt{-p/3} + q\right] \times$$

$$\times \left[-p/3\sqrt{-p/3} + p\sqrt{-p/3} + q\right] =$$

$$= \left(q - 2/3\, p\sqrt{-p/3}\right) \times$$

$$\times \left(q + 2/3\, p\sqrt{-p/3}\right) = q^2 + 4/27\, p^3.$$

Итак, если $p < 0$ и $q^2 + \frac{4}{27}p^3 > 0$, то решение одно, а если $p < 0$ и $q^2 + \frac{4}{27}p^3 < 0$, то решений три. Заметив, что если $p > 0$, то уже заведомо $q^2 + \frac{4}{27}p^3 > 0$, мы можем сформулировать результат так:

*Если* $q^2 + \frac{4}{27}p^3 > 0$, *то уравнение* (2) *имеет одно решение.*

*Если* $q^2 + \frac{4}{27}p^3 < 0$, *то уравнение* (2) *имеет три решения**).

### 5. Неожиданный вывод

Заметили ли вы, что у нас получилась удивительная вещь? Ведь выражение $q^2 + \frac{4}{27}p^3$ только на несущественный (с точки зрения знака) множитель отличается от опасного подкоренного выражения в формуле (3):

$$q^2 + \frac{4}{27}p^3 = 4\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right).$$

Значит, именно тогда, когда уравнение имеет три решения, подкоренное выражение отрицательно, и формула не дает ничего (мы видели это на примере, но теперь ясно, что это не случайно). Если же уравнение имеет всего одно решение, то наша формула его и дает.

Итак, феномен, наблюдавшийся нами в п. 2, получил свое объяснение. Осталось посмотреть только, нельзя ли что-нибудь все же выжать из нашей формулы, когда уравнение имеет три решения и под квадратным корнем оказывается отрицательное число.

---

*) Мы всюду оставляли без рассмотрения случай, когда что-нибудь обращается в нуль. В действительности, если $q^2 + \frac{4}{27}p^3 = 0$, то уравнение имеет два решения, за единственным исключением: если $p = q = 0$, то решение, очевидно, одно.

## 6. Не помогут ли комплексные числа?

Все, что написано дальше, рассчитано на читателя, знакомого с *комплексными числами*.

Впрочем, «знакомство» с комплексными числами, в сущности, есть не более чем привычка к употреблению определенных слов. Комплексные числа появились в математике примерно так же, как несколько раньше — отрицательные числа или дроби. Поскольку не из всякого действительного числа можно извлечь квадратный корень, удобно дополнить запас чисел новым числом $i$, квадрат которого равен $-1$ (как раньше, желая сделать универсальной операцию вычитания, ввели отрицательные числа). Вместе с $i$ вводят числа вида $a+bi$, где $a$ и $b$ — действительные числа, и уславливаются, что действия над этими числами производятся по таким правилам:

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

(в последнем равенстве мы учли, что $i^2=-1$). Построенные числа называются *комплексными числами*; числа $a$ и $b$ называются соответственно *действительной* и *мнимой* частью числа $a+bi$; два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части. Приведем еще *формулу Муавра* (она нам понадобится ниже):

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta),$$

которая является немедленным следствием формулы для перемножения комплексных чисел и известных тригонометрических формул.

Вернемся к формуле (3). В случае, когда $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, можно попытаться найти решения уравнения (2) с ее помощью, извлекая кубические корни из комплексных чисел.

Извлечь кубический корень из комплексного числа $a+bi$ — это значит решить уравнение

$$(x+iy)^3=a+bi,$$

то есть уравнение $x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)=a+bi$. Последнее равенство означает, что

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=a,\\ 3x^2y-y^3=b.\end{cases}$$

Система же эта различными способами приводится опять-таки к кубическому уравнению. Например, так:

$$y^2=\frac{x^3-a}{3x}\ \text{(из первого уравнения)},$$

$$y\left(3x^2-\frac{x^3-a}{3x}\right)=b,\quad y=\frac{3bx}{8x^3+a}.$$

$$x^3-3x\cdot\frac{9b^2x^2}{(8x^3+a)^2}=a,$$

$$(x^3-a)(8x^3+a)^2-27b^2x^3=0,$$

или, полагая $x^3=z$,

$$(z-a)(8z+a)^2-27b^2z=0. \qquad (4)$$

Конечно, можно снова обратиться к формуле (3). Но оказывается, что применение этой формулы к уравнению (4) всегда приводит к отрицательному выражению под квадратным корнем. Впрочем, это и не удивительно, поскольку, как легко доказать, *кубический корень из комплексного числа имеет три значения.*

Таким образом, на этом пути формулой (3) воспользоваться не удается. Но все же с ее помощью можно находить приближенные значения корней уравнения (2). Для этого нужно иметь, кроме таблиц квадратных и кубических корней, еще тригонометрические таблицы и применить формулу Муавра, из которой следует, что

$$\cos\alpha+i\sin\alpha=\left(\cos\frac{\alpha}{3}+i\sin\frac{\alpha}{3}\right)^3.$$

Кубический корень из комплексного числа $a+bi$ с помощью этой формулы нужно искать так. Сначала представим $a+bi$ в виде

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,i\right).$$

Затем находим такое $\alpha$, что $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (это можно сделать, потому что $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$). Искомый кубический корень запишется тогда как

$$\sqrt[6]{a^2+b^2}\left(\cos\frac{\alpha}{3}+i\sin\frac{\alpha}{3}\right).$$

(Заметим, что $\alpha$ определено с точностью до слагаемого $2k\pi$, $\frac{\alpha}{3}$ определено с точностью до слагаемого $\frac{2k\pi}{3}$ и $\cos\frac{\alpha}{3}+i\sin\frac{\alpha}{3}$ имеет три значения — так и должно быть!)

Этим способом можно приближенно найти кубические корни, входящие в формулу (3). Впрочем, нам достаточно найти только действительную часть одного из них: если один из двух корней равен $c+di$, то другой равен $c-di$ (докажите это!) и их сумма равна $2c$.

Но, пожалуй, этот способ решения кубического уравнения с помощью таблиц квадратных и кубических корней и тригонометрических таблиц еще более громоздок и неточен (ведь все табличные значения определяются лишь с какой-то точностью, а при каждом арифметическом действии ошибка увеличивается), чем метод подбора и последовательных приближений, которым пользуются обычно.

Поэтому-то мы и не запоминаем формулы (3): для практического решения кубических уравнений она не приспособлена.

## 7. Заключение: зачем нужна формула (3)?

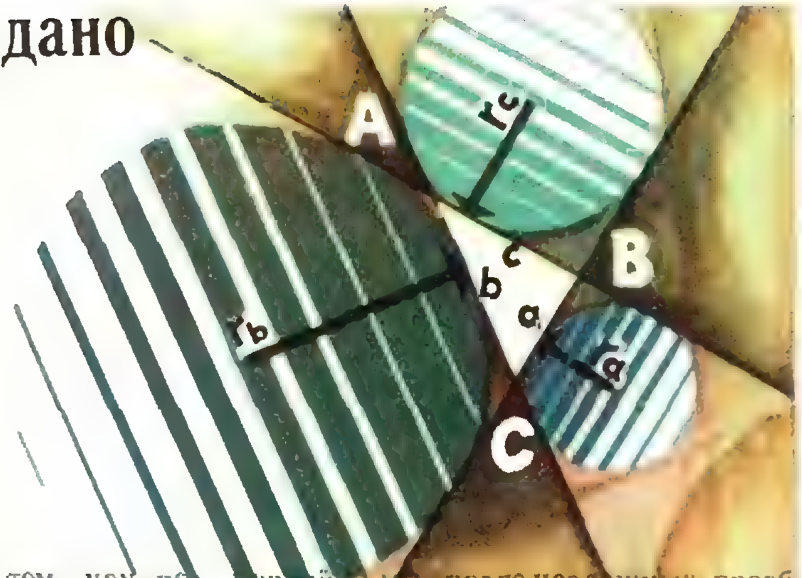
Значение формулы (3) заключается в том, что она дает ответ на классический вопрос о *«разрешимости уравнений третьей степени в радикалах»*. Поясним это.

Первые иррациональные числа, с которыми нам приходится сталкиваться, — это корни (самое первое — $\sqrt{2}$, диагональ квадрата со стороной единица). Извлечение корней, вместе с арифметическими действиями, расширяет запас чисел (присоединяя к рациональным числам такие числа, как $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{\sqrt{5}/(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$ и т. п.). Хватает ли этого расширенного запаса для решения алгебраических уравнений с целыми коэффициентами? Наша формула показывает, что для решения кубических уравнений его хватает — во всяком случае, если мы допускаем в качестве подкоренных выражений не только действительные, но и комплексные числа.

Оказывается, что в радикалах решаются и уравнения четвертой степени; *уравнения же пятой степени и выше неразрешимы в радикалах*. Очень вероятно, что об этой последней теореме читатель уже слышал. Доказательство ее на самом деле гораздо проще, чем принято считать; но это — предмет для отдельного разговора.

# Формула Кардано и геометрия

*А. Резников*



Вы хорошо знакомы с тем, как по коэффициентам уравнения второй степени $x^2+px+q=0$ определить, сколько у него действительных корней. Если $p^2-4q>0$, то корней два, если $p^2-4q=0$, то корень один и, наконец, если $p^2-4q<0$, то корней нет.

В этом номере на с. 14 выводится аналогичное условие для уравнения третьей степени $x^3+px+q=0$. С помощью этого условия можно получить одно хитроумное неравенство, связывающее элементы произвольного треугольника. Вот как это делается.

Пусть $ABC$ — треугольник со сторонами $a$, $b$, $c$; $p$ — его полупериметр, $S$ — площадь, а $R$, $r$, $r_a$, $r_b$, $r_c$ — радиусы описанной, вписанной и вневписанных окружностей. Оказывается, верны такие соотношения:

$$r_a+r_b+r_c=4R+r,\quad r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=p^2,\quad r_ar_br_c=pS.\qquad (1)$$

Равенства (1) означают, что числа $r_a$, $r_b$, $r_c$ являются корнями следующего кубического уравнения:

$$x^3-(4R+r)x^2+p^2x-pS=0.\qquad (2)$$

Это вытекает из того, что $r_a$, $r_b$, $r_c$ — корни многочлена $(x-r_a)(x-r_b)(x-r_c)=x^3-(r_a+r_b+r_c)x^2+(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)x-r_ar_br_c$.

Записав для уравнения (2) условие действительности всех трех его корней*) и, после несложных преобразований и с помощью формулы $S=pr$, придем к такому неравенству:

$$[p^2-(2R^2+10Rr-r^2)]^2\leqslant 4R(R-2r)^3\qquad (3)$$

Из (3) следует, что

$$R\geqslant 2r\qquad (4)$$

и что

$$|p^2-(2R^2+10Rr-r^2)|\leqslant 2\sqrt{R(R-2r)^3}.\qquad (5)$$

Равенство в (3) и в (5) достигается, когда два из чисел $r_a$, $r_b$, $r_c$ равны, т. е. когда треугольник равнобедренный.

Упражнения

1. *Докажите* формулы (1). Выведите для этого следующие выражения для $S$:

$$S=rp=r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c)=\frac{abc}{4R}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

2. Выясните условия достижения равенства в (4).

3. Докажите, что $16Rr-5r^2\leqslant p\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2$.

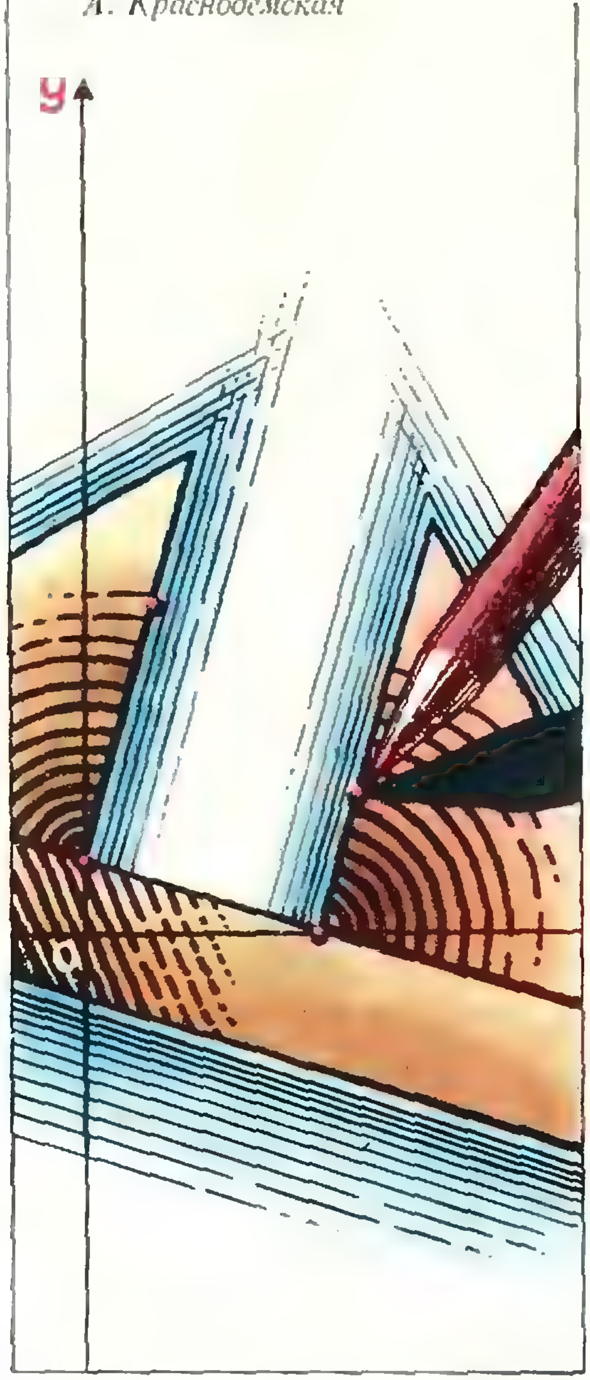
4. Исследуйте, для каких равнобедренных треугольников число $p^2-(2R^2+10Rr-r^2)$ неотрицательно.

---

*) См. с. 14. Для того чтобы воспользоваться приведенным там условием, проделайте замену $x=y+\frac{4R+r}{3}$.

# Графическое решение кубических уравнений

*А. Краснодемская*



Известная формула Кардано

$$x=\sqrt[3]{-\frac{k}{54}+\sqrt{\frac{-D}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{k}{54}-\sqrt{\frac{-D}{108}}}-\frac{b}{3a},$$

где $k=(2b^3-9abc+27a^2d)/a^3$, $D=(b^2c^2-4ac^3-4b^3d+18abcd-27a^2d^2)/a^4$, позволяет точно находить корни кубического уравнения

$$ax^3+bx^2+cx+d=0. \qquad (\cdot)$$

Правда, вычисления по этой формуле занимают много времени, не говоря уже о том, что во многих случаях приходится оперировать с комплексными числами. А нельзя ли находить корни уравнения (•) пусть приближенно, но быстро, скажем, графически — с помощью циркуля и линейки? Оказывается, одним лишь циркулем и линейкой обойтись нельзя — как было показано в статье В. Нильме («Квант», 1975, № 6), циркулем и линейкой можно строить лишь величины, выражающиеся через исходные данные с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня (скажем, так выражаются через коэффициенты корни квадратного уравнения, поэтому квадратные уравнения можно решать графически с помощью циркуля и линейки — об этом рассказано в статье А. Пресмана, «Квант», 1972, № 4).

А корни кубического уравнения требуют еще извлечения кубического корня, поэтому в общем случае их нельзя построить с помощью циркуля и линейки. Конкретный пример такого «геометрически неразрешимого» уравнения: $x^3-2=0$, — был приведен в той же статье В. Нильме.

В то же время многие задачи, неразрешимые с помощью циркуля и линейки, решаются с помощью других приборов или хитрым использованием линейки (например, задача трисекции угла — в той же статье В. Нильме). Не являются исключением и кубические уравнения — их

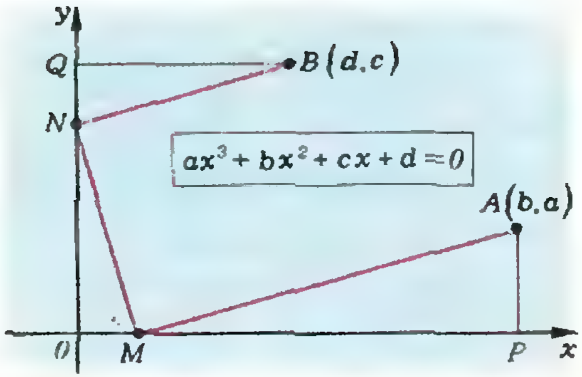


Рис. 1.

можно решать графически с помощью двух угольников и линейки. Для этого отметим в прямоугольной декартовой системе координат $xOy$ точки $A(b, a)$ и $B(d, c)$ (рис. 1). Если мы сумеем *пройти из точки $A$ в точку $B$ по маршруту: точка $A$ — ось абсцисс* (точка $M$ на рисунке 1) *— ось ординат* (точка $N$) *— точка* $B$, — поворачивая каждый раз на 90°, то число

$$x_0 = \frac{x_M - b}{a},$$

где $x_M$ — абсцисса точки $M$, будет действительным корнем уравнения (•), т. е. $x_0$ равно длине проекции первого звена $AM$ ломаной на ось $Ox$ (с учетом знака), деленной на $a$. (Если можно провести только одну такую ломаную линию, то имеются или один действительный корень и два комплексно-сопряженных, или три *действительных совпадающих корня*; если две, то имеются три действительных корня, два из которых совпадают; если же возможно построение трех таких ломаных, то имеются три действительных различных корня.)

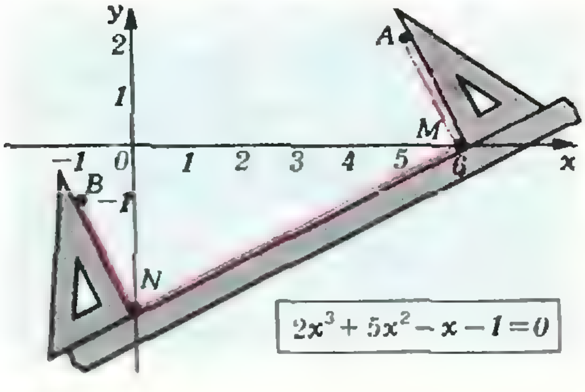


Рис. 2.

Для доказательства приведенного графического способа решения рассмотрим три подобных прямоугольных треугольника $PAM$, $OMN$ и $QNB$ (рис. 1). Из их подобия вытекают пропорции $\frac{|PM|}{|PA|} = \frac{|ON|}{|OM|} = \frac{|QB|}{|QN|}$. Имеем: $|PM| = -ax_0$, $|PA| = a$, $|OM| = b + ax_0$, $|QB| = d$, $|QN| = c - |ON|$. Теперь пропорции запишутся в виде

$$\frac{-ax_0}{a} = \frac{|ON|}{b - ax_0} = \frac{d}{c - |ON|},$$

откуда $x_0 = \frac{-|ON|}{b + ax_0}$, $x_0 = \frac{-d}{c - |ON|}$, и, далее, $x_0 = \frac{-d}{c + x_0(b + ax_0)}$, $ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = 0$. Следовательно, $x_0$ является корнем уравнения (•). Другие *случаи расположения* точек $A$, $B$, $P$, $Q$, $M$, $N$ разберите самостоятельно.

Наибольшую трудность при *графическом способе решения* кубических уравнений представляет построение ломаной линии $AMNB$. Его можно выполнять с помощью линейки и двух угольников или рейсшины и угольника. Например, на рисунке 2 изображено нахождение одного корня уравнения $2x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$, он оказывается равным 1/2. Между тем это уравнение имеет три действительных корня; попробуйте найти и их графически, а также решить следующие задачи.

### Упражнения

1. Попытайтесь геометрически описать области, в которых должны *лежать* точки $A$ и $B$, чтобы уравнение имело

а) три **действительных** корня;
б) два действительных корня;
в) один действительный корень.

2. *Решить графически следующие уравнения:*

а) $4x^3 + 11x^2 + 14x + 6 = 0$;
б) $4x^3 + 6x^2 + 2x - 3 = 0$;
в) $2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$;
г) $2x^3 + 4x^2 - 5x + 3 = 0$.

# Броуновское молекулярное движение

*А. Иоффе*

**В самом начале школьного курса физики, в шестом классе, учащиеся знакомятся с двумя интересными физическими явлениями — броуновским движением и диффузией, непосредственно связанными с движением молекул. Эти явления служат экспериментальной основой молекулярно-кинетической теории. Теория этих явлений в школе не изучается. Поэтому остается непонятным даже такой очень важный вопрос — а почему в процессе диффузии молекулы могут перемещаться на значительные расстояния? Ведь они движутся совершенно случайно, все направления движения для них равноправны, и казалось бы, за большие промежутки времени они должны были бы фактически оставаться почти на одном и том же месте.**

**Теория броуновского движения была создана Альбертом Эйнштейном. Она содержится в его работе «О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты», опубликованной в 1905 году. Экспериментальные исследования, проведенные вскоре французским физиком Жаном Перреном, полностью подтвердили эту теорию, а вместе с ней и наши представления о молекулярном строении вещества.**

**Мы приводим здесь изложение основ теории броуновского движения, заимствованное из научно-популярной книги академика Абрама Федоровича Иоффе «Основные представления современной физики», выпущенной Государственным издательством физико-математической литературы в 1949 году.**

Существует непосредственное доказательство непрерывного теплового движения молекул — так называемое броуновское молекулярное движение. Еще в 1827 году английский ботаник Броун заметил в растительных препаратах под микроскопом постоянное движение или дрожание мелких взвешенных в жидкости частиц. Впоследствии оказалось, что это свойство не ограничивается живой природой, что всякая достаточно мелкая крупинка, помещенная в среду, где она может двигаться, совершает постоянные перемещения самого случайного характера. Исследование этого явления показало, что оно не может быть объяснено побочными причинами, например, потоками, которые возникают в жидкой или газообразной среде под влиянием неравномерного нагревания, электризации, освещения и т. п. Это движение никогда не прекращается, оно тесно связано с тепловым состоянием жидкости: с повышением температуры интенсивность броуновского движения возрастает. Можно считать доказанным, что в совершенно спокойной жидкости или газе существует невидимое непрекращающееся движение мельчайших частиц, так как только такое движение способно сообщить те толчки, которые передвигают наблюдаемую крупинку то в одну, то в другую сторону.

Легко понять, почему понадобились микроскопические крупинки, чтобы обнаружить тепловое движение. Даже в сравнительно разреженном веществе, в газе, при нормальных условиях заключается $2{,}7 \cdot 10^{19}$ молекул в каждом кубическом сантиметре; все эти молекулы движутся с громадными скоростями по всевозможным направлениям. Поэтому число толчков, испытываемых телом обычных размеров, так велико, что мы не только не успеваем подметить отдельного толчка, но и не замечаем случайного преобладания толчков в одном направлении над толчками в противоположном направлении. Чем меньше тело, тем меньше толчков оно испытывает, а для микроскопических пылинок число испытываемых ими толчков уже так невелико, что преобладание толчков то одного, то другого направления случается постоянно, и пылинка кидается ими из стороны в сторону. Такая пылинка заключает в себе еще миллионы молекул, поэтому ее беспорядочное движение, которое мы видим, не есть собственно молекулярное движение; мы не замечаем толчка отдельной молекулы, а только преобладание толчков какого-нибудь направления; но зато пылинка является верным показателем существования молекулярного движения, подобно тому, как вид качающегося на море судна указывает на существование волн.

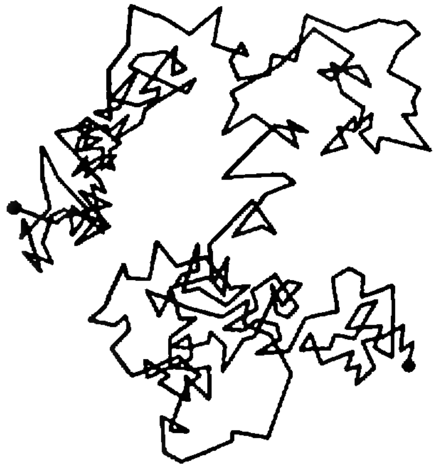


Рис. 1.

Чтобы составить себе представление о хаотическом характере броуновского движения, рассмотрим рисунок, полученный Перреном, подробно исследовавшим это явление (рис. 1). На рисунке отмечено положение одной и той же частицы в поле микроскопа через каждые 1/2 *мин*. Прямые линии, соединяющие эти положения, ни в какой степени не соответствуют действительному пути частицы за протекшие 1/2 *мин*. Наоборот, путь между двумя положениями представляет собой такую же сложную запутанную картину, как весь рисунок. Каждое столкновение частицы с молекулой окружающей жидкости немного меняет направление ее движения, а таких столкновений — до $10^{12}$ в течение 1 *сек*. Изобразить действительный путь частицы мы не можем; однако даже наблюдение положений частицы в определенные моменты времени уже выясняет некоторые типичные черты теплового движения.

Как и следовало ожидать, через каждые 1/2 *мин* частица оказывается смещенной вправо, влево, вверх или вниз, причем, по смещению за предыдущие 1/2 *мин* нельзя сделать предсказаний о направлении смещения за следующие 1/2 *мин*. Величина смещения различна, но все же большей частью близка к некоторому среднему значению (около 5 *мм* на рисунке 1). Отступления и в ту, и в другую сторону тем реже, чем дальше смещения отходят от среднего. Много, например, смещений в 3 или в 8 *мм*, но значительно меньше в 2 или 12 *мм* и совсем не видно смещений в 1 или 20 *мм* за 1/2 *мин*. Если бы мы проследили не 200 смещений, как на рисунке 1, а тысячи, как это сделал Перрен, то встретили бы и бо́льшие отступления, но их было бы мало.

Это свойство мы можем описать графически (рис. 2), нанося по оси абсцисс величину смещения $\Delta x$ и по оси ординат — число случаев $n$, когда наблюдалось данное смещение $\Delta x$, причем, все возможные их значения мы разобьем на группы, например, смещения от 0 до 1 *мм*, от 1 до 2 *мм* и т. д. График покажет некоторый максимум вблизи 5 *мм*. Отсюда кривая будет спадать до нуля в ту и другую сторону. Это спадание происходит настолько быстро, что число случаев, соответствующих очень далеким от 5 *мм* смещениям, окажется ничтожно малым.

Мы привыкли характеризовать движение частицы скоростью $v$, понимая под нею отношение смещения за данный промежуток времени $t$ к величине этого промежутка. Когда движение равномерно, путь пропорционален времени. Когда движение неравномерно, мы можем, постепенно уменьшая промежуток времени $t$, получать все более сходящиеся значения, и наконец, перейти к пределу этого отношения при бесконечно малом $\Delta t$. Этот метод, однако, совершенно не применим к наблюдениям, изображенным на рисунке 1.

Перейдем от смещений $AB$ и $BC$ (рис. 3) за одни промежутки времени, например, за каждые 1/2 *мин*, к смещениям $AC$ за двойные промежутки времени — 1 *мин*. Так как второе смещение $BC$ никогда не связано с предыдущим $AB$ и с одинаковой вероятностью может происходить под любым углом $\varphi$ к нему, то общее смещение $AC$ за 1 *мин* обычно будет меньше, чем $AB + BC$, а иногда может равняться нулю, когда $AB = BC$ и угол $\varphi = 0$. Таким образом, смещение за 1 *мин* может принимать все значения от $AB + BC$ до $AB - BC$ в зависимости от угла $\varphi$. Предсказать результаты каждого отдельного смещения мы не можем, но, наблюдая очень большое число смещений, можно установить некоторую связь между средним значением смещения частицы за 1/2 *мин* и средним значением ее смещения за 1 *мин*.

При любом угле $\varphi$ между $AB$ и $BC$ мы имеем

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\varphi.$$

Вместо угла $\varphi$ можно ввести дополнительный угол $\alpha$ между $BC$ и продолжением линии $AB$:

$$\cos\varphi = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha,$$

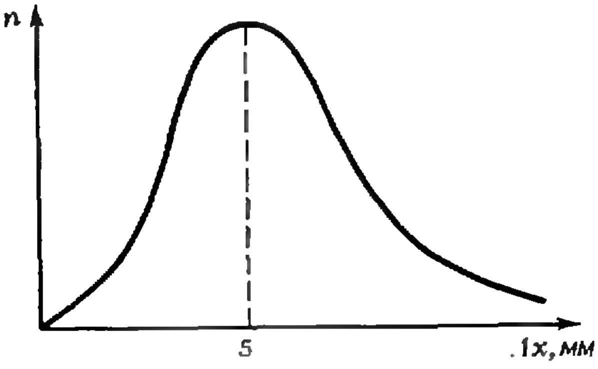


Рис. 2.

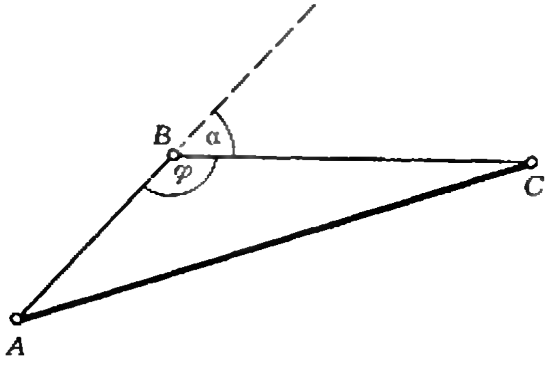


Рис. 3.

поэтому

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + + 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha. \quad (1)$$

Наблюдая длительное движение частицы, мы составим для каждой пары последовательных смещений уравнение, подобное уравнению (1). Сложим все эти уравнения почленно и разделим на число этих уравнений. Тогда получим

$$\frac{A_1C_1^2 + A_2C_2^2 + \cdots + A_nC_n^2}{n} = \frac{A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + \cdots + A_nB_n^2}{n} + \frac{B_1C_1^2 + B_2C_2^2 + \cdots + B_nC_n^2}{n} + \frac{2}{n}(A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot \cos\alpha_1 + A_2B_2 \cdot B_2C_2 \cdot \cos\alpha_2 + \ldots + A_nB_n \cdot B_nC_n \cdot \cos\alpha_n). \quad (1а)$$

Если движение совершенно хаотично, то все значения угла α должны встречаться одинаково часто. Слагаемые последнего члена, благодаря множителям $\cos\alpha_i$, одинаково часто принимают положительные и отрицательные значения, поэтому их алгебраическая сумма, а вместе с тем и весь последний член чрезвычайно близки к нулю. По сравнению с остальными членами, состоящими из одних положительных слагаемых, он будет настолько мал, что им можно пренебречь. Оставшиеся члены выражают связь между средним значением квадратов всех смещений частиц за каждую минуту, которые мы обозначим через $\overline{(\Delta x_2)^2}$, и средним значением квадратов смещений за 1/2 *мин* (его обозначим $\overline{(\Delta x_1)^2}$). Уравнение (1а) перепишется при этих обозначениях так:

$$\overline{(\Delta x_2)^2} = 2\overline{(\Delta x_1)^2}.$$

Точно так же можно убедиться, что средний квадрат смещения частицы $\overline{(\Delta x_3)^2}$ за тройной промежуток времени будет

$$\overline{(\Delta x_3)^2} = 3\overline{(\Delta x_1)^2}.$$

Обозначим через $A, B, C, D, E, \ldots, Y, Z$ (рис. 4) положения крупинки через ряд последовательных и равных между собой промежутков времени $\Delta t$ и вычислим, на сколько в среднем крупинка удалится от своего начального положения в точке $A$ в результате $n$ смещений за время $n\Delta t$.

Для удаления крупинки $AZ$ через $n$ промежутков времени $\Delta t$ получим

$$AZ^2 = (AB^2 + BC^2 + CD^2 + \ldots + + YZ^2) + (2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha_1 + +2AC \cdot CD \cdot \cos\alpha_2 + + \ldots + 2AY \cdot YZ \cdot \cos\alpha_n).$$

Сумма членов в выражении для $AZ^2$, содержащих множители $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n$, одинаково часто может иметь и положительный и отрицательный знак, так как все значения углов $\alpha_i$ одинаково вероятны. Поэтому при повторении опыта среднее значение этой суммы будет тем ближе к нулю, чем больше число опытов. При вычислении среднего результата ею можно пренебречь по сравнению с суммой положительных величин $AB^2$, $BC^2, \ldots, YZ^2$. Средние значения квадратов каждого смещения будут, очевидно, одинаковы:

$$\overline{AB^2} = \overline{BC^2} = \overline{CD^2} = \ldots = \overline{YZ^2}.$$

Мы обозначим их через $\overline{(\Delta x)^2}$. Среднее значение квадрата полного смещения $AZ$ будет в $n$ раз больше.

Итак, в результате хаотического смещения крупинки в течение $n$ промежутков времени $\Delta t$ среднее значение квадрата окончательного уда-

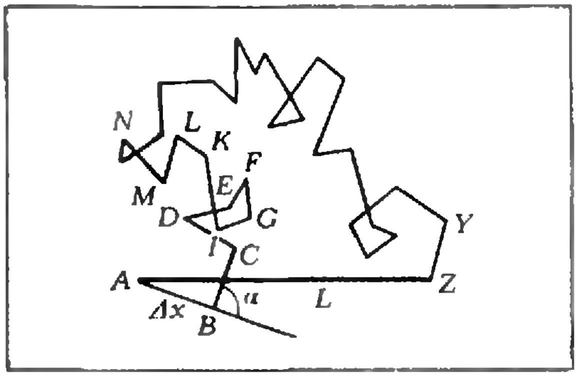


Рис. 4.

ления ее $L = AZ$ в каком-нибудь направлении от исходного положения выразится формулой:

$$\overline{L^2} = n\overline{(\Delta x)^2}.$$

Обозначим через $t$ продолжительность опыта, в течение которого произошло $n$ смещений $\Delta x$, измеренных через промежутки времени $\Delta t$. Тогда

$$n = \frac{t}{\Delta t}, \quad \overline{L^2} = \frac{\overline{(\Delta x)^2}}{\Delta t}\, t.$$

Отметим прежде всего, что, участвуя в хаотическом движении, крупинка с течением времени в среднем удаляется от первоначального положения на величину $L$, квадрат которой (а не сама величина $L$) растет пропорционально времени $t$.

Среднее смещение $L_0$ за время $t$ мы определим как $\sqrt{\overline{L^2}}$:

$$L_0 = \sqrt{\overline{L^2}} = \sqrt{\frac{\overline{(\Delta x)^2}}{\Delta t}} \cdot \sqrt{t} = B\sqrt{t}.$$

Среднее смещение $\sqrt{\overline{L^2}}$ с одинаковой вероятностью может иметь любое направление в пространстве. Мы можем утверждать, что крупинка, находившаяся в начальный момент времени в точке $A$, через $t$ *сек* окажется в среднем где-нибудь вблизи поверхности шара радиусом $R = B\sqrt{t}$. Радиус этого шара растет не пропорционально времени $t$, а пропорционально корню квадратному из $t$. Указанное значение радиуса оправдывается тем точнее и тем увереннее, чем больше отдельных значений $\Delta x$ входит в состав смещения $L$ или чем чаще повторяется опыт для вычисления среднего значения $\overline{L^2}$.

Легко убедиться, что понятие скорости движения частицы как отношения смещения $L_0$ частицы за некоторый промежуток времени к величине $t$ этого промежутка теряет смысл для хаотического движения. Действительно,

$$\frac{L_0}{t} = \frac{L_0}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{B}{\sqrt{t}}.$$

В противоположность скорости упорядоченного движения тела, которая стремится к определенному пределу $v$ по мере уменьшения промежутка времени $t\left(v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$, в хаотическом движении $\frac{L_0}{t}$ растет беспредельно по мере сокращения промежутка времени $t$. И только тогда, когда $t$ сделается меньше, чем время между двумя соударениями с молекулами среды, движение в течение этого времени можно считать упорядоченным и обычным образом определить скорость этого движения.

Если проследить весь запутанный путь частицы и разделить общую его длину на промежуток времени, то это отношение даст нам среднюю скорость $\bar{v}$ теплового движения частицы, а величина $\frac{1}{2}\overline{mv^2}$ — среднюю кинетическую энергию этого движения.

Вычисление позволяет установить связь между коэффициентом $B$ и средней кинетической энергией молекул среды $\frac{1}{2}\overline{mv^2}$:

$$B = \frac{1}{3\pi a\eta}\,\frac{1}{2}\overline{mv^2}. \qquad (2)$$

($a$ — радиус крупинки, $\eta$ — коэффициент, определяющий вязкость среды).

Вычисленное из уравнения (2) значение $\frac{1}{2}\overline{mv^2}$, как показывает опыт, не зависит ни от свойств среды, ни от выбора крупинок, ни от других условий опыта, пока он производится при неизменной температуре. Наблюдая же броуновское движение частиц при различных температурах, можно установить прямую связь средней кинетической энергии $\frac{1}{2}\overline{mv^2}$ с абсолютной температурой $T$:

$$\frac{1}{2}\overline{mv^2} = \frac{3}{2}kT,$$

где $k$ — универсальная постоянная, одинаковая для всех веществ и в любых состояниях. Постоянную $k$ называют постоянной Больцмана.

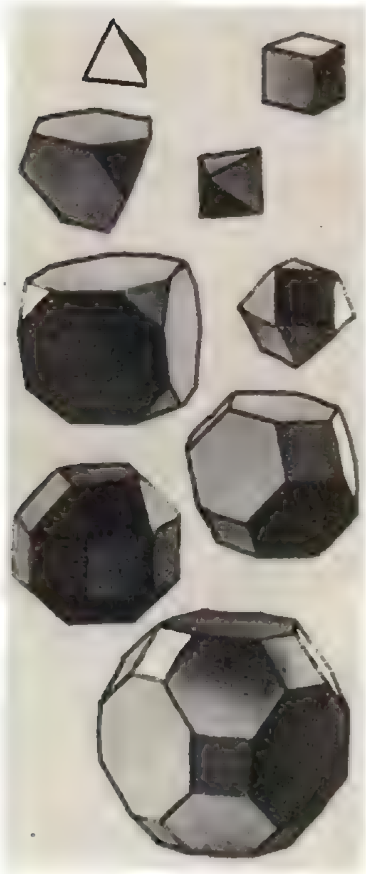


Рис. 1.

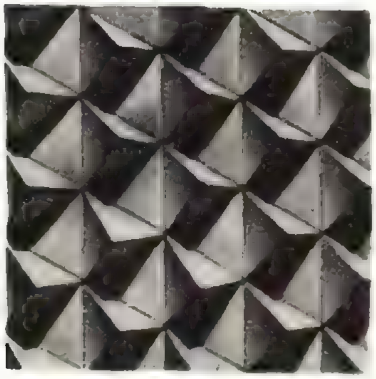


Рис. 2.

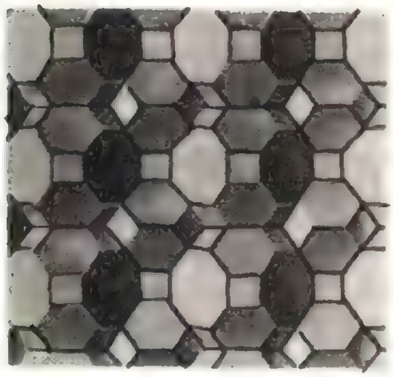


Рис. 3.

# Заполнение пространства

Среди правильных и полуправильных многогранников (платоновых и архимедовых тел) и равногранно полуправильных многогранников *) есть многогранники, которыми можно плотно, «без дыр», заполнить пространство. На рисунке 1 приведены многогранники — заполнители, а на рисунках 2—4 несколько пространственных слоев, полученных из них. Одно из заполнений пространства очевидно — заполнение кубами. Пространство можно заполнить и другими многогранниками одного вида: усеченными октаэдрами или ромбическими додекаэдрами, а также — комбинируя многогранники разных видов, — например, тетраэдры и октаэдры (рис. 2); усеченные октаэдры, кубы и ромбокубооктаэдры (рис. 3); ромбокубооктаэдры, усеченные кубы и усеченные тетраэдры (рис. 4 а, б).

На первой странице обложки изображен пространственный «слой» из ромбических додекаэдров. Последовательно повторяя такие слои, вы получите «упаковку» пространства. На рисунке 5 объясняется, как можно построить этот замечательный многогранник. Кубы имеют общий центр и гомотетичны с коэффициентом *два. Вершины октаэдра* — центры граней большого куба. Докажите, что четырехугольник, выделенный цветом — ромб.

*Р. Гольцева*

---

*) См. «Квант», 1976, № 1, с. 2 и с. 8.

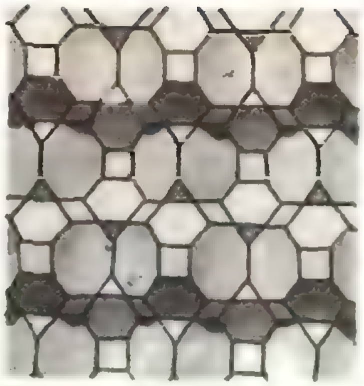


Рис. 4а.

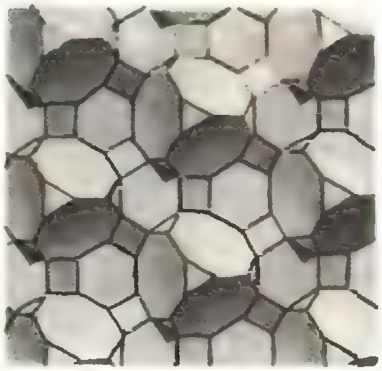


Рис. 4б.

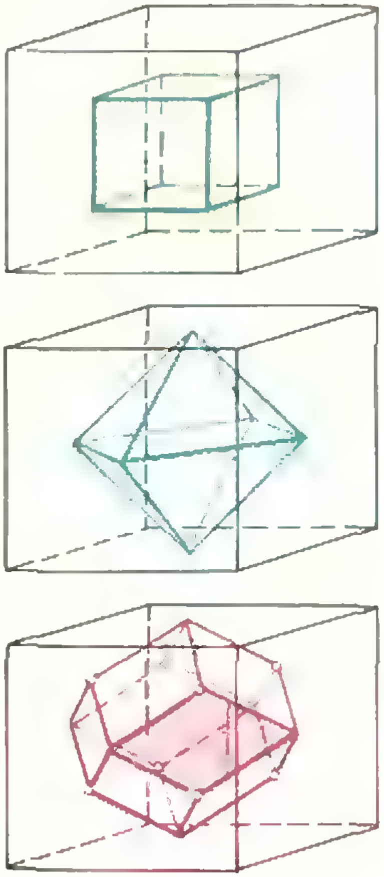


Рис. 5.

2 1976
ЗЕМЛЯ И ВСЕЛЕННАЯ
Астрономия геофизика исследования космического пространства

В январе 1965 года вышел из печати первый номер нового научно-популярного журнала Академии наук СССР «Земля и Вселенная».

За годы своего существования журнал опубликовал много интересных материалов, посвященных исследованиям Луны и планет солнечной системы, квазарам, пульсарам, реликтовому излучению и другим загадочным объектам, открытым радиоастрономией. Он рассказал об изучении нашей Галактики и процессов, происходящих в других галактиках, о «черных дырах», причинах землетрясений, цунами, о движении земных материков и т. п. Материалы, публикуемые в журнале «Земля и Вселенная», имеют различный уровень трудности. Часть из них рассчитана на хорошо подготовленных читателей; другая — не требует никакой специальной подготовки и вполне доступна учащимся старших классов.

Мы помещаем с небольшим сокращением две статьи, посвященные проблеме поисков космических цивилизаций. Они были опубликованы во втором номере журнала за 1976 год в разделе «Гипотезы, дискуссии, предложения», регулярно появляющемся на страницах журнала. Познакомившись с ними, вы можете попытаться дать свою интерпретацию «послания космического зонда».

Журнал «Земля и Вселенная» выходит шесть раз в год.

*А. Шпилевский*

# Новая интерпретация таинственного радиоэха

В 1960 году радиоастроном Р. Брейсуэлл высказал мысль, что именно космические зонды — наиболее экономичный и эффективный способ установления первых контактов между соседними развитыми цивилизациями. Как будет действовать такой зонд, достигший околоземной или окололунной орбиты? Сначала, чтобы дать о себе знать, зонд должен принимать радиосигналы с Земли и отправлять их обратно, как радиоэхо, с большой, но разумной задержкой. Только наладив двустороннюю связь, он перейдет к другим формам передачи информации, например, передаст телевизионное изображение участка неба, откуда он прибыл, и т. д. Однако ни Брейсуэлл, ни кто-либо другой в течение более десятилетия не смогли найти конкретного примера для иллюстрации своих общих соображений. Сделал это молодой английский астроном из университета в Глазго Д. Лунен. Он предположил, что радиоэхо с большим временем запаздывания (задержки), наблюдавшиеся К. Штермером и Й. Халсом в 1928 году, переданы космическим зондом. Гипотеза Лунена выглядит фантастической. Но «когда область исследований нова, — писал известный физик Р. Фейнман, — «прощупывание» наугад и составляет первые шаги науки».

### Интерпретация Лунена

11 октября 1928 года Халс и Штермер, отправляя через каждые 20 секунд в ионосферу радиосигналы на длине волны 31,4 *м*, услышали в ответ на них радиоэхо с такими временами задержки: 8, 11, 15, 8, 13, 3, 8, 8, 12, 15, 13, 8 и 8 секунд. Лунен попытался объяснить результаты этого опыта. Суть его интерпретации проще всего изложить, если перечислить предположения, использованные им.

1. Серия варьирующих времен запаздывания радиоэха в опыте Халса и Штермера — это послание космического зонда, точнее, его «визитная карточка», понять которую можно, если построить график «номер отправленного сигнала — время задержки радиоэха» и сравнить его с подходящим участком звездного неба.

2. Шесть точек этого графика, лежащие справа от вертикального восьмисекундного барьера, идентифицируем как неполное созвездие Волопаса.

3. Расположенную на графике слева от барьера точку трехсекундного радиоэха считаем звездой ε Волопаса, выделенной из созвездия с целью указать нам, что зонд отправлен именно от этой звезды.

4. Различие расстояний между Арктуром и ε Волопаса на звездной карте и на графике можно объяснить большим собственным движением Арктура, если предположить, что зонд передал нам изображение своего созвездия, «сфотографированное» им много лет назад, сразу по прибытии к Земле.

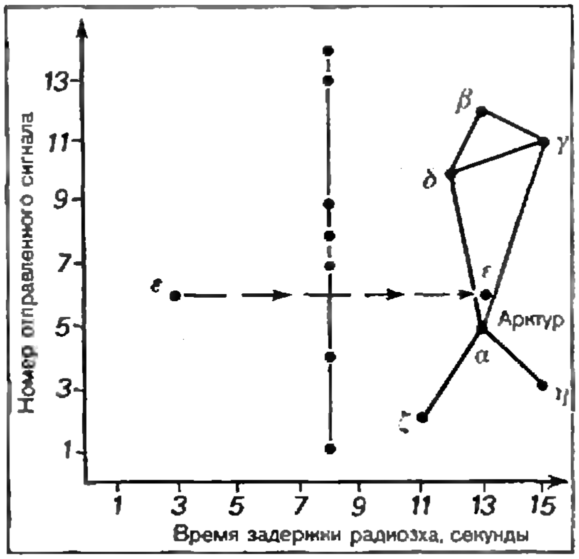
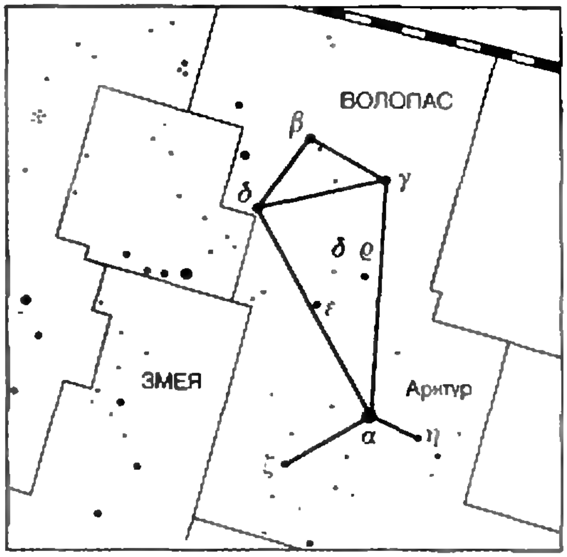


График Лунена. Если расположить сигналы радиоэха в соответствии с их временем задержки, то семь точек вытянутся в вертикальный барьер, правее которого шесть точек образуют конфигурацию, весьма напоминающую рисунок созвездия Волопаса на современных звездных картах. Левее барьера лежит только одна точка. Если эту точку зеркально перенести вправо от барьера, то ее новое местоположение почти совпадает со звездой ε Волопаса.



Созвездие Волопаса.

Интерпретация радиоэха, предложенная Луненом, может удовлетворить далеко не каждого, и прежде всего потому, что она неоднозначна. На графике Лунена точку трехсекундного радиоэха можно вполне считать не звездой ε Волопаса, а Арктуром. Можно попытаться идентифицировать график Лунена с другим созвездием или даже вообще по-другому построить график.

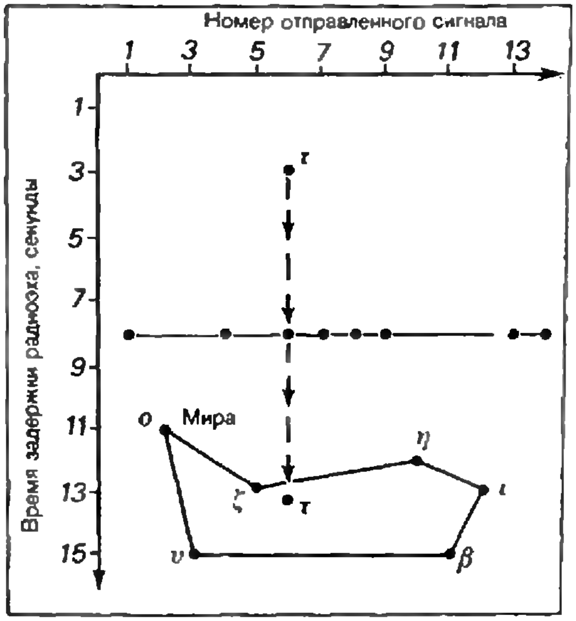
Звезда ε Волопаса — двойная. Ее компоненты: красный гигант и спектрально-двойная звезда — объекты, малоподходящие для развития цивилизации на планете, если таковая имеется вблизи них.

Удивляет отсутствие на графике Лунена ближайших к ε Волопаса звезд σ и ρ, сравнимых по блеску с имеющейся на графике звездой ζ Волопаса. В то же время на фоне отмеченной неполноты созвездия Волопаса поражает многоточие вертикального восьмисекундного барьера. Трудно поверить, что он был сооружен только для выделения звезды ε Волопаса. Связать же барьер со звездами, расположенными слева от главных звезд созвездия Волопаса, невозможно.

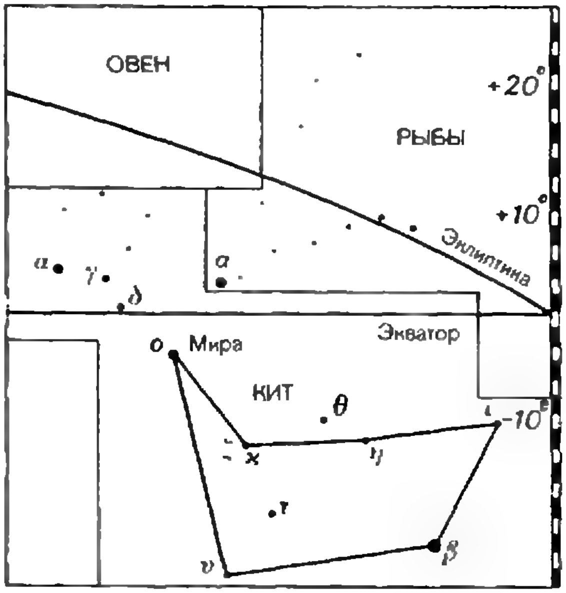
Все эти недостатки и побудили меня искать новую интерпретацию радиоэха.

## Зонд от τ Кита

При построении графика «номер отправленного сигнала — время задержки радиоэха» мы ничем не ограничены в выборе направлений координатных осей. Поэтому для упоминавшейся серии радиоэха можно построить и другой график. Присмотревшись внимательно к шести точкам, лежащим ниже восьмисекундного барьера (теперь горизонтального), каждый, кто видел в кульминации созвездие Кита, обязательно отметит сходство их конфигурации с этим созвездием. Далее, следуя идее Лунена, прежде всего выдвигаем предположения.



График, построенный автором статьи. Изменение направления координатных осей меняет вид графика Лунена. Конфигурация точек, лежащих ниже барьера, теперь напоминает рисунок созвездия Кита, а зеркальное отражение выделенной точки попадает примерно туда, где находится звезда τ Кита.



Созвездие Кита.

1. Серия радиоэха в опыте Халса и Штермера — это послание космического зонда, для расшифровки которого строим график и сравниваем его с подходящим участком звездного неба.

2. Шесть точек этого графика, лежащих ниже восьмисекундного барьера, идентифицируем как неполное созвездие Кита.

Заметим, что о полноте и неполноте созвездия можно говорить лишь с нашей, земной точки зрения. Как известно, в прошлом различные народы объединяли звезды в созвездия по-разному. Создатели зонда в своем космическом послании, по-видимому, должны указать лишь самые яркие объекты, окружающие звезду, от которой послан зонд. Представляется более вероятным, что изображение их созвездия (вместе с программой его передачи) было заложено в память зонда перед отправкой. А значит, вид их созвездия с Земли должен быть рассчитан на основе астрономических наблюдений. Ошибки этих наблюдений и расчетов, безусловно, отразятся на нашем графике. Кроме того, нельзя забывать и об ошибках в опыте Халса и Штермера. Моменты отправления радиосигнала и возвращения радиоэха вряд ли фиксировались в 1928 году с точностью, лучшей ±1 секунды. Все это, включая собственное движение звезд за время перелета зонда к Земле, искажения на звездных картах, связанные с построением плоских картин сферического небосвода, должно объяснять несовпадение относительных положений звезд на графике и звезд на карте.

3. Лежащая выше барьера точка трехсекундного радиоэха — это звезда τ Кита, выделенная из созвездия с целью указать нам, что именно от нее и послан космический зонд.

Действительно, перенос этой точки ниже барьера дает вполне удовлетворительное попадание ее внутрь фигуры из шести звезд. Напомним, что сходство τ Кита с нашим Солнцем, одиночность звезды и ее близость к нам (11,8 световых лет) давно заставили астрономов обратить на нее особое внимание. А в 1960 году, осуществляя проект «Озма», радиоастрономы несколько месяцев с надеждой ждали от τ Кита радиосигналы на длине волны 21 *см*.

4. Восьмисекундный горизонтальный барьер — это отрезок либо небесного экватора, либо эклиптики для земного наблюдателя.

Мысль об этом возникает при сравнении нашего графика с картой звездного неба. Не только конфигурация шести точек на графике напоминает рисунок созвездия Кита, но и шесть соответствующих последнего располагаются относительно экватора и эклиптики примерно так же, как шесть точек графика относительно барьера. Однако маловероятно, чтобы с расстояния в 11,8 световых лет удалось измерить угол наклона земной оси к плоскости земной орбиты (а значит, узнать, как проходит небесный экватор землян среди звезд). Скорее всего, барьер — это отрезок эклиптики, которая доступна определению с гораздо больших расстояний, чем 11,8 световых лет. Кстати, несовпадения наклона барьера и эклиптики к линии, соединяющей звезды β и γ Кита, можно, например, объяснить тем, что с τ Кита скорее всего доступна определению лишь средняя орбитальная плоскость для всех планет Солнечной системы (и вряд ли можно узнать число этих планет). Не исключено, что когда составители космического послания решили провести в нем отрезок эклиптики для облегчения идентификации их созвездия, им и «пришло в голову» использовать получившийся барьер для выделения τ Кита.

5. Семь точек барьера и точка пересечения перпендикуляра, опущенного из трехсекундной точки на барьер, — это сообщение о существовании восьми планет около τ Кита.

Такая интерпретация точек, составляющих барьер, возникает уже потому, что в барьере кажутся лишними две правые точки, соответствующие тринадцатому и четырнадцатому радиоэху. Следовательно, их добавление в данную серию радиоэха (а началом другой, повторной серии они не могут быть) понадобилось для увеличения уже имевшегося числа точек. С какой целью? Здесь надо заметить, что космическое послание, вообще говоря, обязательно должно быть максимально простым для шифровки и дешифровки и максимально информативным. Поэтому на нашем графике ничто не должно упускаться из виду. Даже точку пересечения перпендикуляра, используемого для выделения τ Кита из созвездия, надо причислить к семи точкам барьера. Кроме того, если мы уже знаем из послания, что зонд прибыл от звезды τ Кита, то спрашивается, какую же информацию мы могли бы извлечь из послания? Логично думать, что это будет сообщение о том, сколько планет вблизи τ Кита и с какой из них отправлен зонд. Восемь точек барьера, по-видимому, говорят как раз об этом: число планет у τ Кита равно восьми. Замечательно, что наше Солнце (звезда чуть больших размеров, чем τ Кита) имеет девять планет. Возможно, так и должно быть: у физически похожих звезд в сходных условиях образуются аналогичные планетные системы.

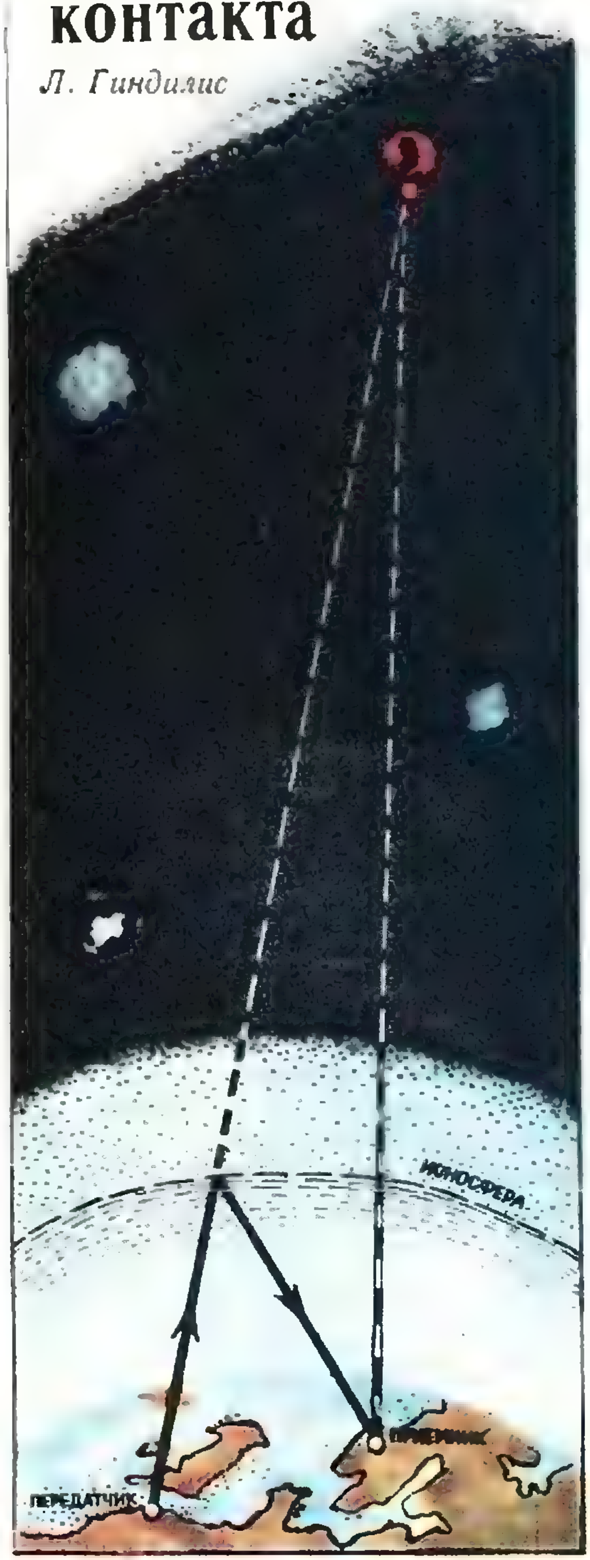
6. Зонд отправлен с третьей по порядку удаленности от τ Кита планеты.

Судя по графику, точка, соответствующая планете, от которой был послан зонд, лежит на пересечении перпендикуляра, проведенного из трехсекундной точки барьера. Это — третья точка на барьере, считая по порядку следования радиоэха. Примечательно, что наша Земля — третья по удаленности от Солнца планета. Без сомнения, такое совпадение не случайно. Как известно, зона «обитаемости» в окрестности звезды необходимо приходится на планету, не слишком близкую к своей звезде и не слишком далекую от нее. Не надо также забывать о сходстве τ Кита и Солнца. Правда, сегодняшняя светимость τ Кита почти вдвое меньше солнечной. Но это обстоятельство, возможно, свидетельствует о том, что τ Кита много старше Солнца. Значит, планетная система τ Кита тоже старше и, наконец, цивилизация, отправившая зонд, старше и более развита по сравнению с земной.

Итак, тот же метод рассуждений и те же исходные идеи, которыми воспользовался Лунен, приводят к другой интерпретации таинственного радиоэха. Какая из них правдоподобнее, сказать трудно. Очевидно, только новые эксперименты и астрономические наблюдения смогут привести к научному решению проблемы таинственного радиоэха.

# Модель контакта

*Л. Гиндилис*



Итак, новая интерпретация таинственного радиоэха... Прежде всего о чем идет речь? Еще в 20-х годах нашего столетия было обнаружено, что при определенных условиях сигналы передающих радиостанций, многократно отразившись от ионосферы, возвращаются в исходную точку и могут быть зарегистрированы спустя некоторое время после основного сигнала как своеобразное радиоэхо. Время запаздывания для такого эха составляет доли секунды. Однако отмечены и очень редкие случаи эха с более длительными задержками — от нескольких секунд до нескольких десятков секунд. Это явление иногда называют «парадоксом Штермера» или «мировым эхом», очень часто добавляют эпитет «загадочное» (оно и в самом деле не имеет еще удовлетворительного объяснения). В научной же литературе употребляется более скромный термин — LDE (long-delayed echoes — эхо с длительными задержками).

В 1927—1929 годах известный норвежский геофизик профессор К. Штермер в сотрудничестве с доктором Ван дер Полом и инженером Й. Халсом организовали серию экспериментов для изучения LDE. Передатчик радиостанции в Эйндховене (Голландия), работающий на волне 31,4 *м*, передавал в определенной последовательности импульсы, которые регистрировались Халсом в Осло. Не все детали этого эксперимента сохранились до настоящего времени, не все данные были опубликованы. Насколько можно судить по публикациям, первоначально каждый сигнал представлял собой последовательность трех точек Морзе. Эти сигналы повторялись каждые 5 секунд. В сентябре 1928 года режим передатчика был изменен: промежуток времени между сигналами увеличился с 5 до 20 секунд. Днем 11 октября 1928 года Халс и Штермер зарегистрировали длинную последовательность эха: сначала время задержки составляло 3 секунды, затем 4 секунды, потом возросло до 5 секунд, и после этого стало беспорядочно меняться (!) от 5 до 18 секунд.

Передатчик в Эйндховене работал в течение почти целого года. Режим передачи сигналов несколько раз менялся. Радиоэхо, регистрировавшиеся в Осло, имели различные временные задержки, колебавшиеся от 3 секунд до 3,5 минут. 7 ноября 1929 года эксперимент в Эйндховене был прекращен.

Интересное исследование LDE выполнили Ж. Голль и Г. Талон в мае 1929 года во время работы французской экспедиции, наблюдавшей солнечное затмение в Индокитае. Установленный на борту судна передатчик мощностью 500 *вт* генерировал на волне 25 *м* последовательность сигналов с интервалом 30 секунд. Были зарегистрированы длинные серии LDE с переменной временной задержкой.

Наблюдения французских исследователей, как и наблюдения Ван дер Пола, Халса и Штермера, не нашли в то время удовлетворительного объяснения. Действительно, минимальной задержке, равной трем секундам, соответствует расстояние 450 000 *км* от Земли, то есть отражающая материя должна располагаться далеко за пределами земной атмосферы, где-то в районе лунной орбиты. Между тем мощность эха превышала треть мощности сигнала, что не соответствовало ожидаемой мощности при естественном отражении от объекта, находящегося на расстоянии Луны или дальше. Еще сложнее объяснить изменение задержки эха. Если оно связано с перемещением отражающей материи в пространстве, скорость ее движения должна быть слишком высокой. И уж совсем трудно было представить, как возникает двойное и тройное эхо (от одного и того же сигнала). Тайна мирового эха осталась неразгаданной.

В 1934 году LDE наблюдал английский исследователь Е. Эпплтон. Позднее сильно возросший уровень радиопомех стал препятствовать регистрации LDE. В 1947—1949 годах К. Будден и Дж. Ятис попытались исследовать радиоэхо на волне 14,5 *м* и не обнаружили его. Об удивительном феномене постепенно забыли, хотя время от времени радиолюбители все-таки наблюдали эхо от своих собственных передач (регистрировалась разговорная речь или сигналы Морзе, повторенные через несколько секунд). Как можно судить по этим сообщениям, область частот, в которых наблюдается LDE, простирается от 0,8 до 140 *Мгц*.

В 1967 году изучение LDE началось в Стэнфордском университете (США) под руководством профессора Ф. Кроуфорда. Реальность феномена была подтверждена. Правда, в Стэнфорде, в отличие от 20-х годов, не наблюдались длинные последовательности эха. Особенно часто встречались эхо с задержками, приблизительно равными 2 и 8 секундам. Обнаружено, что частота эха смещается на десятки герц по сравнению с частотой исходного сигнала, а временной промежуток между импульсами в сигнале эха меньше, чем в исходном.

Анализируя имеющиеся данные об LDE, английский астроном Лунен обращает внимание на некоторые особенности штермеровских эхо по сравнению с эхо, исследованными в Стэнфорде. Во-первых, эхо, наблюдавшиеся в 20-х годах, были свободны от временного сжатия и частотных (доплеровских) искажений, которые обусловлены движением ионосферных слоев. Во-вторых, интенсивность штермеровских эхо оставалась постоянной независимо от времени запаздывания. Этот результат довольно трудно понять: ведь чем дольше путешествует волна, чем большее расстояние она проходит до того, как возвратится в исходную точку, тем меньше должна быть ее интенсивность.

Опираясь на идеи Брейсуэлла об использовании зондов для контакта между космическими цивилизациями, Лунен выдвинул гипотезу о том, что эхо штермеровского типа представляет собой сигнал межзвездного зонда. Возвращая принятую с Земли передачу, зонд пытается таким путем вступить с нами в контакт. Тогда изменение времени запаздывания должно быть связано с передачей какой-то информации. Пытаясь расшифровать послание зонда, Лунен интерпретировал одну из последовательностей LDE, полученную вечером 11 октября 1928 года, как сообщение о том, что зонд прибыл в Солнечную систему около 13 000 лет назад со звезды ε Волопаса.

Работа Лунена появилась в 1973 году и вызвала значительный резонанс. Многие увидели в ней попытку доказать существование зонда. Между тем Лунен не ставил перед собой такой цели. Его схема рассуждений примерно такова. Мы не знаем истинную природу LDE. Есть некоторые основания полагать, что феномен может быть связан с зондом. Предположим, что это действительно так. Какова в таком случае должна быть логика контакта, каким способом зонд может передать людям свое послание и как нам подойти к его дешифровке? После того, как этот вопрос поставлен, все дальнейшие рассуждения имеют смысл лишь постольку, поскольку справедливо исходное предположение (ведь бессмысленно приписывать определенную логику естественному явлению). Поэтому та или иная интерпретация не может служить доказательством существования зонда, она уже основана на этом предположении. Следовательно, смысл и значение работы Лунена, как и работы Шпилевского, состоит не в доказательстве существования зонда, а в рассмотрении некоторой модели контакта (конечно, если бы было доказано, что это — зонд, выбор интерпретации приобрел бы большее значение).

Такая постановка вопроса представляется вполне правомерной, интересной и актуальной. Хорошо известен пример космического сообщения, составленного Ф. Дрейком для иллюстрации возможностей межзвездной радиосвязи. Одно послание, адресованное иным цивилизациям, находится на борту космического корабля «Пионер-10», который летит сейчас к границам Солнечной системы («Земля и Вселенная», № 4, 1972, с. 29—31), другое передано в направлении шарового скопления в созвездии Геркулеса («Земля и Вселенная», № 4, 1975, с. 94—96). Во всех этих случаях мы имеем дело с посланиями, составленными людьми от имени внеземных цивилизаций, как у Дрейка, или для внеземных цивилизаций, как, например, на «Пионере-10». Но в реальных условиях контакта мы столкнемся с чужим посланием, и перед нами встанет задача понять его. Сигнал, который доставит его на Землю, не будет носить достоверной печати искусственности. Мы можем только подозревать его в этом на основании каких-то «улик» и должны попытаться понять послание, чтобы подтвердить обоснованность своих подозрений. Таинственные эхо — подходящая модель такого сигнала. Справедливость исходной гипотезы о существовании зонда можно проверить, используя предполагаемый код послания, разумеется, если он был правильно понят (для этого достаточно послать новый сигнал в коде зонда).

Как же подойти к разгадке послания? С. Лем обращает внимание на одну важную особенность в методологии контакта. «Ученые, — пишет он, — воспитаны на «игре с Природой», которая никак не является сознательным противником; они не допускают возможности, что за исследуемым объектном в самом деле стоит кто-то и что понять объект можно лишь постольку, поскольку удастся постичь ход рассуждений этого совершенно неизвестного создателя ... Физику и в голову не придет, что кто-то нарочно расположил так электроны на орбитах, чтобы люди ломали голову над их конфигурациями. Он прекрасно знает, что гипотеза о создателе орбит в его физике абсолютно излишняя, более того, вообще недопустима.» Ученые, в отличие от теологов, никогда не покушались разгадывать мотивы, кроющиеся в закономерностях материального мира. Но в проблеме контакта «именно отгадывание мотивов, то есть занятие, дискредитированное всей историей эмпирических наук», может привести нас к успеху. Этого не учитывают некоторые критики Лунена, упрекающие его в произвольной манипуляции данными.

Представьте себе, что мы исследуем какое-то естественное явление и обнаруживаем, что некоторые экспериментальные точки отклоняются от ожидаемой теоретической зависимости. Если у нас есть уверенность, что это отклонение не связано с ошибками измерений, мы вынуждены отказаться от своей теоретической схемы. Любая попытка объяснить, почему эти точки отклоняются от ожидаемой кривой, будет рассматриваться как «подгонка под ответ». У природы не может быть никаких мотивов для выделения определенных точек, если только исходная зависимость действительно справедлива. В проблеме контакта такие мотивы легко представить, как это иллюстрируется, например, в схемах Лунена и Шпилевского. Более того, без этих мотивов и соответствующей процедуры отгадывания контакт вообще может оказаться неосуществимым. Конечно, допуская определенный произвол, мы рискуем выпустить из бутылки джина неограниченных спекуляций. В этом состоит серьезная трудность. И все же мы должны помнить, что психология контакта отличается от психологии природоведения; процесс установления контакта скорее напоминает игру, поэтому к нему нельзя подходить с обычной меркой естествоиспытателя. После таких предварительных замечаний попытаемся проанализировать предложенную интерпретацию.

Первая мысль, которая невольно рождается: откуда им (волопасцам или таукитянам) известно, как мы проводим границы своих созвездий, ведь созвездия выделены на небе совершенно условно. Это, конечно, верное замечание. Но метод зонда не связан с нашими созвездиями. Изображая область звездного неба, зонд ограничивается только яркими звездами, объектами до определенной звездной величины и получает конфигурацию, которую мы отождествляем с тем или иным созвездием. Так, Лунен отождествил конфигурацию зонда с группой звезд в созвездии Волопаса, а Шпилевский ту же конфигурацию — с группой звезд в созвездии Кита.

Сложнее обстоит дело с выбором единиц и масштабов. Использование одинакового масштаба по обеим осям представляется вполне оправданным. Но откуда зонд знает, что мы измеряем время в секундах? Единица времени, использованная зондом, если и не точно равна секунде (учитывая ошибки измерения при приеме эха на слух), то во всяком случае порядка секунды. Очевидно, он определил ее из анализа сигналов, посылаемых с Земли (?).

Если нам задана произвольная конфигурация точек, мы почти всегда можем найти подходящий узор на карте звездного неба. Каждый может убедиться в этом, просматривая, например, «Звездный атлас» А. А. Михайлова. Чем точнее воспроизводятся детали узора, тем меньше вероятность случайного совпадения. В связи с этим возникает вопрос о точности. Но как можно оценить точность, не договорившись с зондом ни о эпохе, ни о типе проекции? Очевидно, совпадение узора может быть только приближенным. Но тогда для исключения произвола очень важно снабдить карту определенными ориентирами. В этом смысле безусловно логичным кажется соображение Шпилевского о том, что восьмисекундный барьер должен соответствовать определенному кругу на небесной сфере — экватору или эклиптике. Хотя конфигурация точек довольно отдаленно напоминает созвездие Кита (совпадение с Волопасом, пожалуй, несколько лучше), это отождествление благодаря привязке к экватору представляется более уверенным.

Остроумными кажутся соображения о планетной системе зонда, хотя требование максимальной информативности не всегда обязательно. Главная задача зонда — сделать убедительный шаг к контакту, а когда контакт установлен, можно передать дополнительную информацию о своей планетной системе.

Итак, τ Кита или ε Волопаса? С точки зрения наших сегодняшних представлений об условиях существования жизни в космосе, τ Кита, конечно, предпочтительнее. Вспомним, что во всех проектах межзвездной связи эта звезда — первый кандидат. Но здесь кроется и коварная опасность: всегда можно подозревать подсознательный, непроизвольный элемент подгонки. В этом смысле позиция Лунена сильнее, ибо трудно заранее подозревать такую малоподходящую звезду, как ε Волопаса. Любопытно, что если смотреть с τ Кита, наше Солнце, как отмечает Лунен, будет видно в созвездии Волопаса. Может быть, послание зонда одновременно дает информацию о том, как выглядит наша область неба, если смотреть от них, и о том, как выглядит их область неба, если смотреть на нас? Болгарские любители астрономии во главе с Илией Илиевым применили иной способ дешифровки послания («Техника молодежи», № 4, 1974, с. 54) и пришли к выводу, что зонд прибыл со звезды ζ Льва. Их способ рассуждения ненамного произвольнее и может показаться столь же «оправданным». Такая многозначность интерпретации настораживает. По-видимому, межзвездное послание должно строиться на каких-то иных логических принципах, исключающих любую неоднозначность.

Предпринятые попытки раскрыть тайну мирового эха — поучительный и наглядный пример трудностей, возникающих в проблеме межзвездной связи.

## Геометрические задачи

1. Пусть $D$ — середина стороны $BC$ треугольника $ABC$ и $O$ — центр окружности, вписанной в этот треугольник. Обозначим через $Q$ точку пересечения перпендикуляра, опущенного из точки $D$ на $AO$, с перпендикуляром, опущенным из точки $A$ на $BC$. Доказать, что перпендикуляр, опущенный из точки $Q$ на $DO$, проходит через точку касания вписанной окружности и стороны $BC$.

2. а) Высоты $AD$, $BE$, $CH$ треугольника $ABC$ пересекают его стороны в точках $D$, $E$, $H$. Доказать, что прямые, соединяющие вершины $A$, $B$, $C$ с серединами отрезков $EH$, $HD$ и $DE$ соответственно, пересекаются в одной точке.

б) Доказать ту же теорему, заменив высоты биссектрисами или медианами.

3. Длины медиан $AM$, $BN$, $CQ$ треугольника $ABC$ образуют геометрическую прогрессию. Доказать, что

$$2\cos\hat{B} = 2h \pm \sqrt{3(h^2-1)},$$

где $h = \dfrac{a^2+c^3}{ac}$.

4. Через точку $E$, лежащую внутри окружности, проведена хорда $HEK$. Пусть $EM$ и $EP$ — перпендикуляры, опущенные из точки $E$ на касательные к окружности, проведенные в точках $H$ и $K$. Доказать, что $\dfrac{1}{|EM|}+\dfrac{1}{|EP|}$ не зависит от выбора хорды.

5. Найти все прямоугольные треугольники, длины сторон которых — натуральные числа, причем сумма и разность длин гипотенузы и одного из катетов являются точными квадратами.

*Н. В.*

*Д. Горбушина, В. Майер*

# Прохождение света через плоскопараллельную пластинку

Казалось бы, что может быть проще плоскопараллельной прозрачной пластинки? В элементарных учебниках физики ей уделяется несколько слов: луч света, прошедший через пластинку, параллелен падающему и лишь несколько смещен относительно него. Между тем, явления, которые можно наблюдать при прохождении света через пластинку, чрезвычайно любопытны. Уже не одно столетие они изучаются исследователями, а в настоящее время широко применяются в науке и технике. Например, тонкие плоскопараллельные пластинки (слои) используются в интерференционных светофильтрах и зеркалах. Без пластинок не может быть построен интерферометр — один из самых точных оптических приборов.

Чтобы получить представление о многообразии и красоте оптических явлений, происходящих в плоскопараллельной пластинке, рассмотрим такой опыт *). Допустим, что пластинка освещается расходящимся пучком лучей. Нижняя поверхность пластинки матовая, а точечный источник света, дающий расходящийся пучок, расположен внутри пластинки на этой поверхности (рис. 1). Очевидно, что пучок света от источника не сможет полностью выйти из пластинки: лучи, падающие на границу раздела стекло — воздух под углом, равным или бо́льшим предельного, испытают полное отражение на верхней поверхности пластинки и вернутся к нижней. Поскольку нижняя поверхность пластинки матовая, падающий на нее свет будет рассеиваться — поверхность будет освещена. Если в этих условиях посмотреть на плоскопараллельную пластинку сверху, то будет видна яркая светящаяся точка — источник света $S$, — окруженная слабым светлым кольцом с резкой внутренней границей.

Вычислим внутренний диаметр $D$ светлого кольца (или внешний диаметр темного кольца). Согласно закону преломления (см. рисунок 1) $\sin\alpha/\sin\beta = n_2/n_1$, где $n_1$, $n_2$ — соответственно абсолютные показатели преломления пластинки и среды над верхней ее поверхностью. Угол падения $\alpha$ называется предельным, если угол преломления $\beta$ равен $\pi/2$. Следовательно, предельный угол падения можно найти из соотношения $\sin\alpha_{\text{пр}} = n_2/n_1$. Из треугольника $SAB$ $\sin\alpha_{\text{пр}} = \frac{SB}{SA} = \frac{D/4}{\sqrt{h^2 + D^2/16}}$. Исключая из двух последних формул угол $\alpha_{\text{пр}}$, получаем

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{D^2 + 16h^2}}{D} = \sqrt{1 + 16\frac{h^2}{D^2}}.$$

Если пластинка находится в воздухе,

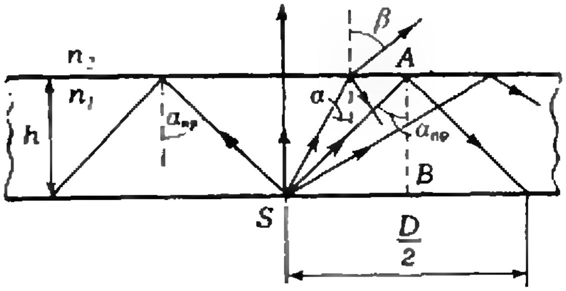


Рис. 1.

---

*) Подобный эксперимент в учебных целях разработан более 10 лет назад С. И. Князевым.

то $n_2=1$. Тогда внутренний диаметр светлого кольца связан с показателем преломления пластинки $n=n_1$ и ее толщиной $h$ соотношением

$$D=\frac{4h}{\sqrt{n^2-1}}. \qquad (*)$$

Пользуясь полученной формулой, можно определить одну из трех входящих в нее величин, измерив две другие. Практическое значение, конечно, имеет определение показателя преломления материала пластинки.

Теперь убедимся экспериментально в существовании предсказанного явления и проверим формулу (*). Для опытов можно использовать плоскопараллельные пластинки из стекла или оргстекла толщиной не менее 2 *мм*. Одну поверхность пластинки нужно сделать матовой, обработав ее наждачной бумагой или покрасив тонким слоем белой краски. Остается каким-то образом «внести» точечный источник света внутрь пластинки. Сделать это не так сложно. Действительно, если на матовую поверхность пластинки снизу или сверху пустить узкий пучок света, то небольшой освещенный участок этой поверхности будет рассеивать свет внутрь пластинки по всем направлениям, т. е. выполнять роль точечного источника света.

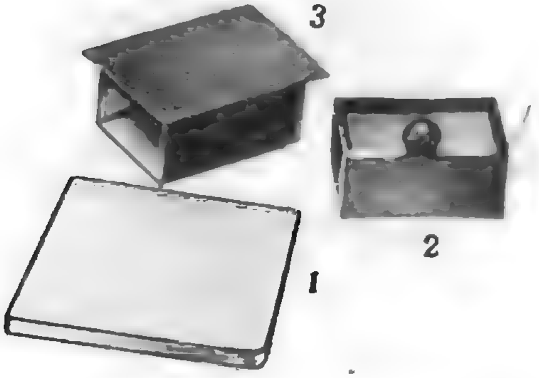


**Рис. 2. Детали экспериментальной установки:** *1* — **пластинка с матовой поверхностью,** *2* — **укрепленная в спичечном коробке лампочка,** *3* — **крышка коробка (чтобы свет, выходящий через щели спичечного коробка, не мешал наблюдениям, на крышку наклеен листок черной бумаги).**

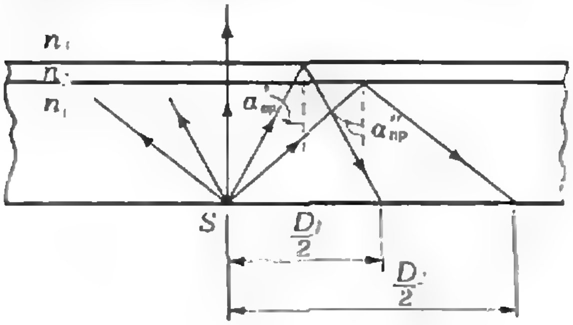


**Рис. 3.**

Соберем экспериментальную установку (рис. 2). Внутрь спичечного коробка поместим лампочку для карманного фонаря и закрепим ее в вертикальном положении с помощью пластилина. Провода от лампочки, пропущенные через отверстия в стенке коробка, соединим с батарейкой. Закроем коробок крышкой, и иглой проколем в ней над нитью лампочки небольшое круглое отверстие. Отрегулируем положение лампочки в спичечном коробке так, чтобы получился яркий «точечный» источник света (проколоть отверстие точно над нитью вряд ли удастся, поэтому регулировка необходима). На коробок положим плоскопараллельную пластинку матовой стороной вниз.

Если в полной темноте посмотреть на пластинку сверху, будет видно то светлое кольцо (вокруг точечного источника света), которое предсказывает теория.

Опыт можно несколько видоизменить. Сделаем на пластинке по ее периметру пластилиновые бортики высотой около 5 *мм* и нальем на поверхность пластинки тонкий слой воды. (Пластинка должна быть чистой, чтобы вода равномерно покрывала всю ее поверхность.) При этом вокруг светящейся точки появляется второе светлое кольцо, имеющее больший диаметр, чем то, которое получалось при отсутствии воды. Первое кольцо, если слой воды тонок, имеет такой же диаметр, как в случае, когда воды нет.

Объяснить возникновение второго кольца не сложно. Световые лучи в

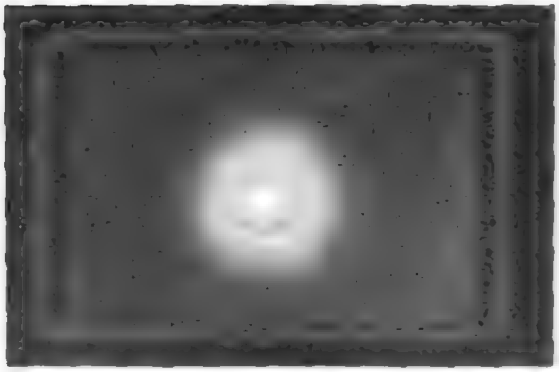


Рис. 4.

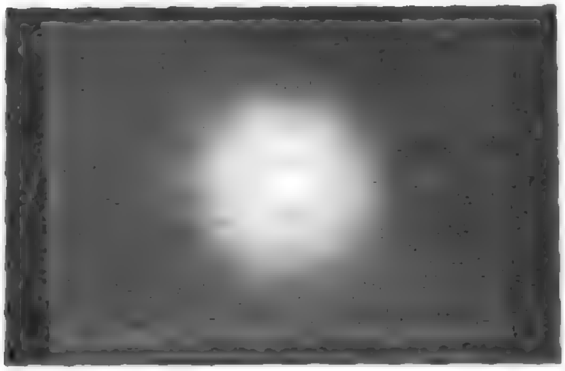


Рис. 5а

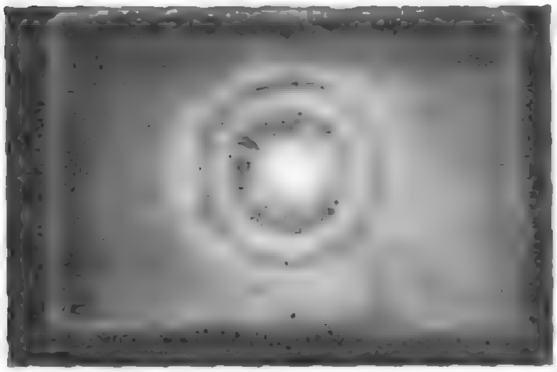


Рис. 5б

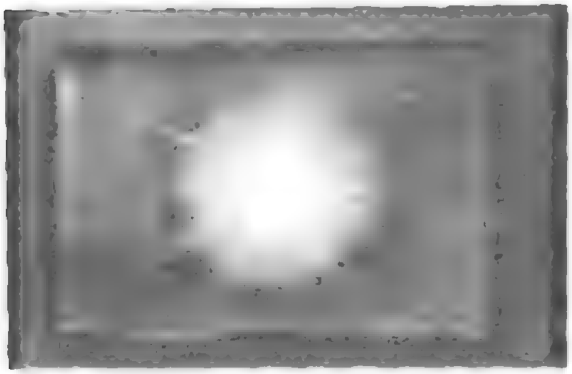


Рис. 6.

этом опыте испытывают полное отражение от границы раздела сред стекло — вода (рис. 3). Откуда берется первое светлое кольцо вокруг источника? Разумно предположить, что его появление объясняется полным отражением света от границы вода — воздух. Если это предположение верно, то диаметр первого светлого кольца должен зависеть от толщины слоя воды над пластинкой. Проверим это.

Если воды нет совсем, видно одно светлое кольцо (рис. 4; к сожалению, темный круг, в центре которого находится источник, виден не очень четко; при увеличении толщины пластинки условия наблюдения улучшаются). Будем постепенно доливать воду в кювету, образованную пластинкой с пластилиновыми бортиками. При этом растут размеры первого светлого кольца, в то время как диаметр второго остается неизменным (рис. 5). Сначала первое кольцо меньше второго (см. рис. 5а) затем оно совмещается со вторым и, наконец, становится больше второго (см. рис. 5б). Итак, сделанное предположение верно.

В заключение рассмотрим такой опыт. На спичечный коробок положим листок папиросной (или другой тонкой белой) бумаги, прекрасно рассеивающей свет. На нее поместим прозрачную стеклянную пластинку (без матовой поверхности). Включим лампочку. При этом вместо окружающего источник светлого кольца с четкой внутренней границей мы увидим светлый круг с резкой внешней границей (рис. 6)!

Объясняется этот несколько неожиданный результат тем, что теперь источник света находится не внутри, а вне пластинки. Подробное объяснение опыта мы предоставляем вам провести самостоятельно.

Упражнения

1. Пользуясь формулой (*), экспериментально определите показатели преломления стекла и оргстекла.

2. Измерьте показатель преломления жидкости, налитой поверх пластинки.

*М. Балк*

# Такой невероятный турнир...

Между первым знакомством с «нестандартной», «нетиповой» задачей и *окончательным, компактным изложением* ее решения лежит полоса поиска этого решения. Как же проводить этот поиск? Единого, «универсального» метода для достижения этой цели нет. Однако есть простые общие приемы, которые помогают найти способ решения данной, конкретной задачи. Обсуждению таких приемов посвящены превосходные книги Д. Пойа «Как решать задачу», «Математика и правдоподобные рассуждения», «Математическое открытие», а также ряд книг и статей других авторов. В предлагаемом вниманию читателя очерке мы попытаемся проследить, как «срабатывают» такие общие приемы.

## Встреча первая

### 11 марта, 8 часов утра

Они ежедневно ходили по одной и той же тихой улице — ученик седьмого класса Саша Тихомиров и учитель математики Георгий Данилович Селиванов. Они давно знали друг друга, а с прошлого года Саша стал ходить в городской математический кружок, которым руководил Георгий Данилович. Сегодня, увидев Сашу, учитель поинтересовался:

— Ну как, отослал ты уже вступительную контрольную работу в Заочную школу? Ведь срок истекает 20 марта *).

— Нет еще, — ответил Саша, — из 11 задач я пока решил 10, а самую первую никак решить не могу.

— Что же это за коварная задача?

Саша извлек из своего портфеля журнал «Квант» № 1 за 1974 год, раскрыл его на 73 странице и стал читать.

«Задача 1. *Три друга сыграли некоторое число партий в шахматы, причем каждый сыграл с каждым одинаковое число партий. Потом стали решать, кто победил. Первый сказал: «У меня больше, чем у каждого из вас, выигрышей». Второй сказал: «У меня меньше, чем у каждого из вас, проигрышей». Но когда подсчитали очки, то оказалось, что больше всего очков набрал третий (выигрыш — 1 очко, ничья — 1/2 очка, проигрыш — 0). Могло ли такое быть? Если нет, то докажите; если да, то приведите пример.*»

— Любопытная задача! — сказал Селиванов. — Знаешь, ведь и я сразу не вижу, как ее решить. Зайди ко мне сегодня вечером, подумаем над нею вместе.

---

*) Имеется в виду Всесоюзная Заочная математическая школа (ВЗМШ).

## Встреча вторая

**11 марта, 19 часов**

Усевшись поудобнее в «свое» кресло в комнате Селиванова, Саша рассказывает.

—Я рассматривал конкретные случаи, когда каждый из ребят сыграл с каждым из остальных по 2, 3, 4, 5 партий. Но так, как требуется в условии задачи, у меня ни разу не получилось.

— Но, быть может, — размышлял вслух учитель, — это получится при бóльшем числе партий?

— Возможно, — вздохнул Саша.— Говорят, кто-то перебрал 237 вариантов возможных турниров, пока не наткнулся на требуемый. Но разве перебор вслепую—это решение? Должна же математика подсказать более умный путь! А как его найти? Я даже не знаю, с чего начать.

— Видишь ли, один из первых вопросов, который полезно поставить себе при решении любой задачи, такой: «Что в задаче ищется?». Как бы ты на него ответил?

— Ищется... — Саша пожал плечами. — Ищется довольно необычная вещь: турнир.

— Верно. А вот другой важный вопрос: «Нельзя ли свести решение задачи к поиску каких-то чисел?»

— Вроде бы я могу это сделать,— сказал Саша. — Чтобы восстановить турнир, мне надо узнать, сколько всего партий первый выиграл у каждого из двух остальных, сколько партий он каждому из них проиграл, сколько сыграл с каждым вничью. Вот уже 6 неизвестных. И, похоже, такие же неизвестные надо ввести и для второго и третьего... Набирается 18 неизвестных! Многовато...

— А нельзя ли все эти неизвестные «собрать в одну горсть», — раздумывал вслух учитель. — Хорошо бы их представить себе наглядно, изобразить на схеме...

— Это я могу, — сказал Саша. — Недавно мы с Колей и Витей сыграли друг с другом по две партии, и получилась вот такая итоговая таблица (см. табл. 1). Я по одной партии выиграл у каждого из них, в таблице это обозначено «+1», и по одной проиграл, это обозначено «—1». А число ничьих мы обозначали знаком равенства, вот в таблице стоит «=2», — это Коля с Витей обе партии сыграли вничью. И в нашей задаче можно составить похожую таблицу (см. табл. 2), в каждой строке которой записаны нужные нам сведения об игроке — сколько партий и кому он проиграл, сколько выиграл, сколько свел вничью. Правда, все эти числа пока неизвестны и обозначены буквами. Например, второй игрок выиграл у третьего *c* партий, проиграл ему *f* партий, а *k* партий сыграл с ним вничью. А

|  | Саша | Коля | Витя | итого | очков |
|---|---|---|---|---|---|
| Саша |  | + 1<br>− 1<br>= 0 | + 1<br>− 1<br>= 0 | + 2<br>− 2<br>= 0 | 2 |
| Коля | + 1<br>− 1<br>= 0 |  | + 0<br>− 0<br>= 2 | + 1<br>− 1<br>= 2 | 2 |
| Витя | + 1<br>− 1<br>= 0 | + 0<br>− 0<br>= 2 |  | + 1<br>− 1<br>= 2 | 2 |

Табл. 1.

|  | I | II | III | итого | очков |
|---|---|---|---|---|---|
| I |  | + a<br>− d<br>= g | + b<br>− e<br>= h |  |  |
| II | + d<br>− a<br>= g |  | + c<br>− f<br>= k |  |  |
| III | + e<br>− b<br>= h | + f<br>− c<br>= k |  |  |  |

Табл. 2.

ведь неизвестных оказывается не 18, а только девять!

— Хорошая схема, — одобрил таблицу Георгий Данилович, — Что же ты дальше намерен делать?

— Подобрать числа $a$, $b$, ..., $k$ так, чтобы выполнялись все условия задачи. А, может быть, такого набор чисел нет? Тогда как это доказать? Неясно...

— А что тебе известно об искомых числах? Нельзя ли это записать в виде уравнений или неравенств? Подумай над этим дома, и давай встретимся завтра.

### Встреча третья

**12 марта, 19 часов**

— Я заполнил дома пустые клетки в таблице 2, — сказал Саша, — и из условия задачи получились неравенства

$$\left\{\begin{aligned}
&a+b>c+d,\\
&a+b>e+f,\\
&a+f<d+e,\\
&a+f<b+c,\\
&e+\frac{1}{2}h+f+\frac{1}{2}k>\\
&\qquad>a+\frac{1}{2}g+b+\frac{1}{2}h,\\
&e+\frac{1}{2}h+f+\frac{1}{2}k>\\
&\qquad>d+\frac{1}{2}g+c+\frac{1}{2}k.
\end{aligned}\right.$$

— И это все? — спросил учитель.

— Нет. Если обозначить через $n$ число партий, сыгранных каждым игроком с каждым из остальных, то еще

$$a+d+g=b+e+h=c+f+k=n.$$

Причем все эти 10 чисел — целые и неотрицательные. С помощью последних равенств мне удалось исключить из неравенств $g$, $h$ и $k$. Получилась такая система:

$$\left\{\begin{aligned}
&a+b-(c+d)>0,\\
&a+b-(e+f)>0,\\
&d+e-(a+f)>0,\\
&b+c-(a+f)>0,\\
&d+2e+f-(a+2b+c)>0,\\
&a+2f+e-(b+2c+d)>0,\\
&a+d+g=b+e+h=\\
&\qquad\qquad=c+f+k=n.
\end{aligned}\right. \qquad (1)$$

— Как же ты станешь ее решать?

— Даже не представляю себе. Ведь в школе мы такое не проходили.

— А нельзя ли свести данную задачу к другой, более простой?

— А что значит «более простой»? Чтобы неравенств стало меньше? Или чтобы неизвестных в неравенствах стало меньше?

— Пожалуй.

— Ну, вот первые шесть строк — это шесть неравенств с шестью неизвестными. Если решить эту систему, то есть найти $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, то в последних равенствах можно положить $n$ равным достаточно большому натуральному числу и найти $g$, $h$ и $k$. Значит, надо решить лишь систему из шести неравенств с шестью неизвестными.

— А нельзя ли упростить неравенства введением новых неизвестных?

— Попробую. В первое неравенство входят четыре неизвестных. А было бы, наверное, проще иметь дело только с двумя. И похожая картина в других неравенствах. Положу-ка и

$$\left\{\begin{aligned}
&a+b=x,\\
&c+d=y,\\
&e+f=z,\\
&a+f=t,\\
&d+e=u,\\
&b+c=v.
\end{aligned}\right. \qquad (2)$$

Тогда неравенства системы (1) станут проще:

$$\begin{cases} x-y>0, \\ x-z>0, \\ u-t>0, \\ v-t>0, \\ z+u-(x+v)>0, \\ z+t-(y+v)>0. \end{cases} \qquad (3)$$

А можно еще упростить, ввести неизвестные... эге, их будет всего четыре:

$$\begin{cases} x-y=\alpha, \\ x-z=\beta, \\ u-t=\gamma, \\ v-t=\delta, \end{cases} \qquad (4)$$

и тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} \alpha>0, \\ \beta>0, \\ \gamma>0, \\ \delta>0, \\ \gamma-(\beta+\delta)>0, \\ \alpha-(\beta+\delta)>0. \end{cases} \qquad (5)$$

А подобрать решение системы (5) — это нам запросто, — весело закончил Саша.

— Как так: запросто?

— Вот посмотрите, Георгий Данилович. Ведь можно за числа $\beta$ и $\delta$ взять любые натуральные числа, скажем, единицы, а затем взять немного бо́льшие $\gamma$ и $\alpha$... тройки.

— Да, можно. А что дальше?

— Дальше я найду $x$, $y$, $z$, $u$, $t$, $v$ из системы (4), а потом из системы (2) найду $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$. Решить ее — дело пустяшное.

— Допустим, — сказал учитель. — Хотел бы я посмотреть, какой получится результат. Занеси мне его завтра.

## Встреча четвертая

**15 марта, 19 часов**

— Видите ли, — начал Саша смущенно, — система (4) вроде бы простенькая, но неизвестные из нее не находятся. Уравнений всего четыре, а неизвестных шесть, и найти их не удается.

— Да, такие системы называются «неопределенными», потому что неизвестные из них однозначно не находятся. У таких систем есть или бесконечно много решений, или ни одного.

— Зачем мне «бесконечно много»? Мне хватит и одного. Может, взять произвольно $x$ и $t$? Тогда систему можно будет решить?

— Ну, во всяком случае у тебя будет четыре уравнения и четыре неизвестных в системе (4). Но удастся ли после этого решить систему (2)? Пока я советую тебе послать в Заочную школу решения остальных 10 задач, ведь они же пишут, что не обязательно решить все задачи.

## Встреча пятая

**21 марта, 19 часов**

— Георгий Данилович! У меня получается какая-то ерунда!

— А в чем дело?

— Я положил $x=4$, $t=1$. Но тогда при $\beta=\delta=1$ и $\alpha=\gamma=3$ из системы (4) получается $y=1$, $z=3$, $u=4$, $v=2$. Система (2) принимает вид

$$\begin{cases} a+b=4, \\ c+d=1, \\ e+f=3, \\ a+f=1, \\ d+e=4, \\ b+c=2. \end{cases} \qquad (6)$$

Вертел я ее и так, и этак, — не решается! Тогда я попробовал найти сумму всех шести неизвестных. Сложил первые три уравнения, получил

$$a+b+c+d+e+f=8.$$

А сложил последние три, получил

$$a+b+c+d+e+f=7.$$

Так же не бывает! Значит, система

(6) не имеет решений, и требуемого турнира не могло быть! А как же говорят, что кто-то нашел его?

— Ну, ты не совсем прав. Система (6) действительно не имеет решений; но ты же выбрал $x$ и $t$ совершенно произвольно. Может быть, их надо подбирать более осторожно?

— А как же их подбирать? Ведь уравнений у меня больше нет.

— Почему же? У тебя получилось, что должно быть $x+y+z=t+u+v$. А, может быть, есть еще какие-нибудь соотношения?

— А как же искать такие соотношения?

— Как их искать, — это другой вопрос. Нам сейчас надо найти хоть одно решение задачи. Кстати, срок подачи решений в Заочную школу истек. Надеюсь, ты послал свою работу?

— Да, решения десяти задач я послал. Но у меня из головы не выходит задача о шахматистах. Конец четверти, надо готовиться к контрольной, а я думаю только об этом турнире.

— Ну что же, давай подумаем вместе. Зачем нам решать систему (4) при случайном наборе чисел $x$, $t$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$? Не лучше ли выразить из нее, скажем, $y$, $z$, $u$, $v$ через $x$, $t$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, подставить их в систему (2) и решать ее методом исключения неизвестных? Скоро у тебя каникулы, времени будет много, попробуй. А пока отложи эту задачу и готовься к контрольным.

— Хорошо, я так и сделаю.

## Встреча шестая

**3 апреля, 14 часов**

— Георгий Данилович! Я нашел, — догоняя учителя, кричал Саша. — Я решил эту задачу!

— И какой же ответ?

— Такое могло быть! Вот турнирная таблица (см. табл. 3). И, наверное, она не единственная возможная.

— Как же ты ее нашел?

— А я решил сначала не искать $f$, временно считать его известным, а потом подобрать. Кроме того, уравнение, которое мы с вами нашли —

$$x+y+z=t+u+v,$$

дает после подстановки (из системы (4))

$$3x=3t+\alpha+\beta+\gamma+\delta,$$

откуда

$$x=t+\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma+\delta),$$

и ясно, что сумма в скобках должна делиться на три. А дальше последовательно из четвертого, первого, шестого, второго и пятого уравнений системы (2), используя (4), я нашел:

$$\left|\begin{aligned} &a=t-f,\\ &b=x-a=\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\\ &\qquad\qquad+\gamma+\delta)+f,\\ &c=v-b=t-\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\\ &\qquad\qquad+\gamma+\delta)-f+\delta,\\ &d=y-c=\frac{2}{3}(\alpha+\beta+\\ &\qquad\qquad+\gamma+\delta)-\alpha-\delta+f,\\ &e=u-d=t-\frac{2}{3}(\alpha+\beta+\\ &\qquad\qquad+\gamma+\delta)-f+\alpha+\delta+\gamma.\end{aligned}\right. \qquad (7)$$

После этого я подобрал такие натуральные числа $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $t$, $f$, чтобы числа $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ были целыми и неотрицательными. Я положил

$\alpha=5$, $\beta=1$, $\gamma=4$, $\delta=2$, $t=10$, $f=2$.

|  | I | II | III | ИТОГО | ОЧКОВ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 🟩 | +8<br>−3<br>=7 | +6<br>−11<br>=1 | +14<br>−14<br>=8 | 18 |
| II | +3<br>−8<br>=7 | 🟩 | +6<br>−2<br>=10 | +9<br>−10<br>=17 | $17\frac{1}{2}$ |
| III | +11<br>−6<br>=1 | +2<br>−6<br>=10 | 🟩 | +13<br>−12<br>=11 | $18\frac{1}{2}$ |

Табл. 3.

А затем взял $n=18$ и из равенств системы (1) нашел

$$g=7,\ h=1,\ k=10.$$

Вот и все!

— Да, все верно, — улыбнулся Георгий Данилович. — Только я бы положил $n=17$ и уменьшил число ничьих. Ведь $h$ может равняться и нулю!

### «Еще раз — и лучше!»
### (Д. Пойа)

Они вернулись к задаче «о трех шахматистах» через полтора года, когда обдумывали очередное занятие математического кружка. Саша готовил сообщение об общих приемах поиска решения задач. Просмотрев старое решение, они задумались над следующей задачей: *указать способ нахождения всех турниров, удовлетворяющих условиям задачи 1.*

— Эта задача, — заметил Саша, — очевидно, равносильна такой: *указать способ нахождения всех решений системы (1).*

— Разумеется, — подтвердил Георгий Данилович.

— Меня одно обстоятельство смущает в старых наших рассуждениях, — продолжал Саша. — Мы вводили вспомогательные неизвестные $x$, $y$ и т. д., а потом от них освобождались. А что если сразу от них освободиться? Тогда, например, вместо неравенства $a+b-(c+d)>0$ мы сразу получим равенство $a+b-(c+d)=\alpha$. И точно так же — с остальными неравенствами системы (1).

— Хорошая идея, — сказал учитель. — Воспользуйся ею, чтобы дать на занятии кружка компактное окончательное решение задачи.

...Вот это решение.

«Задача сводится к нахождению всех возможных наборов из десяти целых неотрицательных чисел

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ k,\ n, \qquad (*)$$

удовлетворяющих системе (1) (здесь Саша рассказал, как именно она сводится, мы этот рассказ не приводим). Запишем ее в виде системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{llr}
a+b-c-d & =\alpha, & (8_1)\\
a+b-e-f & =\beta, & (8_2)\\
-a+d+e-f & =\gamma, & (8_3)\\
-a+b+c-f & =\delta, & (8_4)\\
-a-2b-c+d+2e+f & =p, & (8_5)\\
a-b-2c-d+e+2f & =q, & (8_6)\\
g=n-a-d, & & (8_7)\\
h=n-b-e, & & (8_8)\\
k=n-c-f & & (8_9)
\end{array}\right. \qquad (8)$$

и будем искать ее решения в целых неотрицательных числах при натуральных $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $p$, $q$. Сначала решим систему первых шести уравнений относительно $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$.

Складывая почленно уравнения $(8_2)$ и $(8_4)$ и вычитая эту сумму из уравнения $(8_3)$, получаем

$$-a-2b-c+d+2e+f=\gamma-(\beta+\delta),$$

а вычитая эту же сумму из уравнения $(8_1)$, получаем

$$a-b-2c-d+e+2f=\alpha-(\beta+\delta).$$

Сопоставляя эти два уравнения с $(8_5)$ и $(8_6)$, видим, что для совместности системы (8) необходимо выполнение равенств

$$\gamma=\beta+\delta+p,\ \alpha=\beta+\delta+q,$$

и тогда уравнения $(8_5)$ и $(8_6)$ будут следствиями уравнений $(8_1)$ — $(8_4)$. Из этих четырех уравнений можно выразить какие-либо четыре из шести неизвестных $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ через два других и свободные члены. Заметим еще, что из уравнений $(8_5)$ и $(8_6)$ следует

$$-b-c+e+f=\frac{p+q}{3},$$

откуда видно, что число $s=\frac{1}{3}(p+q)$ — натуральное, причем $q<3s$, $p=3s-q$. Теперь выразим $a$, $b$, $d$, $e$ через $c$, $f$, $\beta$, $\delta$, $q$, $s$ (исключением переменных). Получим

$$a=c+\beta+s, \qquad (9_1)$$
$$b=f+\beta+\delta+s, \qquad (9_2)$$
$$d=f+\beta+2s-q, \qquad (9_3)$$
$$e=c+\beta+\delta+2s. \qquad (9_4)$$

Видно, что $b+e>a+d>c+f$, то есть $k>g>h$. Теперь из уравнения $(8_8)$

$$n=c+f+h+2\beta+2\delta+3s, \qquad (9_5)$$

и из $(8_7)$ и $(8_9)$

$$g=h+2\delta+q, \qquad (9_6)$$
$$k=h+2\beta+2\delta+3s. \qquad (9_7)$$

Итак, если целые неотрицательные числа (*) удовлетворяют системе (1), то существует такой набор целых неотрицательных чисел $\beta$, $\delta$, $s$, $q$, $c$, $f$, $h$ ($\beta>0$, $\delta>0$, $s>0$, $0<q<3s$, $q\leqslant f+\beta+2s$, $c\geqslant 0$, $f\geqslant 0$, $h\geqslant 0$), что числа (*) связаны с ними соотношениями (9).

Обратно, нетрудно убедиться (например, непосредственной подстановкой), что при любом выборе целых чисел $\beta$, $\delta$, $s$, $q$, $c$, $f$, $h$, удовлетворяющих перечисленным условиям, числа (*), определенные формулами (9), будут удовлетворять системе (1). Следовательно, при всевозможных таких наборах «параметров» $\beta$, $\delta$, $s$, $q$, $c$, $f$, $h$ получаются все решения задачи о трех шахматистах.»

— Хорошее решение трудной задачи, — сказал учитель. — Но «все концы тщательно опущены в воду». Как же ты догадался, что два уравнения в системе — следствия остальных, что следует сложить уравнения $(8_5)$ и $(8_8)$ и найти $\frac{1}{3}(p+q)$?

— Про себя, — ответил Саша, — я все время имел в виду те рассуждения, которые были ранее проведены при поиске решения. Вы посмотрите: сейчас я некоторое выражение — левую часть пятого неравенства системы (1) — обозначил через $p$; а раньше, в ходе поиска частного решения, я ведь уже работал с тем же самым выражением (см. (1), (3), (5)) и видел, что оно равно $\gamma-(\beta+\delta)$; значит, должно быть: $\gamma-(\beta+\delta)=p$. В ходе решения я и показываю справедливость этого равенства, минуя выкладки, ненужные для окончательного решения. Так же обстоит дело и с равенством $\alpha=\beta+\delta+q$. Кроме того, в ходе поиска решения я встретил выражение $\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ (см. (7)), которое должно быть натуральным числом. Но это выражение равно $\beta+\delta+\frac{1}{3}(p+q)$. Значит, $\frac{1}{3}(p+q)$ должно быть целым числом. А чтобы показать это в ходе окончательного решения, я и сложил почленно равенства $(8_5)$ и $(8_6)$.

— Ну, а почему ты выбрал в качестве «свободных переменных» $f$ и $c$, а не, скажем, $a$ и $b$?

— Я имел перед глазами систему (7), полученную в ходе поиска: если в ней освободиться от лишнего переменного $t$ (например, учесть, что $t=a+f$, и подставить это выражение в остальные равенства (7)), то сразу видно, что удобно выбрать за «свободные переменные» $f$ и $c$.

* * *

Оглядываясь на поиск, проведенный Сашей, мы можем выделить те вопросы, которые облегчили ему этот поиск:

1. «Что в задаче ищется?»
2. «Нельзя ли свести задачу к поиску каких-то чисел?»
3. «Что известно из формулировки задачи об искомых величинах? Нельзя ли это записать в виде уравнений или неравенств?»
4. «Нельзя ли свести данную задачу к другой, более простой?»
5. «Нельзя ли улучшить решение (получить более простое или более компактное решение, решить более общую задачу и т. п.)?»

**Вопросы для размышления**

1. Какое наименьшее число партий должен был в турнире сыграть каждый из трех шахматистов, чтобы могли выполняться условия задачи 1?
2. Нет ли в задаче 1 лишних условий?

# ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА «КВАНТА»

За 1975—76 учебный год редакция получила более 3000 писем с решениями задач из «Задачника «Кванта». Среди авторов этих писем редакция отобрала школьников, решивших наибольшее число задач и приславших наиболее оригинальные решения. Эти школьники награждаются специальной премией, учрежденной редколлегией журнала «Квант» — подпиской на журнал «Квант» на 1977 год.

1. **Алексеев Алексей (Пермь)**
2. **Гусейнов Вилаят (Нахичевань)**
3. **Диденко Андрей (Краснодар)**
4. **Камалян Ашот (Иджеван)**
5. **Князюк Андрей (Киев)**
6. **Листовничий Алексей (Киев)**
7. **Лищенко Олег (Киев)**
8. **Магид Марк (Даугавпилс)**
9. **Медведь Виктор (Молодечно)**
10. **Морозов Игорь (Горький)**
11. **Мухарский Юрий (Киев)**
12. **Палуш Дмитрий (Харьков)**
13. **Побылица Павел (Ленинград)**
14. **Пономарев Евгений (п. Черноголовка Московской обл.)**
15. **Пославский Сергей (Харьков)**
16. **Пошехонов Юрий (Энгельс)**
17. **Трегуб Семен (Ташкент)**
18. **Третьяченко Константин (Киев)**
19. **Яцало Борис (с. Морочно Ровенской обл.)**

За успешное участие в X Всесоюзной физико-математической олимпиаде подпиской на журнал «Квант» на 1977 год награждаются:

1. **Абаджян Самвел (Ереван)**
2. **Боровиков Павел (Ангарск)**
3. **Вайсбурд Игорь (Томск)**
4. **Дик Александр (с. Лебединовка Аламединского р-на Кирг. ССР)**
5. **Захаров Дмитрий (п. Палатка Хасынского р-на Магаданская обл.)**
6. **Канджа Сергей (с. Гура Чимишлийского р-на Молд. ССР)**
7. **Кротов Вячеслав (Иваново)**
8. **Летчиков Андрей (Ижевск)**
9. **Мидодашвили Бидзина (Тбилиси)**
10. **Русанов Сергей (ст. Новопокровская Краснодарского кр.)**
11. **Спиридонова Алла (Курган)**
12. **Убайдулаев Рустам (Ташкент)**
13. **Фолин Алексей (Новосибирск)**
14. **Шаранова Ольга (Ташкент)**

# задачник кванта

**Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 ноября 1976 г. по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М401, М402» или «...Ф413». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Задачи М405, Ф413 и Ф414 предлагались на заключительном туре X Всесоюзной олимпиады.**

## Задачи

### М401—М405; Ф413—Ф417

**М401.** Внутри остроугольного треугольника $ABC$ дана точка $P$ такая, что $A\widehat{P}B = A\widehat{B}C + 60°$, $B\widehat{P}C = B\widehat{A}C + 60°$, $C\widehat{P}A = C\widehat{B}A + 60°$. Докажите, что точки пересечения продолжений отрезков $AP$, $BP$, $CP$ (за точку $P$) с окружностью, описанной вокруг $\triangle ABC$, лежат в вершинах равностороннего треугольника.

*А. Ягубьянц*

**М402.** Докажите, что не существует строго возрастающей последовательности целых неотрицательных чисел $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., для которых при любых $n$ и $m$ выполняется соотношение

$$a_{nm} = a_n + a_m.$$

*Ю. Ионин*

**М403.** Докажите, что если в выпуклом многограннике из каждой вершины выходит четное число ребер, то в любом сечении его плоскостью, не проходящей ни через одну из его вершин, получится многоугольник с четным числом сторон.

**М404.** На полке стоят первые $n$ томов энциклопедии. С ними можно проводить следующую операцию: взять любые три рядом стоящих тома и поставить их между любыми двумя томами, а также в начало или в конец ряда, не меняя при этом порядка этих трех томов. Можно ли, применив несколько раз указанную операцию, поставить их в порядке возрастания номеров томов (независимо от первоначальной расстановки томов)?

*А. Савин*

**М405.** На шахматной доске размера 99×99 отмечена фигура $\Phi$ (эта фигура будет разной в пунктах а), б) и в)). В каждой клетке фигуры $\Phi$ сидит жук. В какой-то момент жуки взлетели и сели снова в клетки той же фигуры $\Phi$; при этом в одну клетку могло сесть несколько жуков. После перелета любые два жука, занимавшие соседние клетки, оказались снова в соседних клетках или попали на одну клетку. (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону или общую вершину.)

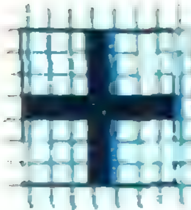


Рис. 1.

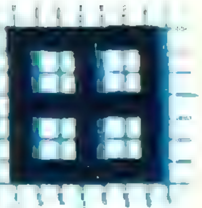


Рис. 2.

а) Пусть фигура $\Phi$ — это «центральный крест», (см. рис. 1). Докажите, что в этом случае какой-то жук вернулся на место либо перелетел в соседнюю клетку.

б) Верно ли это утверждение, если фигура $\Phi$ — это «оконная рама», (см. рис. 2)?

в) Верно ли это утверждение, если фигура $\Phi$ — это вся доска? (8 кл.)

*В. Произволов*

**Ф413.** Имеется идеальный запирающий слой с $p$—$n$-переходом. Толщина этого слоя $d$, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon$. Нарисуйте график напряженности и потенциала электрического поля в слое, полагая распределение плотности заряда в слое таким, как показано на рисунке 3. (9 кл.)

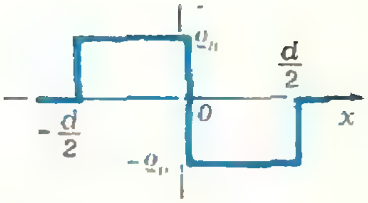


Рис. 3.

**Ф414.** Коэффициент жесткости резинового жгута длины $l$ и массы $m$ равен $k$. Кольцо, изготовленное из этого жгута, вращается с угловой скоростью $\omega$ в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Определить радиус вращающегося кольца. (8 кл.)

**Ф415*.** Упрощенно атом гелия можно представлять как систему, в которой два электрона совершают колебания около общего центра — неподвижного ядра. Используя эту модель, попробуйте оценить приближенно диэлектрическую проницаемость жидкого гелия в постоянном электрическом поле, принимая во внимание, что гелий сильно поглощает ультрафиолетовое излучение на длине волны $\lambda = 0{,}06$ *мк*. Плотность жидкого гелия $\rho = 0{,}14$ *г/см*$^3$.

*С. Козел*

**Ф416.** Самолет, пролетев расстояние $l_1$ по прямой $AB$, попадает из пункта $A$ в пункт $B$ за время $t_1$. Затем он пролетает расстояние $l_2$ по прямой $BC$ из пункта $B$ в пункт $C$ за время $t_2$ и возвращается в пункт $A$ по прямой $CA$, пролетев расстояние $l_3$ за время $t_3$. Во время перелета дует ветер, скорость которого не меняется в течение всего перелета. Определить скорость ветра, если скорость самолета относительно воздуха во время всего полета по абсолютной величине постоянна.

**Ф417.** В теплоизолированном баллоне находятся 5 *г* водорода и 12 *г* кислорода. Смесь поджигают. Определить давление и температуру в сосуде, если известно, что при образовании 1 моля воды выделяется $2{,}4 \cdot 10^5$ *дж*. Объем сосуда 100 литров. Начальная температура смеси кислорода и водорода 20 °С. Теплоемкость водорода при постоянном объеме равна 14,3 *кдж/кг·град*, а водяных паров — 2,1 *кдж/кг·град*.

# Решения задач

## М361—М363; Ф369—Ф372

**М361.** *Двое играют в следующую игру. На клетчатой бумаге выделяется прямоугольник $m \times n$ клеток. Каждый по очереди вычеркивает все клетки какого-нибудь горизонтального или вертикального ряда, в котором еще есть невычеркнутые клетки. Выигрывает тот, кто вычеркивает последние клетки.*
*Кто может обеспечить выигрыш: начинающий или его партнер? (Ответ, конечно, зависит от $m$ и $n$.)*

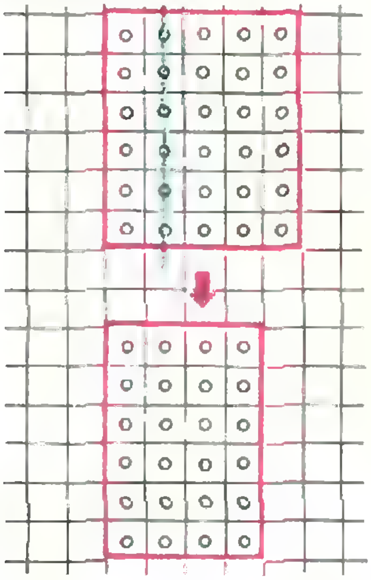


**Рис. 1.**

Будем называть клетки вертикального ряда столбцами, клетки горизонтального ряда — строками. Заметим, что после вычеркивания какого-нибудь столбца (строки) оставшиеся клетки можно считать расположенными в прямоугольнике, у которого число столбцов (соответственно, строк) на единицу меньше. Из рисунка 1 видно, что исход игры не зависит от того, какой именно столбец (или строка) вычеркивается, поэтому можно считать, что это — один из крайних столбцов (или же строк).

Покажем, что если числа $m$ и $n$ строк и столбцов в исходном прямоугольнике *разной* четности, то при правильной игре выигрывает начинающий.

Стратегия начинающего такова: он вычеркивает строку или столбец так, чтобы остался прямоугольник с четным числом строк и четным числом столбцов (поскольку в исходном прямоугольнике числа строк и столбцов имели разную четность, он всегда сможет это сделать). После любого хода второго игрока останется меньший прямоугольник, у которого опять числа столбцов и строк имеют разную четность. Начинающий опять вычеркивает строку или столбец так, чтобы остался прямоугольник с четным числом строк и столбцов, и т. д. В конце концов после хода второго игрока останется прямоугольник либо с одной строкой, либо с одним столбцом, вычеркивая который, начинающий выигрывает.

Заметим, что если в первоначальном прямоугольнике всего один столбец (или строка), то начинающий, вычеркивая этот столбец (строку), выигрывает.

Из приведенного рассуждения следует, что если $m$ и $n$ имеют одинаковую четность и ни одно из них не равно единице, то выигрывает второй игрок, поскольку начинающий любым своим ходом оставляет ему прямоугольник, у которого количество строк и столбцов имеют разную четность.

*А. Савин*

◆

**М362.** *Поделим каждую сторону выпуклого четырехугольника $ABCD$ на три равные части и соединим отрезками соответствующие точки на противоположных сторонах. Докажите, что площадь «среднего» четырехугольника в 9 раз меньше площади четырехугольника $ABCD$.*

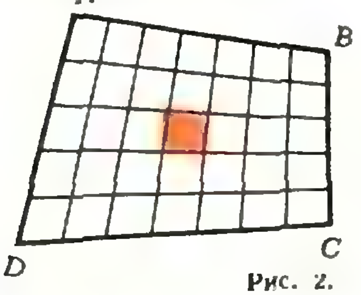


**Рис. 2.**

Мы решим более общую задачу — докажем, что если стороны $AB$ и $DC$ разбиты на $m$, $BC$ и $AD$ — на $n$ равных частей ($m$ и $n$ нечетны; рис. 2), то площадь центрального четырехугольника в $m \cdot n$ раз меньше четырехугольника $ABCD$.

1. Докажем сначала, что *каждый из отрезков, соединяющих противоположные стороны четырехугольника $ABCD$, разбит другим на равные части.*

Для этого проверим справедливость такого более общего утверждения: *если точки $K \in [AB]$, $L \in [DC]$, $M \in \in [AD]$, $N \in [BC]$ таковы, что*

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|DL|}{|LC|} = \alpha, \quad \frac{|AM|}{|MD|} = \frac{|BN|}{|NC|} = \beta,$$

*то точка пересечения $P$ отрезков $KL$ и $MN$ делит их в тех же отношениях*

$$\frac{|MP|}{|PN|} = \alpha, \quad \frac{|KP|}{|PL|} = \beta. \qquad (*)$$

В этом нетрудно убедиться с помощью векторов, но мы воспользуемся механическими соображениями. Поместим в точках $A$, $B$, $C$ и $D$ грузы с массами $1, \alpha, \alpha\beta$ и $\beta$ соответственно (рис. 3) и найдем двумя способами центр тяжести этих четырех грузов. Центр тяжести грузов $A$ (1) и $B$ ($\alpha$) лежит в точке $K$, грузов $D$ ($\beta$) и $L$ ($\alpha\beta$) — в точке $L$; значит, центр тяжести всех четырех грузов лежит в точке $P'$, делящей отрезок $KL$ в отношении $\frac{|KP'|}{|P'L|}=\frac{\beta+\alpha\beta}{1+\alpha}=\beta.$

Аналогично, объединяя в пары грузы $A$ (1) и $D$ ($\beta$), $B$ ($\alpha$) и $C$ ($\alpha\beta$), докажем что центр тяжести этих грузов лежит в точке $P'' \in [MN]$, для которой $\frac{|MP''|}{|P''N|}=\alpha.$

Поскольку центр тяжести принадлежит и $KL$, и $MN$, он должен совпадать с точкой пересечения этих отрезков: $P' = P'' = P$. Тем самым равенства (*) доказаны.

II. Докажем теперь такое утверждение: *если стороны $AB$ и $CD$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ разделить на $k$ равных частей и соединить соответствующие точки* (рис. 4), *то площади полученных четырехугольников $S_1$, $S_2, \ldots, S_k$ составляют арифметическую прогрессию.* Действительно, разделим каждый четырехугольник диагональю на два треугольника — красный и голубой, как показано на рисунке 5. Площади голубых треугольников составляют арифметическую прогрессию (их основания, лежащие на $AB$, конгруэнтны, а высоты составляют арифметическую прогрессию) и площади красных треугольников — тоже. Складывая почленно две арифметические прогрессии, мы получаем всегда арифметическую прогрессию.

III. Вернемся к исходной задаче. Запишем в клетках таблицы $m\times n$ площади соответствующих четырехугольников, на которые разбит $ABCD$. После этого дело сводится к такому почти очевидному утверждению: *если в таблице из $m$ строк и $n$ столбцов ($m$ и $n$ нечетны) записаны числа, в каждом столбце и в каждой строке образующие арифметическую прогрессию, то число в центральной клетке в $mn$ раз меньше суммы всех чисел в таблице.*

Для доказательства достаточно заметить, что сумма чисел в каждой строке в $n$ раз больше среднего числа этой строки, а сумма чисел среднего столбца в $m$ раз больше числа в центральной клетке.

*Н. Васильев*

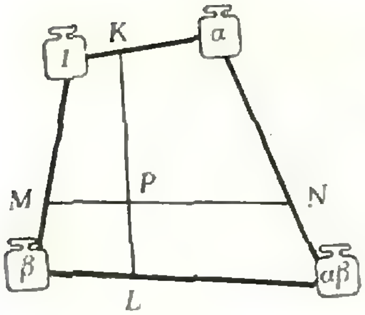


Рис. 3.

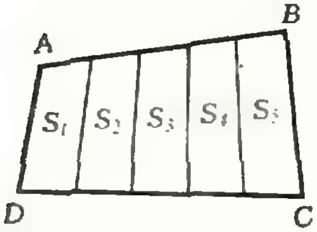


Рис. 4.

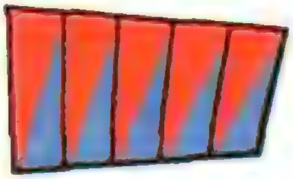


Рис. 5.

**М363.** *Две параболы с параллельными осями пересекаются в точках $A_0$ и $B_0$. На первой из них взяты точки $A_1, A_2, \ldots A_{2n}$; на второй — точки $B_1, B_2, \ldots B_{2n}$, так что $A_0A_1 \parallel B_0B_1$, $A_1A_2 \parallel B_1B_2, \ldots$ $\ldots, A_{2n-1}A_{2n} \parallel B_{2n-1}B_{2n}$. Докажите, что $A_{2n}B_0 \parallel B_{2n}A_0$.*

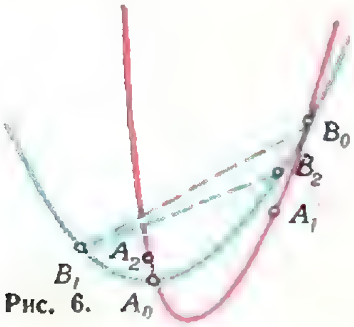


Рис. 6.

◆

Пусть $y = px^2 + qx + r$ и $y = p'x^2 + q'x + r'$ — уравнения данных парабол (Рис. 7). Если $a_i$, $b_i$ — абсциссы точек $A_i$, $B_i$, то угловой коэффициент хорды $A_iA_j$ первой параболы дается формулой

$$\frac{(pa_i^2+qa_i+r)-(pa_j^2+qa_j+r)}{a_i-a_j}=p(a_i+a_j)+q,$$

и, аналогично, угловой коэффициент хорды $B_iB_j$ второй параболы — формулой $p'(b_i+b_j)+q'$.

Из условия следует, что

$$p(a_0+a_1)+q=p'(b_0+b_1)+q', \tag{1}$$
$$p(a_1+a_2)+q=p'(b_1+b_2)+q', \tag{2}$$
$$p(a_{2n-1}+a_{2n})+q=p'(b_{2n+1}+b_{2n})+q' \tag{2n}$$

Поскольку $A_0B_0$ — общая хорда обеих парабол, то

$$p(a_0+b_0)+q=p'(a_0+b_0)+q'. \tag{*}$$

Умножая почленно равенства (1), (3),…,(2n — 1) на —1 и складывая их с равенствами (*), (2), (4),…, (2n), получаем

$$p(a_{2n}+b_0)+q=p'(b_{2n}+a_0)+q'.$$

Это и означает, что $A_{2n}B_0 \parallel B_{2n}A_0$.

*Нгуен Конг Кви*

**Ф369.** *Три одинаковых заряженных шарика скреплены непроводящими нитями, образующими прямоугольный треугольник BAC (рис. 7). Угол ABC равен α, BC = l. С каким ускорением начнут двигаться заряды, если перерезать нить BC? Заряды шариков равны q, массы — m.*

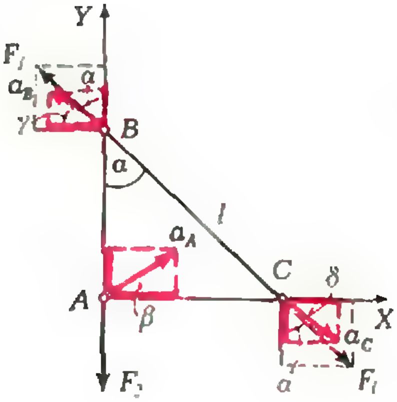


Рис. 7.

Рассмотрим движение шариков в системе координат $XOY$; ось $X$ направим вдоль катета $AC$, ось $Y$ — вдоль катета $AB$ (см. рис. 7).

Так как шарики $A$ и $C$ связаны нитью, вдоль оси $X$ они движутся как единое целое. Запишем уравнение движения системы шариков, спроектировав на ось $X$ внешние силы, действующие на систему. Это силы $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_1$ — силы взаимодействия шариков $A$ и $C$ с шариком $B$. Сила $\mathbf{F}_2$ направлена перпендикулярно оси $X$, и ее проекция на эту ось равна 0. Проекция силы $\mathbf{F}_1$ на ось $X$ равна $F_1 \sin\alpha$. Следовательно,

$$F_1 \sin\alpha = 2ma_x.$$

Отсюда проекции ускорений шариков $A$ и $C$ на ось $X$ равны

$$a_{A_x} = a_{C_x} = a_x = \frac{F_1}{2m}\sin\alpha = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 ml^2}\sin\alpha.$$

Аналогично для системы шариков $A$ и $B$, тоже связанных нитью, получим

$$a_{A_y} = a_{B_y} = \frac{F_1}{2m}\cos\alpha = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 ml^2}\cos\alpha.$$

Тогда абсолютная величина ускорения шарика $A$ равна

$$a_A = \sqrt{a_{A_x}^2 + a_{A_y}^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 ml^2}.$$

Вектор $\mathbf{a}_A$ составляет с осью $X$ угол β такой, что

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_{A_y}}{a_{A_x}} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Теперь рассмотрим шарик $B$. Запишем для него уравнение движения вдоль оси $X$. Сила натяжения нити $AB$ и сила, действующая со стороны шарика $A$, направлены вдоль оси $Y$, и их проекции на ось $X$ равны нулю. Следовательно,

$$a_{B_x} = \frac{F_1}{m}\sin\alpha = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 ml^2}\sin\alpha.$$

Тогда модуль ускорения шарика $B$

$$a_B = \sqrt{a_{B_x}^2 + a_{B_y}^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 ml^2}\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}$$

и

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{a_{B_y}}{a_{B_x}} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Проведя аналогичные рассуждения для шарика $C$, получим

$$a_{C_y} = \frac{F_1}{m}\cos\alpha = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 ml^2}\cos\alpha,$$

$$a_C = \sqrt{a_{C_x}^2 + a_{C_y}^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 ml^2}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{a_{C_y}}{a_{C_x}} = 2\operatorname{ctg}\alpha.$$

◆

**Ф370.** *Трубка, диаметр которой много меньше ее длины, свернута в кольцо радиуса R. Кольцо поставлено вертикаль-*

Пузырек и все частицы жидкости движутся с одинаковыми по абсолютной величине линейными скоростями. Обозначим через $v$ эту скорость в тот момент, когда пузырек проходит точку $B$. В начальный момент и жидкость, и пузырек поко-

*но и заполнено жидкостью, кроме небольшого участка около точки A (рис. 8), в котором находится пузырек воздуха. Пузырек начинает всплывать. Найти его скорость в тот момент, когда он будет проходить точку B. Длина пузырька l. Трением воды о стенки сосуда пренебречь.*

ились. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{mv^2}{2} = \Delta П.$$

Здесь $m$ — масса жидкости в трубке, $mv^2/2$ — изменение кинетической энергии жидкости, а $\Delta П$ — изменение ее потенциальной энергии.

Для того чтобы найти $\Delta П$, рассмотрим порцию жидкости в объеме воздушного пузырька. Обозначим ее массу через $m_1$. За то время, пока пузырек переходит из точки $A$ в точку $B$ (см. рис. 8), эта порция жидкости перемещается из $B$ в $A$, т. е. опускается на высоту $2R$. Положение остальной массы жидкости не меняется. Следовательно,

$$\Delta П = m_1 g \cdot 2R.$$

Тогда

$$\frac{mv^2}{2} = 2\,m_1\,gR.$$

Отсюда, с учетом очевидного соотношения

$$\frac{m}{m_1} = \frac{2\pi R - l}{l},$$

окончательно получим

$$v = 2\sqrt{\frac{gRl}{2\pi R - l}}.$$

Поскольку $l \ll 2\pi R$,

$$v \approx \sqrt{\frac{2gl}{\pi}}.$$

*И. Слободецкий*

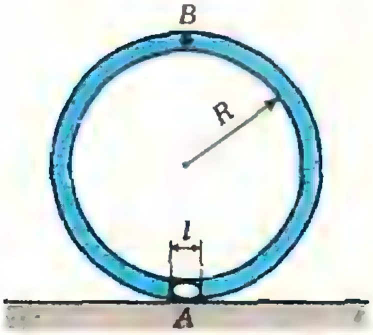


**Рис. 8.**

◆

**Ф371.** *Пушка массы $M$ = 200 кг стреляет ядром массы $m$ = 20 кг под углом $\alpha$ = 30° к горизонту. Заряд пороха $r$ = 0,5 кг *), его теплота сгорания $q$ = 1000 ккал/кг. В момент вылета ядра из пушки на него садится барон Мюнхаузен. Его масса $\mu$ = 70 кг. На сколько ближе упадет ядро с Мюнхаузеном при том же заряде пороха? На сколько нужно увеличить заряд пороха для того, чтобы Мюнхаузен попал туда же, куда попадали ядра до этого? К. п. д. выстрела принять равным $\eta$ = 10%. Считать, что пушка находится на гладкой поверхности, по которой может скользить без трения.*

Прежде всего выясним, что происходит с ядром, пушкой и гладкой горизонтальной поверхностью, на которой находится пушка, в процессе выстрела. Строго говоря, выстрел длится некоторое конечное время, хотя и очень малое.

Если система пушка — поверхность достаточно «мягкая», т. е. возможна деформация системы, и время выстрела много меньше характерного времени этой деформации, то явление развивается в два этапа. Сначала происходит взаимодействие ядра с пушкой, подвижной во всех направлениях, а потом — взаимодействие пушки с поверхностью (которое нас не интересует в дальнейшем). Очевидно, что в этом случае угол вылета ядра относительно Земли равен углу наклона ствола пушки $\alpha$.

Если же система пушка — поверхность абсолютно «жесткая», то пушка после выстрела вертикальной составляющей скорости не приобретет (аналогично случаю, когда пушка, неподвижно скрепленная с поверхностью, выстреливает вертикально вверх) и будет двигаться только по горизонтали. В этом случае угол вылета ядра $\beta$ уже не будет равен углу установки ствола $\alpha$.

Рассмотрим первый случай. Обозначим через **V** скорость пушки после выстрела, и через **v** — скорость ядра относительно Земли. Введем горизонтальную ($OX$) и вертикальную ($OY$) оси координат. Запишем закон сохранения импульса системы ядро—пушка для проекций на горизонтальную и вертикальную оси:

$$mv_x = MV_x, \quad mv_y = MV_y.$$

Отсюда

$$V_x = \frac{m}{M}v_x \quad \text{и} \quad V_y = \frac{m}{M}v_y. \tag{1}$$

---

*) В условии задачи (см. «Квант», 1975, № 12) была допущена опечатка.

Закон сохранения энергии, с учетом коэффициента полезного действия $\eta$ (полезной будем считать полную механическую энергию системы, т. е. кинетическую энергию ядра и пушки), дает

$$\frac{m\left(v_x^2+v_y^2\right)}{2}+\frac{M\left(V_x^2+V_y^2\right)}{2}=\eta q r,$$

или, используя соотношения (1),

$$v^2=\frac{2\,\eta q r}{m\,(1+m/M)}. \qquad (2)$$

Найдем дальность полета ядра:

$$L=\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{2\,\eta q r\sin 2\alpha}{mg\ (1+m/M)}. \qquad (3)$$

Пусть теперь немедленно после выстрела на ядро садится барон Мюнхаузен, причем делает это столь элегантно (ему не привыкать!), что не изменяет направления скорости ядра: начальная скорость барона равна нулю. Используя еще раз закон сохранения импульса, найдем модуль скорости $\mathbf{v}_1$ системы барон—ядро:

$$mv=(m+\mu)\,v_1,\ \text{и}\ v_1=\frac{m}{m+\mu}v=\frac{v}{1+\mu/m}. \qquad (4)$$

Дальность полета $L_1$ этой системы будет равна

$$L_1=\frac{v_1^2\ \sin 2\alpha}{g}=\frac{1}{(1+\mu/m)^2}\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}=L\,\frac{1}{(1+\mu/m)^2}.$$

Следовательно, ядро с Мюнхаузеном упадет ближе на

$$\Delta L=L-L_1=L\left[1-\frac{1}{(1+\mu/m)^2}\right]\approx 1600\ \text{м}\ .$$

Для того чтобы попасть в прежнюю точку, барон должен заблаговременно подсыпать в пушку больше пороха. Теперь скорость ядра с бароном должна стать равной $v$, а новая скорость $v'$ одного ядра, согласно выражению (4), должна соответственно увеличиться:

$$v'=v\,(1+\mu/m),\ \text{и}\ v'^2=v^2(1+\mu/m)^2. \qquad (5)$$

Поскольку заряд пороха пропорционален квадрату скорости ядра (выражение (2)), новый заряд пороха будет равен

$$r'=r\,(1+\mu/m)^2\approx 10\ \text{кг}.$$

Таким образом, заряд пороха надо увеличить на $r'-r\approx$ $\approx 9{,}5$ кг.

Предлагаем вам расчет для случая «жесткой» системы пушка — поверхность провести самостоятельно.

*А. Стасенко*

◆

**Ф372.** *Две тонкие положительные линзы с фокусными расстояниями $F_1$ и $F_2$ расположены на одной оси. С помощью этой системы линз получают изображение предмета, причем оказывается, что размер изображения не зависит от расстояния от предмета до системы линз. Найти расстояние $l$ между линзами.*

Приведем два решения этой задачи — графическое и аналитическое.

Построим изображение предмета $MN$ в произвольной системе из двух тонких положительных линз (рис. 9). Для этого рассмотрим ход двух лучей, вышедших из точки $N$. Пусть один луч ($AB$) идет параллельно оптической оси системы, а второй проходит через оптический центр первой линзы. Масштаб изображения будет определяться точкой пересечения этих лучей после прохождения системы линз.

При изменении расстояния от предмета до системы (предмет $M_1N_1$ на рисунке 9) ход луча $AB$ не изменяется. Оче-

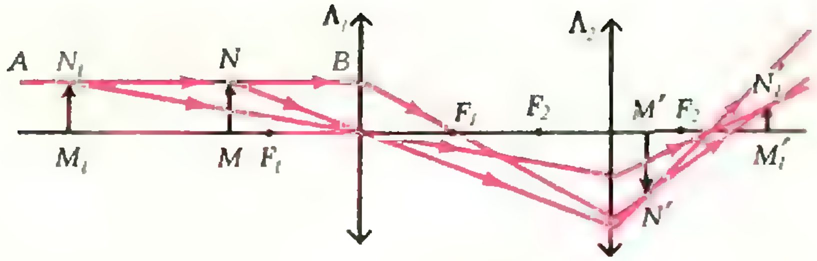


Рис. 9.

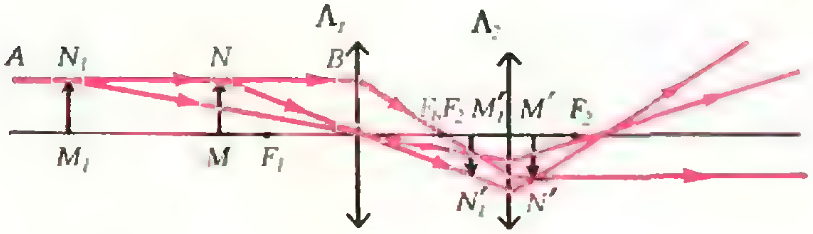


Рис. 10.

видно, что если луч $AB$ после прохождения системы линз пройдет параллельно оптической оси, то размер изображения не будет зависеть от расстояния от предмета до системы (рис. 10). Но это возможно только в том случае, когда луч $AB$, пройдя через Л$_1$, пересечет фокус линзы Л$_2$, т. е. когда правый фокус первой линзы совпадает с левым фокусом второй линзы. Таким образом,

$$l = F_1 + F_2.$$

Такую систему линз называют телескопической.

К этому результату можно прийти и аналитически. Поперечное увеличение $\Gamma$, даваемое тонкой линзой, равно

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{F}{d-F} = \frac{f-F}{F}.$$

Здесь $d$ — расстояние от предмета до линзы, $f$ — расстояние от линзы до изображения и $F$ — фокусное расстояние линзы.

Для системы двух линз можно записать

$$\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2 = \frac{f_1-F_1}{F_1}\,\frac{F_2}{d_2-F_2}.$$

Но $d_2 = l - f_2$, поэтому

$$\Gamma = \frac{F_2}{F_1}\,\frac{f_1-F_1}{l-f_1-F_2}.$$

Отсюда видно, что $\Gamma$ не зависит от $f_1$ (а значит, и от $d_1$), если

$$\frac{f_1-F_1}{l-f_1-F_2} = \text{const}.$$

Это возможно только в том случае, когда $l = F_1 + F_2$.

*Е. Кузнецов*

**В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М356—М365, Ф363—Ф372. Жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач.**

## Математика

Большинство читателей, приславших нам свои решения, успешно справились с задачами **М357, М361** и **М364**.

Остальные задачи решили: *Б. Агикишиев* (ст. Зарат АзССР) **2**; *Б. Аронов* (Саратов) **2**; *О. Бабаев* (Нахичевань) **6, 2**; *А. Баиманов* (Джетысай) **2**; *А. Беруджанян* (Ереван) **6**; *П. Билер* (ПНР) **0, 2, 5**; *Б. Блок* (Москва) **2**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **0, 2**; *В. Бондаревский* (Минск) **6**; *П. Брухис* (Москва) **8**; *В. Бугаенко* (Киев) **2**; *В. Варин* (Воронеж) **6, 9, 2, 5**; *А. Варламов* (Ленинград) **9, 2**; *А. Ворович* (Москва) **8**; *И. Воронович* (г. п. Сопоцкино Гродненской обл.) **5**; *И. Гарибашвили* (Тбилиси) **9**; *А. Гирнаев* (Таллин) **8, 2**; *И. Гершенгорин* (Харьков) **2**; *В. Гишларкаев* (с. Урус-Мартан ЧИАССР) **8**; *О. Годин* (Симферополь) **2**; *Ю. Голембиовский* (Ворошиловград) **2**; *Д. Гольденберг* (Ленинград) **2**; *Е. Горбатый* (Одесса) **8, 9**; *М. Грищенко* (ГСВГ) **2**; *В. Гроссман* (Одесса) **6, 9**; *С. Губинов* (Ворошиловград) **6, 0**; *В. Гусейнов* (Нахичевань) **8, 9, 2, 5**; *А. Даниелян* (Ленинакан) **6**; *А. Диденко* (Краснодар) **2, 3**; *В. Дмитриенко* (Киев) **2**; *И. Ермаков* (Киев) **2**; *А. Ефашкин* (Оренбург) **6, 9, 0, 2, 5**; *Р. Измайлов* (Баку) **2**; *И. Килика* (Киев) **8, 9, 2**; *А. Камалян* (Иджеван) **8**; *Б. Каплан* (Киев) **9, 2**; *А. Кирилов* (Ленинград) **2; 5**; *А. Князюк* (Киев) **8, 9**; *С. Козякин* (Киев) **2**; *В. Костусяк* (Запорожье) **9**; *К. Купалов* (Москва) **8**; *В. Купцов* (Аша) **2**; *Ш. Кухалейшвили* (Тбилиси) **0**; *Е. Лаврова* (Ленинград) **2**; *В. Локоть* (Череповец) **5**; *А. Малышев* (пос. Курагино Красноярского края) **6, 9, 2**; *Г. Мамедов* (Баку) **2**; *В. Медведь* (Молодечно Минской обл.) **8, 0, 5**; *С. Мелихов* (Донецк) **6—9, 2, 5**; *З. Мерсбишвили* (Тбилиси) **0**; *Б. Мидодашвили* (Тбилиси) **2**; *И. Мирецкий* (Пенза) **2**; *М. Морийнэ* (ПНР) **8**; *А. Набутовский* (Новосибирск) **5**; *В. Нейман* (Ленинград) **0**; *А. Ненашев* (Ленинград) **9**; *А. Оганесян* (Ереван) **2**; *Е. Огиевецкий* (Днепропетровск) **6, 2, 3**; *О. Окунев* (Казань) **9**; *А. Окунь* (Одесса) **2**; *М. Пекарь* (Одесса) **6, 0**; *А. Петухов* (Новокузнецк) **6, 2**; *М. Питателев* (Москва) **6**; *П. Побылица* (Ленинград) **9**; *С. Попов* (Верхне-Вилюйск ЯАССР) **2**; *С. Пословский* (Харьков) **6, 8**; *В. Поспелов* (Очер) **6**; *Ю. Пошехонов* (Энгельс) **8**; *А. Радул* (Кишинев) **6, 9; 0, 2, 3, 5**; *Т. Райков* (Болгария) **6**; *В. Решетов* (Троицк) **2**; *В. Рогава* (Тбилиси) **0, 5**; *А. Родников* (Москва) **9, 2**; *А. Романов* (Ташкент) **0, 2**; *В. Савчук* (с. Рудки Тернопольской обл.) **5**; *А. Сарчимелия* (Тбилиси) **6, 0**; *В. Свиридов* (Воронеж) **2**; *М. Селектор* (Ленинград) **2, 5**; *В. Смирнов* (Уфа) **3**; *Ю. Тикунов* (Новосибирск) **2**; *С. Трегуб* (Ташкент) **0, 2**; *Н. Тренев* (Москва) **2**; *В. Трофимов* (Москва) **9, 2**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **2, 3, 5**; *В. Угриновский* (Хмельник) **2**; *В. Фалько* (Харьков) **2**; *Ю. Чистяков* (Москва) **0**; *Ю. Штейншрайберг* (Баку) **2**; *В. Штепин* (Челябинск) **0, 2**; *С. Штернин* (Ленинград) **2**.

## Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф394, Ф395** и **Ф367**. Остальные задачи правильно решили: *Х. Абдуллин* (Алма-Ата) **8, 0**; *Г. Айзин* (Брест) **3, 6, 8—2**; *А. Алексеев* (Днепропетровск) **2**; *А. Алмазов* (Пушкин) **3, 6, 8—0**; *С. Антонюк* (Киев) **2**; *И. Астров* (Таллин) **3**; *М. Бабаев* (Баку) **0—2**; *Ф. Богдасарян* (Баку) **6, 0, 2**; *В. Бакиров* (Куйбышев) **6, 9—2**; *О. Баркалов* (п. Черноголовка Московской обл.) **8**; *А. Беликов* (Москва) **6**; *В. Берелович* (Днепропетровск) **8, 2**; *И. Бернар* (с. Великий Бычков Закарпатской обл.) **3, 9, 1**; *В. Богданов* (Москва) **1**; *В. Бондаренко* (Тростянец Сумской обл.) **1**; *И. Бондарцев* (Люберцы) **3**; *В. Буртовой* (Килия) **9, 2**; *Б. Васиев* (Самарканд) **3, 0, 2**; *В. Вересов* (Павлоград) **0**; *Б. Виноградова* (Великие Луки) **3, 8, 0—2**; *В. Волынский* (Запорожье) **6, 8, 1, 2**; *А. Воронков* (Молодогвардейское) **3**; *А. Ганопольский* (Минск) **8, 0, 1**; *И. Гарибашвили* (Тбилиси) **6**; *В. Гарковый* (Лида) **8**; *В. Гармон* (Запорожье) **3, 6, 9**; *М. Гедалин* (Тбилиси) **3, 8—2**; *И. Гизатуллин* (д. Старый Ашит ТАССР) **3**; *Н. Глазков* (Москва) **3**; *О. Глушко* (Москва) **9, 0**; *О. Годин* (Симферополь) **3, 6, 8, 0, 2**; *Ю. Гоник* (Брянск) **8, 9, 0, 2**; *Е. Гордиенко* (Кишинев) **6, 9**; *Г. Горлачев* (Белорецк) **3**; *А. Грайфер* (Запорожье) **6**; *Б. Грибов* (Воронеж) **8, 0—2**; *С. Гриншпун* (Одесса) **3**; *Н. Давидян* (Степанакерт) **3**; *М. Дворцов* (Фрунзе) **3**; *К. Дежурко* (д. Полтораковичи Брестской обл.) **2**; *В. Демидович* (Гадяч) **8**; *В. Демкин* (Смела) **8, 2**; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) **3**; *И. Дьячук* (Жданов) **1**; *В. Ерофеев* (Новосибирск) **8, 0**; *В. Житарь* (Кишинев) **3, 8**; *С. Загидуллин* (Феодосия) **6**; *Е. Загуляев* (Уфа) **3**; *Г. Залескис* (Вильнюс) **3, 2**; *В. Запасников* (Волгоград) **8, 9, 0**; *А. Захаров* (Брест) **3**; *Т. Заяц* (с. Т.-Пасека Закарпатской обл.) **1**; *А. Зовенто* (Днепродзержинск) **3**; *Т. Ибраев* (Шахтинск) **6**; *А. Иванов* (Гатчина) **6**; *А. Ищенко* (с. Каменка Харьковской обл.) **6**; *В. Кабанов* (Шахунья) **0, 1**; *Е. Казирова* (Ереван) **1**; *А. Калинин* (Великие Луки) **6, 8, 9**; *А. Калустов* (Баку) **6, 8, 2**; *В. Канотоп* (Харьков) **8, 9**; *А. Караджев* (Москва) **8**; *В. Котин* (Даугавпилс) **8**; *К. Копейкин* (Ленинград) **3, 6, 9, 0**; *Д. Копелиович* (Челябинск) **6**; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) **0—2**;

*(Окончание см. на с. 80)*

**Этот раздел — новый в нашем журнале. В нем мы будем помещать небольшие заметки, тесно связанные со школьной программой. В каждой заметке, наряду с изложением теоретического материала и разбором некоторых задач из школьного учебника, будут предлагаться и задачи для самостоятельного решения. Мы надеемся, что эти задачи пригодятся учителю на уроках математики и помогут ученику глубже понять и лучше усвоить школьную программу. В скобках рядом с условием задачи мы указываем класс, для которого в первую очередь эта задача предназначается.**

*Б. Гейдман*

# Осевая симметрия

## А. Равнобедренный треугольник

Равнобедренный треугольник — симметричная фигура: биссектриса угла при вершине — его ось симметрии. В курсе геометрии шестого класса с помощью осевой симметрии доказываются свойства равнобедренного треугольника об углах при его основании и о высоте, проведенной из вершины.

Вот еще одно простое свойство равнобедренного треугольника; оно нам поможет в дальнейшем решить несколько трудных задач.

*Если на боковых сторонах $AB$ и $BC$ равнобедренного треугольника $ABC$ отложены конгруэнтные отрезки $AM$ и $CN$, то точка пересечения прямых $CM$ и $AN$ лежит на биссектрисе $BD$ треугольника.*

Доказательство. Действительно, при симметрии относительно биссектрисы $BD$ данного равнобедренного треугольника $ABC$ вершина $A$ переходит в вершину $C$, сторона $AB$ переходит в сторону $CB$ (см. рис. 1). Осевая симметрия — перемещение, длины отрезков при симметрии сохраняются. По условию $N \in [BC]$ и $|CN| = |AM|$, следовательно, точка $M \in [AB]$ переходит в точку $N$.

Итак, точки $A$ и $C$, а также точки $M$ и $N$ симметричны относительно оси $BD$; значит, симметричны друг другу и отрезки $AN$ и $CM$.

Пусть $K = [AN] \cap [BD]$. Поскольку $K$ лежит на оси симметрии, симметричная ей точка — она сама. С другой стороны, $K \in [AN]$; следовательно, образ точки $K$ должен принадлежать образу отрезка $AN$, т. е. отрезку $CM$. Тем самым $K = [AN] \cap [CM] \in [BD]$, что и требовалось доказать.

Пользуясь симметрией равнобедренного треугольника, решите следующие задачи*).

1°. Докажите, что в равнобедренном треугольнике: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты пересекаются в одной точке. (6 класс).

2°. Треугольник $A'BC'$ получается из равнобедренного треугольника $ABC$ ($|AB| = |BC|$) поворотом с центром в вершине $B$ на угол, величина которого меньше величины угла $B$ (рис. 2). Стороны треугольников $AC$

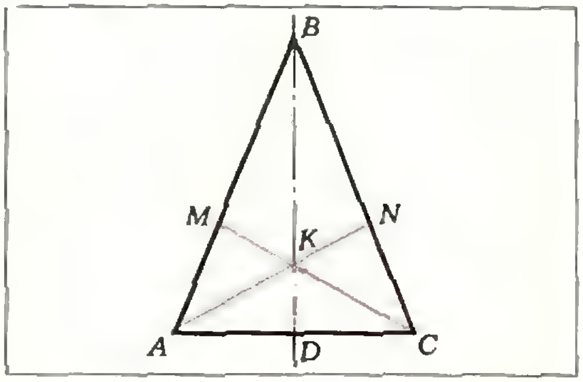


**Рис. 1.**

---

*) Задачи 2° и 3° в завуалированном виде фигурировали в вариантах вступительных экзаменов на мех.-мат. факультете МГУ в 1975 году.

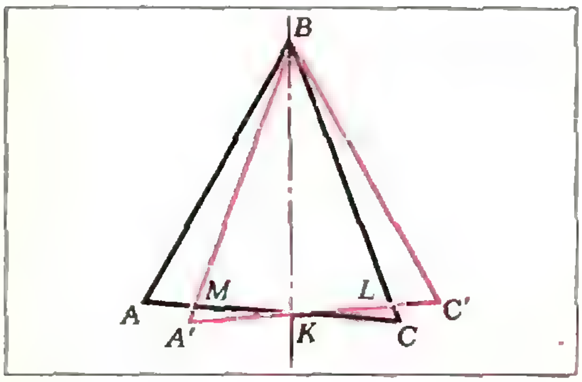


Рис. 2.

и $A'C'$ пересекаются в точке $K$, $AC$ и $A'B$ — в точке $M$, $A'C'$ и $BC$ — в точке $L$. Докажите, что: а) $BK$ — биссектриса угла $A'BC$; б) биссектрисы треугольников $A'BL$ и $MBC$ пересекаются в одной и той же точке. (6 класс)

3°. Ромб $AB'C'D'$ получается из ромба $ABCD$ поворотом с центром в в вершине $A$ $\left(\hat{A} < \frac{\pi}{2}\right)$ на угол, величина которого меньше величины угла $A$ (рис. 3). Точка $B'$ лежит внутри ромба $ABCD$. Стороны ромбов $CD$ и $B'C'$ пересекаются в точке $K$. Докажите, что $AK$ — биссектриса угла $B'AD$ (8 класс)

## Б. Кратчайший путь

Решим задачу из п. 18 книги «Геометрия 6».

*Дана прямая $l$ и две точки $A$ и $B$, лежащие по одну сторону от нее. Найти кратчайший путь из $A$ в $B$ с заходом на прямую $l$.*

Обозначим через $A'$ точку, симметричную точке $A$ относительно прямой $l$ (см. рис. 4). Пусть $X$ — некоторая точка на прямой $l$. Тогда $|AX| = |A'X|$ и $|AX| + |BX| = |A'X| + |XB|$.

Путь из $A$ в $B$ с заходом на прямую $l$ равен длине ломаной $A'XB$; он будет кратчайшим, если длина этой ломаной будет наименьшей. Тогда ломаная $A'XB$ должна превратиться в отрезок $A'B$, а точка $X$ — перейти в точку $C = [A'B] \cap (l)$.

Путь $ACB$ и будет искомым.

Из решения этой задачи следует, что для наикратчайшего пути $ACB$ углы 1 и 2 равны между собой (см. рис. 4). Итак, наикратчайший путь можно охарактеризовать тем, что для него «угол падения» равен «углу отражения».

Этот факт следует, в частности, из знаменитого принципа Ферма: свет (при отражении, преломлении и т. д.) распространяется между двумя точками по пути, прохождение которого занимает наименьшее время *).

Осевая симметрия часто используется для отыскания кратчайшего пути или для реализации ситуации «угол падения равен углу отражения».

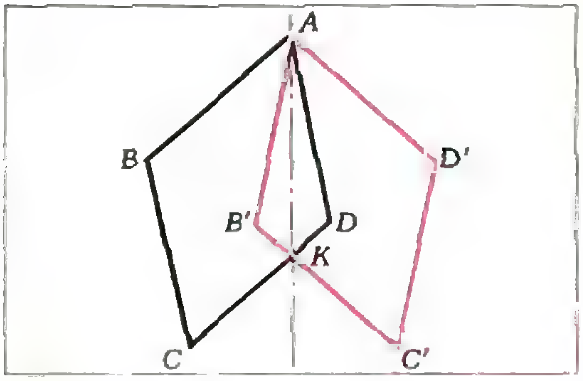


Рис. 3.

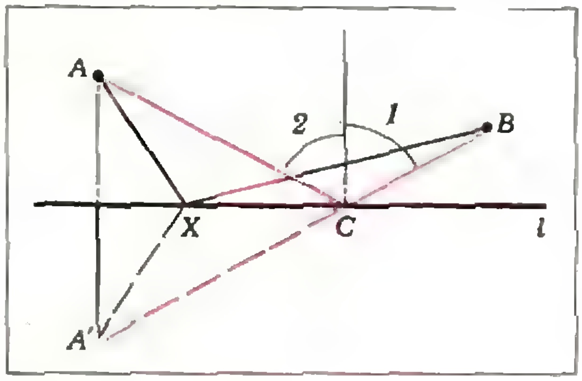


Рис. 4.

---

*) Точнее, не наименьшее, а экстремальное. Подробно об этом см. в статьях С. Верова, «Квант», 1975, № 12, с. 29, А. Землякова, «Квант», 1976, № 5, с. 17 и Л. Турянского, «Квант», 1976, № 8, с. 17.

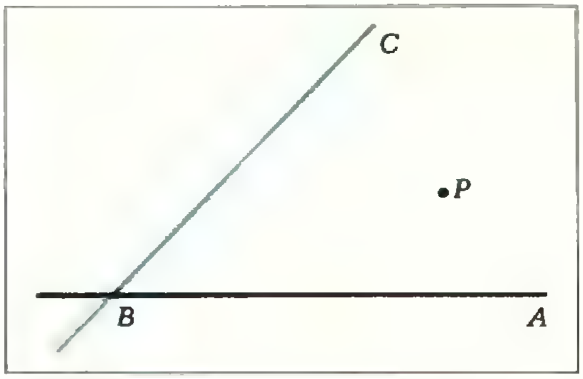


Рис. 5.

Приведем несколько таких задач *).

4°. Даны прямая $l$ и две точки $P$ и $Q$ по одну сторону от $l$. Найдите на прямой $l$ такую точку $R$, чтобы периметр треугольника $PQR$ был наименьшим. (6 класс)

5°. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и высотой равнобедренный имеет наименьший периметр. (6 класс)

6°. Дорога $AB$ пересекает под острым углом реку $BC$ (см. рис. 5). Гонец находится в точке $P$ внутри угла $ABC$. Конь хочет пить, а гонец спешит выехать на дорогу $AB$. В каком месте реки должен гонец напоить коня, чтобы как можно скорее попасть на дорогу? (6 класс)

7°. Дан острый угол $ABC$ и точка $P$ внутри него. Постройте треугольник наименьшего периметра, одна вершина которого совпадает с точкой $P$, а две другие лежат на сторонах данного угла. (6 класс)

Как изменятся решения задач 6° и 7°, если в их условиях данные острые углы заменить прямыми или тупыми?

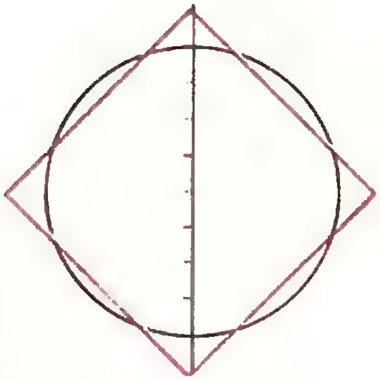
8°. На прямоугольном биллиарде $ABCD$ даны два шара $M$ и $N$. Как надо толкнуть шар $M$, чтобы он, отразившись от бортов $AB$ и $BC$, попал в шар $N$? (6 класс)

---

*) В упомянутой выше статье А. Землякова «Математика биллиарда», «Квант», 1976, № 5, обсуждался общий вопрос об экстремальных свойствах траекторий биллиарда; в частности, там предлагались задачи, аналогичные тем, которые мы помещаем.

# Приближенная квадратура круга

Неразрешимость задачи о разыскании квадрата, равновеликого данному кругу, с помощью циркуля и линейки была строго доказана в XIX веке. Но приближенно задачу легко решить. Предварительно найдем отношение диагонали квадрата к диаметру круга: $S_{\text{кр}} = \pi R^2$, сторона равновеликого квадрата $a = \sqrt{\pi R^2} = R\sqrt{\pi}$, диагональ квадрата (по теореме Пифагора) $l = R\sqrt{2\pi}$, откуда



$$\frac{l}{2R} = \frac{R\sqrt{2\pi}}{2R} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Выбирая для этого числа различные рациональные приближения, получаем приближенные решения задачи о квадратуре круга. Например, положим

$$\frac{l}{2R} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \approx \frac{\sqrt{2\cdot 3,1416}}{2} \approx$$

$$\approx \frac{5,013}{4} \approx \frac{5}{4},$$

т. е. $l = \frac{5R}{2}$ (см. рис. ), тогда относительная погрешность площади квадрата равна

$$\delta = \frac{\left|\pi R^2 - \frac{1}{2} l^2\right|}{\pi R^2} =$$

$$= \frac{\left|\pi - 2\left(\frac{l}{2R}\right)^2\right|}{\pi} \approx 0,0053.$$

*А. Падалко*
(г. Свободный)

*Е. Ирошников*

# Воспоминания... о предстоящих экзаменах

**Кончились летние каникулы, начинается новый учебный год. Начинается он и в нашем «Практикуме абитуриента». Для многих из вас этот учебный год — последний, весной предстоит держать ответ: чему вы научились в школе, способны ли учиться в институте. И потому за этот год вам предстоит не только закончить школьный курс математики и физики, но и повторить все пройденное ранее, чтобы к весне быть «во всеоружии». Публикуемая ниже статья не научит вас решать ту или иную конкретную задачу. Но она поможет вам выработать правильный подход к любой задаче, выйти из тупика, если вы в него попали, обратить внимание на наиболее существенное в условии задачи. Поэтому ею мы и открываем наш новый учебный год.**

Это началось давным-давно, еще в 7 классе. Когда мне попадались трудные задачи по планиметрии, а потом и по стереометрии, я иногда обращался за помощью к отцу, но вместо «настоящей помощи» он предлагал:

— Давай решать «на скорость»!

Он садился за свой стол, а я — за свой. Каждый «пыхтел» в одиночку!

— Готово! — весело сообщит отец, посмотрит на часы и... спрячет свой листок в стол, а я в это время еще «копаюсь» где-то в середине решения.

Когда и я заканчиваю, мы сверяем ответы и обсуждаем наилучший метод решения. Бывало, однако, хуже: Мишка Туманов уже на хоккейной коробке, а у меня ничего не выходит, и отец время от времени подбрасывает мне «наводящие вопросы». Как-то я завел разговор:

— Пап! Почему ты решаешь быстрее? Плохо работает моя интуиция?

— Возможно и это, но главное в том, что ты решаешь бессистемно!

— ?!

— Ты теряешь много времени, когда начинаешь обдумывать решение, не построив еще хорошего, четкого чертежа с отмеченными на нем данными из условия задачи. Ведь без этого для миллиардов твоих мозговых ячеек нет еще стимула, чтобы начать совместную, слаженную работу, которую обычно и называют «логическим мышлением». Твой мозг, со всеми его извилинами — это тот же компьютер, а ведь ЭВМ никогда не сможет работать без упорядоченной исходной информации.

— И это все? Только это мне и надо наладить?

— Да нет же, конечно! Есть очень много приемов, чтобы голова работала быстрее, целеустремленнее. Их все сразу, пожалуй, и не вспомнишь!

— Что же делать?

— А сделаем так! Вот тебе лист картона. Разграфи его на клетки, пронумеруй их, и каждый раз, когда мы будем сверять и анализировать свои решения, ты в этих клетках коротко записывай, — что помогло нам найти решение задачи! Через год-другой у тебя будет неплохой материал, а там появится и интуиция!...

Прошло три года! Висящий на стене картон почти уже полностью исписан, он пожелтел, покоробился, но все это время он мне здорово помогал. Отец часто смеялся:

— А по какой «заповеди» ты сегодня будешь решать свою задачу?

Теперь отец очень редко решает со мной геометрические (да и физические!) задачи. Если у меня возникают затруднения, а Мишка Туманов уже свистит под окном, то отец только посмотрит мою писанину и скажет:

— Ты снова забываешь шестую заповедь, и, пожалуй, сейчас надо будет вспомнить 37-ю!

И все! Через 10—15 минут задача готова, ответ сошелся и, захватив ракетки, я бегу на теннисные корты.

Вчера я разрезал свой выцветший картон на карточки и у меня получился, правда, немного длинноватый

## СПИСОК ЗАПОВЕДЕЙ АБИТУРИЕНТА

1. Сразу же начинай чертить по заданным условиям — размышлять будешь потом!

2. Хороший чертеж — хороший помощник, с ним идея решения «придет сама». Плохой же чертеж не только затруднит решение, но еще и заведет тебя в тупик при попытке «доказать» то, чего нет в действительности. Делай четкий чертеж в середине листа — линейка, треугольник, циркуль, транспортир помогут тебе и в «задачах на построение». Если условие позволяет — черти (хотя бы примерно) в масштабе! (См. также «Квант», 1976, № 6, с. 49).

3. Избегай чертить частные случаи (прямоугольный, равнобедренный или равносторонний треугольник, равные окружности и т. п.), если они не предусмотрены условием задачи — глядя на такой чертеж, ты скоро «поверишь», что так будет всегда, и твоя мысль будет направлена на ложный след!

4. В стереометрии делай большой чертеж на всю страницу с пунктирными невидимыми линиями! Так ты не погрязнешь в наслоениях линий и обозначений, и будет где «раскинуть мозгами» — формулы и очевидные зависимости ты сможешь писать на самом чертеже (рядом с отрезками!) без лишних буквенных обозначений!

5. Наноси на чертеж все данные! Что-то забудешь — решить задачу не сможешь!

6. «Задано» — рисуй синим! «Найти» — красным! Этим ты обеспечишь концентрацию мысли на главном!

7. Обозначай отрезки и углы малыми латинскими и греческими буквами! Большие — только для согласования с условием! Не будет рябить в глазах, не запутаешься, да и писанины будет меньше!

8. В условии задачи по физике введи упрощения — в разумных, конечно, пределах (см. также «Квант», 1975, № 5, с. 60).

9. Вспомни и выпиши рядом с рисунком все геометрические определения, аксиомы, теоремы (законы), свойства и следствия по данному вопросу — это тоже необходимая информация для твоих мозговых ячеек к моменту, когда они начнут логическое конструирование решения задачи!

10. Подготовка закончена — переключи свою «ЭВМ» на полную мощность!

11. Потрать 2—3 минуты на тщательный общий анализ особенностей условия задачи — это окупится сторицей! Если за эти минуты ты используешь всю силу своего геометрического воображения, то даже и при сложном условии задачи сможешь обнаружить рациональное (краткое и изящное!) решение. Приняв сразу бездумное шаблонное решение, ты увеличишь объем вычислительной работы и шансы появления ошибок.

12. Если задача сложная — найди «логику» решения задачи, напиши план решения. В запутанной и особо «неподдающейся» задаче план решения обязателен.

13. Не волнуйся! (Это — специально для абитуриентов.)

14. Дай полную волю своей интуиции! — кто-то сказал, что интуиция — это разрыв в логике, но разрыв плодотворный; что это возможность к неожиданному шагу в непредсказуемом направлении; что это — мерило таланта! Зачем же его подавлять? Интуиция поможет тебе наметить кратчайший путь к решению задачи.

**15.** Мысль способна незаметно «уйти в сторону» — следи за ней (или, точнее, за собой)!

**16.** Удачное вспомогательное построение подчас сразу же раскрывает «секреты» условия задачи. Если проведенная вспомогательная линия все же окажется ненужной, то сразу же сотри ее — все лишнее мешает мыслительному процессу. (См. также «Квант», 1975, № 10, с. 48).

**17.** Если не сможешь найти геометрическое выражение длины «искомого» отрезка, то попытайся сделать это для его отдельных частей и просуммируй их!

**18.** Подобные треугольники можно быстро построить переносом параллельных линий с помощью линейки и треугольника.

**19.** Искаженное в объемном рисунке сечение построй рядом в натуральном виде — прямой угол станет действительно прямым, подобие треугольников станет явным и т. п. (см. также «Квант», 1974, № 10, с. 32).

**20.** Элементы разных плоскостей и сечений выделяй цветными карандашами.

**21.** В стереометрии хорошо помогает модель, даже наспех сложенная из бумаги.

**22.** Геометрическая задача решается, как правило, несколькими способами. Если окажется, что ты выбрал очень громоздкий путь, — вернись к рисунку и попробуй поискать другой, во времени ты только выиграешь!

**23.** Ты не любишь «задачи на доказательство», когда требуется, к примеру, доказать, что $a = b$? Так ты просто ищи выражение длины отрезка $a$ через длину «заданного» отрезка $b$.

**24.** Если твой рисунок «безмолвствует», то поверни его и посмотри снова — при новом ракурсе могут появиться новые мысли, а затем и правильное решение!

**25.** В некоторых планиметрических задачах решение достигается «выходом в пространство» (см. «Квант», 1975, № 5, с. 45).

**26.** Ничего не получается? Не унывай! Проведи заново общий анализ сложившейся на рисунке геометрической ситуации — даже Суворов признавал необходимось вовремя отступить! И математические выкладки начни снова, на чистом листе бумаги — психологически очень трудно заметить неточность в старой записи!

**27.** Не забывай, что тригонометрия служит для облегчения решения геометрических (и физических) задач. Однако не увлекайся и не переходи границы ее разумного сочетания с планиметрией. В 10 классе ты уже подзабыл планиметрию, но подменять ее тригонометрией не всегда разумно — это может привести к очень громоздким решениям. При косоугольных треугольниках большую помощь тебе окажет теорема косинусов.

**28.** В «текстовых» алгебраических задачах и в физике составь рисунок-график и проведи анализ ситуации (см. также «Квант», 1971, № 11, с. 48).

**29.** Рациональный выбор неизвестных при решении задач — дело тонкое и деликатное! Мобилизуй весь свой опыт и интуицию!

**30.** При составлении системы уравнений необходимо, чтобы были использованы все соотношения, вытекающие из условия геометрической задачи.

**31.** Не бойся применять в геометрии системы уравнений с тремя и более неизвестными — алгебра хорошо поможет! Напиши уравнение с «синим» параметром и через 5—6 строчек уравнение с «красным» параметром (см. п. 6), а промежуток постарайся заполнить цепочкой дополнительных уравнений, не боясь вводить в них новые и новые «неизвестные» отрезки — при решении системы они будут исключены (метод «прямого счета», см. также «Квант», 1975, № 11, с. 45).

**32.** Разобщенные «красные» и «синие» отрезки иногда можно «сблизить» и чисто геометрическим преобразованием.

**33.** Иногда: составь «табун» уравнений и подсчитай их число и число неизвестных отрезков и углов, но... опасайся тождественных уравнений! Недостающие уравнения тебе даст тригонометрия.

**34.** Решение большой группы геометрических задач облегчается введением дополнительных элементов (длина, площадь, объем, угол), непосредственно не заданных в условии задачи (см. «Квант», 1974, № 2, с. 46).

**35.** Если в условии задачи говорится о нескольких ответах, то сперва пиши формулы в общем виде (в буквенных обозначениях) и исследуй их! Это предпочтительно, впрочем, в любом случае, ибо о нескольких ответах условие задачи может тебя и не предупредить, а ты все равно обязан найти их все.

**36.** Из-за возможных упрощений не торопись заменять буквенные обозначения числами из условия, однако иногда эти числа так «подобраны», что именно они определяют кратчайший путь к решению, а некоторые подобные задачи в общем виде вообще не имеют однозначного решения (см. также «Квант», 1973, № 3, с. 44, и № 11, с. 52).

**37.** Во многих институтах главный критерий — инициативность, гибкость мысли! И вот на приемных экзаменах нам ставят психологические «ловушки» — правильное решение оказывается вовсе не там, где это кажется с первого взгляда, а в недрах почти незаметных нюансов условия задачи! Проявляй «гибкость ума» и анализируй «необычные» варианты!

**38.** Максимум внимательности! Не делай «в уме» одновременно несколько сложных алгебраических преобразований — сделай их последовательно в «лишней» строчке! Ход твоего великолепного решения может быть «сведен на нет» из-за одного только забытого знака минус...

**39.** Если надо найти ошибку, то не ищи ее в старой записи сложных алгебраических выкладок — лучше сделай все заново и сравни результаты!

**40.** Не расставайся с логарифмической линейкой — она не только сэкономит время на приближенных расчетах, но и сориентирует тебя при извлечении точного корня из больших целых чисел, подсчитает синус и тангенс, логарифмы, поможет при проверке готового ответа.

**41.** Если у тебя все «застопорилось», то не надо мурлыкать под нос какой-то свой любимый мотивчик, не надо тихонько свистеть, не надо в задумчивости рисовать на полях замысловатую виньетку — тебе только кажется, что это помогает разрешить затруднения, а время идет. Будь активен и в преодолении трудностей!

**42.** На соседа не надейся! Самостоятельность — обязательный элемент учебы в институте!

**43.** Красивое и эффектное геометрическое решение безусловно лучше громоздких алгебраических выкладок, но, чтобы до него додуматься, нужно много времени, и поэтому считай, что самое лучшее — получить правильный ответ... любым способом.

**44.** Уважай экзаменатора: пиши чисто, аккуратно, все формулы — столбиком, бумагу не экономь! Умей и зачеркнуть аккуратно, тогда не придется тратить много времени на оформление чистовика! В конце после слова «ответ» четко напиши итог решения задачи. Все это — лучшая гарантия того, что экзаменатор разберется в твоих записях и не поставит тебе «3» или даже «2», «не найдя» решения задачи!

**45.** Когда задача решена и еще осталось время, то просмотри все с самого начала — не столько для поиска возможных ошибок, сколько ради поиска более изящного решения! Ведь математика — самый таинственный и романтичный предмет, который ты проходил в школе, и ты получишь истинное наслаждение, когда, найдя новое, более красивое решение, тем самым откроешь для себя какую-то новую загадку этой величайшей науки из всех Наук Человечества...

# Всероссийская олимпиада школьников

Нынешний 1976 год стал годом возрождения Всероссийской олимпиады школьников. Напомним, что Всероссийская олимпиада по математике и физике начала проводиться с 1964 года; в 1965 году к математикам и физикам присоединились химики. С 1967 года ей на смену пришла Всесоюзная олимпиада школьников по математике, физике и химии, в которой принимали участие команды от всех областей, краев и автономных республик Советского Союза.

Популярность Всесоюзной олимпиады школьников росла из года в год. Это привело к резкому увеличению числа участников заключительного тура Всесоюзной олимпиады, и городские организации, проводившие заключительный этап олимпиады, стали испытывать определенные организационные трудности. В связи с этим приказом министра просвещения СССР от 17/XII—1974 года были произведены некоторые реформы в порядке проведения Всесоюзной олимпиады.

Теперь заключительному этапу олимпиады предшествуют Республиканские олимпиады, и к участию в заключительном туре допускаются небольшие команды от всех союзных республик.

В прошлом году из-за недостатка времени отбор команды РСФСР проходил заочно — на областных олимпиадах. В этом году для проведения Всероссийской олимпиады был создан Оргкомитет, работой которого руководил академик В. С. Владимиров. В состав оргкомитета вошли видные ученые, работники Министерства просвещения РСФСР, и представители общественных организаций. В составе Оргкомитета были представители и нашего журнала. При Оргкомитете были созданы предметные жюри по математике (председатель — А. П. Савин), по физике (председатель — С. М. Козел) и по химии (председатель — А. Н. Кост).

Всероссийская олимпиада проводилась одновременно (по всем трем предметам) по четырем зонам в городах Владимире, Воронеже, Казани и Новосибирске в дни весенних школьных каникул (с 25 по 30 марта). Каждый из этих городов принимал победителей предыдущего этапа олимпиады (по каждому предмету) от областей, краев или автономных республик. Таким образом, во Всероссийской олимпиаде по математике и физике приняло участие около 480 школьников 8—10 классов. Кроме того для участия во Всероссийской олимпиаде были приглашены 12 победителей Конкурса «Кванта». Победители Всероссийской олимпиады (по 24 человека от каждой из четырех зон: 12 человек по математике и 12 — по физике) получили путевки в Душанбе и в Минск на заключительный тур Всесоюзной олимпиады по математике и физике.

Так как по «Положению о Всесоюзной олимпиаде школьников» города Москва и Ленинград формируют свои команды для непосредственного участия в заключительном туре олимпиады, то команды этих городов во Всероссийской олимпиаде участвовали вне конкурса (представители этих городов не были включены в состав команды РСФСР).

Большинство задач, предлагавшихся на олимпиаде РСФСР, вошли (или войдут) в «Задачник «Кванта» (задачи М393, М401—М404, М407, М413, М414, Ф382, Ф393, Ф396, Ф417, Ф419, Ф421—Ф426). Ниже мы публикуем список задач по математике, не вошедших в «Задачник «Кванта», и полный текст задания по физике, предлагавшегося в Сибирской зоне (г. Новосибирск).

## Математика

### 8 класс

**1.** Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Какую наименьшую площадь может иметь этот четырехугольник, если площадь треугольника $AOB$ равна 4 см$^2$, а площадь треугольника $COD$ равна 9 см$^2$?

**2.** Один часовщик построил часы, которые в полночь показывают точное время и далее верно идут в течение часа. Затем в течение часа минутная стрелка движется со скоростью часовой, а часовая со скоростью минутной. Еще через час стрелки снова меняются скоростями и т. д. Укажите все моменты времени, когда часы показывают верное время.

**3.** Доказать, что в любом выпуклом пятиугольнике можно выбрать три диагонали так, что из них можно будет составить треугольник.

### 9 класс

**1.** Дано 20 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Нужно

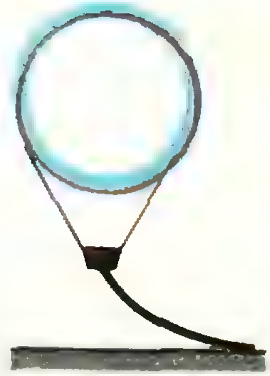


Рис. 1.

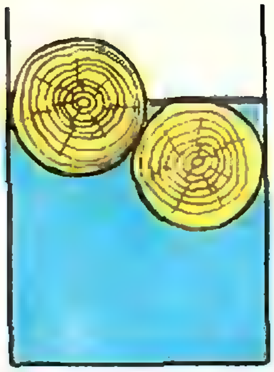


Рис. 2.

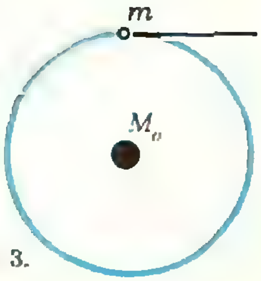


Рис. 3.

соединить некоторые точки отрезками так, чтобы при этом не образовалось ни одного треугольника с вершинами в данных точках. Какое наибольшее число таких отрезков можно провести?

2. Угол, изготовленный из прозрачного материала, передвигают по плоскости так, что он касается своими сторонами двух нарисованных на плоскости окружностей и содержит их внутри себя. Доказать, что на угле можно отметить точку так, что она будет при движении угла описывать дугу некоторой окружности.

3. Пусть $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 1}{5x_n}$ для $n > 0$.

Доказать, что для всех $n > 1$, $\frac{1}{5} \leqslant x_n < 2$.

### 10 класс

1. Существует ли трехгранный угол, который нельзя пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный треугольник?

2. Доказать, что существует целое число, квадрат которого в десятичной записи начинается с $n$ единиц, $n = 1, 2, 3 \ldots$

## Физика

### Теоретический тур

### 8 класс

1. Тело начинает двигаться равноускоренно, а затем равнозамедленно с тем же по величине ускорением $a$ и через время $\tau$ после начала движения возвращается в ту же точку. Найти пройденный телом путь.

2. Масса воздушного шара вместе с канатом, волочащимся по земле (рис. 1), равна $M$, выталкивающая сила $F$, коэффициент трения каната о землю $\mu$. Сила сопротивления воздуха, действующая на воздушный шар, пропорциональна скорости шара относительно воздуха: $\mathbf{F}_{\text{сопр}} = -\alpha \mathbf{v}$. Найти скорость шара относительно земли, если дует горизонтальный ветер скорости $u$.

3. После скатывания с горы сани начинают движение по горизонтальной поверхности дороги со скоростью 2 *м/сек*. Коэффициент трения между полозьями саней и дорогой равен 0,02. Какой путь пройдут сани за 15 *сек*?

4. С какой силой давят на стенки узкого бассейна два бревна (рис. 2)? Масса каждого бревна 100 *кг*. Одно бревно наполовину погружено в жидкость, верхняя часть второго бревна касается жидкости.

5. Спутник массы $m$ сходит с орбиты радиуса $R$, сохраняя свою скорость постоянной (рис. 3). Определите зависимость силы тяжести от времени. (При решении задачи используйте следующие обозначения: $M_0$ — масса Земли, $\gamma$ — гравитационная постоянная.)

### 9 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. Тонкостенный цилиндр радиуса $R$ раскрутили до угловой скорости $\omega$ и поставили в угол, как показано на рисунке 4. Коэффициент трения скольжения между стенками угла и цилиндром $\mu$. Определить,

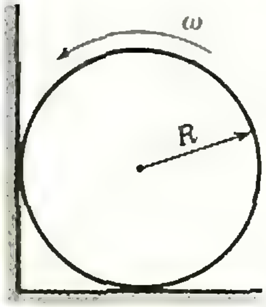


Рис. 4.

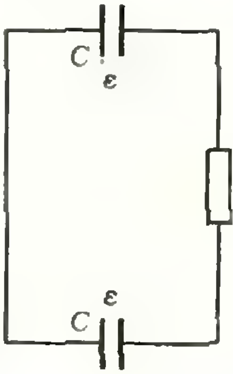


Рис. 5.

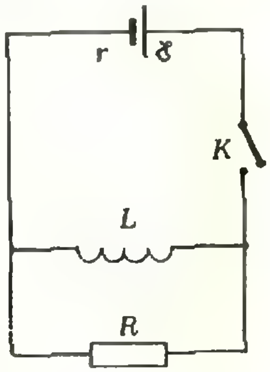


Рис. 6.

сколько оборотов сделает цилиндр до остановки.

3. Два конденсатора емкостью $C$, заполненные жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$, соединены друг с другом через сопротивление $R$ так, как показано на рисунке 5. Из одного конденсатора быстро вытек диэлектрик. Определить максимальный ток в сопротивлении $R$ и количество теплоты, которое на нем выделится, если вначале заряды на конденсаторах были равны $q$.

4. Во сколько раз изменится давление газа в первый момент, если $\alpha$-я часть молекул газа, ударяющихся о стенку, вдруг начнет поглощаться ею?

5. В сосуд, объем которого можно изменять, залили легко летучую жидкость и закрыли. Затем свободный от жидкости объем при постоянной температуре уменьшили в 2 раза. Давление внутри объема увеличилось в 1,5 раза. Определить давление насыщенных паров залитой жидкости.

**10 класс**

1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. С наклонной плоскости с углом наклона $\alpha$ к горизонту скатывается тонкостенный цилиндр. Каким должен быть минимальный коэффициент трения между цилиндром и плоскостью, чтобы цилиндр скатывался без проскальзывания?

3. Два шарика с зарядами $q$ прикрепили к концам пружины длиной $l_0$ и отпустили. Какое количество энергии перешло в тепло при затухании колебаний, если расстояние между шариками после прекращения колебаний оказалось равным $l$?

4. После установления тока в цепи ключ $K$ мгновенно размыкают (рис. 6). Определить максимальное напряжение на сопротивлении $R$ и энергию, выделившуюся на нем. Э. д. с. батареи $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление $r$, индуктивность катушки $L$.

5. См. задачу 3 для 9 класса.

6. См. задачу 5 для 9 класса.

**Экспериментальный тур**

**8 класс**

Определить массу линейки. Оборудование: линейка ученическая, пятикопеечная монета.

**9 класс**

Определить удельную теплоту плавления нафталина. Оборудование: химический стакан, термометр, электроплитка (или спиртовка), секундомер (или часы с секундной стрелкой), таблетки нафталина.

**10 класс**

Определить емкость конденсатора. Оборудование: источник переменного напряжения (ВС-24), конденсатор, резистор с известным сопротивлением, вольтметр переменного тока, проводники.

*А. Савин, М. Смолянский, В. Тихомирова*

## Задачи наших читателей

1. Дана трапеция, площадь которой равна $S$, отношение оснований равно $a:b$ $(b>a)$. Найти расстояние от вершины при меньшем основании до отрезка прямой, соединяющего середины оснований, если длина этого отрезка равна $d$.

*Г. Тургумбаев* (г. Алма-Ата)

2. Что больше:

$$A = 1{,}000001^{0{,}999999}\times 0{,}999999^{1{,}000001}$$

или 1?

*С. Берколайко*
(Белгородская обл.)

3. Докажите, что замкнутая ломаная из 64 звеньев, которая образуется при обходе конем шахматной доски с заходом в каждую клетку,

а) не может иметь ось симметрии 4-го порядка;

б) не может иметь ось симметрии, проходящую через середины противоположных сторон доски.

*О. Баранов (Москва)*

4. В прямоугольном треугольнике $ABC$ основание перпендикуляра, опущенного из точки пересечения медиан на катет $BC$, соединено с вершиной угла $A$. Найти угол $B$, если известно, что полученный отрезок — биссектриса угла $A$.

*В. Стреляев*

(Иркутская обл.)

5. В прямоугольный треугольник с острым углом 30° вписана окружность. Точки касания делят окружность на три дуги. Докажите, что отношение их длин можно представить в виде $p:(p+1):(p+2)$, где $p$ — некоторое натуральное число. Для каких еще треугольников это верно?

*Г. Макарова* (г. Киров)

# Математическая олимпиада на Украине

На Украине четвертый этап Всесоюзной олимпиады школьников по математике являлся одновременно XVI-й Республиканской олимпиадой. Здесь олимпиады имеют свою историю, свои традиции.

...На этот раз олимпиада проходила в городе Ивано-Франковске с 25 по 30 марта. В ее организации деятельное участие приняли Министерство просвещения и Министерство высшего и среднего специального образования УССР, а также Областной отдел народного образования, ивано-франковские Государственный педагогический институт имени В. С. Стефаника и Институт нефти и газа.

Ивано-Франковск — красивый город с интересной архитектурой, с музеями и театром. Организаторы олимпиады позаботились о том, чтобы ее участники — 157 мальчиков и 34 девочки,— ученики 7—10 классов, смогли наилучшим образом проявить свои способности. Ребята имели возможность и хорошо поработать, и хорошо отдохнуть.

Четкая организация олимпиады оказалась весьма кстати, потому что работали школьники напряженно — олимпиада протекала в два тура, и тем, кто выступил наиболее удачно, была предоставлена возможность попробовать свои силы на еще более трудных задачах «третьего» тура. Но некоторым энтузиастам из числа победителей олимпиады и этого оказалось недостаточно. Они спрашивали, сразу же после того, как справились с очередной порцией задач, нет ли еще задач, таких же трудных и интересных. После каждого тура участники на апелляциях могли «защитить» свои письменные работы.

Очень напряженной была и работа жюри олимпиады. Это и понятно — жюри (председатель — проректор Ивано-Франковского пединститута доцент Б. С. Сикора) проводило все туры олимпиады, проверяло работы, рассматривало апелляции. В его обязанность входило и определение того, насколько успешно выступил каждый из участников олимпиады.

Результаты каждого участника учитывались по двум показателям — по числу набранных при решении задач очков, и по числу задач, в основном решенных данным участником.

После выявления победителей была сформирована команда, представлявшая УССР на Всесоюзной олимпиаде школьников по математике, которая проводилась в Душанбе. В нее вошли:

восьмиклассники *Вадим Бугаенко* (Киев, с. ш. 145), *Лариса Лисенчук* (Васильковская с. ш. 8 Киевской области), *Виталий Костусяк* (г. Запорожье, с. ш. 28), *Дмитрий Вялый* (г. Енакиево Донецкой области, с. ш. 57);

девятиклассники *Игорь Калика* (Киев, с. ш. 145), *Виталий Ослон* (Киев, с. ш. 173), *Анатолий Косянчук* (г. Николаев, с. ш. 22), *Александр Седенко* (Александрийская с. ш. Одесской области), *Павел Кобзей* (Киев, ФМШ), *Ярослав Виннишин* (Киев, ФМШ);

десятиклассники *Александр Гончаров* (Никополь, с. ш. 13), *Владимир Любашенко* (Киев, с. ш. 145), *Дмитрий Литвиненко* (Севастополь, с. ш. 34), *Тимур Сейфуллин* (Киев, ФМШ), *Аркадий Лейдерман* (г. Могилев-Подольский, с. ш. 5), *Мария Щербина* (Харьков, с. ш. 27), *Борис Яцало* (Зареченская с. ш. Ровенской области).

Большинство задач, предлагавшихся на олимпиаде, приведено в статье «Всероссийская олимпиада». Ниже мы приводим две задачи, предложенные Украинским жюри.

**1.** Найти все трехзначные числа $\overline{abc}$ такие, что сумма шести двухзначных чисел, составленных из цифр этого числа, равна числу $\overline{abc}$ $(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ca} + \overline{ba} = \overline{abc})$ (7 класс).

**2.** Найти все точки внутри данного треугольника, если их образы, симметричные относительно середин сторон треугольника, размещаются на описанной около него окружности (9 класс).

*В. Березин, Л. Кованцова*

# Мир звуков

Звук на то и звук, чтобы его слышать. А нельзя ли его увидеть? Оказывается, можно. Об этом достаточно подробно рассказывается в одной из глав книги Г. Чедда «Звук» *).

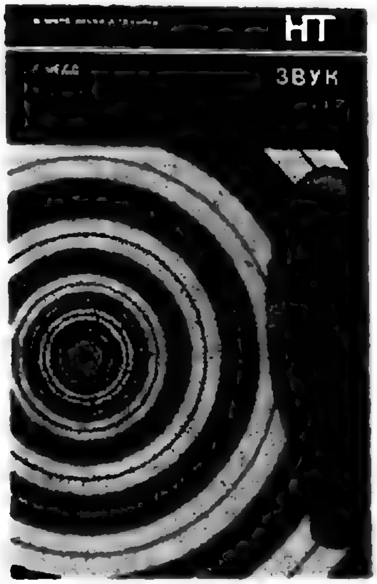
Недавно появились устройства, которые разлагают любые звуки, в том числе человеческую речь, на составляющие элементы и затем регистрируют их каким-либо образом (на фотобумаге, на экране электронно-лучевой трубки и т. п.). Получается звуковая спектрограмма, своеобразная модель человеческого голоса.

Но к чему модель, когда современная техника звукозаписи позволяет сохранить на многие годы голос любого человека и по желанию воспроизводить его? И все же без моделирования не обойтись, если мы хотим научиться анализировать человеческую речь, а затем и синтезировать ее. Это нужно, например, для того, чтобы приобщить к человеческому языку электронно-вычислительную машину, ставшую уже привычным атрибутом нашей жизни.

Современные ЭВМ умеют делать многое, но они не могут разговаривать. Задания им приходится писать специальным кодом и вводить в машины посредством клавиатуры, перфокарт или магнитных лент; результаты они также выдают в письменной форме. А насколько проще, удобнее и эффективнее было бы разговаривать с машиной на нормальном человеческом языке!

Кое-что в этом направлении уже сделано. Появились приборы, способные «распознавать» небольшое количество отдельных односложных слов, произнесенных одним человеком. Смотрите, сколько ограничений: слова должны быть односложными, разделенными паузами; голос должен принадлежать определенному человеку, и, главное, слов-то всего несколько. В 1950 году в США был изготовлен один из первых таких приборов, он с почти стопроцентной точностью «узнавал» десять цифр, которые по телефону сообщал ему «хозяин». Однако, когда все это проделывал с соблюдением тех же правил другой человек, точность прибора падала до 50%. Разумеется, в истекшие четверть века машины, распознающие речь, продолжали совершенствоваться, но проблема пока далека от решения.

Полоса частот, воспринимаемых нашим ухом (примерно от 20 герц до 20 килогерц), далеко не охватывает всего диапазона акустических колебаний. Выше этой полосы лежит область ультразвука, ниже — инфразвука. Много интересного рассказано о «неслышимых» звуках в книге Г. Чедда.



Любителей цирка — и взрослых, и особенно детей — не раз восхищали собаки-математики, умеющие считать, складывать числа и производить прочие арифметические операции. Думаю, я не отобью охоту посещать цирк, если открою один секрет (впрочем, это уже и не секрет): математическими способностями обладает не столько собака, сколько ее дрессировщик. Он подает собаке команду при помощи спрятанного в кармане ультразвукового свистка, звук которого лежит вне диапазона восприимчивости человеческого уха, зато собаки его отчетливо слышат. Такой необычной оказалась область применения первого ультразвукового свистка, изобретенного англичанином Гальтоном без малого сто лет назад, в 1883 году. В наши дни ультразвук используется в самых различных отраслях науки и техники, а также в медицине. Приведем лишь несколько примеров.

Ультразвук является превосходной и безотказной судомойкой, причем он не только моет фрукты и тарелки, но и удаляет технологическую грязь с миниатюрных деталей часового механизма, «освежает» старинные монеты, готовит к операции хирургические инструменты, очищает от окалины авиационные двигатели.

До последнего времени практически не умели паять алюминиевые детали. Как

---

*) Г. Чедд. Звук. Перевод с английского Г. Кузнецова, под редакцией С. Гуревича. М., «Мир», 1975, 206 с. с илл. (В мире науки и техники). Цена 46 к.

известно, на воздухе алюминий покрывается пленкой окиси, и никакими флюсами ее не удавалось растворить, пока не воспользовались... ультразвуком, способным сдирать с алюминия его броню. Подобно пайке, незаменимой в электронике стала и ультразвуковая сварка, при помощи которой надежно соединяются такие разиородные материалы, как, например, германий и медь.

Большой интерес для науки и практики представляет также инфразвук. Его начали изучать еще в годы первой мировой войны, но затем на полвека забыли о нем. Лишь в последнее десятилетие интерес к инфразвуку снова возник.

Инфразвук, как правило, является аккомпанементом обычного шума, он возникает при работе авиационных и судовых двигателей, при движении автомобилей на высоких скоростях, в металлургических и прочих шумных цехах. Он возникает и в природе, сопровождая извержения вулканов, землетрясения, сильные штормы и смерчи. Вероятно, именно инфразвуковые волны предупреждают животных о надвигающейся опасности стихийного бедствия. Оказывается, под действием больших доз инфразвука люди ощущают боль в ушах, испытывают тошноту, теряют работоспособность, у них нарушается вестибулярный аппарат, а по некоторым данным даже происходит расстройство умственных способностей и психики.

В книге «Звук» затронута еще одна проблема, о которой нельзя не упомянуть. Наполнены тревогой две последние главы книги, начинающиеся словами:

«С тех пор как техническая революция дала человечеству новые источники энергии невиданной ранее мощности, люди стали как-то не по-хозяйски относиться к своей планете. «Издержки» технического прогресса можно видеть на каждом шагу: ... свалки ржавеющих автомобилей; реки и озера, гибнущие от отходов промышленных предприятий; и даже воздух, которым мы дышим, загрязнен дымом, выходящим из тысяч труб фабрик и заводов, и выхлопными газами миллионов автомобилей... Однако существует еще более зловещий спутник развития индустрии, который опаснее для людей, чем загрязняющие отходы, — это шум».

Шум влияет на человека, на его работоспособность, настроение, психику. Сейчас предпринимаются попытки систематизировать шумы с точки зрения их воздействия на человека, придумываются разные шкалы, вводятся эмпирические коэффициенты, разрабатываются шумоанализаторы и т. п. Но и без математических формул ясно, что с любым шумом надо активно бороться, а лучше — по возможности не создавать шума. Здесь—обширное поле для совместных исследований физиков, геофизиков, метеорологов, медиков, психологов...

Обо всем этом рассказано в книге Г. Чедда. Об этом и о многом другом, столь многом, что диву даешься — как удалось автору уместить такое огромное количество информации на двухстах страницах небольшого формата? Физические характеристики звука и психофизиологические аспекты его восприятия, архитектура концертных залов и городов, методика стереозаписи и электромузыкальные инструменты, сонар и акустическая голография... Разве все перечислишь? Изложение краткое, но отнюдь не конспективное: описываются конкретные устройства, приводятся любопытные факты и примеры, имеются многочисленные фотографии. Книга и интересна, и полезна всем, кто желает получить представление о проблемах современной акустики.

*И. Зорич*

---

# Научно-популярные книги по астрономии

Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука» выпускает в свет в 1976 году несколько научно-популярных книг по астрономии самого различного направления.

Для первоначального ознакомления с современной астрономией лучше всего подходит книга профессора Б. А. Воронцова — Вельяминова *«Очерки о Вселенной»* (издание 7-е, переработанное и дополненное). Книга рассматривает очень широкий круг проблем — в ней описываются практически все небесные объекты (метеоры, метеориты, кометы, астероиды, планеты, звезды, звездные скопления, пульсары, галактики, квазары) и популярно излагаются методы астрономических наблюдений. По сути дела книга представляет собой популярную астрономическую энциклопедию, доступную каждому. В ней приводится большое количество фотографий, в том числе и цветных. Как пишет автор в предисловии, он пытался «дать отдых читателю и разрядить временами напряжение ума не только наглядным сравнением, но и шуткой».

Также на начинающих любителей астрономии рассчитана книга Ф. Ю. Зигеля *«Сокровища звездного неба. Путеводитель по созвездиям и Луне»* (издание 3-е, переработанное и дополненное). Первая часть книги посвящена рассказу о звездном небе, о делении его на созвездия, о том, как находить те или иные созвездия. Попутно описываются наиболее интересные объекты неба, разъясняется их физическая природа. Вторая часть книги, специально написанная для этого издания, представляет собой путеводитель по Луне — описание лунной поверхности, сопровождаемое многочисленными фотографиями. К книге приложен атлас звездного неба и ряд справочных таблиц.

В 1976 году поступило в продажу выпущенное в конце 1975 года третье издание книги М. С. Навашина *«Телескоп астронома-любителя»* — единственное в отечественной литературе пособие по вопросам любительского телескопостроения. В ней идет речь о самостоятельном изготовлении телескопа-рефлектора, пригодного для серьезных астрономических исследований. В книге даются все необходимые для этого указания. Автор книги, один из основоположников отечественного любительского телескопостроения, имел возможность на деле проверить все, о чем он пишет. Книга увидела свет уже после смерти автора, и в окончательной подготовке рукописи участвовал ряд специалистов, написавших дополнительные разделы, посвященные как конструкции телескопов, так и методам их испытания.

В начале 1976 г. поступила в продажу книга докторов физико-математических наук Е. А. Гребеникова и Ю. А. Рябова *«Поиски и открытия планет»*, большая часть которой посвящена замечательной и полной драматизма истории открытия восьмой планеты Солнечной системы — Нептуна.

В одном из ближайших номеров нашего журнала мы расскажем об этой книге более подробно.

Еще две научно-популярные книги должны выйти в свет в самом конце 1976 года. Одна из них — книга доктора физико-математических наук И. А. Климишина *«Астрономия наших дней»* — требует для чтения известной предварительной подготовки. Автор поставил себе целью рассказать о широком круге вопросов, рассматриваемых современной астрономией, об основных понятиях и законах астрономии, разъясняя физическую сущность явлений. Он часто прибегает к формулам и графикам. По стилю изложения книга близка к статьям, публикуемым в журнале «Квант».

Другая книга — *«Взрывающаяся Вселенная»* В. В. Казютинского и В. Н. Комарова — популярно рассказывает об основных вехах революции в современной астрономической науке. Главное внимание авторы уделяют острым дискуссиям, которыми сопровождается рождение новых представлений о Вселенной, связанных с открытиями последних лет.

Наконец, отметим книгу, совершенно необходимую каждому квалифицированному любителю астрономии. Это — *«Астрономический календарь (ежегодник) на 1977 год»*. Первая часть календаря представляет собой собрание эфемерид — данных об астрономических явлениях в 1977 году (координаты Солнца и Луны; данные о моментах их восхода и захода и другие сведения на каждый день года; описание видимости планет, сопровождаемое картами их движения по небу; данные о солнечных и лунных затмениях, о переменных звездах, о покрытиях звезд и планет Луной и ряд других материалов). Во второй части («Приложения») публикуются статьи о достижениях различных отделов астрономии, обзоры космических исследований, материалы, посвященные памятным датам астрономии, инструкции для наблюдений, библиографический указатель астрономической литературы и другие полезные сведения.

*И. Рахлин*

---

# Новые книги

**В этом номере журнала мы помещаем краткие аннотации на книги по математике и по физике, выходящие в III квартале 1976 года.**

## Математика

### Издательство «Наука»

1. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. *Пособие по математике для поступающих в вузы.* Издание 5-е, перераб. Объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 04 к.

По-видимому, эта книга хорошо известна всем школьникам, готовящимся к вступительным экзаменам в вузы, — она выдержала уже четыре издания и пользуется заслуженной популярностью и среди учителей.

Пятое издание книги существенно отличается от предыдущих: книга переработана авторами больше чем наполовину. Внесены изменения, связанные с новой школьной программой по математике, вместо старых конкурсных задач помещены совсем новые, в частности, варианты письменных экзаменов по математике, предлагавшиеся поступавшим в МГУ в 1975 году.

2. Лурье М. В., Александров Б. И. *Задачи на составление уравнений.* Объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 14 к.

Эта брошюра также адресована поступающим в вузы: она посвящена традиционному разделу элементарной математики — задачам на составление уравнений. В ней задачи классифицируются по типам и методам решения; особенности решения задач каждого типа подробно объясняются.

Примеры, иллюстрирующие излагаемый материал, в основном взяты из вариантов письменных работ по математике, предлагавшихся в Московском университете.

3. Шкурба В. В. *Задача трех станков.* Объем 4 л., тираж 50 000 экз., цена 14 к.

Книга рассчитана на учеников старших классов; она может служить своеобразным введением в дискретную математику и теорию оптимальных решений, с одной стороны, и в широкую область прикладной деятельности — составление оптимальных календарных планов — с другой.

В основу книги положены лекции и занятия, проведенные автором на летнем сборе школьников в Крыму в 1972 году.

4. Штейнгауз Г. *Сто задач.* Перев. с польск. Издание 2-е. Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 45 к.

Автор книги — известный польский математик и педагог.

Решение любой из этих задач — свидетельство об умении самостоятельно мыслить.

Сборник предназначается прежде всего для учителей и школьников, любящих решать задачи. Задачи этого сборника облегчают переход от математики школьной к математике творческой и демонстрируют красоту этой науки.

### Издательство «Мир»

5. Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я. *Венгерские математические олимпиады.* Перев. с венг. Объем 23 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 36 к.

Это — вторая книга серии *«Задачи и олимпиады»*, начатой книгой Ч. Тригга.

## Физика

### Издательство «Наука»

1. Бендриков Г. А., Буховцев Б. Б., Керженцев В. В., Мякишев Г. Я. *Задачи по физике для поступающих в вузы.* Объем 30 л., тираж 300 000 экз., цена 1 р. 08 к. Издание 3-е.

В сборнике помещены в основном задачи, предлагавшиеся на приемных экзаменах по физике в Московском государственном университете в последние годы. К большинству разделов задачника даны краткие указания, касающиеся общей методики решения задач, и перечень основных формул, используемых при решении.

Задачник может быть рекомендован слушателям подготовительных отделений вузов, учащимся старших классов средних общеобразовательных школ и техникумов, лицам, занимающимся самообразованием.

2. Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г., *Справочник по элементарной физике.* Объем 13 л., тираж 200 000 экз., цена 69 к. Издание 7-е.

Справочник охватывает все основные разделы элементарной физики. В нем кратко изложены основные понятия и законы и приводятся справочные таблицы и графики. Теоретические сведения включают основные определения и формулировки законов.

### Издательство «Мир»

3. Кузов К. И. *Мир без форм.* Перевод с болг. Объем 12 л., тираж 35 000 экз., цена 62 к.

Эта книга — путеводитель по гидрогазодинамике. С помощью простых и доступных рассуждений, с привлечением большого количества примеров из жизни автор дает образную картину этой науки, ее развития, достижений и проблем. Охвачены все основные аспекты гидрогазодинамики, популярно и в то же время строго рассмотрены многочисленные гидрогазодинамические задачи. Специальный раздел посвящен вопросам авиационной аэрогидродинамики, где автор подчеркивает приоритет русской авиационной науки и техники.

4. Бринкворт Б. Дж., *Солнечная энергия для человека.* Объем 16 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 01 к.

Книга посвящена проблеме использования солнечной энергии человеком.

Рост населения нашей планеты и бурный технический прогресс требуют новых источников энергии. Солнечная энергия с ее неиссякаемым потенциалом открывает перед человечеством огромные перспективы. Происхождение солнечной энергии, ее взаимодействие с земной атмосферой, проблема преобразования солнечной энергии в электрическую, разработка устройств, служащих этой цели, перспективы использования солнечной энергии человеком — таков круг вопросов, рассмотренных автором книги.

Книга рассчитана на широкий круг читателей

### Издательство «Знание»

5. *Будущее науки* (*ежегодник*). Выпуск 9. Объем 12 л., тираж 10 000 экз., цена 60 к.

Перспективы, гипотезы, нерешенные проблемы — такова программа этого ежегодника. Его главные темы — пути познания; загадки, к решению которых приближается наука; возможности ускорения технического прогресса; задачи различных отраслей знания.

Подробную рецензию на эту книгу мы поместим в 12-ом номере нашего журнала.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

*И. Клумова,*
*М. Смолянский*

# «Квант» для младших школьников

## Задачи

1. Группа восьмиклассников решила после окончания учебного года поехать на экскурсию в Ленинград. Ежемесячно каждый ученик вносил одинаковую для всех сумму денег, и за 7 месяцев было собрано 640 руб. 01 коп. Сколько было в классе учеников и какую сумму денег вносил каждый ежемесячно?

8 „б"
МОСКВА-ЛЕНИНГРАД

2. В трех ящиках лежат орехи. В первом на 6 орехов меньше, чем в двух других вместе, а во втором — на 10 меньше, чем в первом и третьем вместе. Сколько орехов в третьем ящике?

3. «Дайте мне точку опоры, и я переверну мир». Такое заявление сделал Архимед после того, как открыл правило рычага. Поскольку подходящей точки опоры не было (да и сейчас нет), доказать это утверждение экспериментально он не мог. Однако теоретически нетрудно убедиться в том, что Архимед несколько переоценил свои возможности (и возможности рычага). Попробуйте подсчитать, на какое расстояние пришлось бы переместить свободный конец рычага, для того чтобы приподнять хотя бы на 1 *мм* тело, масса которого равна массе Земли, то есть приблизительно равна $6\cdot 10^{24}$ *кг*; среднее усилие, создаваемое рукой человека, примерно 5 *н*.

4. Из книги выпал ее кусок. Первая страница куска имеет номер 387, а номер последней состоит из тех же цифр, но записанных в другом порядке. Сколько страниц выпало из книги?

5. Простые числа имеют только два различных делителя — единицу и само это число. А какие числа имеют только три различных делителя?

# МОЖЕТ ЛИ ЧАСТЬ РАВНЯТЬСЯ ЦЕЛОМУ?

А. БЕНДУКИДЗЕ

Прибегают как-то ко мне Тамуниа и Георгий и, перебивая друг друга, спрашивают:

— Может ли часть равняться целому?

— Часть — целому? — говорю я. — Конечно же не может. Часть всегда меньше целого. Между прочим, великий древнегреческий математик Евклид, написавший первый систематический курс геометрии, принял это утверждение за одну из аксиом.

— А вот сегодня к нам в школу заходил брат нашего одноклассника — Каха, он студент, и сказал, что это не так, что бывают случаи, когда часть равна целому. Он даже пример нам показывал, — сказал Георгий.

— А вы помните этот пример?

— Помним, отлично помним, вот послушайте... — сказали они в один голос.

— Пожалуйста, я к вашим услугам. Только давайте по порядку, не перебивайте друг друга. Ну, Тамуниа, рассказывай, о чем была речь.

— Значит, так. Возьмем множество всех натуральных чисел

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\}$$

и в нем подмножество все четных чисел

$$\{2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots\}.$$

Ведь второе — часть первого?

— Конечно.

—А, оказывается, они равны. Вот посмотрите, — и она нарисовала следующую таблицу:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | ... | 100 | 101 | ... | 500 | 501 | ... |
| 2 | 4 | 6 | 8 | ... | 200 | 202 | ... | 1000 | 1002 | ... |

В этой таблице под каждым натуральным числом написано определенное четное число, причем ни одно не пропущено и ни одно не повторяется. Получается, что четных чисел столько же, сколько и натуральных, т. е. эти множества равны!

— Как ты сказала — «равны»? Неужели ты не помнишь, какие множества называются равными?

— Помню: два множества $A$ и $B$ называются *равными*, если каждый элемент множества $A$ принадлежит также множеству $B$, и наоборот — каждый элемент множества $B$ принадлежит одновременно и множеству $A$, т. е. если эти множества состоят из одних и тех же элементов.

— Ну, и как ты думаешь, равны между собой множество натуральных и множество четных чисел?

— Нет, они не равны, но ... получается, что у них одно и то же число элементов...

— Да, да,— подхватил Георгий, эти множества равны по количеству элементов, т. е. все-таки часть равна целому.

— Допустим. Будем говорить, что часть *количественно равна* целому. А что вы скажете, если для этих же множеств я составлю вот такую таблицу:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | .. | 100 | 101 | ... | 500 | 501 | ... |
| | 2 | | 4 | ... | 100 | | .. | 500 | | ... |

Здесь во второй строке выписаны все четные числа, да еще есть свободные клетки, причем, как нетрудно догадаться, число их бесконечно. Получается, что четных чисел все же меньше, чем натуральных!

— ??

Тамуниа и Георгий были в замешательстве, — они удивленно смотрели друг на друга, потом вопросительно посмотрели на меня.

— Что же, — сказал я, — давайте разберемся, в чем тут дело. Начнем с конечных множеств. Пусть нам даны два конечных множества, и требуется сравнить их количественно, т. е. выяснить, поровну содержат они элементов или нет. Как вы думаете, что для этого надо сделать?

— Подсчитать число элементов этих множеств, — не задумываясь сказал Георгий.

— Конечно, подсчитать, а потом сравнить полученные числа, — добавила Тамуниа.

— Верно. Это первое, что приходит в голову. Безусловно, пересчет в принципе решает вопрос, но если подойти к делу критически, то окажется, что метод пересчета не самый лучший. Помимо того, что его нельзя применить к бесконечным множествам, он обладает и другими недостатками.

Во-первых, при пересчете мы получаем лишнюю, ненужную нам информацию — нас вовсе не интересует, сколько элементов в каждом из данных множеств, нам достаточно выяснить лишь, поровну их в множествах или нет.

Во-вторых, не всегда удобно применять этот метод. К примеру, представьте себе, что вы проводите вечер занимательной математики и пригласили на него учащихся соседней школы. Гостей пришло много, да и хозяев немало. Все собрались в большом школьном зале, где вдоль стен расставлены стулья. Вам требуется выяснить: хватит ли всем стульев. Неужели вы начнете считать всех присутствующих — один, два, три, четыре, пять, ... ?

— Нет, это было бы неудобно, — сказали мои собеседники.

— Неудобно и непросто, — добавил я. — Как же все-таки поступить, нужно ведь вовремя принести стулья, если их не хватает?!

— А если попросить всех сесть? — после некоторого раздумья сказала Тамуниа, — ведь тогда легко будет узнать, кто остался без места...

— Правильно! Нужно попросить всех занять места, причем позаботиться, чтобы на каждый стул сел один школьник. Какие возможны варианты, Георгий?

— Все сели и свободных стульев нет — первый вариант; все сели и свободные стулья остались — второй вариант; все стулья заняты, а кто-то остался без места — третий. Три варианта!

— Точно. В первом случае в множестве людей и в множестве стульев элементов поровну, во втором людей меньше, чем стульев, в третьем — наоборот. Вот мы и нашли способ для количественного сравнения двух конечных множеств, который легко переносится на случай бесконечных множеств. Посмотрим, как это можно сделать. Пусть нам даны два множества: $A$ и $B$. Конечны они или нет — неважно. Говорят, что *множество $A$ взаимно однозначно отображается на множество $B$, если существует соответствие, при котором каждому элементу $a$ множества $A$ соответствует определенный элемент $b$ множества $B$, и при этом каждый элемент $b$ соответствует единственному $a$.* Ясно, что тогда из элементов множеств $A$ и $B$ можно составить пары $(a, b)$ с соблюдением следующих условий:

1) первый компонент пары — элемент множества $A$, второй — множества $B$;

2) каждый элемент как множества $A$, так и множества $B$ входит в одну и только одну пару.

Верно, конечно, и обратное: если из элементов множеств $A$ и $B$ можно составить пары $(a, b)$ с соблюдением указанных условий, то $A$ взаимно однозначно отображается на $B$. Приведу пример. Пусть

$$A=\{м,\ о,\ р,\ е\},\quad B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

Составим пары $(м, 1)$, $(о, 2)$, $(р, 3)$, $(е, 4)$. Они удовлетворяют названным условиям, т. е. $A$ взаимно однозначно отображается на $B$.

— А нельзя ли составить пары другим способом: $(м, 4)$, $(о, 3)$, $(р, 2)$, $(е, 1)$ или $(м, 1)$, $(о, 2)$, $(р, 4)$, $(е, 3)$? — спросила Тамуния.

— Конечно, можно. Важно лишь чтобы указанные условия выполнялись. В нашем случае, например, способов составить пары будет 24. Это показывает, что, как правило, одно множество на другое можно отобразить взаимно однозначно несколькими способами (если, конечно, такое отображение возможно). Вместо того, чтобы говорить: «Множество $A$ взаимно однозначно отображается на $B$», — говорят коротко: «$A$ эквивалентно $B$», — и пишут: «$A \sim B$». Ясно, что если $A \sim B$, то и $B \sim A$. Подумайте, при каком условии два конечных множества эквивалентны?

— Если они содержат одно и то же число элементов, — не задумываясь ответили оба.

— Правильно. Ясно, что верно и и обратное: если два конечных множества эквивалентны, то ...

— В них поровну элементов, — заключил Георгий.

— Значит, два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одно и то же число элементов, — подвела итог Тамуния.

— Совершенно вѐрно! Итак, для конечных множеств все обстоит очень просто, и вряд ли стоило бы вводить понятие эквивалентности, если бы... не существовали бесконечные множества. Этот случай гораздо интересней. Здесь мы встречаемся с ситуацией, в которую даже трудно поверить. Возьмем хотя бы множества натуральных и четных (положительных) чисел. Взглянув в таблицу, которую ты нарисовала, — обратился я к Тамунии, — мы видим, что элементы этих множеств можно спарить требуемым образом, т. е. множество натуральных чисел эквивалентно своей части — множеству четных чисел. Такого в конечных множествах быть не может!

— Да, но ведь по Вашей таблице получается, что эти множества не эквивалентны... — робко спросила Тамуния.

— Я ожидал, то ты задашь этот вопрос. В самом деле, может показаться, что эти множества эквивалентны и в то же время не эквивалентны, но этот не так — здесь все верно и никакого противоречия нет. Дело в том, что $A$ эквивалентно $B$, если его можно, я подчеркиваю — «можно» взаимно однозначно отобразить на $B$. Итак, если можно взаимно однозначно отобразить, то множества эквивалентны; если нельзя, то не

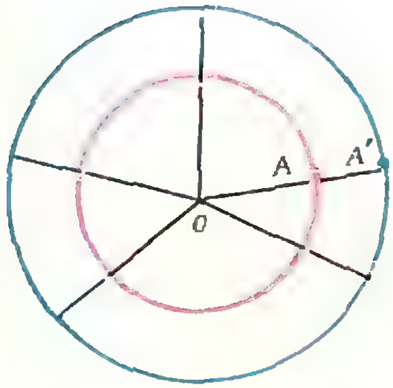


**Рис. 1.**

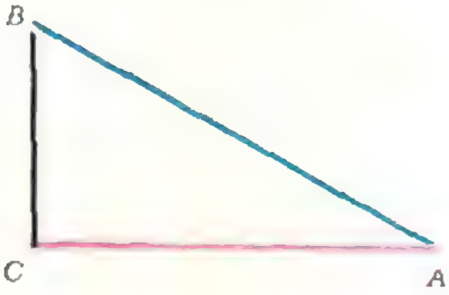


**Рис. 2.**

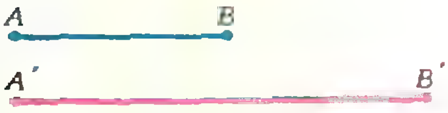


**Рис. 3.**

эквиваленты. А так как мы знаем, что есть взаимно однозначное отображение множества натуральных чисел на множество четных чисел, то эти множества эквивалентны.

Вот еще примеры эквивалентных множеств. Рассмотрим две концентрические окружности $(O, r)$ и $(O, R)$. Они эквивалентны (вспомним, что окружность — это множество точек!). В самом деле, возьмем на окружности $(O, r)$ некоторую точку $A$ и проведем радиус $OA$ (рис. 1). Пусть продолжение этого радиуса пересекает $(O, R)$ в точке $A'$. Каждой точке $A \in (O, r)$ соответствует полученная таким образом точка $A' \in (O, R)$. Мы получили взаимно однозначное отображение $(O, r)$ на $(O, R)$, т. е. $(O, r) \sim (O, R)$.

В качестве второго примера возьмем отрезок $[0, 1]$ и отрезок $[a, b]$, где $a$ и $b$ — произвольные числа. Эти отрезки (они рассматриваются как множества чисел) оказываются эквивалентными, хотя отрезок $[a, b]$ может оказаться во много раз длиннее (или короче) отрезка $[0, 1]$. Доказать эту эквивалентность можно, например, так. Рассмотрим функцию $y=a+(b-a)x$ с областью определения $[0, 1]$. При изменении $x$ в области определения (от 0 до 1) $y$ будет меняться от $a$ до $b$, т. е. множеством значений этой функции будет $[a, b]$. А так как при этом

$$x=\frac{y-a}{b-a},$$

то каждое $y$ будет соответствовать только одному $x$.

На этом наша беседа закончилась. Тамуна и Георгий остались очень довольны. Я им дал в виде задания несколько задач, которые предлагаю и вам.

1. Докажите, что множество натуральных чисел эквивалентно множеству чисел, кратных 10-ти.

2. Докажите, что множества точек катета $AC$ и гипотенузы $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$ эквивалентны (рис. 2).

3. Укажите геометрически взаимно однозначное соответствие между множеством точек отрезка $[AB]$ и множеством точек отрезка $[A'B']$ (рис. 3). Постарайтесь сделать это двумя разными способами.

4. Докажите, что множество целых чисел $Z$ эквивалентно множеству натуральных чисел $N$.

### К статье «Графическое решение кубических уравнений»

2. а) $x = -0{,}75$; б) $x = 0{,}5$; в) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0{,}5$; г) $x = -3$.

### К статье «Такой невероятный турнир...»

1. 14 партий. Это следует из формулы $(9_\delta)$ (см. статью), так как наименьшие значения параметров $c=f=h=0$, $\beta=\delta=s=1$.

2. Да, есть. Формулировка задачи фактически содержит следующие шесть условий:

(1) первый имел больше выигрышей, чем второй;

(2) первый имел больше выигрышей, чем третий;

(3) второй имел меньше проигрышей, чем первый;

(4) второй имел меньше проигрышей, чем третий;

(5) третий набрал больше очков, чем первый;

(6) третий набрал больше очков, чем второй.

Условия (1) и (3) можно было опустить — это видно из формул $\alpha=\beta+\delta+q$, $\gamma=\beta+\delta+p$.

### К статье «Осевая симметрия»

2°. а) Треугольники $A'BL$ и $MBC$ конгруэнтны (см. рис. 2 в статье), так как $|A'B| = |BC|$, $\measuredangle BA'L \cong \measuredangle BCM$, а угол $A'BC$ у них общий. Поэтому $|BM| = |BL|$, то есть $|A'M| = |LC|$. Применив разобранное в пункте **А** статьи свойство к равнобедренному треугольнику $A'BC$, получим, что точка пересечения $K$ прямых $CM$ и $A'L$ лежит на биссектрисе угла $A'BC$.

б) При симметрии относительно прямой $BK$ биссектриса угла $BA'L$ переходит в биссектрису угла $BCM$, поскольку $BK$ — биссектриса угла $A'BC$ (см. 2°а)). При этом точка $O$ пересечения этих биссектрис оказывается на оси симметрии $BK$. Следовательно, точка $O$ удалена на одно и то же расстояние от таких пар сторон: $A'L$ и $A'B$, $CM$ и $BC$, $A'B$ и $BC$, откуда вытекает, что точка $O$ равноудалена и от сторон $BM$ и $CM$, $A'L$ и $BL$, т. е. что $O$ принадлежит и биссектрисам углов $BMC$ и $A'LB$.

3°. Пусть $M = (AB') \cap (CD)$; $N = (AD) \cap (B'C')$ — см. рис. 1. Треугольники $MAD$ и $NAB'$ конгруэнтны, поскольку $|AD| = |AB'|$, $\measuredangle ADM \cong \measuredangle AB'N$ и угол $B'AD$ у них общий. Отсюда $|AM| = |AN|$, $|MB'| = |ND|$, и в равнобедренном треугольнике $AMN$ точка пересечения прямых $NB'$ и $MD$ лежит на биссектрисе угла $B'AD$ (см. пункт **А** статьи).

Задача 4° является переформулировкой задачи, решенной в пункте **Б** статьи, а задача 5° — ее частным случаем (точки $P$ и $Q$ находятся на одинаковом расстоянии от $l$).

6°. Разберем вначале случай, когда $45° \leqslant \widehat{ABC} < 90°$.

Проведем луч $BD$, перпендикулярный лучу $AB$, и построим луч $BD'$, симметричный лучу $BD$ относительно прямой $BC$.

1) Допустим, что гонец находится в точке $P$, расположенной внутри угла $ABD'$ (или на его стороне $BD'$). Пусть $Q$ — какая-то точка реки $BC$: $Q \in [BC)$. Ясно, что если гонец будет поить коня в точке $Q$, то к дороге $AB$ он поскачет по прямой $QR$, перпендикулярной к $AB$ (см. рис. 2).

Построим точку $P'$, симметричную точке $P$ относительно прямой $BC$. Длина пути $PQR$ равна длине ломаной $P'QR$, поскольку $|PQ| = |P'Q|$, т. е. равна $|P'Q| + |QR|$. Но $|P'Q| + |QR| > |P'R| > |P'B| = |PB|$, так как основание наклонной $P'R$ дальше удалено от основания перпендикуляра $P'S$, чем основание наклонной $P'B$. Следовательно, в случае, если $45° \leqslant \widehat{ABC} < 90°$, гонцу нужно напоить коня в вершине $B$ угла $ABC$.

2) Пусть теперь гонец находится в точке $P$, расположенной внутри угла $CBD'$ (рис. 3).

Снова возьмем произвольную точку $Q \in [BC)$, проведем $(QR) \perp (AB)$ и построим точку $P'$, симметричную точке $P$ относительно стороны $BC$. Проведем $(P'S) \perp (AB)$ $(S \in [BA))$; тогда $|PQ| = |P'Q|$ и $|PQ| + |QR| = |P'Q| + |QR|$. Но $|P'S| < |P'Q| + |QR|$; следовательно, гонец должен напоить коня в точке $X = (P'S) \cap [BC)$.

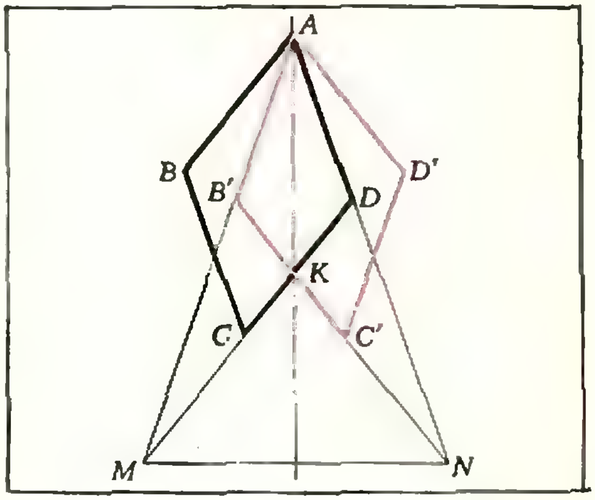


Рис. 1.

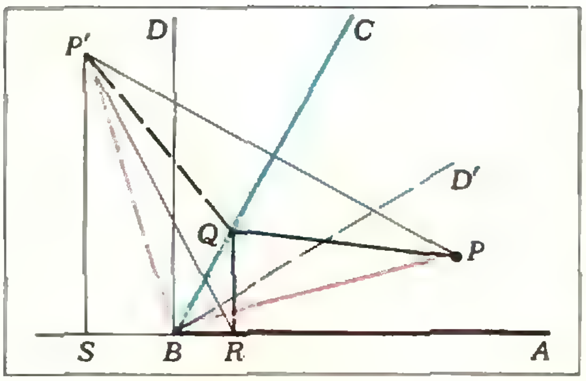


Рис. 2.

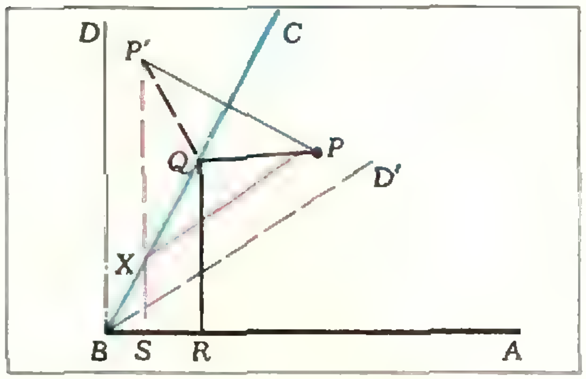


Рис. 3.

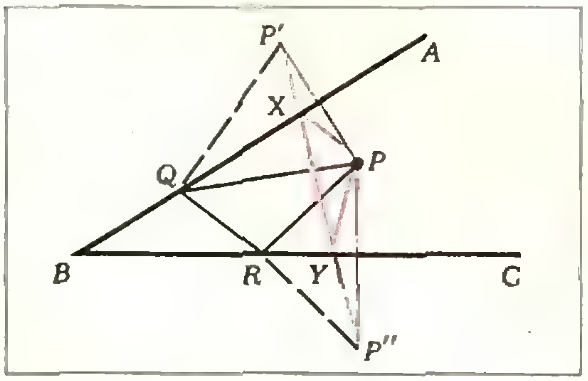


Рис. 4.

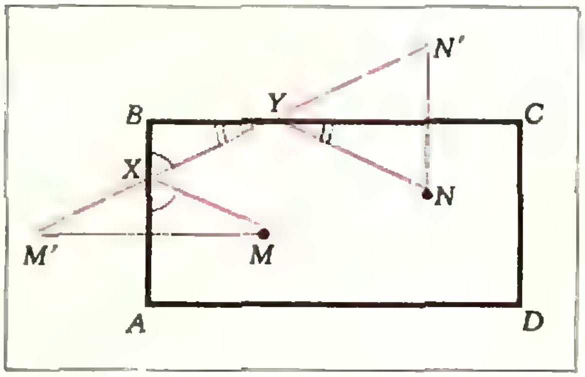


Рис. 5.

Если $\widehat{ABC} < 45^\circ$, решение задачи сводится только к случаю 2).

7°. Пусть $Q \in [BA)$, $R \in [BC)$ — две произвольные точки на сторонах данного угла (рис. 4); $P'$ и $P''$ — точки, симметричные точке $P$ относительно прямых $AB$ и $BC$ соответственно. Тогда $|PQ| = |P'Q|$ и $|PR| = |P''R|$.

Периметр $\Delta PQR$ равен длине ломаной $P'QRP''$; он будет минимальным, если эта ломаная превратится в отрезок $P'P''$. Обозначив $[P'P''] \cap [BA)$ через $X$, $[P'P''] \cap [BC)$ через $Y$, получим, что $\Delta PXY$ — искомый.

8°. Пусть $M'$ — точка, симметричная точке $M$ относительно борта $AB$, а $N'$ — точка, симметричная точке $N$ относительно борта $BC$. Тогда шар надо толкнуть в направлении $MX$, где $X = [M'N'] \cap [AB]$ (см. рис. 5).

## К статье «Всероссийская олимпиада школьников»

### Математика

### 8 класс

1. Пусть $S_1$ и $S_2$ — площади треугольников $ABC$ и $ADC$. Положим $|AO| = x$, $|OC| = y$. Тогда $\frac{4}{x} = \frac{S_1}{x+y}$ и $\frac{9}{y} = \frac{S_2}{x+y}$, откуда для площади $S$ четырехугольника $ABCD$ получаем выражение: $S = S_1 + S_2 = 4\frac{y}{x} + 9\frac{x}{y} + 13$. Легко проверить, что это выражение при $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ достигает минимума, равного 25 см².

2. Прежде всего заметим, что в момент, когда истинное время равно $2n$ часам, обе стрелки находятся на отметке $n$ часов, т. е. при $0 < n < 12$ показывают неверное время, после чего движутся в течение часа с нормальными скоростями, продолжая показывать неверное время.

Ровно через час, т. е. в $(2n+1)$ часов, минутная стрелка оказывается на делении $n$ часов, а часовая — на отметке $(n+1)$ часов, после чего стрелки меняются скоростями. В течение последующего часа по прошествии $t$ минут часовая стрелка будет находится у деления $(5n+5+t)$ минут; а истинное время, равное $2n+1$ часам и $t$ минутам, — соответствует в масштабе минут положению часовой стрелки на делении $\left(10n+5+\frac{t}{12}\right)$ минут. Если в этот момент часы показывают верное время, то должно быть $10n+5+\frac{t}{12} = 5n+5+t$, откуда $t = \frac{60n}{11}$.

Аналогичные рассуждения для минутной стрелки приводят к уравнению $t = 5n + \frac{t}{12}$, откуда находим то же значение для $t$.

Ответ: Кроме промежутка времени от полночи до часа, часы показывают верное время в $(2n+1)$ часов $\frac{60n}{11}$ минут, где $n = 1, 2, \ldots, 10$ (при $n = 0$ и $n = 11$ получаем концы уже отмеченного промежутка в 1 час).

**3.** Пусть $BE$ — наибольшая диагональ пятиугольника $ABCDE$. Нетрудно проверить, что из диагоналей $BE$, $BD$ и $CE$ можно составить треугольник.

### 9 класс

**1.** Покажем, что можно провести не более 100 отрезков. Действительно, рассмотрим точку, соединенную отрезками с наибольшим количеством других точек. Обозначим это число через $k$. Тогда каждая из этих $k$ точек соединена не более, чем с $(20-k)$ точками, а каждая из этих $(20-k)$ точек соединена не более, чем с $k$ точками. Отсюда общее число отрезков не больше, $[k(20-k)+(20-k)k]/2 = 100-(10-k)^2$. Сто отрезков получим в том случае, если разбив совокупность точек на два подмножества по 10 точек, соединим каждые две точки, принадлежащие разным подмножествам.

**2.** Проведем две прямые: через центр первой окружности параллельно той стороне угла, которой она касается, и через центр второй окружности, параллельно другой стороне угла. Точка пересечения этих двух прямых и будет искомой точкой.

**3.** Оценка снизу следует из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Действительно, $x_{n+1} = \frac{x_n^3}{5} +$

$$+\frac{1}{15x_n}+\frac{1}{15x_n}+\frac{1}{15x_n} \geqslant$$

$$\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{1}{5\cdot 15\cdot 15\cdot 15}} = \frac{4\sqrt[4]{3}}{15} > \frac{1}{3} > \frac{1}{5}.$$

Чтобы получить оценку сверху, решим неравенство $x_n > x_{n+1}$. Имеем:

$$x_n > \frac{x_n^4+1}{5x_n} \text{ или } x_n^4 - 5x_n^2 + 1 < 0,$$

т. е. $\frac{5-\sqrt{21}}{2} < x_n^2 < \frac{5+\sqrt{21}}{2}$, т. к. $x_n > 0$, получаем, что если $\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{2}} <$

$< x_n < \sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{2}}$, то $x_n > x_{n+1}$.

Значит, если $1 \leqslant x_n \leqslant 2$, то $x_{n+1}$ меньше 2. Если же $x_n < 1$ (случая $x_n > 2$ быть не может, поскольку $x_1 = 2$), то $x_{n+1} < 2$.

Из этого следует, что $x_n < 2$ для всех $n > 1$, и неравенство полностью доказано.

### 10 класс

**1.** Существует. Например, трехгранный угол, у которого два плоских угла одинаковы и больше 90°, а третий угол меньше 60°.

**2.** Квадрат числа, составленного из $(n+1)$ троек, начинается с $n$ единиц.

## Физика

Некоторые задачи включены в «Задачник «Кванта» (см. последующие номера журнала), поэтому здесь мы публикуем ответы не на все задачи.

### 8 класс

**1.** $s = a\tau^2(3-2\sqrt{2})$.

**3.** $s = v_0^2/(2kg) = 10$ м. Указание. Сани двигались до остановки $t = v_0/(kg) = 10$ сек.

**5.** $F_т = \frac{mR}{R^3/(\gamma M_0)+t^2}$.

### 9 класс

**3.** $I_{\max} = \frac{(\varepsilon-1)q}{CR}$; $Q = \frac{q^2}{2C}\frac{(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon+1}$;

здесь $C$ — емкость конденсатора без диэлектрика. Указание. Воспользоваться законом сохранения энергии.

**4.** $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{1-\alpha/2}$.

**5.** Считались правильными две трактовки условия задачи. а) Сосуд закрыли невесомым подвижным поршнем, так что суммарное давление воздуха и насыщенного пара до уменьшения объема было равно атмосферному давлению $p_а$. Тогда давление насыщенного пара $p_н = \frac{1}{2}p_а$. б) Давление газа в сосуде до сжатия складывалось из давления воздуха, равного атмосферному давлению, и давления насыщенного пара (равновесие поршня поддерживается искусственно). Тогда $p_н = p_а$.

### 10 класс

**2.** $k_{\min} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Указание. Кинетическая энергия скатывающегося без проскальзывания тонкостенного цилиндра складывается из кинетической энергии $mv^2/2$ поступательного движения и кинетической энергии $mR^2\omega^2/2$ вращательного движения, причем $mv^2/2 = mR^2\omega^2/2$.

**3.** $Q = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{l_0} - \frac{3}{2l} + \frac{l_0}{2l^2}\right)$.

**4.** $U_{\max} = \frac{\mathscr{E}R}{r}$; $W = \frac{1}{2}L\frac{\mathscr{E}^2}{r^2}$.

## К задачам «Квант» для младших школьников

*(см. «Квант» № 8)*

1. См. рис. 6, 7.

2. Пусть ни один мальчик не получил нуль орехов. Тогда возьмем одного из ребят и отберем у него все орехи. Пусть далее ни один не получил ровно 1 ореха. Возьмем одного из ребят, получивших больше 1 ореха, и оставим ему ровно 1 орех. И так далее (если кто-то из ребят получил рассматриваемое число орехов, то переходим к следующему числу). Но $1+2+\ldots+21=231>$ $>200$.

3. Рассмотрим случай последовательного соединения проволочек. В этом случае в цепи течет ток $I=\frac{U}{R_1+R_2}$, где $U$ — напряжение в цепи, $R_1=\rho\frac{l}{\pi r_1^2}$ — сопротивление тонкой проволочки (радиуса $r_1$), $R_2=$ $=\rho\frac{l}{\pi r_2^2}$ — сопротивление толстой проволочки (радиуса $r_2$).

Мощность, выделяемая при прохождении тока на каждом из сопротивлений, равна $N=I^2R$, т. е.

$$N_1=\frac{U^2}{(R_1+R_2)^2}R_1,\quad N_2=\frac{U^2}{(R_1+R_2)^2}R_2.$$

Согласно условию в установившемся режиме, т. е. когда температура проволочек не меняется, каждая из проволочек выделяет в окружающее ее пространство мощность, равную $N'=ks\,(T-T_0)$, где $k$ — коэффициент пропорциональности, $s=2\pi rl$ — площадь поверхности проволочки, $T$ — температура проволочки, $T_0$ — температура окружающей среды. Очевидно, что в установившемся режиме $N'=N$, т. е.

$$\frac{U^2}{(R_1+R_2)^2}R_1=k\cdot 2\,\pi r_1\,l\,(T_1-T_0),$$

$$\frac{U^2}{(R_1+R_2)^2}R_2=k\cdot 2\,\pi r_2\,l\,(T_2-T_0).$$

(Здесь $T_1$, $T_2$ — температуры тонкой и толстой проволочек соответственно.) Поделив почленно первое равенство на второе, получим

$$\frac{T_1-T_0}{T_2-T_0}=\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{r_2}{r_1}.$$

Так как $r_2>r_1$ и $R_1>R_2$, то

$$T_1-T_0>T_2-T_0,\ \text{или}\ T_1>T_2.$$

Теперь рассмотрим параллельное соединение проволочек. В этом случае падение напряжения на сопротивлениях $R_1$ и $R_2$ одно и то же, и мощности, выделяемые при прохождении тока, равны

$$N_1=\frac{U}{R_1},\quad N_2=\frac{U}{R_2}.$$

Как и в первом случае, в установившемся режиме

$$\frac{U}{R_1}=k\cdot 2\pi r_1 l\,(T_1-T_0),$$

$$\frac{U}{R_2}=k\cdot 2\pi r_2 l\,(T_2-T_0),$$

откуда

$$\frac{T_1-T_0}{T_2-T_0}=\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{r_2}{r_1}.$$

Подставив значение $R_1=\rho\frac{l}{\pi r_1^2}$ и $R_2=$ $=\rho\frac{l}{\pi r_2^2}$, получим

$$\frac{T_1-T_0}{T_2-T_0}=\frac{r_1}{r_2}<1,\ \text{или}\ T_1<T_2.$$

Итак, в первом случае раскалялась тонкая проволочка, и во втором — толстая.

4. Указание. В многоугольнике не должно быть тупых углов, поэтому подходят лишь треугольники (с углами не более 90°) и прямоугольник.

## К головоломкам

*(см. «Квант» № 6, с. 27, 40)*

**«Пирамида из домино»**. См. рис. 8.

**«Два квадрата»**.

1 5 3
2 7 6
4 8 9

**«Одинокая восьмерка»**. 123 456 789 × × 8 = 987 654 312.

**«Женские имена»**. 750 × 5917 = = 4 437 750.

*(см. «Квант» № 8, с. 55)*

**«Квадрат цифр»**. Решать головоломку подбором утомительно. Решение же ее удивительно просто: находим сумму чисел, связывающих четыре непересекающиеся пары кружков, и вычитаем ее из 45 ($1+2+\ldots$ $\ldots+9=45$), результат — цифра, которую надо поместить в девятом кружке.

**«Всюду по три»**. См. рис. 9.

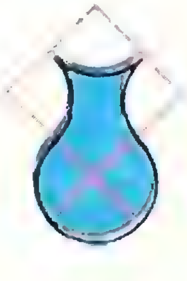


Рис. 6.

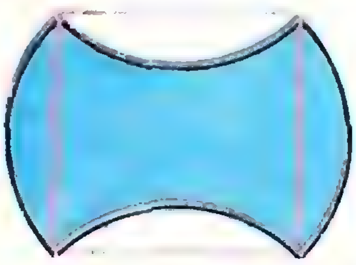


Рис. 7.

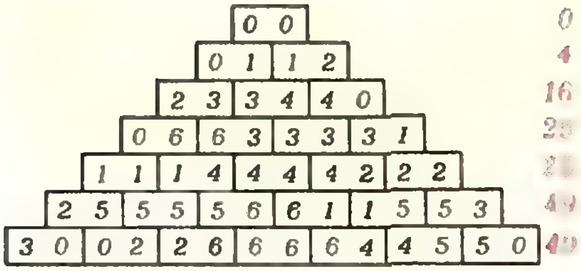


Рис. 8.

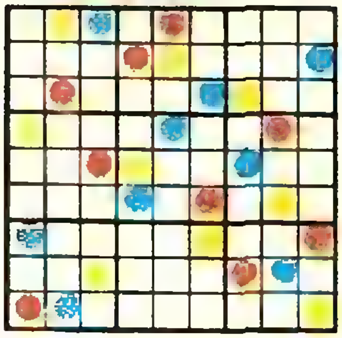


Рис. 9.

**Окончание списка. Начало см. с. 55**

*О. Костенко* (Кировск Ворошиловградской обл.) 3, 6, 8, 9; *В. Коток* (Харьков) 3, 6, 1; *Н. Крайнюков* (Куйбышев) 6; *П. Крупкин* (Димитровград) 3, 6; *А. Кудишин* (Кемерово) 3, 6; *А. Кузубов* (Краснодар) 6, 8, 1, 2; *М. Кулик* (Белосток, Чехословакия) 8, 0—2; *В. Купцов* (Аша) 3, 6; *М. Курганов* (Новомосковск Тульской обл.) 6; *В. Лахин* (Черкесск) 3, 6, 1; *А. Лебедь* (Днепропетровск) 3, 6, 8—2; *Ю. Лебединский* (Могилев) 1; *Е. Леонидов* (п. Псеозеро КАССР) 8—1; *А. Леонтьев* (Москва) 0; *П. Лещенко* (с. Юца Ставропольского кр.) 6, 8—1; *А. Листовничий* (Киев) 3, 6, 8—1; *И. Литовко* (Никополь) 6; *О. Лищенко* (Киев) 3, 6, 8—2; *Л. Лознер* (Минск) 6, 8, 0—2; *С. Люксютов* (Киев) 8, 0, 1; *М. Магид* (Даугавпилс) 3, 6, 8, 9, 2; *Н. Малофеев* (с. Чув. Дрожжаное ТАССР) 6; *С. Мальков* (Петропавловск-Камчатский) 3, 6; *Е. Мартынова* (Нежин) 6, 2; *Ю. Мартынов* (Алмалык) 0; *Е. Машеров* (Ананьев) 8, 0, 2; *А. Мгеладзе* (Тбилиси) 6; *Ю. Мельниченко* (Байрам-Али) 3; *Г. Метревели* (Цхинвали) 6, 0; *П. Мидодашвили* (Цхинвали) 9, 1; *О. Мирзеабасов* (Черновцы) 6, 8, 1, 2; *А. Мичевич* (Полоцк) 8; *И. Морозов* (Горький) 8—1; *А. Морозовский* (Киев) 3, 6, 8, 0; *А. Мохов* (Бобруйск) 2; *В. Муха* (Вольногорск) 1; *Ю. Мухарский* (Киев) 8—2; *Ю. Мухин* (Улан-Удэ) 6; *Д. Надеждин* (Курган) 8, 9, 1; *Ю. Наумов* (Новосибирск) 6; *Н. Никифоров* (Великие Луки) 3; *В. Николайчик* (Старые Дороги) 9, 1; *И. Овсянников* (Саратов) 6, 8—1; *Е. Огневицкий* (Днепропетровск) 6; *К. Оспанов* (Байрам-Али) 3; *Н. Охрименко* (Ромны) 9—2; *А. Охримчук* (Выкса) 3, 6; *Г. Палагин* (Москва) 8—1; *В. Пилей* (Харьков) 9; *О. Певзнер* (Днепропетровск) 8—0; *И. Пелецкий* (Москва) 9; *В. Петров* (Великие Луки) 8; *А. Петухов* (Новокузнецк) 3; *В. Писецкий* (Запорожье) 3, 6, 9; *Е. Платонова* (Тула) 9; *П. Побылица* (Ленинград) 0, 2; *В. Позняк* (Барановичи) 3, 6; *Е. Понаморев* (п. Черноголовка Московской обл.) 3, 6, 8, 0, 1; *С. Попов* (Москва) 0; *В. Потемкин* (Великие Луки) 6, 8; *М. Райхман* (Винница) 6; *Л. Расин* (Даугавпилс) 3, 6, 8—0, 2; *И. Резников* (Пржевальск) 0; *В. Реммель* (п. Вайда ЭстССР) 8; *В. Розовский* (Минск) 6; *В. Рубель* (Ставрополь) 3, 6, 9, 1, 2; *А. Рудерман* (Ленинград) 3, 6, 8, 9, 1, 2; *И. Саенко* (Минск) 6; *Т. Саргазаков* (Новосибирск) 3, 9, 0, 2; *И. Сатаев* (Саратов) 8, 0, 2; *А. Сахно* (с. Чапаевка Запорожской обл.) 2; *П. Свистун* (Магнитогорск) 3, 6; *А. Святченко* (Кишинев) 1; *С. Секацкий* (п. Кант КиргССР) 6; *В. Серебрянный* (Харьков) 6; *И. Сидоркин* (Горький) 9, 0, 2; *В. Склярчук* (Борщев) 3, 6; *Ю. Скопинцев* (Львов) 2; *Ю. Скрынников* (Рустави) 6, 8, 1, 2; *И. Слюсарева* (Запорожье) 9, 2; *А. Смоляков* (Кадиевка) 3, 6, 9—2; *А. Смулько* (Пинск) 3; *Ю. Сопозобов* (Тамбов) 2; *Е. Сомина* (Саратов) 9; *В. Старшенко* (Запорожье) 3, 6, 8, 9, 1, 2; *Ю. Страде* (Прельский р-н ЛатвССР) 6; *М. Суслов* (Москва) 6, 8, 0, 2; *Е. Сысолятина* (Желтые Воды) 3; *А. Третьяков* (п. Тайцы Ленинградской обл.) 6, 1; *К. Третьяченко* (Киев) 3, 6, 8—0, 2; *К. Трутнев* (Казань) 9—2; *Е. Усина* (Великие Луки) 6; *М. Файнберг* (Великие Луки) 1; *М. Фалей* (Целиноград) 9, 1, 2; *А. Фальковский* (Алма-Ата) 9; *А. Фарбер* (Тамбов) 6, 0, 1; *Н. Федин* (Омск) 3, 6, 8—2; *А. Фрумкин* (Курск) 3, 6, 8, 9, 2; *А. Хабаров* (Павловский Пасад) 8, 2; *М. Хазан* (Киев) 3; 6, 9, 0, 2; *С. Цветков* (Кременчуг) 6; *М. Цодыкс* (Новокузнецк) 8, 0; *И. Цуркис* (Калининград Московской обл.) 6; *В. Чеканов* (Быхов) 2; *Л. Черных* (Лида) 8, 0; *А. Чурилов* (Харьков) 8; *А. Шведов* (Запорожье) 6, 8 — 0, 2; *Э. Щцфрин* (Днепропетровск) 3, 8, 9; *С. Школянский* (Воронеж) 2; *Б. Щамхалова* (с. Кули ДагАССР) 1; *Е. Яненко* (Киев) 9, 0, 2.

Номер оформили художники:
Л. Денисенко, М. Дубах, М. Левкович,
Э. Назаров, И. Смирнова, П. Чернуский.

Корректор *Е. Строева*

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 21/VI-76 г.
Подписано в печать 2/VIII-76 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,51 Т-15110
Тираж 313950 экз.
Цена 30 коп. Заказ 1326
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

*Рукописи не возвращаются*

# ПЕСОЧНЫЕ ЧАСЫ

В кружочках верхнего треугольника на рисунке размещены пятнадцать фишек. Надо перевести все фишки в нижний треугольник, соблюдая следующие правила.

1) Фишки могут передвигаться либо на соседний кружок, либо прыгать через соседнюю фишку на следующий свободный кружок.

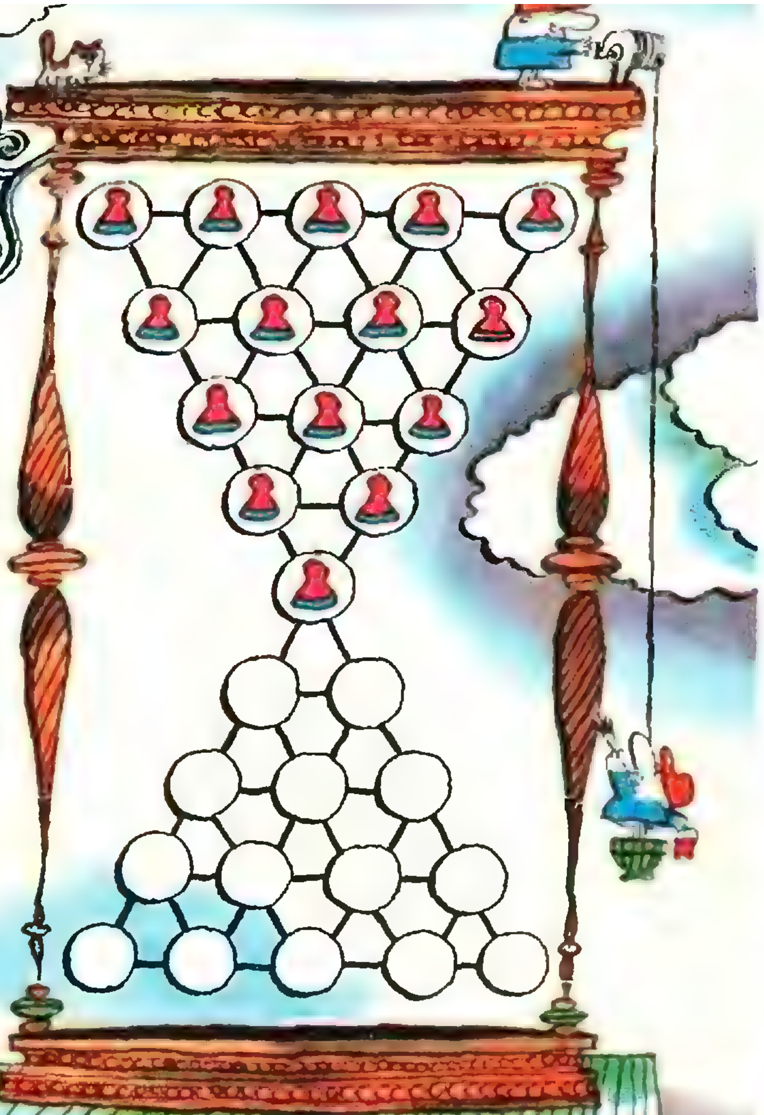
2) Перемещения и прыжки могут осуществляться только по линиям, соединяющим кружки.

3) Ходом считается также каскад прыжков, когда фишка (согласно п. 2) совершает прыжки один за другим (но не перемещения).

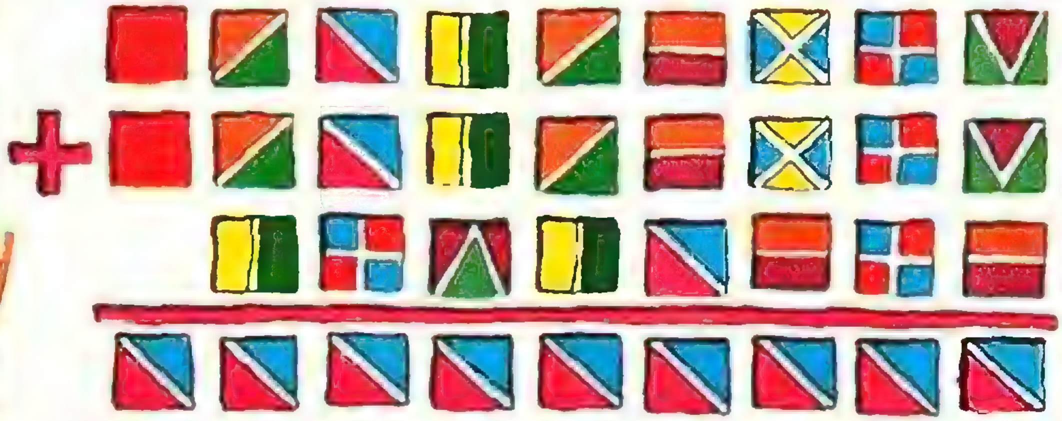
Сколько ходов потребуется вам, чтобы решить эту задачу?

*Л. Мочалов*

*Рис. Э. Назарова*

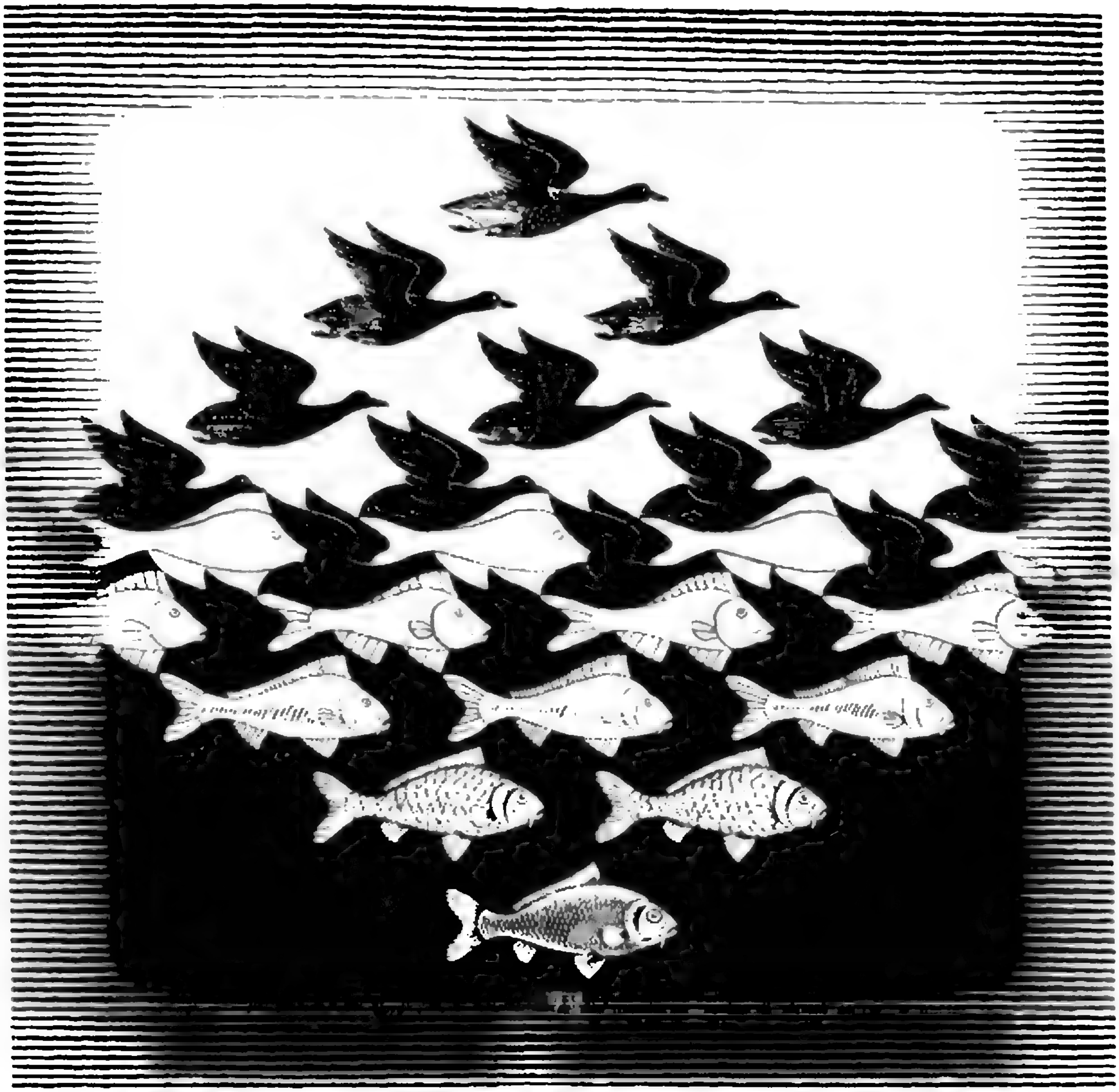


# АРИФМЕТИЧЕСКИЙ РЕБУС



На рисунке зашифровано сложение трех чисел. (Одинаковые значки обозначают одинаковые цифры.) Задача имеет единственное решение. Найдите его.

*Я. Алексеев*



Вы не раз уже видели на обложках нашего журнала репродукции картин замечательного голландского художника М. Эшера (1898—1971). Почти во всех его работах незаурядная изобретательность сочетается с точным математическим расчетом. Эту картину, в которой осуществлен переход от плоского изображения к объемному, Эшер назвал «Небо и вода».

# НОМЕР
# 10

Основан в 1970 году
1976

# Квант 10

*Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы*

Главный редактор
*академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
*академик* А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
*(главный художник)*
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
*(зам. главного редактора)*
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
*(зам. главного редактора)*
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

**Редакция:**
В. Н. Березин
А. Н. Виленкин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова
*(художественный редактор)*
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чернова
*(зав. редакцией)*

**В НОМЕРЕ:**

---

2 *А. Колмогоров.* Группы преобразований
6 *Л. Садовский, М. Аршинов.* Группы
13 *П. Блиох.* В фокусе линзы

**Лаборатория «Кванта»**

21 *С. Соскин.* Капиллярные волны в струе

**Математический кружок**

24 *Э. Белага.* Алгебра — древняя и современная

**Задачник «Кванта»**

32 Задачи М406 — М410; Ф418 — Ф422
34 Решения задач М365 — М370; Ф373 — Ф377

**По страницам школьных учебников**

41 *А. Земляков.* Осторожно — максимум!

**Практикум абитуриента**

46 *Я. Суконник, П. Горнштейн.* Наш выбор — теорема синусов!

**Рецензии, библиография**

51 *В. Лешковцев.* Новое о гравитации

**Информация**

52 XXV Олимпиада по физике в Польше
55 *М. Алексеев, В. Беликов, О. Богуславская.* Лингвистика+математика

**«Квант» для младших школьников**

56 Задачи
57 *А. Дейнега.* Логические задачи и неравенства
60 *Б. Кордемский.* Считайте обдуманно
61 **Ответы, указания, решения**
63 **Анкета**
**Смесь** (*с. 5, 20, 31, 42*)

---

*© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1976*

**Понятие группы занимает очень большое место в современной математике и физике. В то же время элементы теории группы просты и вполне доступны школьникам. Читателям, знакомым с понятиями «отображение множества на множество» и «композиция отображений» (которые входят по новой программе в курс геометрии VI—VIII классов), проще всего начать знакомство с теорией групп на примерах групп преобразований, в частности, групп перемещений на плоскости. Небольшая статья А. Колмогорова о группах преобразований может служить введением к изучению групп симметрии. Общей, «абстрактной», теории групп посвящена статья Л. Садовского и М. Аршинова. В ней, впрочем, также содержится много материала, относящегося специально к группам преобразований. Наконец, в статье Э. Белаги, помещенной в разделе «Математический кружок», вы найдете множество задач, решая которые, вы освоитесь с операцией «композиция» (не только отображений) и увидите, как применяется теория групп при решении задач.**

*А. Колмогоров*

# ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Задача моей короткой заметки состоит в том, чтобы сделать более доступным и связать с новыми школьными учебниками содержание публикуемой далее статьи Л. Садовского и М. Аршинова «Группы».

По новым школьным программам школьники в пятом классе знакомятся с понятием «отображение множества на множество». В шестом классе они знакомятся с понятием «обратимое отображение» (в другой терминологии, привычной многим читателям «Кванта», — «взаимно однозначное отображение»).

Каждое обратимое отображение имеет *обратное* отображение. Например, поворот $R_O^{70°}$ вокруг точки $O$ на 70° против часовой стрелки (рис. 1) имеет своим обратным отображением поворот вокруг той же точки $O$ на 70°, но уже по часовой стрелке. В новом учебнике геометрии этот поворот обозначается $R_O^{-70°}$ (поворот вокруг точки $O$ на *минус* 70°).

В седьмом и восьмом классах школьники знакомятся с понятием «композиция отображений». Рассмотрим для примера два перемещения плоскости, то есть два отображения плоскости на себя, сохраняющих расстояния. В качестве первого перемещения возьмем осевую симметрию $S_x$ с осью $x$, в качестве второго — осевую симметрию $S_y$ с осью $y$, перпендикулярной оси $x$ (рис. 2). Что получится, если произвести эти два отображения последовательно: сначала $S_x$, а потом $S_y$?

Точка $P$ при осевой симметрии $S_x$ перейдет в симметричную ей относительно оси $x$ точку $P_1$, а при симметрии $S_y$ точка $P_1$ перейдет в точку $P_2$. Сказанное можно записать в виде равенства

$$P_2 = S_y(S_x(P)).$$

С другой стороны, точку $P_2$ можно получить непосредственно из точки $P$ при помощи центральной симметрии $Z_O$ с центром $O$ — точкой пересечения прямых $x$ и $y$:

$$P_2 = Z_O(P).$$

Докажите самостоятельно, что для любой точки $P$ плоскости

$$S_y(S_x(P)) = Z_O(P)$$

(предполагается, как было сказано, что прямые $x$ и $y$ перпендикулярны и пересекаются в точке $O$).

Говорят, что *отображение* $Z_O$ *есть «композиция» отображений* $S_x$ и $S_y$; записывают этот факт в виде равенства

$$Z_O = S_y \circ S_x.$$

Здесь кружочек $\circ$ есть знак *операции над отображениями*. Подобно тому, как операции сложения (знак «+») или умножения (знак «×»), примененные к паре чисел $\langle a, b \rangle$, дают новые числа:

$$c = a + b, \quad d = a \times b,$$

операция композиции, примененная к двум отображениям, порождает новое отображение.

Нас будут занимать обратимые отображения некоторого множества $M$ на себя. Такие отображения называют «преобразованиями множества $M$». В качестве примеров приведем перемещение плоскости, гомотетию, преобразование подобия.

Пусть множество $M$ есть плоскость. Рассмотрим *множество* $G$ *всех перемещений этой плоскости*, то есть множество всех отображений $F$ плоскости $M$ на себя, сохраняющих расстояния: для любых двух точек $P$ и $Q$ плоскости $M$

$$|F(P)F(Q)| = |PQ|.$$

Все перемещения обратимы, и потому по указанной выше терминологии они являются *преобразованиями плоскости*.

Наше множество $G$ обладает двумя интересными свойствами:

(1) *композиция двух преобразований из* $G$ *принадлежит* $G$, т. е. композиция двух перемещений есть перемещение;

(2) *вместе с преобразованием* $F$ *множеству* $G$ *всегда принадлежит и обратное преобразование*, то есть преобразование, обратное к перемещению, также есть перемещение.

Определение. Совокупность преобразований множества $A$, обладающую свойствами (1) и (2), называют *группой преобразований множества* $A$.

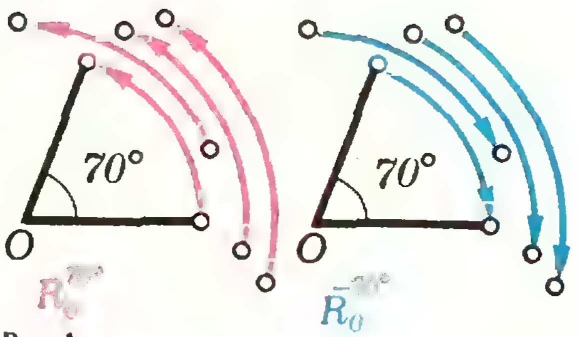


Рис. 1.

В силу сказанного множество всех перемещений плоскости может служить примером группы преобразований плоскости. Другим примером может служить множество всех преобразований подобия.

Существуют, однако, и гораздо более простые примеры. Рассмотрим, например, *множество* $G_1$ *всех перемещений, которые равносторонний треугольник* $ABC$ (рис. 3) *отображают на самого себя*. Легко указать шесть таких перемещений:

1) тождественное отображение $E$, отображающее любую точку $P$ плоскости на себя;

2) поворот $R_O^{120°}$ вокруг центра треугольника $O$ на 120° против часовой стрелки;

3) поворот $R_O^{-120°}$ вокруг центра $O$ на 120° по часовой стрелке;

4), 5), 6) осевые симметрии $S_{(OA)}$, $S_{(OB)}$, $S_{(OC)}$.

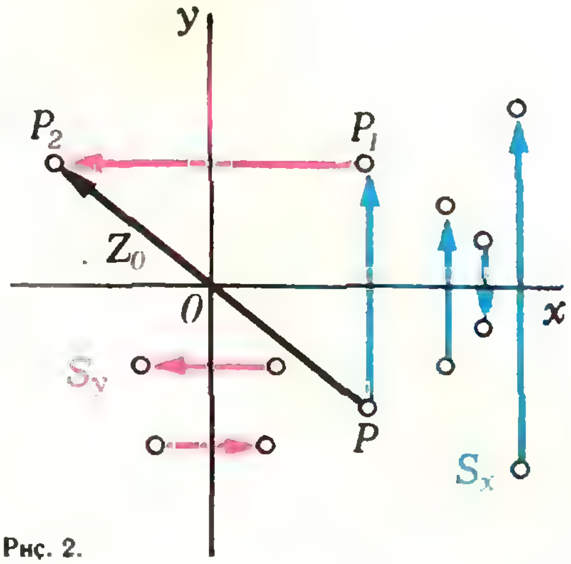


Рис. 2.

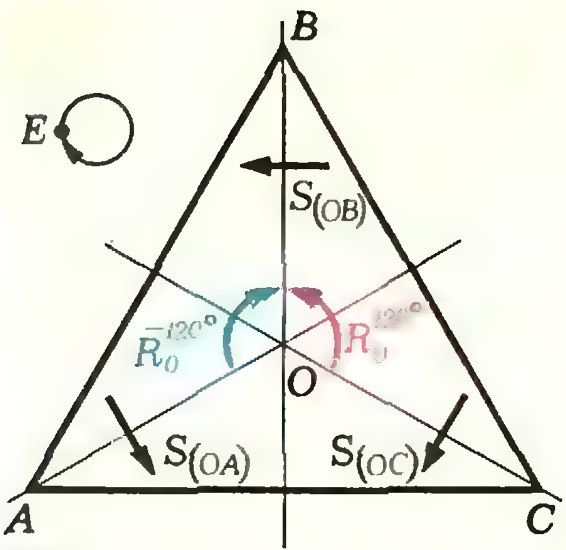


Рис. 3.

Задача 1. Докажите, что множество $G_1$ состоит только из перечисленных шести перемещений.

Задача 2. Проверьте, что каждое из перемещений $E$, $S_{(OA)}$, $S_{(OB)}$, $S_{(OC)}$ обратно самому себе, а перемещения $R_O^{120°}$ и $R_O^{-120°}$ обратны друг другу.

Задача 3. Проверьте и дополните таблицу 1 «композиций» для множества $G_1$.

Решив задачи 2 и 3, вы установите, что множество $G_1$ обладает свойствами (1) и (2) из определения группы преобразований, то есть что $G_1$ — группа преобразований плоскости. Можно доказать более общий факт: *множество $G_\Phi$ всех перемещений плоскости, которые отображают какую-либо заданную фигуру $\Phi$ на себя, есть группа преобразований плоскости*. Доказательство не сложно (проведите его!). Группа $G_\Phi$ называется *группой симметрии* фигуры $\Phi$.

Из таблицы композиций множества $G_1$ мы видим, что *композиция перемещений не всегда переместительна*:

$$S_{(OA)} \circ S_{(OB)} = R_O^{-120°} \neq$$
$$\neq R_O^{120°} = S_{(OB)} \circ S_{(OA)}.$$

Можно, однако, доказать, что *операция композиции преобразований множества $M$ всегда обладает свойством ассоциативности*:

$$F_3 \circ (F_2 \circ F_1) = (F_3 \circ F_2) \circ F_1$$

(попробуйте сделать это).

Таблица 1

| $\circ$ | $E$ | $S_{(OA)}$ | $S_{(OB)}$ | $S_{(OC)}$ | $R_O^{120°}$ | $R_O^{-120°}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$ | $E \circ E = E$ | $E \circ S_{(OA)} = S_{(OA)}$ | $E \circ S_{(OB)} = S_{(OB)}$ | $E \circ S_{(OC)} = S_{(OC)}$ | $E \circ R_O^{120°} = R_O^{120°}$ | $E \circ R_O^{-120°} = R_O^{-120°}$ |
| $S_{(OA)}$ | $S_{(OA)} \circ E = S_{(OA)}$ | $S_{(OA)} \circ S_{(OA)} = E$ | $S_{(OA)} \circ S_{(OB)} = R_O^{-120°}$ | | | |
| $S_{(OB)}$ | | $S_{(OB)} \circ S_{(OA)} = R_O^{120°}$ | | | | |
| $S_{(OC)}$ | | | | | | |
| $R_O^{120°}$ | | | | | | |
| $R_O^{-120°}$ | | | | | | |

Любое перемещение, отображающее треугольник $ABC$ на себя, отображает множество $U=\{A, B, C\}$ вершин треугольника на себя в соответствии с таблицей 2.

В нижней строке даны обозначения отображений множества $U$ на себя, заданных нашей таблицей. Например, функция $s_2$ (вспомните: отображение и функция — синонимы!) полностью задается равенствами

$$s_2(A) = C,\ s_2(B) = B,\ s_2(C) = A.$$

Область ее определения есть множество $U$, множество значений — то же множество $U$. Конечно, ее нельзя путать с отображением $S_{(OB)}$, которое отображает плоскость $M$ на себя!

Преобразования $e$, $s_1$, $s_2$, $s_3$, $r_1$, $r_2$ образуют *группу $G_2$ преобразований множества $U$*.

**Задача 4.** Запишите таблицу композиций для группы $G_2$. Укажите для каждого ее элемента обратный элемент.

Таблица 2

| $x$ | $E(x)$ | $S_{(OA)}(x)$ | $S_{(OB)}(x)$ | $S_{(OC)}(x)$ | $R_O^{120^\circ}(x)$ | $R_O^{-120^\circ}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$<br>$B$<br>$C$ | $A$<br>$B$<br>$C$ | $A$<br>$C$<br>$B$ | $C$<br>$B$<br>$A$ | $B$<br>$A$<br>$C$ | $C$<br>$A$<br>$B$ | $B$<br>$C$<br>$A$ |
| | $e$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $r_1$ | $r_2$ |

Группа перемещений $G_1$ и определенная сейчас группа $G_2$ в некотором смысле слова «устроены совершенно одинаково». Они «изоморфны». Что это значит на строгом языке математики, вы можете узнать из статьи Л. Садовского и М. Аршинова.

**Задача 5.** Исследуйте аналогичным образом:

а) группу симметрии отрезка $AB$;

б) группу симметрии квадрата $ABCD$.

---

# Новый взгляд на старую задачу

Задача эта такова. *В бассейн проведено две трубы. Через одну бассейн может быть наполнен за 4 часа, а через другую — за 12 часов. За какое время наполнится бассейн, если будут открыты одновременно обе трубы?*

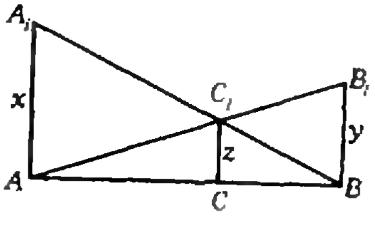
Напомним обычное решение этой задачи. За один час первая труба наполняет $^1/_4$, а вторая — $^1/_{12}$ часть всего бассейна. Обе трубы за один час наполнят $^1/_4 + {}^1/_{12}$, то есть $^1/_3$ бассейна, поэтому весь бассейн будет наполнен за 3 часа.

А теперь проделаем следующее: из концов произвольного отрезка $AB$ восставим по одну сторону от него два перпендикуляра: $|AA_1|=4$, $|BB_1|=12$ (см. рисунок). Из точки $C_1$ пересечения отрезков $A_1B$ и $AB_1$ опустим перпендикуляр $C_1C$ на прямую $AB$, тогда $|C_1C|=3$, что равно найденному выше значению.

Докажем, что это не случайное совпадение. Рассмотрим общий случай: пусть первая труба наполняет бассейн за $x$ часов, а вторая — за $y$ часов. Обе трубы при совместной работе наполнят бассейн за $z$ часов, причем

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

При любых допустимых значениях $x$ и $y$ треугольник $CBC_1$ подобен треугольнику $ABA_1$, а треугольник $ACC_1$ подобен треугольнику $ABB_1$, поэтому



$$\frac{z}{x}=\frac{|BC|}{|AB|},\ \frac{z}{y}=\frac{|AC|}{|AB|},$$

откуда

$$\frac{z}{x}+\frac{z}{y}=1,$$

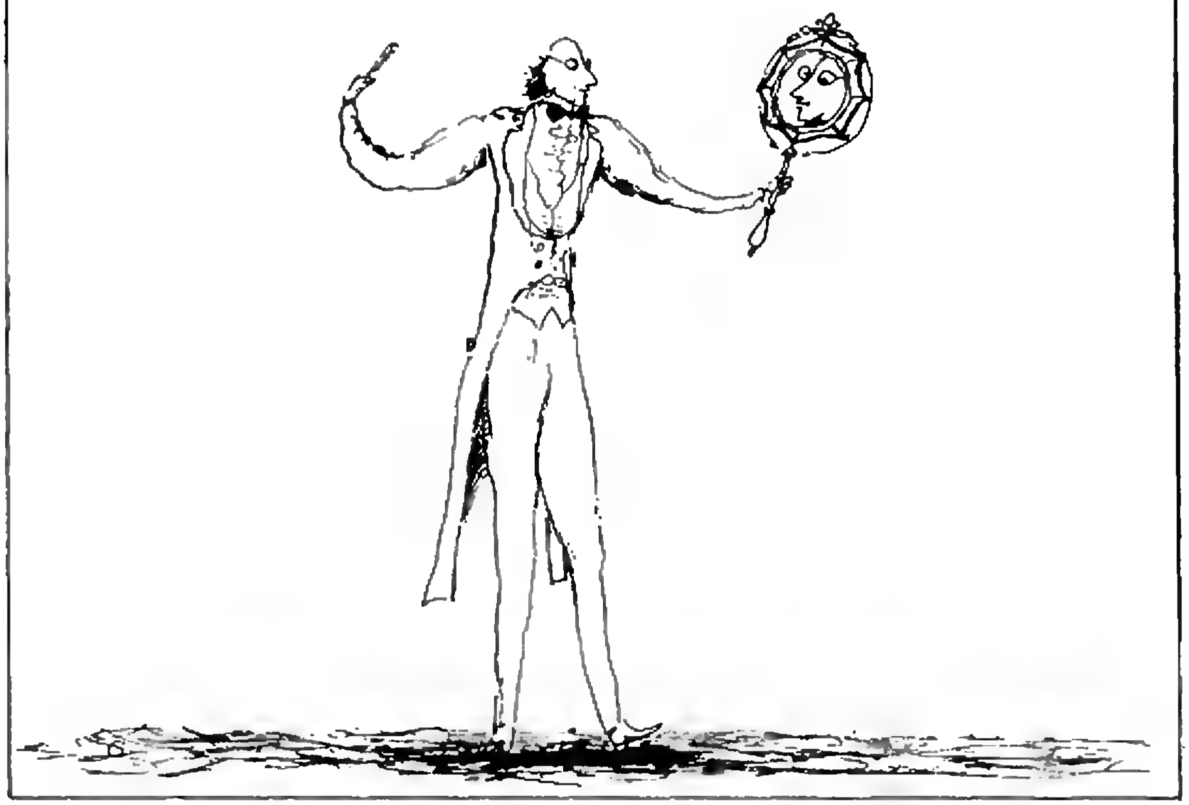
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

Аналогично можно найти сопротивление $z$ цепи, составленной из двух сопротивлений величины $x$ и $y$, включенных параллельно, потому что и в этом случае $1/z=1/x+1/y$. Последний пример дает возможность решать задачу о бассейнах «нажатием кнопки». Составим цепь из двух параллельно включенных сопротивлений величиной 4 ома и 12 ом и измерим ее сопротивление — получим ответ: 3 (ома)

*Ю. Метт*

*Л. Садовский,*
*М. Аршинов*

# ГРУППЫ



*Математика двадцать первого века может сильно отличаться от нашей; возможно, школьник начнет изучение алгебры с теории групп подстановок, что он мог бы сделать сейчас, если бы не установившиеся традиции.*

Саймон Ньюкомб, 1893 год

**Алгебра изучает различные действия (операции) и законы, которым они подчиняются. Эти операции могут быть определены не только над числами, многочленами и векторами, что вам известно из школьного курса математики и физики, но и над элементами иной природы.**

**В статье А. Колмогорова вы познакомились с операцией композиции перемещений и понятием «группа преобразований». Здесь речь пойдет об абстрактной алгебраической конструкции, называемой группой.**

Чтобы выработать понятие группы в его современной форме, математикам потребовалось почти сто лет. Двести лет назад знаменитый французский ученый Жозеф-Луи Лагранж (1736—1813), изучая решение алгебраических уравнений в радикалах, оперировал фактически с понятием группы, хотя и не пользовался самим этим термином. Им была сформулирована и доказана в 1771 году первая существенная теорема в теории групп.

Исследования Лагранжа продолжили норвежский математик Нильс Хенрик Абель и француз Эварист

Галуа*), которые впервые ввели термин «группа». Элементами рассматриваемых ими групп были подстановки корней алгебраического уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \\ + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Группы подстановок изучали также Огюстен-Луи Коши (1789—1857), Артур Кэли (1821—1903), Камилл Жордан (1838—1922) и другие известные математики. Принятое ныне определение группы было предложено Кэли в 1854 году.

С понятием группы тесно связано широко распространенное в природе *свойство симметрии*. Симметричны не только снежинки, пчелиные соты, кристаллы поваренной соли и кварца. Элементарные частицы тоже подчиняются «закону симметрии» — зарядовому сопряжению, согласно которому каждой частице соответствует античастица. Проявлением симметрии окружающего нас мира являются принцип относительности Галилея, законы сохранения энергии, количества движения, электрического заряда и др.

Изучение закономерностей симметрии, общих для самых различных ее проявлений, и привело к созданию специального математического аппарата, называемого *теорией групп*.

В основе определения группы лежит понятие *бинарной операции*.

## Бинарная операция

Предположим, что каждой упорядоченной паре $a$ и $b$ элементов некоторого произвольного множества $G$ поставлен в соответствие некоторый элемент $c$ того же множества. Тогда говорят, что на множестве $G$ определена *бинарная операция*. Результат применения этой операции к заданной паре элементов записывают в символическом виде

$$a * b = c.$$

Иногда для бинарной операции избирают привычный термин, именуя ее *сложением*, *умножением* или *композицией*. Примером бинарной операции является *композиция перемещений на плоскости*.

Произведения $a * b$ и $b * a$ могут оказаться одинаковыми или различными. В первом случае говорят, что $a$ и $b$ *коммутируют* (перестановочны), во втором — *не коммутируют*. Бинарная операция $*$ называется *коммутативной*, если для любых $a$, $b$ будет $a * b = b * a$, и некоммутативной, если найдется хотя бы одна пара элементов $a$, $b$, для которых $a * b \neq b * a$.

Задача 1. Проверьте, что

а) обычное сложение является бинарной операцией на множестве $Z$ всех целых чисел;

б) умножение также является бинарной операцией на множестве $Z$.

Таким образом, на одном и том же множестве можно, вообще говоря, определить различные бинарные операции.

Задача 2. Являются ли на множестве $Z$ бинарными операциями

а) деление;

б) вычитание?

Коммутативны ли эти операции?

Задача 3. Являются ли сложение, вычитание, умножение и деление бинарными операциями на множестве всех нечетных чисел?

Есть лишь две возможности перемножить заданную тройку элементов $a$, $b$, $c$, не меняя их порядка: $(a*b)*c$ или $a*(b*c)$. Если

$$(a * b) * c = a * (b * c),$$

то тройка элементов $a$, $b$, $c$ называется *ассоциирующей*; для нее вполне определенный смысл имеет символ $a * b * c$. Если же для операции $*$ каждая тройка элементов ассоциирует, то и сама операция $*$ называется *оциативной*.

Задача 4. Ассоциативны ли следующие операции:

а) композиция перемещений;

б) сложение и умножение действительных (комплексных) чисел;

в) деление и возведение чисел в степень $(a * n = a^n)$?

---

*) Об этих математиках см. «Квант», 1973, № 10 и 1976, № 5.

## Определение группы

Множество $G$ с определенной на нем бинарной операцией $*$ называется *группой*, если выполняются три аксиомы:

Аксиома I (существование единичного элемента). *Существует единичный элемент $e$ множества $G$ такой, что*

$$e * a = a * e = a$$

*для любого элемента $a$ из $G$.*

Аксиома II (существование обратного элемента). *Для каждого элемента $a$ множества $G$ существует в $G$ единственный элемент $a^{-1}$ такой, что*

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Аксиома III (ассоциативность бинарной операции). *Для любой тройки $a$, $b$, $c$ элементов из $G$ выполняется равенство*

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Если бинарная операция коммутативна, то группа называется *абелевой* (в честь Абеля) или *коммутативной*, в противном случае — *неабелевой* или некоммутативной.

Итак, множество превращается в группу, как только на нем задается бинарная операция, подчиняющаяся трем указанным аксиомам. При этом ничего не предполагается относительно самих элементов этого множества: ими могут быть числа, многочлены, перемещения или объекты какой-либо иной природы.

Теперь, когда дано определение группы, каждый обнаружит, что с группами он, оказывается, давно знаком. В самом деле, многие числовые множества относительно обычных операций сложения и умножения образуют группу. Так, группой является множество целых чисел с операцией сложения, ее называют *аддитивной группой целых чисел.* Это абелева группа, ее «единичным» элементом служит число нуль: $0+c=c+0=c$, обратным для произвольного числа — ему противоположное: $c+(-c)=0$.

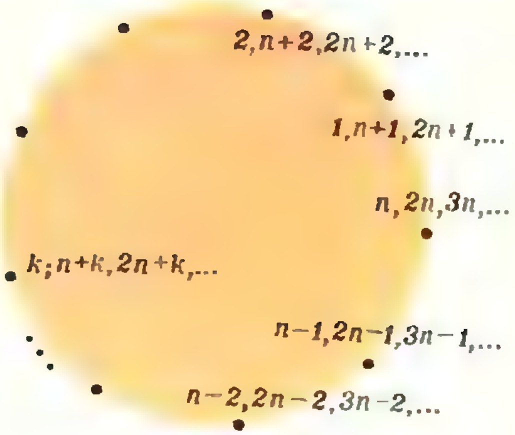


Рис. 1.

**Группу образует также множество G всех перемещений, отображающих на себя некоторую фигуру (тело) F. Эта группа служит характеристикой симметричности фигуры F и называется группой симметрии фигуры F.**

Задача 5. Проверьте, что множества рациональных и действительных чисел с операцией сложения являются группами (*аддитивные группы рациональных и действительных чисел*).

Задача 6. Докажите, что

а) положительные рациональные;

б) положительные действительные числа по умножению образуют группы (*мультипликативные группы положительных рациональных и положительных действительных чисел*).

Задача 7. Образуют ли группы множества рациональных и действительных чисел с операцией умножения?

## Три лица одной группы

Лицо первое (арифметическое). Зафиксируем натуральное число $n$ $(n \neq 1)$ и рассмотрим множество (обозначаемое через $T_n$) остатков от деления каждого натурального числа на $n$. Ясно, что различных остатков ровно $n$, они равны соответственно $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Всякие два числа $k$ и $l$, которые при делении на $n$ дают равные остатки, называют *сравнимыми по модулю $n$* и пишут

$$k \equiv l \pmod{n}.$$

Разобьем теперь множество $N$ натуральных чисел на $n$ классов по следующему принципу.

В нулевой класс (для его обозначения удобно пользоваться тем же числом 0) собираем все те числа, которые при делении на $n$ дают в

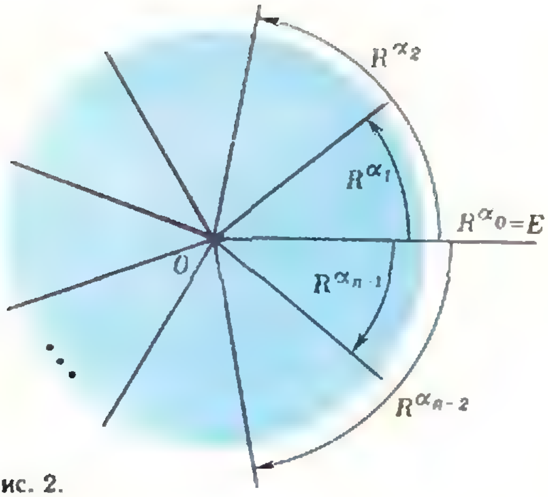


Рис. 2.

остатке 0, то есть все такие $a$, что $a \equiv 0 \pmod{n}$.

В первый класс собираем числа $a \equiv 1 \pmod{n}$, т. е. дающие остаток 1 при делении на $n$.

Вообще в $k$-й класс помещаем все числа $a \equiv k \pmod{n}$. Для обозначения этого класса используем то же число $k$ (рис. 1).

Определим теперь бинарную операцию на множестве $Z_n$ построенных классов. Пусть $k$ и $l$ — два любых класса. Выберем в каждом из них по любому числу, например, $a$ и $b$:

$$a \equiv k \pmod{n}, \quad b \equiv l \pmod{n}.$$

Составим обычную сумму $a+b$ и разделим ее на $n$. Тогда в остатке получим либо $k+l$ (если $k+l<n$), либо $k+l-n$ (если $k+l \geqslant n$).

Значит, имеет смысл следующее определение операции $\oplus$ (назовем ее «сложением классов»):

$$k \oplus l = \begin{cases} k+l, & \text{если } k+l<n, \\ k+l-n, & \text{если } k+l \geqslant n. \end{cases} \quad (1)$$

Например, при $n=3$ имеется три класса: 0, 1, 2. Таблица сложения этих классов выглядит следующим образом:

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

Множество $Z_n$ относительно операции $\oplus$ образует группу, называемую *группой вычетов по модулю* $n$. В самом деле, все групповые аксиомы выполнены: нейтральным элементом служит нулевой класс; элементом, противоположным классу $k$ $(k \neq 0)$, является класс $n-k$ $(-0=0)$. Наконец, операция $\oplus$ ассоциативна (проверьте!).

Лицо второе (геометрическое). Множество поворотов плоскости вокруг центра $O$ правильного $n$-угольника на углы $\alpha$, при которых этот $n$-угольник отображается на себя, также образует группу относительно операции $\circ$ композиции перемещений. Поворотом, обратным для $R^{\alpha}$, является $R^{-\alpha}$:

$$R^{\alpha} \circ R^{-\alpha} = E.$$

В этой группе $n$ элементов (повороты $R^{\alpha_k}$, где $\alpha_k = k \cdot \frac{360^\circ}{n}$, $k=0, 1, \ldots, n-1$; см. рис. 2), а правило композиции поворотов можно записать так:

$$R^{\alpha_k} \circ R^{\alpha_m} = \begin{cases} R^{\alpha_{k+m}}, & \text{если } k+m<n, \\ R^{\alpha_{k+m-n}}, & \text{если } k+m \geqslant n. \end{cases}$$

Это правило очень похоже на правило (1) сложения классов, используя его, мы могли бы написать

$$R^{\alpha_k} \circ R^{\alpha_m} = R^{\alpha_{k \oplus m}}. \quad (2)$$

Лицо третье (комплексное). Его смогут разглядеть те, кто знаком с комплексными числами и действиями над ними. Нас интересует сейчас множество всех комплексных корней степени $n$ из единицы, то есть множество решений уравнения $z^n=1$.

Если $z=\cos\alpha + i\sin\alpha$ — тригонометрическая форма такого числа, то, согласно правилу умножения комплексных чисел, $z^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$. Равенство $z^n=1$ выполняется при $n\alpha = 2\pi k$, где $k$ — целое, поэтому все $n$ различных корней из единицы задаются формулой

$$z_k = \cos\frac{2\pi}{n}k + i\sin\frac{2\pi}{n}k$$

$(k=0, 1, \ldots, n-1)$. Легко проверить, что множество всех этих корней образует группу со следующим правилом умножения:

$$z_k \cdot z_l = z_{k \oplus l}. \qquad (3)$$

Напомним, что каждое комплексное число $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ с модулем $r$ и аргументом $\alpha$ изображается в прямоугольной системе координат вектором длины $r$, составляющим с осью $Ox$ угол $\alpha$. Поэтому числа $z_k$ изобразятся векторами длины 1 так, что каждые два соседних вектора составят между собой угол $2\pi/n$. Иными словами, концы этих векторов разместятся в вершинах правильного $n$-угольника (рис. 3).

Теперь ясно, что группа корней $n$-й степени из единицы и группа поворотов $R^{\alpha_k}$ по существу «не отличаются» и «схожи» с группой $Z_n$. Дабы уточнить последнюю фразу, следует ввести одно из важнейших понятий математики.

## Понятие изоморфизма

Рассмотрим какие-либо две группы $G$ и $H$. Предположим, что между элементами этих групп установлено взаимно однозначное соответствие (обозначим его буквой $\varphi$), то есть задано обратимое отображение $\varphi$ множества $G$ на множество $H$. Выберем в $G$ произвольную пару элементов $a$, $b$; им соответствуют некоторые элементы $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ в $H$. Так как $G$ и $H$ — группы, то определены произведения $ab \in G$, $\varphi(a)\varphi(b) \in H$, а также $\varphi(ab) \in H$.

Определение. Группы $G$ и $H$ называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $\varphi$ группы $G$ на группу $H$, сохраняющее произведение, то есть такое, что для любых $a$, $b \in G$ будет

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab). \qquad (4)$$

Это отображение называется *изоморфизмом*.

Изоморфизм двух групп означает, что законы, которым подчиняются операции в обеих группах, *идентичны*, и что всякое свойство, присущее операции в одной из групп, в равной

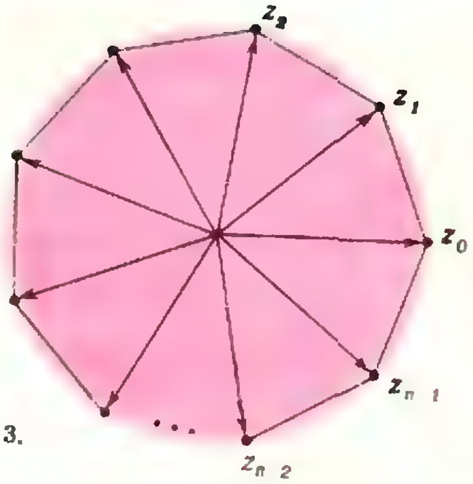


Рис. 3.

мере присуще операции в изоморфной ей группе. Поэтому изоморфные группы называют «абстрактно равными» и отождествляют между собой, что приводит к возникновению одной абстрактной группы: группы, относительно природы элементов которой не делается никаких конкретных предположений.

Примером изоморфных групп являются три только что рассмотренные группы: и группа вычетов, и группа поворотов, и группа корней из единицы в действительности — лишь три реализации одной и той же абстрактной группы.

Изоморфизмом $\psi$ между группой поворотов и группой $Z_n$ является отображение

$$\psi(R^{\alpha_k}) = k.$$

Ясно, что при этом произведению вращений будет соответствовать, как это следует из формулы (2), сумма вычетов.

Изоморфизм $\varphi'$ между группой поворотов правильного $n$-угольника и группой корней $n$-й степени из единицы устанавливается соотношением

$$\varphi(R^{\alpha_k}) = z_k.$$

Правило (4), конечно, выполняется, оно вытекает из равенства (3).

Задача 8. Установите изоморфизм между группой корней $n$-й степени из единицы и группой $Z_n$ вычетов по модулю $n$.

Задача 9. Постройте изоморфизм между аддитивной группой всех действительных чисел и мультипликативной группой положительных действительных чисел.

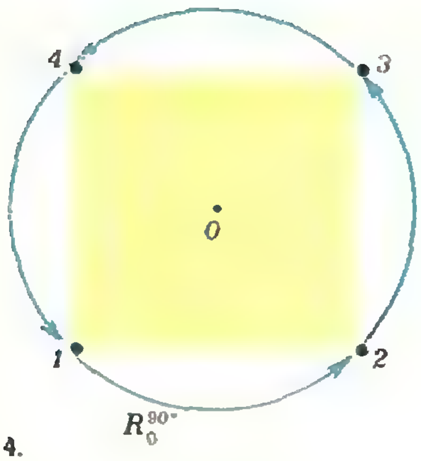


Рис. 4.

## Группы симметрии

Отличить симметричную фигуру от несимметричной легко — в этом нам помогает интуиция. Она подсказывает нам, что квадрат симметричнее ромба, а окружность симметричнее эллипса. Но одной интуиции недостаточно. Соображения более обстоятельные возникают при рассмотрении *перемещений пространства* (или плоскости), *при которых данная фигура F отображется на себя*. Множество таких преобразований (с операцией композиции перемещений) образует группу, называемую *группой симметрии фигуры F*. Об этом вы уже знаете из статьи А. Колмогорова (см. с. 4.), да и мы уже приводили этот пример группы. Теперь мы изучим группы симметрии некоторых фигур.

Начнем с окружности, которая издревле представлялась людям воплощением совершенства и образцом симметрии. При любом повороте относительно центра и при зеркальном отражении относительно произвольного диаметра окружность самосовмещается. Таким образом, группа симметрии окружности состоит из всех поворотов $R_O^{\alpha}$ вокруг центра $O$ окружности и всех осевых симметрий $S_l$ с осями $l$, проходящими через точку $O$.

Значительно меньше группа симметрии эллипса — она состоит из двух осевых симметрий относительно взаимно перпендикулярных сопряженных диаметров эллипса (об эллипсе рассказано в «Кванте», 1975, № 1), поворота $R_O^{180°}$ (центральной симметрии) вокруг центра эллипса и, конечно, тождественного отображения $E$. Такой же будет группа симметрии ромба.

А вот у квадрата группа симметрии побольше, ее мы сейчас и рассмотрим.

Нарисуем на плоскости квадрат и обозначим его вершины цифрами 1, 2, 3, 4. При любом самосовмещении квадрата каждая его вершина оказывается на месте некоторой вершины. Так, например, при повороте $R_O^{90°}$ ($O$ — центр квадрата) вершины 1, 2, 3, 4 перейдут соответственно в вершины 2, 3, 4, 1 (рис. 4): $R_O^{90°}(1)=2$, $R_O^{90°}(2)=3$, $R_O^{90°}(3)=4$, $R_O^{90°}(4)=1$. Это факт можно записать иначе:

$$1\to 2,\ 2\to 3,\ 3\to 4,\ 4\to 1.$$

Подобным же образом повороту $R_O^{180°}$ сопоставляется запись

$$1\to 3,\ \ 2\to 4,\ \ 3\to 1,\ \ 4\to 2.$$

Сказанное можно записать и в иной форме, смысл которой ясен из предыдущего:

$$R_O^{90°}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\quad R_O^{180°}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}.$$

Мы получили то, что математики называют *подстановкой*: обратимое отображение конечного множества $M$ на себя (здесь — множества четырех точек — вершин квадрата). Занумеровав элементы этого конечного множества числами $1, 2, \ldots, n$, мы сможем записать каждую подстановку в виде таблицы

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&\ldots&n\\a_1&a_2&a_3&a_4&\ldots&a_n\end{pmatrix},$$

в нижней строке которой записаны те же числа, что и в верхней, но в ином порядке. Подстановка, следовательно, состоит в том, что каждому элементу $a_k$ из $M$ ставится в соответствие единственный элемент $b_k$ из того же множества, и разным элементам $a_k$ соответствуют разные $b_k$.

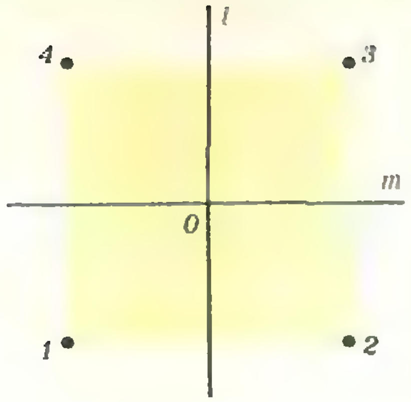


Рис. 5.

При такой точке зрения для одной и той же подстановки можно принять различные записи, например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обычно элементы верхней строки располагают в естественном порядке, и потому в общем виде подстановку из $n$ элементов записывают в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Пусть $\sigma$ и $\tau$ — две подстановки множества $M$. Произведением $\tau \circ \sigma$ подстановки $\sigma$ на $\tau$ назовем такую подстановку $\omega$, которая возникает в результате последовательного выполнения сначала $\sigma$, а затем $\tau$. Таким образом, если $\sigma$ элементу $a$ ставит в соответствие $b$, а $\tau$ элементу $b$ ставит в соответствие $c$, то произведение $\tau \circ \sigma$ элементу $a$ сопоставляет $c$. Произведение зависит от порядка сомножителей. Действительно, если $\tau$ сопоставляет элементу $a$ элемент $d$, а $\sigma$ элементу $d$ сопоставляет $f$, то произведение $\sigma \circ \tau$ отображает $a$ в $f$.

Тождественная подстановка

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

не изменяющая расположения элементов, играет роль единицы. Для каждой подстановки $\omega$ имеется единственная ей обратная $\omega^{-1}$ такая, что $\omega \circ \omega^{-1} = \omega^{-1} \circ \omega = e$.

Задача 10. Докажите, что определенное выше умножение подстановок ассоциативно.

Задача 11. Покажите, что подстановка $\omega^{-1}$ возникает из заданной, если поменять местами ее верхнюю и нижнюю строки.

Множество подстановок из $n$ элементов образует группу (обратимых отображений конечного множества $M$ на себя), ее называют «симметрической группой $n$-й степени» и обозначают через $S_n$.

Задача 12. Выпишите подстановки, соответствующие осевым симметриям квадрата (рис. 5) $S_{(24)}$, $S_{(13)}$, $S_l$, $S_m$ и повороту $R_O^{270°}$ (здесь (24) — прямая, проходящая через точки 2, 4 и т. п.).

Задача 13. Докажите, что группа подстановок четырех элементов состоит из 24 элементов.

Задача 14. Убедитесь, что не каждой из этих *подстановок можно поставить в соответствие* самосовмещение квадрата.

Последняя задача показывает, что в группе симметрии квадрата меньше 24 элементов — каждому самосовмещению квадрата соответствует подстановка (4 вершин квадрата), но не каждой подстановке соответствует самосовмещение квадрата.

*Этим квадрат отличается от* треугольника: у треугольника группа симметрии состоит из шести элементов и подстановок 3 вершин треугольника тоже шесть, причем группа симметрии треугольника изоморфна группе подстановок 3 элементов.

Заметим, что группа симметрии квадрата (как и треугольника) не*коммутативна:*

$$S_{(13)} \circ S_l = R_O^{-90°} \neq R_O^{90°} = S_l \circ S_{(13)}.$$

Задача 15. Найдите все перемещения плоскости, отображающие квадрат на себя (их будет всего восемь).

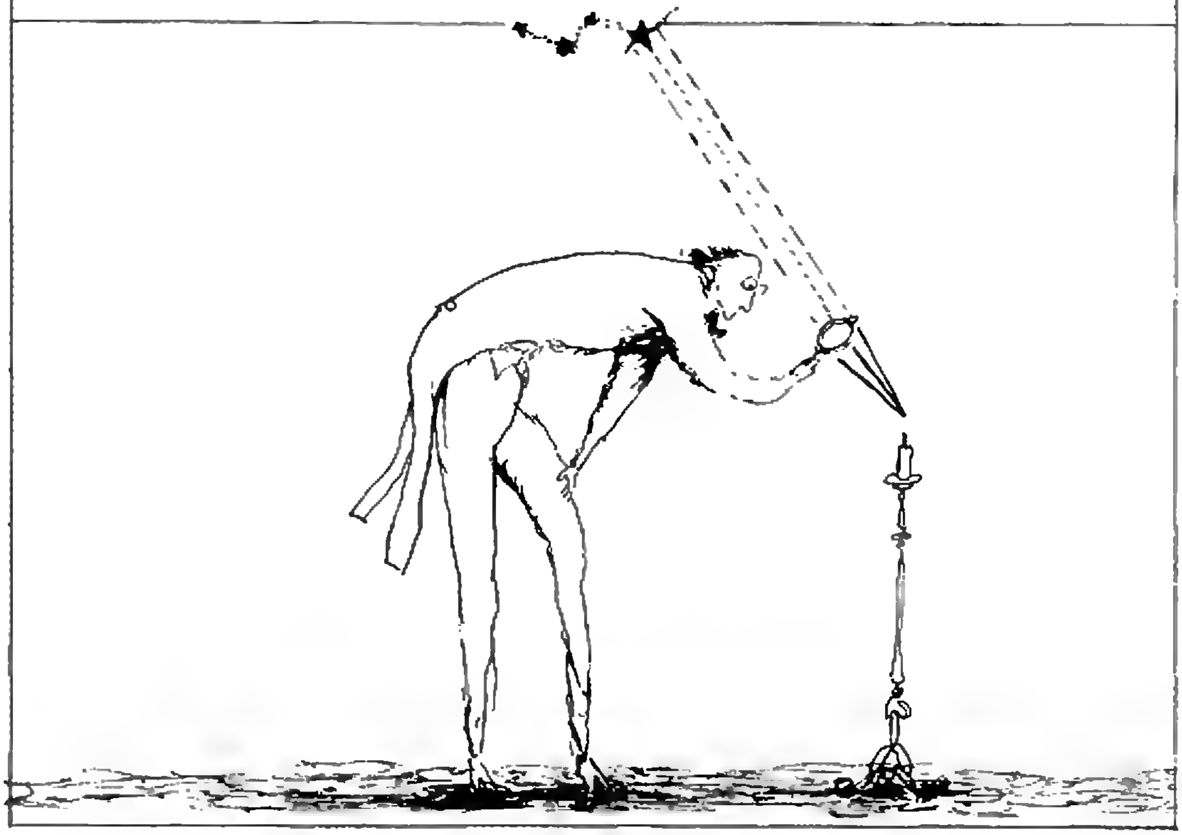
Задача 16. Составьте таблицу композиций перемещений плоскости, отображающих квадрат на себя (подобно таблице умножения чисел от 1 до 9).

Задача 17. Докажите, что число различных подстановок *множества из* $n$ элементов равно $n!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$).

В заключение заметим, что свойства и строение абстрактных и конкретных реализаций групп изучаются математической дисциплиной, называемой теорией групп, которая ныне нашла широкое применение во многих разделах математики, теоретической физики, химии, кристаллографии, теории связи и в других науках.

*П. Блиох*

# В ФОКУСЕ ЛИНЗЫ



*«... все тела, на которые попадает излучение, нагреваются, т. е. приобретают некоторое количество энергии».*

Р. Поль. Оптика и атомная физика

Возьмите увеличительное стекло, направьте его на Солнце, а в фокусе поместите лист бумаги. Наверное, каждый читатель «Кванта» знает, что произойдет дальше. В том месте, где возникает ослепительно яркое изображение Солнца, температура так сильно повышается, что бумага начинает дымиться и даже может загореться. Если попробовать повторить тот же опыт ночью, направив увеличительное стекло на какую-нибудь звезду, то бумага, конечно, не загорится, хотя изображения звезд можно увидеть. Никого это, разумеется, не удивит, и на вопрос, почему от Солнца бумага загорается, а от звезд — нет, обычно следует простой ответ: все дело в том, что Солнце светит сильно, а звезда — слабо.

Ошибки в таком объяснении нет, но если попробовать подтвердить его расчетами (без них ответ останется всего лишь догадкой, а не объяснением), то окажется, что дело обстоит не так просто.

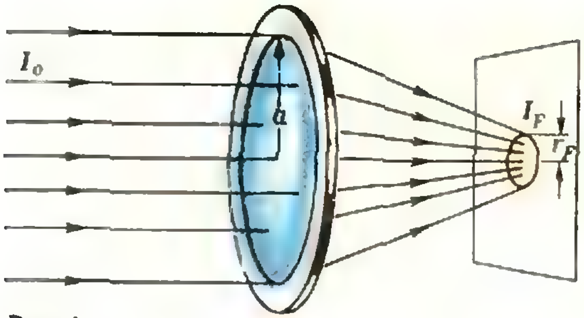


Рис. 1.

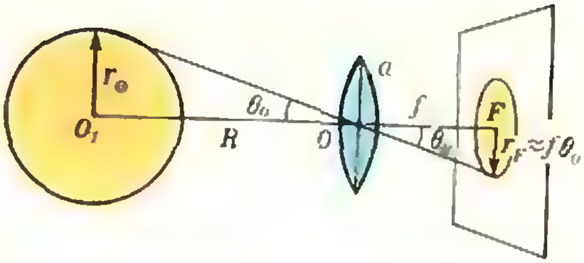


Рис. 2.

### 1. Легко объяснить, почему от Солнца загорается бумага (первая правильная формула для коэффициента усиления линзы)

Все тела на Земле получают от Солнца некоторую энергию. Назовем интенсивностью количество энергии, получаемой единицей площади за единицу *времени*.

Попробуем рассчитать, во сколько раз повышается интенсивность солнечного излучения в результате фокусировки его линзой. Расчет очень прост и основывается на законе сохранения энергии. Очевидно, что полная мощность $P_0$ излучения, проходящего сквозь линзу, равна

$$P_0 = S_0 I_0, \tag{1}$$

где $S_0$ — площадь линзы (эту величину называют также площадью апертуры), а $I_0$ — интенсивность излучения до фокусировки. Мощность излучения в фокальном пятне $P_F$ определяется аналогичным образом:

$$P_F = S_F I_F. \tag{2}$$

Здесь $S_F$ — площадь фокального пятна (изображения Солнца), а $I_F$ — интенсивность в фокусе (рис. 1).

В фокальное пятно попадает вся та мощность, которая проходит через апертуру линзы *). Поэтому $P_0$ и $P_F$ равны друг другу. Если теперь приравнять и правые части равенств (1) и (2), можно найти отношение интенсивностей:

$$\frac{I_F}{I_0} = \frac{S_0}{S_F}.$$

Это отношение называют коэффициентом усиления линзы по интенсивности, или, короче, просто коэффициентом усиления. Обозначим его буквой $K$ *). Итак, коэффициент усиления равен отношению площадей апертуры и изображения источника в фокусе:

$$K = \frac{S_0}{S_F}. \tag{3}$$

Для того чтобы этой формулой можно было практически воспользоваться, *необходимо выразить обе площади* через основные параметры линзы — ее радиус $a$ и фокусное расстояние $f$.

Площадь апертуры определяется немедленно: $S_0 = \pi a^2$. Подобную же формулу напишем и для площади фокального пятна, радиус которого обозначим через $r_F$:

$$S_F = \pi r_F^2.$$

Теперь остается найти $r_F$. Фокальное пятно представляет собой изображение Солнца. Его радиус можно определить из сравнения двух подобных треугольников, показанных на рисунке 2:

$$r_F = f\frac{r_\odot}{R} = f\theta_0.$$

---

*) Это утверждение не строгое. Часть излучения «теряется» при отражении от поверхности линзы и в результате поглощения в стекле. Но мы будем рассматривать «идеальный» случай, пренебрегая этими потерями.

*) Не спутайте коэффициент усиления линзы с коэффициентом увеличения изображения. Это совсем разные понятия. Например, наша линза не увеличивает, а уменьшает изображение, так как размеры фокального пятна, конечно, меньше размеров Солнца.

Буквами $r_\odot$ и $R$ обозначены соответственно радиус Солнца и расстояние между Солнцем и линзой. Отношение $\frac{r_\odot}{R} = \theta_0$ представляет собой угловой радиус Солнца *), поэтому площадь изображения можно записать так:

$$S_F = \pi r_F^2 = \pi f^2 \theta_0^2.$$

Подставив полученные выражения для $S_0$ и $S_F$ в (3), получим окончательную формулу для расчета коэффициента усиления:

$$K = \frac{a^2}{f^2 \theta_0^2}. \qquad (4)$$

Отсюда видно, что коэффициент усиления зависит не только от параметров линзы $a$ и $f$, но и от углового размера источника $\theta_0$. Подставим в формулу (4) значение $\theta_0$ для Солнца ($\theta_0 \approx 4{,}7 \cdot 10^{-3}$ *рад*).

Тогда

$$K_\odot \approx 4{,}5 \cdot 10^4 \frac{a^2}{f^2}.$$

(Индекс ⊙, который мы добавили к обозначению коэффициента усиления, показывает, что эта формула годится только для Солнца.)

Теперь мы сможем легко рассчитать интенсивность солнечного излучения после фокусировки в любой линзе:

$$I_F = K_\odot I_0.$$

Интенсивность до фокусировки известна. Она равна $I_0 \approx 0{,}14$ *вт/см²* ≈ ≈2 *кал/см²·мин* **). Поэтому

$$I_F \approx 6{,}3 \cdot 10^3 \frac{a^2}{f^2}\ вт/см^2.$$

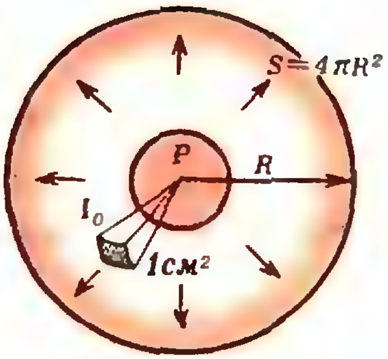


Рис. 3.

Давайте оценим эту величину для какой-нибудь конкретной линзы. Возьмем, например, $a=2$ *см*, $f=10$ *см*. Такая линза создает в фокусе интенсивность $I_F \approx 250$ *вт/см²*. Поэтому неудивительно, что с помощью даже небольшой линзы можно зажечь и бумагу, и дерево.

## 2. Трудно понять, почему бумага не загорается от звезд (может быть, правильная формула на самом деле неправильная?)

Итак, мы получили простую надежную формулу для расчета интенсивности в фокусе линзы. Казалось бы, невозможно допустить, чтобы эта формула вдруг привела к неправильным результатам. Ведь в таком случае был бы поставлен под сомнение закон сохранения энергии, на основе которого определен коэффициент усиления. И все-таки . . .

Давайте проделаем такой мысленный эксперимент. Представим себе, что Солнце удаляется от нашей Земли, и выясним, что при этом произойдет с интенсивностью в фокусе линзы. Фокальная интенсивность $I_F = KI_0$ будет меняться по двум причинам: во-первых, с удалением Солнца начнет падать $I_0$, во-вторых, станет возрастать коэффициент усиления линзы, так как угловой размер Солнца $\theta_0 = \frac{r_\odot}{R}$ с ростом $R$ уменьшается, а коэффициент усиления соответственно растет (см. формулу (4)). Сейчас мы убедимся, что уменьшение $I_0$ будет в точности скомпенсировано ро-

---

*) Строго говоря, $r_\odot / R = \mathrm{tg}\,\theta_0$ (см. рис. 2), но угол $\theta_0$ для Солнца очень мал, поэтому можно заменить тангенс угла самим углом. Только не забудьте, что надо измерять угол не в градусах, а в радианах. Радиус Солнца равен $\approx 700 \cdot 10^3$ *км*, расстояние от него $\approx 150 \cdot 10^6$ *км*, следовательно, $\theta_0 \approx 4{,}7 \times \times 10^{-3}$ *рад*.

**) При отсутствии потерь в атмосфере при нормальном падении лучей на поверхность.

стом $K$ и интенсивность в фокусе останется неизменной, как бы далеко ни удалялось наше светило!

Сначала выразим $I_0$ через полную мощность $P$, которую излучает Солнце по всем направлениям (рис. 3):

$$I_0=\frac{P}{4\pi R^2}.$$

Таким образом, $I_0$ убывает обратно пропорционально $R^2$. С другой стороны, в знаменателе формулы (4) стоит величина $\theta_0^2=\frac{r_\odot^2}{R^2}$. Поэтому с ростом расстояния до Солнца коэффициент усиления линзы будет расти пропорционально $R^2$, а произведение $I_0K$, то есть интенсивность в фокусе, останется неизменным:

$$I_F=I_0K=\frac{P}{4\pi R^2}\cdot\frac{a^2}{f^2\,\theta_0^2}=$$
$$=\frac{P}{4\pi R^2}\cdot\frac{a^2}{f^2}\cdot\frac{R^2}{r_\odot^2}=\frac{P}{4\pi r_\odot^2}\cdot\frac{a^2}{f^2}.$$

Но среди звезд есть очень много таких, которые подобны нашему Солнцу по своим размерам и излучаемой мощности. Значит, все они будут создавать в фокусе линзы одинаковую с Солнцем интенсивность, при которой легко загорается бумага и обугливается дерево? Чувствуется, что здесь что-то не в порядке: с одной стороны, формула как будто бы правильная, а с другой стороны, зажечь бумагу от света звезды все равно не удается!

Прежде всего на ум приходит такое объяснение: бумага не загорается, наверное, потому, что хотя интенсивность в фокусе остается неизменной, но при удалении источника уменьшается размер изображения. Прогревается очень малая площадь, и тепло все время отводится к соседним более холодным частям бумаги. Действительно, площадь фокального пятна, куда поступает энергия излучения, убывает по мере удаления источника обратно пропорционально $R^2$: $S_F=\pi r_F^2=\pi f^2\theta_0^2=\pi f^2\frac{r_\odot^2}{R^2}$. В то же время граница пятна $L$ (через нее происходит отвод тепла) убывает обратно пропорционально $R$: $L=2\pi r_F=2\pi f\frac{r_\odot}{R}$. Таким образом, с ростом $R$ нагрев бумаги уменьшается быстрее, чем ее охлаждение, и в фокусе устанавливается более низкая температура.

Объяснение вполне правдоподобное, и формула как будто бы спасена. Давайте, кстати, определим, чему будет равен размер изображения, когда Солнце удалится хотя бы до ближайшей звезды, то есть на расстояние $R=4\cdot10^{13}$ *км*. Для линзы, которую мы уже выбирали в качестве примера, с фокусным расстоянием $f=10$ *см*, радиус пятна $r_F=f\frac{r_\odot}{R}\approx1{,}75\cdot10^{-7}$ *см*. Изображение Солнца сократилось до размеров одной молекулы! После этого расчета тот факт, что бумага не загорается от света звезд, представляется уже вполне естественным. Но тут нас поджидает новая неприятность. Размер изображения оказался примерно в 250 раз меньше, чем длина волны видимого света ($\lambda\approx4{,}5\cdot10^{-5}$ *см*). Это совершенно недопустимо! Ведь для того чтобы волна существовала, требуется какое-то минимальное пространство, охватывающее хотя бы несколько длин волн. В противном случае волна там просто «не поместится».

Означает ли это, что в нашем примере «нарушилась» волновая природа света? Или, быть может, по каким-то причинам линза никогда не создает изображения, меньшего чем длина волны?

### 3. Все дело в том, что свет — это волна (вторая правильная формула для коэффициента усиления линзы)

Справедливо, конечно, второе предположение, и причина, ограничивающая беспредельное уменьшение изображения, в настоящее время хорошо известна — это дифракция света.

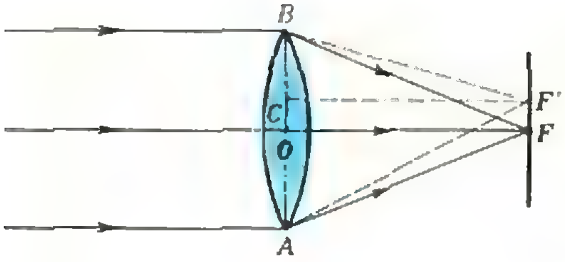


Рис. 4.

Нам предстоит снова вывести формулу для коэффициента усиления линзы, но уже с учетом дифракции. Взгляните на рисунок 4. Здесь нарисован пучок параллельных лучей, пришедших от очень далекого источника. Лучи преломляются в стекле таким образом, что после прохождения через линзу все они сходятся в одной точке — фокусе. Тот же процесс фокусировки можно объяснить и иначе, рассматривая не пересечение лучей, а взаимодействие волн, распространяющихся от каждой точки апертуры линзы. Наши рассуждения основываются на так называемом принципе Гюйгенса. Согласно этому принципу каждая точка пространства, в котором распространяется волна, сама становится источником вторичных волн. Эти волны расходятся от апертуры во все стороны. Попадают они и в фокус линзы. Точка $F$ (фокус линзы) отличается от всех других точек пространства тем, что фазы волн, идущих от любого места на апертуре — от краев, от середины и т. д., — совпадают друг с другом. Синфазность волн в точке $F$ достигается специально подобранной формой стекла. В этом, собственно, и заключается фокусировка: при сложении колебаний с совпадающими фазами они взаимно усиливаются, и интенсивность волны в точке $F$ оказывается наибольшей.

Может показаться, что волновое объяснение ничуть не лучше лучевого, разве что более длинное и менее понятное. Но сейчас мы убедимся, что оно имеет очень важное преимущество. Давайте немного сместимся из фокуса в направлении, перпендикулярном оси линзы: перейдем из $F$ в $F'$ (см. рис. 4). Что произойдет при этом с интенсивностью?

Согласно геометрической оптике ответ таков: через точку $F'$ лучи не проходят, поэтому при смещении из $F$ в $F'$ интенсивность упадет до нуля, каким бы малым ни был отрезок $FF'$.

Совсем иначе обстоит дело, когда мы рассматриваем взаимодействие волн. Если смещение $FF'$ мало, то фазы волн, идущих от разных точек апертуры, «чуть-чуть» сдвинутся относительно друг друга. Интенсивность при этом несколько уменьшится, но спад интенсивности произойдет постепенно, плавно.

Вычислим величину смещения $FF'$, при котором волны, идущие от крайних точек апертуры, окажутся в противофазе. Это будет означать, что волны станут гасить друг друга и интенсивность сильно упадет. Длину отрезка $FF'$, при которой разность хода лучей $AF'$ и $BF'$ составит половину длины световой волны, можно принять за радиус фокального пятна $r_F$ (такому смещению как раз соответствует фазовый сдвиг 180°).

Итак, мы имеем условие:

$$AF' - BF' = \frac{\lambda}{2}. \qquad (5)$$

Рассмотрим прямоугольные треугольники $ACF'$ и $BCF'$. На основании теоремы Пифагора

$$(AF')^2 = (AC)^2 + (CF')^2,$$
$$(BF')^2 = (CF')^2 + (BC)^2,$$

или, пользуясь нашими старыми обозначениями:

$$(AF')^2 = (a + r_F)^2 + f^2,$$
$$(BF')^2 = (a - r_F)^2 + f^2.$$

Вычтем из первого равенства второе и воспользуемся формулой для разности квадратов, тогда получим: $(AF' - BF')(AF' + BF') = 4ar_F$. При малых смещениях $FF'$ сумму отрезков $AF' + BF'$ можно приближенно заменить на $2AF$. Если, к тому же, фокусное расстояние $f$ велико по сравнению с радиусом линзы $a$, то $AF$ мало отличается от фокусного расстояния, то есть $2AF \approx 2f$.

После этих упрощений искомая разность хода $AF'-BF'$ может быть записана так:

$$AF'-BF' = \frac{4ar_F}{AF'+BF'} \approx \frac{2ar_F}{f}.$$

Согласно условию (5) ее надо приравнять $\lambda/2$, и мы получим формулу для радиуса фокального пятна:

$$r_F \approx \frac{\lambda}{4a} f.$$

Ввиду приближенного вывода эту формулу следует рассматривать лишь как оценку радиуса по порядку величины. Поэтому не имеет смысла оставлять в ней численный коэффициент, а лучше переписать ее в следующем виде:

$$r_F \approx f\frac{\lambda}{a}. \qquad (6)$$

Чтобы наглядно представить себе полученный результат, взгляните на рисунок 5. На нем изображено обычное построение лучей, пересекающихся после преломления в линзе, но каждый луч симметрично «размывается» на угол $\pm\theta_d$. Пучки лучей, пересекаясь в фокальной плоскости, создают изображение в виде кружка с радиусом

$$r_F \approx f\theta_d. \qquad (7)$$

Если при построении выбрать угол $\theta_d$ равным $\lambda/a$, то мы как раз получим формулу (6). Угол $\theta_d \approx \lambda/a$ называют углом дифракционного размытия.

Теперь самая трудная часть вычислений осталась позади. Определив площадь фокального пятна и воспользовавшись соотношением (3), получим новую формулу для коэффициента усиления линзы:

$$K_d \approx \frac{a^4}{\lambda^2 f^2} \qquad (8)$$

(мы добавили индекс «$d$», чтобы не забыть, что формула выведена с учетом дифракции).

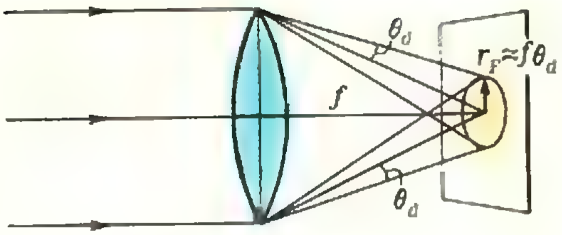


Рис. 5.

## 4. Со звездами все в порядке, но новая формула не годится для Солнца!

Вернемся снова к нашему мысленному эксперименту с удалением Солнца на межзвездные расстояния. Посмотрим, как будет изменяться фокальная интенсивность, если воспользоваться новой формулой для коэффициента усиления. Так же как и раньше, $I_F = I_0 K_d$, но, в отличие от первой формулы, величина $K_d$ не зависит от расстояния до источника (см. формулу (8)). Поэтому интенсивность в фокусе будет уменьшаться вместе с $I_0$, то есть обратно пропорционально квадрату расстояния. Сказанное подтверждается соответствующей формулой

$$I_F = I_0 K_d \approx \frac{P}{4\pi R^2}\cdot\frac{a^4}{\lambda^2 f^2}.$$

Ясно, что при очень больших $R$ интенсивность станет в конце концов исчезающе малой, какой бы мощностью излучения $P$ ни обладал источник. В этом и заключается объяснение, почему не загорается бумага в фокусе линзы от света звезд.

Вторая неприятность — беспредельное сокращение радиуса фокального пятна — теперь также устранена. Действительно, согласно формуле (6) радиус фокального пятна никогда не может стать меньше длины волны (дробь $f/a$ всегда больше единицы). Поэтому беспокоиться о том, что волна «не поместится» в фокусе линзы, уже не приходится.

Итак, новый расчет свободен от тех противоречий, которые мы обнаружили раньше, пока не учитывали

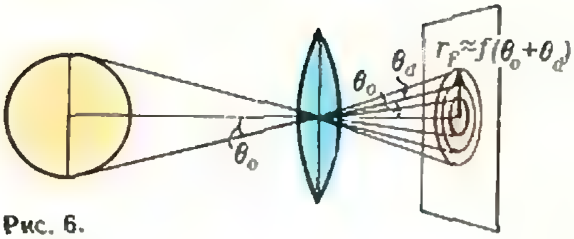


Рис. 6.

дифракции света. На этом можно бы и закончить нашу статью, сделав вывод, что волновая теория оказалась более правильной, чем геометрическая оптика. Но прежде чем поставить точку, давайте еще раз оценим интенсивность сфокусированного солнечного излучения, то есть посмотрим, к каким результатам приводит волновая теория в том случае, когда мы успешно обходились и без нее.

Линзу возьмем ту же самую ($a=2$ *см*, $f=10$ *см*), но воспользуемся новой формулой для коэффициента усиления. В формулу (8) входит длина волны света $\lambda$. Ее можно считать равной $4500\text{Å}=4{,}5\cdot10^{-5}$ *см*. Тогда $K_d \approx \frac{a^4}{\lambda^2 f^2} \approx 8\cdot10^7$. Далее, вспомнив, что $I_0 \approx 0{,}14$ *вт/см*$^2$, найдем искомую интенсивность: $I_F = I_0 K_d \approx 1{,}1\cdot10^7$ *вт/см*$^2 = 11$ *Мвт/см*$^2$.

Получилась колоссальная величина, почти в 200 000 раз превышающая результаты нашего старого расчета, который хорошо согласуется с экспериментом!

Согласитесь, что окончить статью на этом месте никак нельзя. Оказывается, дифракционная формула тоже преподнесла нам «сюрприз», и необходимо разобраться, в чем тут дело.

## 5. Почему две правильные формулы приводят к разным результатам?

Получается, что формула (4) для коэффициента усиления, выведенная на основе геометрической оптики, хорошо описывает фокусировку излучения Солнца, но не годится для звезд. Дифракционная формула (8) правильно описывает фокусировку света звезд, но приводит к неверным результатам для Солнца. Разгадка «парадокса» заключается в том, что, пользуясь той или иной физической формулой, совершенно недостаточно правильно запомнить или записать ее. Обязательно (подчеркиваем — обязательно!) надо знать условия ее применимости. Это относится не только к рассматриваемым формулам, но и ко всем без исключения физическим законам.

Как же сформулировать условия применимости в данном случае? Анализируя выводы лучевой и дифракционной формул, можно заметить, что разница между ними возникла при расчете радиуса фокального пятна.

Перепишем формулы для определения $r_F$ еще раз, напомнив, как они выводились.

1) «Солнечная» формула: $r_F=f\theta_0$. При выводе рассматривался источник с угловым размером $\theta_0$, дифракционное размытие не учитывалось, то есть $\theta_d=0$.

2) «Звездная» формула: $r_F=f\theta_d$. При выводе учитывалось дифракционное размытие лучей на угол $\theta_d \approx \frac{\lambda}{a}$, угловой размер источника считался исчезающе малым (параллельные лучи), то есть $\theta_0=0$.

На самом деле, конечно, дифракция света существует всегда, а «точечных» источников, строго говоря, в природе не бывает. Поэтому нужно было бы учесть одновременно и то, и другое. Тогда радиус фокального пятна определялся бы по формуле

$$r_F \approx f(\theta_0+\theta_d).$$

Как получается это соотношение, легко понять из рисунка 6. Здесь повторено построение, выполненное на рисунке 2 (источник конечных угловых размеров $\theta_0$), но учитывается дифракция света (размытие лучей на угол $\theta_d$).

Теперь понятно, когда применима формула (4), а когда (8). Если угловой размер источника велик по сравнению с дифракционным размытием ($\theta_0 \gg \theta_d$), дифракцию можно не учитывать. Это условие применимости (4). Если, наоборот, угловые размеры источника малы ($\theta_0 \ll \theta_d$), дифракцию надо учитывать обязательно, и источник можно считать «точечным». При этих условиях справедлива формула (8).

Итак, все дело в том, в каком соотношении находятся углы $\theta_0$ и $\theta_d$. Давайте проверим это на нашем старом примере с Солнцем. Угловой размер источника мы уже знаем ($\theta_0 \approx 4{,}7 \cdot 10^{-3}$ *рад*), а угол дифракции $\theta_d \approx \frac{\lambda}{a} = 2{,}25 \cdot 10^{-5}$ *рад*. Выполняется неравенство $\theta_0 \gg \theta_d$, то есть выполняется условие применимости формулы (4). Если же Солнце «удалится» до ближайшей звезды ($R \approx 4 \cdot 10^{13}$ *км*), его угловой размер сокращается до $1{,}75 \cdot 10^{-8}$ *рад*. Угол дифракции при этом сохраняет старое значение, и справедливо обратное неравенство $\theta_0 \ll \theta_d$. Следовательно, для звезд выполняется условие применимости формулы (8). Вот почему получились неправильные результаты, когда формула (4) применялась для звезд, а (8) — для Солнца. В этих случаях мы пользовались формулами вне области их применимости, что совершенно недопустимо.

Итак, все противоречия устранены, и статью можно заканчивать. Мы сделаем это, сформулировав три задачи, обращенные к читателю.

1. Вернемся снова к мысленному эксперименту с удалением Солнца на звездные расстояния ($R = 4 \cdot 10^{13}$ *км*). Чему станет равна интенсивность сфокусированного солнечного света в этом случае? Параметры линзы остаются прежними ($a = 2$ *см*, $f = 10$ *см*).

2. Выведите формулу для расчета коэффициента усиления линзы при любых соотношениях между углами $\theta_0$ и $\theta_d$.

3. Мы нашли, что интенсивность солнечного излучения в фокусе линзы радиуса $a = 2$ *см* с фокусным расстоянием $f = 10$ *см* составляет 250 *вт/см*$^2$.

Каким должен быть радиус линзы, чтобы после фокусировки интенсивность излучения звезды, находящейся на расстоянии $R = 4 \cdot 10^{13}$ *км*, была того же порядка, например, 100 *вт/см*$^2$? Считать, что соотношение между фокусным расстоянием линзы и ее радиусом остается неизменным, а звезда имеет те же параметры, что и Солнце.

---

# Задачи наших читателей

1. Докажите следующие соотношения между элементами треугольника ($A$, $B$ и $C$ — вершины треугольника; $O$ — центр вписанного круга; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы с вершинами $A$, $B$ и $C$ соответственно; $a$, $b$, $c$ — длины сторон, противолежащих соответственно углам $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $R$ — радиус описанного круга; $h_a$, $h_b$, $h_c$ — длины высот, опущенных на стороны $a$, $b$ и $c$, соответственно или на их продолжения; $S$ — площадь треугольника $ABC$):

а) $$\frac{|AO|^2}{bc} + \frac{|BO|^2}{ca} + \frac{|CO|^2}{ab} = 1;$$

б) $$\frac{|AO|^2}{h_a} + \frac{|BO|^2}{h_b} + \frac{|CO|^2}{h_c} = 2R;$$

в) $$S = \frac{1}{2} \times (|AO|^2 \sin\alpha + |BO|^2 \sin\beta + |CO|^2 \sin\gamma);$$

г) $$S = \frac{1}{2}(|AO|^2 h_b h_c + |BO|^2 h_c h_a + |CO|^2 h_a h_b)^{1/2}.$$

*У. Алла*
(г. Выру Эстонской ССР)

2. Обозначим через $O$ центр окружности, описанной вокруг треугольника $ABC$, через $H$ — точку пересечения высот, через $O_1$ — центр вписанной окружности и через $O_2$ — центр окружности, касающейся стороны $BC$ и продолжений сторон $AB$ и $AC$. Доказать, что если $|O_1O| = |O_1H|$, то один из углов треугольника равен 60°, а если $|O_2O| = |O_2H|$, то либо $\widehat{A} = 60°$, либо величина одного из углов $B$, $C$ равна 120°.

3. Построить прямоугольный треугольник с данной гипотенузой, стороны которого образуют геометрическую прогрессию.

*Н. В.*

Лаборатория «Кванта»

С. Соскин

# КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ В СТРУЕ

**На IX Городской конференции юных физиков города Киева (апрель 1975 года) ученик 8 класса средней школы № 145 Станислав Соскин сделал доклад на тему «Волны в струе при наличии преград».**

**В докладе рассказывалось об опытах, проводимых со струей воды или какой-нибудь другой жидкости.**

**Эти опыты, очень простые и наглядные, не требующие никакого специального оборудования, дают возможность познакомиться с довольно сложным физическим явлением — возникновением капиллярных волн на поверхности жидкости.**

**Здесь мы публикуем (с некоторыми сокращениями) текст этого доклада.**

Если присмотреться внимательно, то даже в струйке воды можно увидеть много интересных явлений. Попытаемся описать и объяснить одно из них.

Под тонкую водопроводную струю подставим пластинку (или даже просто палец) на расстоянии 1—7 *см* от крана (где поток еще можно считать ламинарным). Тотчас же часть струи над пластинкой станет похожей на гармошку (рис. 1). Что же произошло?

Причина всему — поверхностное натяжение в жидкости. Из-за него струя оказывается как бы обтянутой пленкой (подобной резиновой трубке или натянутой струне). Под влиянием случайных внешних воздействий эта пленка деформируется, и в ней начинаются колебания. Колебания распространяются по поверхности, и в струе возникают поверхностные волны, называемые капиллярными волнами. Механизм их образования качественно объяснить несложно.

Пусть поверхность жидкости в некотором месте случайно изогнулась, например, стала вогнутой (рис. 2, *а*). Давление в жидкости под вогнутой поверхностью, благодаря силам поверхностного натяжения, меньше, чем в соседних областях, где поверхность осталась плоской. Под действием разности давлений жидкость из соседних участков начнет приливать под вогнутую поверхность, пока поверхность снова не станет плоской. Но движение жидкости не прекратится и будет продолжаться по инерции. Поэтому поверхность станет выпуклой, давление под ней возрастет, и жидкость будет вытекать из-под нее (рис. 2, *б*) и т. д. Такие колебания в жидкости естественно вызовут аналогичные колебания в соседних участках, то есть возникнет волна.

Вообще говоря, поверхностные волны возникают и под действием силы тяжести. Но при малых амплитудах колебаний и малых длинах волн основную роль играют силы поверхностного натяжения. Волны в этом случае и называют капиллярными.

Можно непосредственно на опыте убедиться в том, что в струе при наличии преграды возникают именно поверхностные волны. Слегка коснемся острием иголки только поверхности струи — гармошка получается точно такая же, как при внесении преграды по всему сечению струи (рис. 3).

Проделав несколько опытов, можно вывести и некоторые количественные закономерности. Теоретический расчет показывает, что скорость распространения капиллярных волн зависит от свойств жидкости (коэффициента поверхностного натяжения и плотности) и от длины волны. Причем скорость увеличивается с уменьшением длины волны. Проверим это экспериментально.

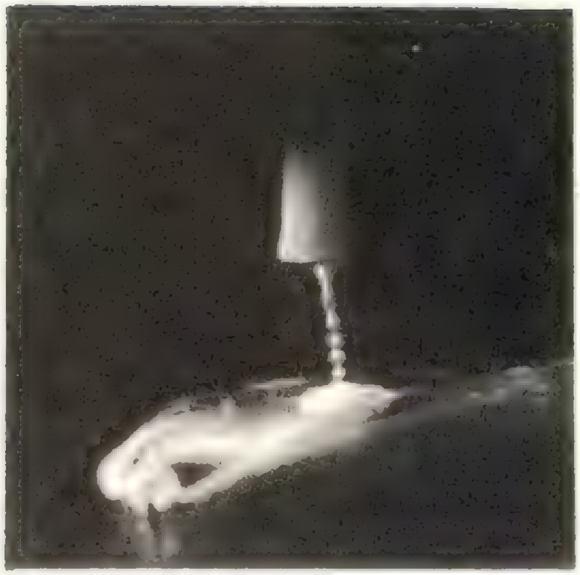


**Рис. 1**.

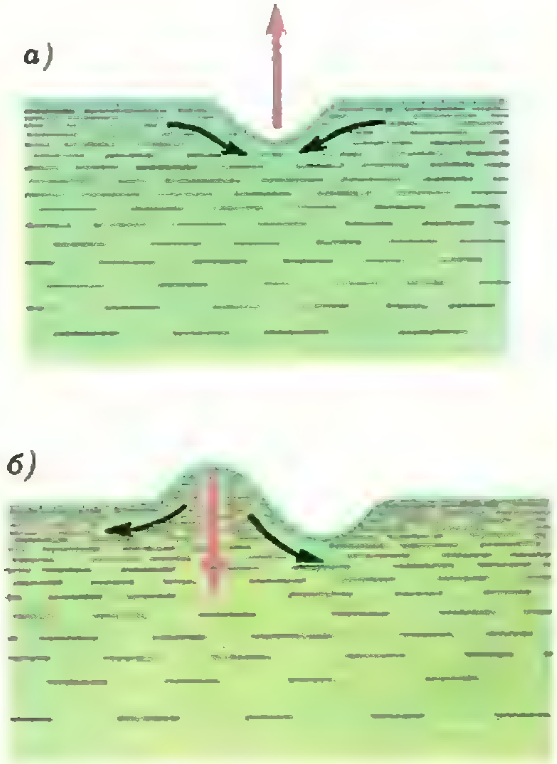


**Рис. 2.**

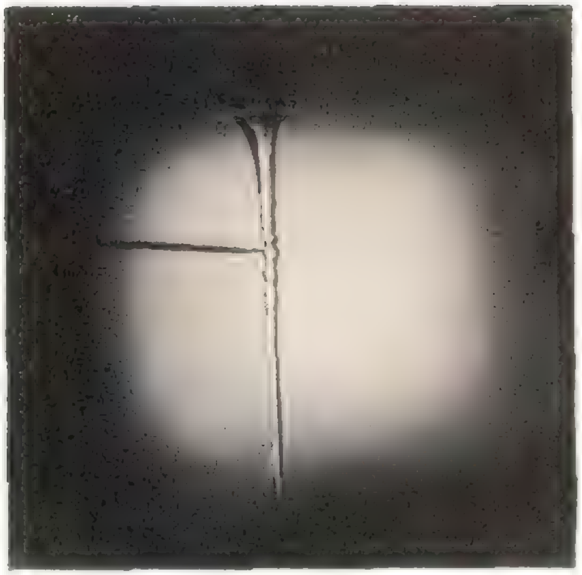


Рис. 3.

Длину волны $\lambda$ можно измерить непосредственно линейкой. А как определить скорость $v$ распространения волны?

Воспользуемся тем фактом, что гармошка, возникающая на поверхности струи, неподвижна. Но волна ведь должна двигаться?! И волна действительно бежит, но бежит относительно движущейся воды. А покоящийся наблюдатель видит гармошку неподвижной потому, что скорость распространения волны равна скорости течения воды по абсолютной величине и противоположна ей по направлению.

Таким образом, нам достаточно найти скорость течения воды в струе, а это совсем просто.

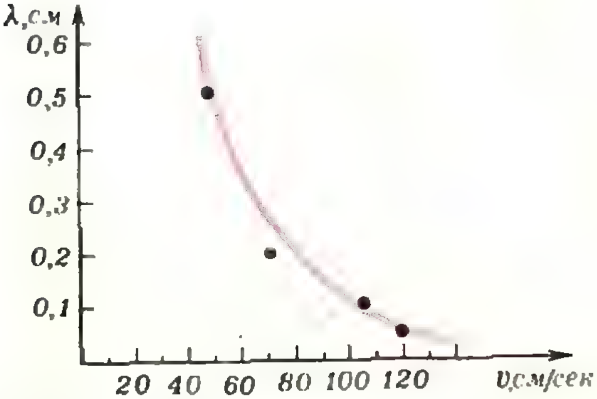


Рис. 4.

Объем $V$ воды, вытекающей из крана за время $t$, равен

$$V = Svt = \frac{\pi d^2}{4} vt,$$

где $S$ — площадь сечения струи, $d$ — диаметр этого сечения, $v$ — скорость вытекания воды, равная скорости распространения волны. Отсюда

$$v = \frac{4V}{\pi d^2 t}.$$

Объем воды можно измерить с помощью мензурки, диаметр струи — линейкой, а время — секундомером.

Полученный нами экспериментально график зависимости между $\lambda$ и $v$ показан на рисунке 4.

Может возникнуть вопрос — почему мы видим гармошку? Амплитуды капиллярных волн очень малы (порядка десятых и даже сотых долей миллиметра), поэтому непосредственно различить выпуклости и впадины на поверхности струи невозможно. Однако эти неровности по отношению к падающему на них свету ведут себя подобно выпуклым и вогнутым линзам (собирают и рассеивают свет). Фактически мы видим чередующиеся светлые и темные полосы соответственно в сечениях выпуклостей и впадин.

Заметим, что опыты можно проводить, используя самые разные преграды: пластмассовую, металлическую или бумажную пластинки и даже просто водяную поверхность. Упругие свойства материала преград различны, но скорость и длина волны в струе воды во всех случаях одни и те же.

В заключение предлагаем вам несколько экспериментальных заданий.

Упражнения

1. Исследовать гармошки в струях не только воды, но и других жидкостей.
2. Получить и исследовать гармошку в горизонтальной струе.
3. Исследовать гармошки в струях с различным напором.

Э. Белага

# АЛГЕБРА — ДРЕВНЯЯ И СОВРЕМЕННАЯ

**Вы уже прочли статьи А. Колмогорова «Группы преобразований» и Л. Садовского и М. Аршинова «Группы», в которых вводятся понятия бинарной операции и группы. Чтобы привыкнуть к этим новым для вас понятиям, надо разобрать несколько примеров «с карандашом в руке». В этом вам и поможет помещаемая ниже статья. В ней рассказывается об умножении слов, самосовмещений правильных многогранников, узлов и подстановок, о применении абстрактной теории к решению конкретных задач. Внимательный и терпеливый читатель сможет самостоятельно вывести много замечательных свойств операций над этими объектами, разбирая условия и отыскивая решения задач (они служат продолжением основного текста). Наиболее интересные и, как правило, при этом довольно трудные задачи отмечены звездочкой.**

## I. ВСЕ ПРОЧЕЕ — ДЕЛО РУК ЧЕЛОВЕЧЕСКИХ...

У первобытных племен названия чисел были неотделимы от названия перечисляемых предметов. Не «два» или «три», а лишь «две реки» или «три воина». С появлением отвлеченного понятия о числе родилась математика. Возможно, поэтому выдающийся немецкий математик Леопольд Кронекер произнес когда-то свою столь же парадоксальную, сколь и знаменитую фразу: «Целое число создал господь бог, все прочее — дело рук человеческих».

Потребовалось несколько тысячелетий, чтобы человечество научилось представлять решения задач в виде формул. Потом в этих формулах вместо чисел появились буквы. Новая «буквенная» арифметика стала называться алгеброй. А затем алгебраическая символика и алгебраические действия были распространены на самые разнообразные объекты неарифметической природы — подстановки, матрицы, геометрические преобразования и др., а числовая прямая (или комплексная плоскость) оказалась всего лишь одной из многих, очень многих алгебраических структур, изучаемых в новой алгебре.

## II. О «ВЕЩАХ», КОТОРЫЕ МОЖНО «ПЕРЕМНОЖАТЬ», А ИНОГДА И ДЕЛИТЬ, ХОТЯ ОНИ И НЕ ЧИСЛА

К тому, что числа можно складывать, умножать, вычитать и делить, нас приучают очень рано. Удивительно — и к этому тоже нужно привыкать,— что «складывать» (или «умножать») можно и «вещи» не числовой природы.

### Пример первый: слова

*Алфавитом* будем называть любую совокупность символов. Мы ограничимся конечными алфавитами (в алгебре и математической логике пользуются и бесконечными). Вот два примера алфавитов:

$A_1$. *Алфавит, состоящий из двух греческих букв:* $\alpha$ *и* $\beta$.

$A_2$. *Арифметический алфавит: цифры от 0 до 9, символы арифметических действий, знак равенства и круглые скобки:*

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ +,\ -,\ :,\ \times,\ =,\ ),(\}.$$

*Словом над алфавитом A* мы будем называть *любую конечную последовательность символов из A*. Вот примеры слов над двумя описанными выше алфавитами (чтобы отделить запись слова от окружающего текста, мы «упаковываем» его в угловые скобки):

$$(A_1):\ \langle\alpha\alpha\beta\rangle,\ \langle\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\rangle,\ \langle\rangle;$$
$$(A_2):\ \langle 1976\rangle,\ \ \langle 2+2=4\rangle,\ \langle -)+):(3)\rangle.$$

Слово может быть и «пустым», то есть вовсе не содержать символов (последнее «слово» в первом примере), такое слово обозначают буквой $\lambda$: $\lambda = \langle\ \rangle$. Множество слов над данным алфавитом $A$ обозначим через $C(A)$. Его элементы, то есть слова, мы будем обозначать малыми латинскими буквами (они не принадлежат алфавитам, которые нам здесь приходится рассматривать).

*Произведением*, или *композицией*, двух слов $a$ и $b$ из $C(A)$ мы будем называть *слово c* ( и писать: $c = a \otimes b$), *полученное приписыванием к слову a справа от него слова b*. Вот примеры композиции слов:

$$(A_1):\ a = \langle\alpha\rangle,\ b = \langle\alpha\beta\rangle,\ c = a \otimes b = \langle\alpha\alpha\beta\rangle;$$
$$(A_2):\ a = \langle 2+2\rangle,\ \ b = \langle =4\rangle,\ c = a \otimes b = \langle 2+2=4\rangle.$$

Пустое слово не содержит символов, поэтому $a \otimes \lambda = \lambda \otimes a = a$ для любого слова $a$ из $C(A)$, то есть пустое слово $\lambda$ при перемножении слов ведет себя как единица при перемножении чисел.

Если продолжить поиски сходства и различий между умножением слов и умножением чисел, то можно заметить, что операция «$\otimes$» ассоциативна:

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c),$$

поэтому имеет смысл запись $a \otimes b \otimes c$.

Задача 1. Для любого слова $a$ из $C(A)$ определим его неотрицательные степени, положив $a^0 = \lambda$, $a^1 = a$, $a^2 = a \otimes a$, вообще $a^{n+1} = a \otimes a^n$. Докажите, что для любых целых неотрицательных чисел выполняется равенство

$$a^m \otimes a^n = a^{m+n}.$$

Справедливость последнего равенства позволяет нам сокращать запись некоторых слов: вместо $a = \langle\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta\alpha\alpha\alpha\alpha\rangle$ мы можем написать $a = \langle\alpha\rangle^3 \otimes \langle\beta\rangle^3 \otimes \langle\alpha\rangle^4$ или, допуская некоторую вольность записи, $a = \langle\alpha^3\beta^3\alpha^4\rangle$. Но менять порядок букв в слове, вообще говоря, нельзя, потому что операция «$\otimes$» может быть не коммутативной, то есть $a \otimes b$ может не совпадать с $b \otimes a$.

Задача 2. а) Над каким алфавитом операция «$\otimes$» коммутативна, то есть для любых слов $a$ и $b$ будет $a \otimes b = b \otimes a$?

б)* Как должны быть устроены два слова $a$ и $b$ над алфавитом $A$, содержащим два или более символов, чтобы композиция этих слов не зависела от их порядка?

## Пример второй: самосовмещения

Как известно, *конгруэнтность* (раньше говорили «равенство») фигур и тел в геометрии устанавливается перемещением: *если существует перемещение плоскости* (или пространства), *при котором одна фигура отображается на другую, то эти фигуры конгруэнтны*. Перемещение, при котором некоторая фигура отображается на себя, будем называть ее *самосовмещением*.

Для куба, например, найдется всего 48 различных самосовмещений. Действительно, закрасим одну грань куба и отметим направление на одном из ребер, ограничивающих эту грань (рис. 1). Тогда самосовмещение куба определяется тем, в какую грань куба отображается окрашенная грань, в какое ребро этой грани переходит отмеченное ребро и в какой конец этого ребра направлена стрелка (по этим данным однозначно опре-

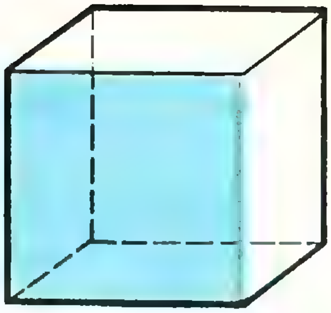


Рис. 1.

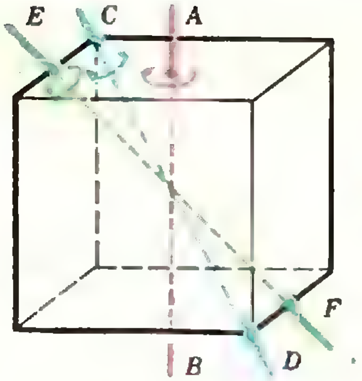


Рис. 2.

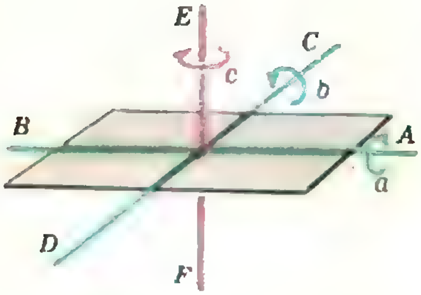


Рис. 3.

деляется положение куба). У куба 6 граней, у каждой грани 4 ребра, у каждого ребра 2 конца, итого $6 \times 4 \times 2 = 48$ способов.

*Произведение* $c = a \circ b$ *самосовмещений* $a$ и $b$ правильного многогранника $\Delta$ определяется как обычная композиция перемещений: сначала выполняется $b$, а затем $a$ *). Проверьте, что $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ для любых трех самосовмещений $a$, $b$, $c$ из множества $\Gamma(\Delta)$ всех самосовмещений тела $\Delta$ (ассоциативность; сравните с описанием группы на с. 8 и аксиомой III группы там же).

Задача 3. Докажите, что последовательное выполнение двух поворотов куба: сначала вокруг оси $AB$ (рис. 2) на угол 90°, а затем вокруг оси $CD$ на угол 120°, — можно записать одним поворотом вокруг оси $EF$ на 180°, что и является произведением двух первых поворотов. Зависит ли это произведение от порядка выполнения поворотов?

Задача 4. Докажите, что существует всего четыре различных самосовмещения прямоугольника в пространстве (рис. 3): тождественное $e$, поворот $a$ вокруг $AB$, $b$ — вокруг $CD$, $c$ — вокруг $EF$, причем $a^2 = b^2 = c^2 = e$, $a \circ b = b \circ a = c$, $b \circ c = c \circ b = a$, $a \circ c = c \circ a = b$.

Последние равенства задачи 4 можно записать в виде следующей таблицы умножения:

| $\circ$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $a$ | $e$ | $c$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $e$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ | $e$ |

Очевидно, что всякому самосовмещению $a$ фигуры или тела $\Delta$ соответствует единственное «обратное» $a^{-1}$, возвращающее тело в начальное положение ($a^{-1}$ может и совпадать с $a$, как в задаче 4). При этом, если $a^{-1}$ обратно $a$, то $a$ обратно $a^{-1}$:

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

---

*) Такой порядок записи удобен тем, что образ $(a \circ b)(M)$ точки $M$ при отображении $a \circ b$ будет $a(b(M))$.

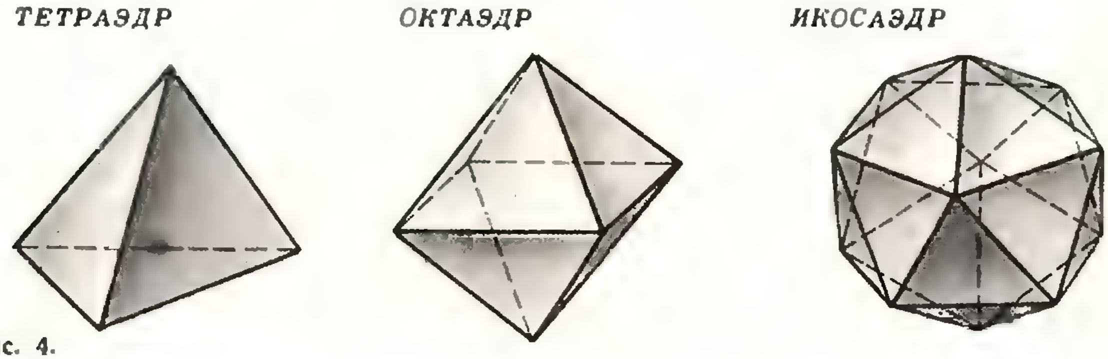
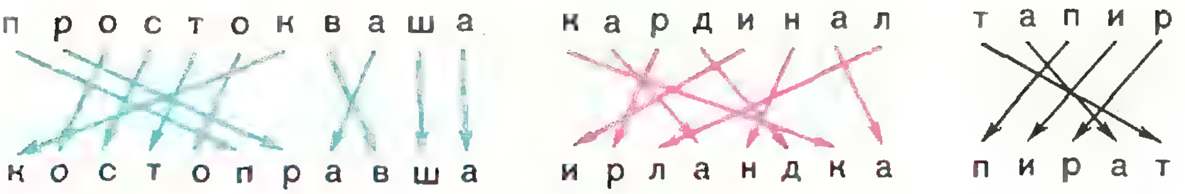


Рис. 4.



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 9 & 8 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Рис. 5.

Теперь можно определить любую целую степень $a^k$ самосовмещения $a$:

$$a^0 = e, \quad a^1 = a, \quad a^2 = a \circ a, \ \ldots$$
$$\ldots, \quad a^{k+1} = a \circ a^k, \quad a^{-k-1} = a^{-1} \circ a^{-k}.$$

Легко проверить, что $a^k \circ a^l = a^{k+l}$ для любого $a$ из Γ (Δ) и любых целых $k$ и $l$; в частности, $a^k$ и $a^{-k}$ взаимно обратны. (Сравните с описанием группы на с. 8 и аксиомой II.)

Задача 5. Найдите все самосовмещения правильного тетраэдра, октаэдра и икосаэдра (рис. 4). Какие из них удовлетворяют равенству $a^2 = e$? Равенству $a^3 = e$? Равенству $a^5 = e$? Составьте таблицу умножения для самосовмещений тетраэдра и куба.

Задача 6. Докажите, что любое самосовмещение икосаэдра можно получить «умножениями» из некоторых двух поворотов (на 72°) вокруг двух соседних вершин; точнее, если обозначить эти повороты буквами $a$, $b$, то любое самосовмещение икосаэдра можно записать в виде произведения нескольких самосовмещений, каждое из которых есть либо $a$, либо $b$.

## Пример третий: подстановки

Генетика, как, вероятно, известно читателю, началась с гороха. Теория групп началась с подстановок — именно они были первым «нечисловым» объектом и инструментом новой алгебры для Жозефа-Луи Лагранжа, Паоло Руффини и Эвариста Галуа.

Основное свойство подстановки — переставлять, менять местами числа или буквы из некоторой последовательности. На рисунке 5 изображены подстановки букв в словах-анаграммах, меняющие смысл этих слов; рядом записаны обычные «двухэтажные» числовые записи этих подстановок.

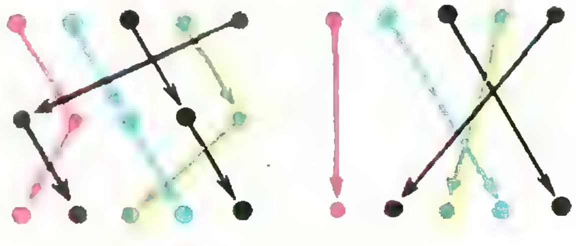
О подстановках рассказано в статье «Группы», мы лишь напомним, что две подстановки $b$, $a$ одного и того же набора элементов, выполненные одна за другой, дают третью подстановку $c = a \circ b$, называемую их *произведением*. Рисунок 6 иллюстрирует это краткое определение. Множество всех подстановок набора (1, 2, 3, …, $n$) образует группу, которая называется *«симметрической группой степени $n$»* и обозначается через $S_n$. Эта группа содержит $n!$ подстановок.

Задача 7. Пусть $a$ — некоторая подстановка. Докажите, что если $k$ — наименьшее целое положительное число, для которого $a^k = e$, то из равенства $a^l = e$ следует, что $k$ делит $l$. Далее докажите, что $k$ делит $n!$ и не превосходит числа $3^{n/3}$*).

Задача 8*. Докажите, что любая подстановка из $S_n$ может быть получена последовательным выполнением некоторого

---

*)Эта задача уже предлагалась читателям «Кванта» (см. «Квант», 1975, № 11, М355, а также «Квант», 1976, № 8, с. 39).



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.

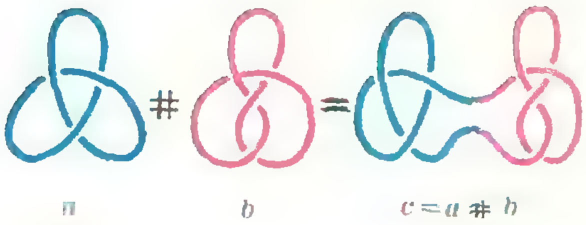


Рис. 7.

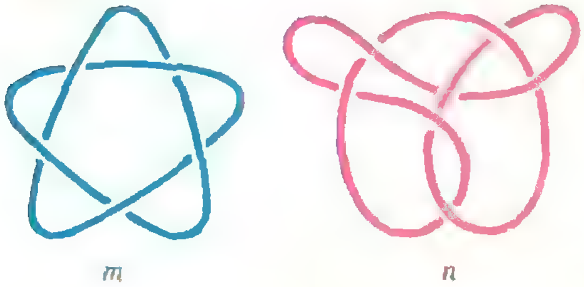


Рис. 8.

числа (и в подходящем порядке) подстановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

## Пример четвертый и последний: узлы

Узел — это замкнутая пространственная кривая, не имеющая точек самопересечения. Узлы изучают в топологии, но алгебраические методы играют при этом решающую роль как в описании отдельных узлов, так и в изучении множества $Y$ всех узлов. Мы рассмотрим здесь свойства композиции узлов. Определение композиции $c = a \# b$ двух узлов $a$ и $b$ ясно из рисунка 7.

**Задача 9.** Докажите, что композиция — ассоциативная и коммутативная (что несколько неожиданно) операция. Какой узел играет при этом роль единицы?

Можно доказать еще три замечательных свойства операции композиции узлов.

а) *Любой «неединичный»* (то есть не развязываемый без разрывов) *узел необратим.* Иными словами: нельзя развязать узел, завязав рядом с ним другой; или еще иначе: узлы можно умножать, но не делить друг на друга.

б) *Существуют «простые» узлы* — их нельзя представить в виде произведения двух других узлов, каждый из которых отличен от «единичного» (так, узлы $a$, $b$ на рисунке 7 и $m$, $n$ на рисунке 8 — простые).

в) *Любой узел либо сам является простым, либо есть композиция простых, причем такое представление единственно.* Какое поразительное сходство со свойствами целых чисел! (Подробно об узлах рассказано в «Кванте», 1975, № 7).

## Что увидел алгебраист в наших примерах

Алгебраист подобен топографу — он смотрит на математические объекты «с высоты птичьего полета» и замечает и исследует лишь самые общие связи и закономерности. Зато и результаты его имеют наиболее общий и универсальный характер. (Неизбежны, конечно, и потери — так топографу недоступна красота ландшафтов страны, карту которой он составляет по аэрофотоснимкам.)

То общее, что сближает столь непохожие «вещи», как слова, узлы, подстановки и самосовмещения, может быть выражено на языке определений и аксиом, сформулированных в статье «Группы» (см. с. 7—8). В каждом из этих примеров возникает множество, на котором задана бинарная операция. Не всегда эта операция имеет обратную, но во всех примерах эта операция ассоциативна. Множество с ассоциативной бинарной операцией (аксиома III группы) называется *полугруппой*. Как видите, существование единицы и обратимость элементов (аксиомы I и II группы) в полугруппе не предполагается.

Все рассмотренные нами примеры — полугруппы, а самосовмещения и подстановки образуют даже группы — в них выполняются и аксиомы I и II.

Хорошо знакомые читателю множество $N$ всех натуральных чисел с операцией умножения, множество всех целых неотрицательных чисел с операцией сложения — также полугруппы, но не группы. Заметим, что в этих двух примерах единица полугруппы существует (1 в первом случае, 0 во втором) и единственна. Впрочем, это не случайно — можно доказать, что если в полугруппе существует единица, то она единственна: если $a * e_1 = e_1 * a = a$ и $a * e_2 = e_2 * a = a$ для любого элемента $a$ из полугруппы, то, в частности, $e_1 * e_2 = e_1$ и $e_1 * e_2 = e_2$, так что $e_1 = e_2$.

Задача 10. Образует ли полугруппу

а) множество натуральных нечетных чисел с операцией умножения;

б) множество неотрицательных четных целых чисел с операцией сложения?

## III. СНОВА О ГРУППАХ

Ранее при решении задач нам постоянно приходилось пользоваться специальными свойствами рассматриваемых объектов: тем, что слова состоят из букв, подстановки меняют местами, узлы развязываются и т. п. Методы абстрактной алгебры тем и сильны, что избавляют нас от необходимости вникать в свойства тех «вещей», которые фигурируют в наших операциях.

Теперь мы покажем, как легко и изящно могут быть получены многие свойства наших «вещей» с помощью одних только аксиом I—III.

### Порядок элемента группы

Для произвольного элемента $a$ группы $G$ можно определить любую его целую степень: $a^0 = e$, $a^1 = a$, $a^2 = a * a$, ..., $a^{k+1} = a * a^k$, $a^{-1}$ (обратный элемент), $a^{-2} = a^{-1} * a^{-1}$, ..., $a^{-k-1} = a^{-1} * a^{-k}$. При этом выполняются равенства $a^k * a^l = a^{k+l}$, $(a^k)^l = a^{kl}$.

Определение. Группу (полугруппу), число элементов которой конечно, называют *конечной группой* (полугруппой).

Теорема (о порядке элемента конечной группы). *Пусть $G$ — конечная группа и $a$ — произвольный элемент из $G$. Тогда найдется такое натуральное число $k$, что все элементы $a^0 = e, a, \dots, a^{k-1}$ попарно различны, $a^k = e$, и если $a^l = e$, то $k$ делит $l$.* Число $k$ называют *порядком элемента $a$*.

Доказательство. Рассмотрим последовательность степеней элемента $a$ $(a \neq e)$:

$$a^0 = e, a, a^2, a^3, \dots, a^q, \dots$$

Группа $G$ конечна, поэтому в этой (бесконечной) последовательности найдутся два равных элемента: $a^p = a^q$ $(0 \leqslant p < q)$. Тогда $a^{q-p} = a^q * a^{-p} = a^p * a^{-p} = e$, то есть существует по крайней мере одно такое натуральное число $l = q-p$, что $a^l = e$. Пусть $k$ — наименьшее число среди всех таких $l$, тогда равенство $a^p = a^q$ $(0 \leqslant p < q)$ может выполняться только при $q-p \geqslant k$ и поэтому все элементы $e, a, a^2, \dots, a^{k-1}$ попарно различны. Нам осталось доказать, что если $a^l = e$, то $k$ делит $l$. Пусть $r$ — остаток от деления $l$ на $k$, то есть $l = k \cdot s + r$ $(0 \leqslant r < k)$, тогда $a^k = e$, $a^{ks} = e$, так что из $a^l = e$ следует, что $a^l * a^{-ks} = a^{l-ks} = a^r = e$, откуда $r = 0$.

Читатель, решивший задачу 7, возможно, разочарован нашим «абстрактным» вариантом ее решения. «Но уж доказательство делимости $n!$ на $k$ (см. задачу 7) наверняка потребует использования особых свойств подстановок!» — мог бы воскликнуть заинтересованный читатель,— и был бы неправ.

Теорема (Жозеф-Луи Лагранж). *Порядок $k$ любого элемента конечной группы $G$ делит число $r(G)$ элементов этой группы.*

Число $r(G)$ называют *порядком* конечной группы $G$.

Вот другие удобные формулировки теоремы Лагранжа.

а) *В конечной группе $G$ порядка $r$ для любого элемента $a$ справедливо равенство $a^r = e$.*

б) *Порядок конечной группы делится на наименьшее общее кратное порядков ее элементов.*

Теперь для решения второй части задачи 7 достаточно заметить, что порядок группы $S_n$ равен $n!$.

## Вокруг теоремы Лагранжа

Не приводя доказательства теоремы Лагранжа (его можно найти в учебниках по теории групп), проиллюстрируем на примерах, как «работает» эта теорема.

Иллюстрация 1 (алгебраическая). Если в конечной группе $G$ найдется элемент $g$, порядок $k$ которого равен порядку $r(G)$ группы $G$, то любой элемент $a$ из $G$ является некоторой степенью $g$: $a = g^m$ ($0 \leqslant m \leqslant k-1$). Такая группа $G$ называется *циклической*; она всегда коммутативна.

Примером циклической группы является группа самосовмещений правильного $n$-угольника (см. с. 9), в ней элемент $g$, «порождающий» всю группу,— поворот на угол $360°/n$.

Задача 11. Докажите, что в циклической группе число решений уравнения $x^n = e$ равно наибольшему общему делителю чисел $n$ и $r(G)$.

Задача 12*. Докажите, что если порядок $r(G)$ конечной группы $G$ — простое число, то группа $G$ — циклическая.

Иллюстрация 2 (геометрическая). Порядок группы $\Gamma(Д)$ самосовмещений додекаэдра $Д$ (группы симметрии додекаэдра) делится на 30. Этот факт можно вывести из теоремы Лагранжа без всяких подсчетов — просто из существования трех типов самосовмещений додекаэдра (см. рис. 9): поворотов вокруг вершины «на одну грань» (на 120°), поворотов вокруг середины ребра на 180° и поворотов вокруг центра грани на 72°. Порядки этих элементов из группы $\Gamma(Д)$, очевидно, равны 3, 2 и 5 соответственно, поэтому порядок группы $\Gamma(Д)$ делится на $3\cdot2\cdot5 = 30$

Иллюстрация 3 (арифметическая). Задачи на делимость чисел часто очень красивы; попробуйте, например, доказать, что числа $7^8-1$, $11^8-1$, $13^8-1$, $17^8-1$, $19^8-1$, $23^8-1$, $29^8-1$ делятся на 30. После того как вы найдете решение, вам будет приятно узнать, что этот факт — одно из следствий теоремы Лагранжа.

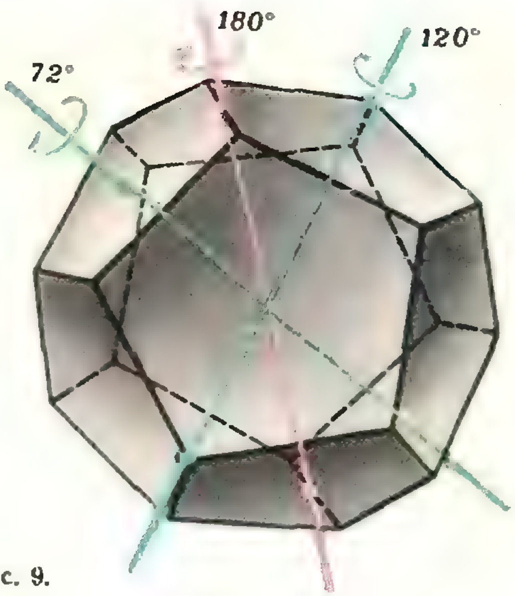


Рис. 9.

Обозначим через $\Phi(m)$ множество натуральных чисел, меньших $m$ и взаимно простых с $m$. Введем на множестве $\Phi(m)$ операцию «$*$» умножения по модулю $m$: *$a * b$ равно остатку от деления обычного произведения $a\cdot b$ чисел $a$ и $b$ на $m$* (например, если $m = 30$, то $7 * 17 = 29$, так как $7\cdot17 = 119 = 3\cdot30 + 29$).

Задача 13. Докажите, что $\Phi(m)$ образует абелеву группу, то есть

а) $a*b$ принадлежит $\Phi(m)$, причем $a*b = b*a$;

б) число 1 всегда принадлежит $\Phi(m)$, и $a*1 = a$ для любого $a$ из $\Phi(m)$;

в) для любого $a$ из $\Phi(m)$ найдется такое $b$, что $a*b = 1$.

Итак, $\Phi(m)$ — группа. Обозначим через $\varphi(m)$ ее порядок, тогда для любого $a$ из $\Phi(m)$ будет $a^{\varphi(m)} = 1$ (теорема Лагранжа во второй формулировке!). Здесь возведение в степень $\varphi(m)$ производится в группе $\Phi(m)$, а для обычных степеней целых чисел это означает, что $a^{\varphi(m)}$ дает при делении на $m$ остаток 1, то есть что $a^{\varphi(m)}-1$ делится на $m$. Если $m = 30$, то $\Phi(m) = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$, $\varphi(m) = 8$, и мы сразу получаем, что числа $7^8-1$, $11^8-1$, … делятся на 30.

## Темы для размышлений

О словах. Построим по алфавиту $A$ алфавит $\hat{A}$ символов и «антисимволов»: если в $A$ входит символ $a$, то в $\hat{A}$ входят $a$ и $\overline{a}$.

Условимся, что после образования слова над алфавитом $\hat{A}$ в нем «аннигилируют» (удаляются) все соседние пары «символ — антисимвол» (например: $\langle ab\bar{c}c\bar{b}a\rangle \rightarrow \langle ab\bar{b}a\rangle \rightarrow \langle aa\rangle$).

Задача 14. Докажите, что результат полной «аннигиляции» не зависит от порядка «аннигиляции» отдельных пар «символ - антисимвол».

Условимся *композицией* «∘» *двух слов* (в которых уже нет пар символ - антисимвол) над алфавитом $\hat{A}$ считать результат полной «аннигиляции» обычной композиции этих слов.

Задача 15*. Докажите, что множество слов алфавита $\hat{A}$ с операцией «∘» есть группа.

О самосовмещениях и подстановках.

Задача 16. Дан треугольник. Надо построить тетраэдр, все грани которого конгруэнтны этому треугольнику.

а) Для каких треугольников это возможно?

б) Найдите группу самосовмещений такого тетраэдра.

Задача 17. Выше мы доказали, что число самосовмещений куба, то есть порядок группы симметрии куба Г (*К*), равен 48. Попытайтесь аналогичным образом подсчитать порядок группы Г (*Д*) самосовмещений додекаэдра.

Задача 18. Постройте таблицу умножения для группы самосовмещений правильного пятиугольника.

Самосовмещения куба разбиваются на два класса: те, которые могут быть выполнены непрерывным движением куба в пространстве (повороты), будем называть их *движениями*, и те, которые движением в пространстве не выполняются (отражения). Множество движений куба с операцией композиции перемещений образует группу, в ней 24 элемента.

Задача 19. Опишите все элементы этой группы, то есть укажите оси и углы всех поворотов, входящих в эту группу.

Читатель, возможно, заметил, что группа $S_4$ содержит столько же элементов (24), сколько и группа движений куба. Более того, оказывается, что эти две группы *изоморфны* (об этом понятии рассказано в статье «Группы»): *каждому движению куба можно сопоставить подстановку из $S_4$ так, что композиции движений отвечает произведение соответствующих этим движениям подстановок.*

Задача 20*. Установите изоморфизм между группой движений куба и группой $S_4$, указав 4 геометрических объекта в кубе таких, что произвольная их подстановка задает единственное движение куба (и, наоборот, каждому движению куба отвечает подстановка этих объектов).

Пусть $a$ — подстановка последовательности $(1, 2, 3, \ldots, n)$. Назовем *орбитой числа $p$ относительно подстановки $a$* множество чисел, на месте которых может оказаться $p$ при действии подстановки $a$ или ее степеней $(a^2, a^3, \ldots)$.

Задача 21. Докажите, что множество $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ разбивается на орбиты, внутри каждой из которых любое число переводится на место любого другого под действием подстановки $a$ или ее степеней.

Задача 22. Докажите, что порядок подстановки (как элемента группы $S_n$) равен наименьшему общему кратному длин ее орбит.

Очевидно, что всякая подстановка полностью определяется своими орбитами и порядком перехода от элемента к элементу внутри орбиты. Например, подстановка

$$a = \begin{pmatrix} 1\,4\,3\,2\,6\,5\,7 \\ 4\,3\,1\,6\,5\,2\,7 \end{pmatrix}$$

полностью восстанавливается по такой записи:

$$a = (1\ 4\ 3)\ (2\ 6\ 5)\ (7),$$

если условиться, что из двух соседних элементов одной орбиты левый переводится подстановкой $a$ в правый.

Задача 23. Как, зная «орбитальную» запись подстановки $a$, построить обратную к ней подстановку $a^{-1}$?

Задача 24*. Опишите все пары подстановок $a$ и $b$, удовлетворяющих равенству $a \circ b = b \circ a$.

## Советуем купить!

Барабой В. А., Кирчинский Б. Р. *Ядерные излучения и жизнь.* Серия «Проблемы современной науки и технического прогресса». Ц. 77 к.

Бермант М. А. и др. *Математические модели и планирование образования.* Ц. 34 к.

Гольданский В. И., Поликанов С. М. *Тяжелее урана.* Ц. 70 к.

Гуревич В. З. *Энергия невидимого света.* Ц. 50 к.

Дадаян В. С. *Математика в экономике.* Ц. 8 к.

Почтарев В. И. *Магнетизм Земли и космического пространства. Ц. 24 к.*

Сомииский М. С. *Солнечная электроэнергия. Полупроводники и солнце.* Ц. 35 к.

*Физики сегодня и завтра. Прогнозы науки.* Ц. 1 р 73 к

*Творцы физической оптики.* Сборник статей. Серия «Из истории мировой культуры». Ц. 1 р. 11 к.

*Для получения книг почтой заказы направляйте по адресу: 117464, Москва, Мичуринский проспект, 12, магазин № 3 «Книга — почтой» «Академкнига».*

# задачник кванта

## Задачи

### М406—М410; Ф418—Ф422

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 декабря 1976 г. по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М406, М407» или «...Ф418». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

**М406.** Окружность радиуса $R$ разделена точками $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ на четыре равные дуги. Докажите, что сумма четвертых степеней расстояний от произвольной точки окружности $M$ до точек $A_k$ не зависит от положения точки $M$, причем

$$|A_1M|^4+|A_2M|^4+|A_3M|^4+|A_4M|^4=24R^4.$$

*Ю. Бабенко*

**М407.** Даны два натуральных числа $n$ и $m$, $n>m$. Докажите, что $n$ можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых — делитель числа $m$, а другое не имеет с $m$ ни одного общего делителя, кроме единицы.

*С. Конягин*

**М408.** Из 30 конгруэнтных прямоугольников составлен прямоугольник, подобный исходным. Каким может быть отношение длин сторон этого прямоугольника?

*П. Панков*

**М409.** В строчку подряд написано 1000 чисел. Под ней пишется вторая строчка чисел по следующему правилу: под каждым числом $A$ первой строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз $A$ встречается в первой строчке. Из второй строчки таким же образом получается третья: под каждым числом $B$ второй строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз $B$ встречается во второй строчке. Затем из третьей строчки так же строится четвертая, из четвертой пятая и так далее.

а) Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.

б)* Более того, докажите, что 11-я строчка совпадает с 12-й.

в)* Приведите пример такой первоначальной строчки, для которой 10-я строчка не совпадает с 11-й.

*М. Серов*

**М410.** На сфере радиуса 1 проведена окружность большого круга, которую мы будем называть экватором. Нам будет удобно использовать и другие географические термины: полюс, меридиан, параллель.

а) Зададим на этой сфере функцию $f$, ставящую в соответствие каждой точке сферы квадрат расстояния от этой точки до плоскости экватора. Проверьте, что эта фунция обладает следующим свойством:

*если* $M_1$, $M_2$, $M_3$ *— концы трех*
*взаимно перпендикулярных радиусов* (*)
*сферы, то* $f(M_1)+f(M_2)+f(M_3)=1$.

Во всех следующих пунктах $f$ — произвольная неотрицательная функция на сфере, которая обращается в 0 во всех точках экватора и обладает свойством (*).

б)* Пусть $M$ и $N$ — точки одного меридиана, расположенные между северным полюсом и экватором. Докажите, что если точка $M$ дальше от плоскости экватора, чем точка $N$, то $f(M)\geqslant f(N)$.

в)* Пусть $M$ и $N$ — произвольные точки сферы. Докажите, что если точка $M$ дальше от плоскости экватора, чем $N$, то $f(M)\geqslant f(N)$.

г)* Докажите, что функция $f$ совпадает с функцией, описанной в пункте а).

*А. Лодкин*

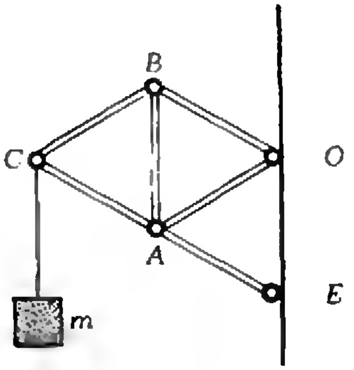


Рис. 1.

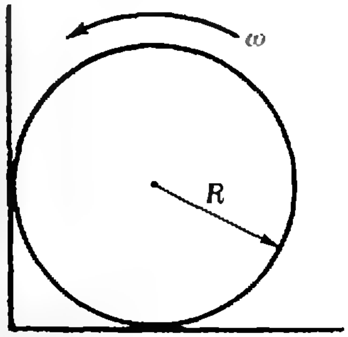


Рис. 2.

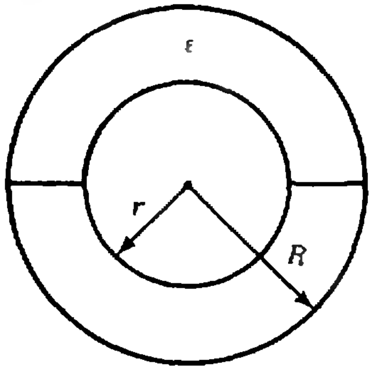


Рис. 3.

**Ф418.** Сложенные вместе смоченные оконные стекла практически невозможно отделить друг от друга, пытаясь оторвать одно стекло от другого. Почему?

**Ф419.** В некоторой галактике обнаружена система планет, аналогичная нашей Солнечной системе. Средние плотности планет и Солнца в этой системе в два раза меньше средних плотностей планет и Солнца в нашей системе, а размеры всех небесных тел — в три раза меньше размеров соответствующих тел в нашей системе. Сколько земных суток длится год на обнаруженном аналоге Земли?

**Ф420.** На кронштейне $ACBOE$ из 6 невесомых жестких стержней одинаковой длины, соединенных шарнирно (рис. 1), в точке $C$ подвешен груз массы $m$. Растянут или сжат стержень $AB$? Найти силу упругости в этом стержне.

*Б. Буховцев*

**Ф421.** Тонкостенный цилиндр радиуса $R$ раскрутили до угловой скорости $\omega$ и поставили в угол (рис. 2). Коэффициент трения скольжения между стенками угла и цилиндром равен $k$. Определить, сколько оборотов сделает цилиндр до остановки.

**Ф422.** Половина сферического конденсатора заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$ (рис. 3). Найти отношение плотностей зарядов на верхней и нижней половинах конденсатора и его емкость.

# Решения задач

## М365—М370; Ф373—Ф377

**М365[*]).** *а) Сумма нескольких чисел равна единице. Может ли сумма их кубов быть больше единицы?*

*б) Тот же вопрос для чисел, каждое из которых меньше единицы.*

*в) Может ли случиться, что ряд $a_1+a_2+a_3+\dots$ сходится, а ряд $a_1^3+a_2^3+a_3^3+\dots$ — нет?*

*(Напомним, что ряд $x_1+x_2+x_3+\dots$ называется сходящимся, если последовательность чисел $S_n=x_1+x_2+\dots+x_n$ имеет предел.)*

Ответ на все три вопроса — утвердительный. Приведем примеры, показывающие, что так случиться **может**.

а) Два числа: 2 и —1.

б) Восемь чисел: $4/5,\ 4/5,\ \underbrace{-1/10,\ -1/10,\ \dots,\ -1/10}_{6\ \text{штук}}$.

Их сумма равна 1, а сумма кубов равна $2\cdot(^4/_5)^3-6\cdot(^1/_{10})^3=1{,}018$. На той же идее — брать положительные числа и добавлять к ним отрицательные числа — в большем количестве, но величиной поменьше, — основан и следующий пример.

в) Составим ряд

$$1+(-^1/_2)+(-^1/_2)+{}^1/_2+(-^1/_4)+(-^1/_4)+(^1/_2)+(-^1/_4)+(-^1/_4)+\dots$$

следующим образом: следом за суммой $1+(-^1/_2)+(-^1/_2)$ поставим $2^3=8$ сумм $^1/_2+(-^1/_4)+(-^1/_4)$, затем $3^3=27$ сумм $^1/_3+(-^1/_6)+(-^1/_6),\dots$, $n^3$ сумм $(^1/_n)+(-^1/_{2n})+(-^1/_{2n})$, и так далее. Этот ряд сходится и сумма его равна нулю, поскольку сумма $N$ первых его членов, где $3(1+2^3+3^3+\dots+n^3)\leqslant N\leqslant 3[1+2^3+3^3+\dots+(n+1)^3]$, не больше $^1/_{(n+1)}$ (именно, она либо нуль, либо $^1/_{(n+1)}$, либо $^1/_{2(n+1)}$). Соответствующий же ему ряд из кубов расходится. Действительно, сумма $n^3$ сумм $(^1/_n)^3+(-^1/_{2n})^3+(-^1/_{2n})^3={}^3/_{4n^3}$ равна $^3/_4$, так что сумма первых $3(1+2^3+\dots+n^3)$ членов ряда равна $^{3n}/_4$.

Разумеется, если в условии задачи все числа предполагать положительными, то ответы на все три вопроса будут отрицательными.

*Н. Васильев*

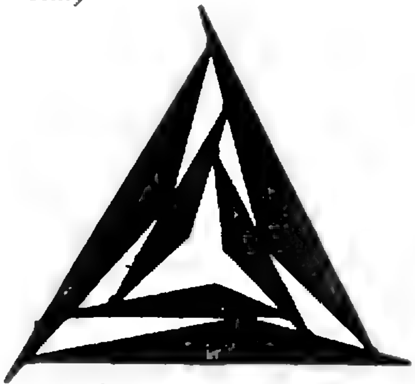


Рис. 1.

◆

**М366.** *Можно ли расположить на плоскости несколько треугольников так, чтобы две вершины каждого из них лежали на сторонах (но не в вершинах) других треугольников?*

В условии задачи не оговорено, что треугольники не должны пересекаться, и некоторые наши читатели решали задачу, считая пересечение возможным (в этом случае решение выглядит, разумеется, совсем просто). Для непересекающихся треугольников ответ на вопрос задачи остается положительным: на рисунке 1 показано, как требуемым образом можно расположить на плоскости 6 треугольников.

*В. Колосов*

◆

**М367.** *Может ли произведение а) трех б) четырех последовательных натуральных чисел равняться некоторой степени некоторого натурального числа (квадрату, кубу и т. д.)?*

а) Допустим, что $k(k+1)(k+2)=u^n$, $n>1$. Число $k+1$ взаимно просто с числами $k$ и $k+2$; поэтому $k+1=m^n$, $k(k+2)=k^2+2k=l^n$ (это — следствие Основной теоремы арифметики о единственности разложения натуральных чисел на простые множители). Тогда $(k+1)^2=k^2+2k+1=m^{2n}$, то есть $(m^2)^n-l^n=1$ — противоречие: $(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})\neq 1$. Значит, произведение трех последовательных натуральных чисел не может быть степенью натурального числа.

б) Докажем, что и в этом случае ответ отрицательный. Предположим противное: допустим, что для некоторого $k$ $k(k+1)(k+2)(k+3)=u^n$.

---

[*]) Задача М364 решена в статье Л. Беве «Минигеометрия», см. «Квант», 1976, № 6, с. 11.

Идея рассуждения будет такой же, как в задаче а): мы сконструируем два близких числа, каждое из которых должно быть $n$-й степенью, и придем к противоречию. Рассмотрим отдельно случаи $n = 2$ и $n \geq 3$.

I. $n = 2$. Имеем $(k^2+3k)(k^2+3k+2) = u^2$. Обозначив $k^2 + 3k + 1$ через $y$, получим равенство $y^2 - 1 = u^2$, невозможное для натуральных $u$ и $y$.

II. $n \geq 3$. Заметим, что либо число $k+1$, либо $k+2$ взаимно просто с остальными тремя числами.

1) Пусть число $k+1$ взаимно просто с $k$, $k+2$ и $k+3$. Тогда (см. решение пункта а)) $k+1 = m^n$, $k(k+2)(k+3) = l^n$. Имеем $k = m^n - 1$, $k+2 = m^n + 1$, $k+3 = m^n + 2$; значит $(m^n - 1)(m^n + 1)(m^n + 2) = m^{3n} + 2m^{2n} - m^n - 2 = l^n$. Поскольку $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 3$, $2m^{2n} - m^n - 2 > 0$, то есть $l^n > (m^3)^n$, или $l > m^3$. С другой стороны, $(m^3+1)^n > m^{3n} + nm^{3n-3} > m^{3n} + 2m^{2n} > m^{3n} + 2m^{2n} - m^n - 2 = l^n$, откуда $l < m^3 + 1$. Итак, должно быть $m^3 < l < m^3 + 1$, что невозможно для натуральных $m$ и $l$.

2) Если же число $k+2$ взаимно просто с $k$, $k+1$ и $k+3$, то тогда $k+2 = m^n$, а $k(k+1)(k+3) = l^n$, или $(m^n - 2)(m^n - 1)(m^n + 1) = l^n$, то есть $l^n = m^{3n} - 2m^{2n} - m^n + 2 < m^{3n}$, поскольку $2m^{2n} + m^n - 2 > 0$ при наших $m$ и $n$. Таким образом, $l < m^3$.

Сравним теперь $l$ и $m^3 - 1$. Для этого заметим следующее. Так как $m^3 > 4$, имеем $m^{3n-3} > 4m^{3n-6}$; и $3n - 6 \geqslant n$, поскольку $n \geqslant 3$. Отсюда $m^{3n-3} > 3m^{3n-6} + m^n$. Оценим теперь разность между $(m^3)^n$ и $(m^3-1)^n$: $(m^3)^n - (m^3-1)^n = m^{3n-3} + m^{3n-6}(m^3 - 1) + m^{3n-9}(m^6 - 2m^3 + 1) + \ldots + (m^3-1)^{n-1} > 3m^{3n-3} - 3m^{3n-6} > 2m^{3n-3} + m^n > 2m^{2n} + m^n - 2 = (m^3)^n - l^n$.

Отсюда $(m^3 - 1)^n < l^n$, то есть $m^3 - 1 < l < m^3$ — не может быть, поскольку $m$ и $l$ — натуральные.

Полученное противоречие и доказывает наше предположение: произведение четырех последовательных натуральных чисел не может равняться степени натурального числа.

*Д. Флейшман*

◆

**М368.** *Докажите, что пересечение трех прямых круговых цилиндров радиуса 1, оси которых попарно взаимно перпендикулярны (но не обязательно пересекаются), содержится в некотором шаре радиуса* $\sqrt{3/2}$

Пространственную фигуру, о которой идет речь в задаче, пересечение трех цилиндров — довольно трудно себе представить. Но в этом и нет необходимости: задача решается очень просто, если перевести ее на язык алгебры — воспользоваться методом координат.

Выберем систему координат так: построим прямоугольный параллелепипед, три ребра которого идут по осям цилиндров (для этого нужно через ось каждого цилиндра провести две плоскости, параллельные осям двух других цилиндров); начало координат поместим в центре этого параллелепипеда, а оси направим параллельно его ребрам (рис. 2). Тогда если точка $(x, y, z)$ принадлежит внутренности цилиндров, для нее выполнены неравенства

$$(x-a)^2 + (y+b)^2 \leqslant 1, \quad (y-b)^2 + (z+c)^2 \leqslant 1,$$
$$(z-c)^2 + (x+a)^2 \leqslant 1$$

($2a$, $2b$ и $2c$ — длины ребер построенного параллелепипеда). Сложив эти неравенства, для внутренних точек $(x, y, z)$ пересечения цилиндров получим

$$(x^2 + y^2 + z^2) + (a^2 + b^2 + c^2) \leqslant {}^3/_2,$$

то есть $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant {}^3/_2$, что и требовалось доказать.

*Н. Васильев*

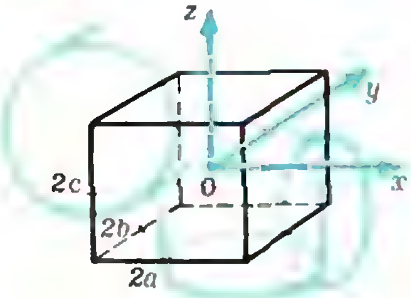


Рис. 2.

**M369.** *Дан остроугольный треугольник $ABC$. $O$ — точка пересечения его высот, $\omega$ — окружность с центром $O$, лежащая внутри этого треугольника. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, описанный около окружности $\omega$ и вписанный в треугольник $ABC$ (так, что $A_1 \in [BC]$, $B_1 \in [AC]$, $C_1 \in [AB]$).*

Введем такие обозначения: $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = \alpha = 90° - \hat{A}$; $\widehat{BAO} = \widehat{BCO} = \beta = 90° - \hat{B}$, $\widehat{CAO} = \widehat{CBO} = \gamma = 90° - \hat{C}$. Допустим, что точка $B_1$ такова, что угол между касательной $B_1C_1$, проведенной из нее к окружности $\omega$, и прямой $B_1O$ равен $\beta$ (рис. 3). Проведем касательную к $\omega$ из точки $C_1$ — $[C_1A_1]$. Покажем, что тогда $B_1A_1$ — тоже касательная, то есть что $\widehat{C_1B_1A_1} = 2\beta$. Рассмотрим четырехугольник $AC_1OB_1$. Вокруг него можно описать окружность, поскольку $\widehat{C_1AO} = \widehat{C_1B_1O} = \beta$. Из того, что четырехугольник $AC_1OB_1$ вписанный, следует равенство углов $OAB_1$ и $OC_1B_1$, именно: $\widehat{OAB_1} = \widehat{OC_1B_1} = \gamma$. Отсюда $\widehat{B_1C_1A_1} = 2\gamma$. Аналогично доказывается, что и вокруг четырехугольника $C_1BA_1O$ можно описать окружность: $\widehat{OC_1A_1} = \widehat{OBA_1} = \gamma$. Из этого в свою очередь следует равенство углов $C_1BO$ и $C_1A_1O$: $\widehat{C_1BO} = \widehat{C_1A_1O} = \alpha$.

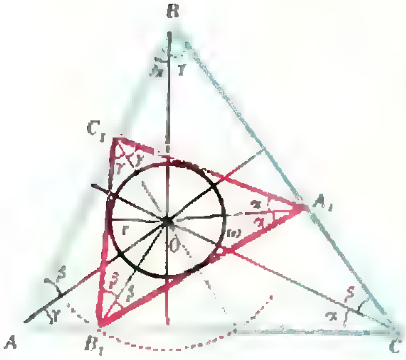


Рис. 3.

Рассмотрим теперь четырехугольник $B_1OA_1C$. Докажем, что и вокруг него можно описать окружность. В самом деле, $\widehat{B_1OA_1} = 2\pi - (\widehat{B_1OC_1} + \widehat{C_1OA_1}) = \alpha + \beta + 2\gamma$, так что $\widehat{B_1OA_1} + \hat{C} = 2(\alpha + \beta + \gamma) = \pi$. Следовательно, углы $OB_1A_1$ и $OCA_1$ равны как вписанные и опирающиеся на одну и ту же хорду $OA_1$: $\widehat{OB_1A_1} = \widehat{OCA_1} = \beta$, так что $\widehat{C_1B_1A_1} = 2\beta$. Аналогично доказывается, что и $\widehat{C_1A_1B_1} = 2\alpha$, то есть $B_1A_1$ в самом деле касательная (а треугольник $A_1B_1C_1$ искомый).

Осталось только построить такую точку $B_1$, из которой бы окружность $\omega$ была видна под углом $2\beta$. Допустим, что касательная $B_1C_1$ уже есть. Проведем радиус окружности $\omega$ в точку касания. Если величина радиуса $r$, то длина отрезка $B_1O$ равна $r/\sin\beta$. Следовательно, точку $B_1$ мы можем получить как результат пересечения стороны $AC$ треугольника $ABC$ с окружностью с центром в точке $O$ радиуса $r/\sin\beta$.

Каждой точке $B_1$ пересечения этой окружности с $[AC]$ (таких точек может быть две, одна или ни одной) соответствует искомый треугольник $A_1B_1C_1$.

Итак, мы выяснили, как построить треугольник $A_1B_1C_1$, у которого углы $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно равны $2\alpha$, $2\beta$ и $2\gamma$. Оказывается, что других решений у нашей задачи нет. В самом деле, покажем, что из вершины $B_1$ искомого треугольника $A_1B_1C_1$ окружность $\omega$ видна под углом $2\beta$.

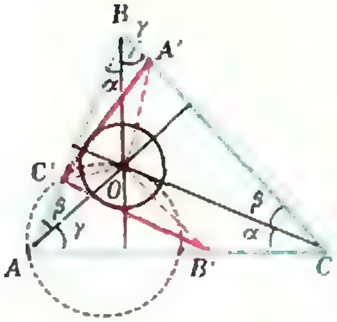


Рис. 4.

Пусть $B' \in [AC]$, и пусть, например, $\widehat{C'B'O} < \beta$ ($C'B'$ — касательная к $\omega$). Проведем окружность через точки $A$, $C'$ и $O$ (рис. 4): тогда точка $B'$ лежит вне этой окружности и $\widehat{B'C'O} < \gamma$ (убедитесь в этом самостоятельно). Если $A' \in [BC]$ и $C'A'$ — касательная к $\omega$, то тогда $\widehat{B'C'A'} < 2\gamma$. Аналогично, $\widehat{C'A'B'} < 2\alpha$, так что сумма углов в предположительно существующем треугольнике $A'B'C'$ (с вершиной $B'$ не такой, как $B_1$) меньше $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$ — противоречие. Случай, когда $C'B'O > \beta$, разбирается аналогично.

*Д. Изаак*

**M370.** *Пусть $a$, $b$, $c$ — тройка положительных чисел. Образуем из них новую тройку:*

$$|a - b|,\ |b - c|,\ |c - a|.$$

◆

а) Докажем, что в этом случае в последовательности троек число 0 обязательно встретится. Обозначим максимальное число в первой тройке $(a, b, c)$ через $m$. Ясно, что максимальное число в каждой следующей тройке по крайней мере на *затем из этой тройки по тому же правилу следующую и т. д. Обязательно ли среди полученных таким образом чисел встретится 0, если исходные числа а) целые; б) действительные?*

меньше, чем в предыдущей, так что максимальное число во второй тройке не больше $m-1$, в третьей — не больше $m-2$, и так далее. Долго так продолжаться не может: не далее как в $m$-й тройке максимальное число окажется равным нулю.

б) Приведем пример, показывающий, что 0 может не встретиться ни в одной из троек. Начнем с тройки $(\lambda, \lambda^2, \lambda^3)$, где $\lambda$ выбрано так, что числа в следующей тройке

$$|\lambda^2-\lambda|, \quad |\lambda^3-\lambda^2|, \quad |\lambda^3-\lambda|$$

пропорциональны числам первой тройки. Поскольку $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)$, $\lambda^3-\lambda^2=\lambda^2(\lambda-1)$, $\lambda^3-\lambda=(\lambda^2+\lambda)(\lambda-1)$, для этого возьмем $\lambda$ равным положительному корню уравнения $\lambda^2+\lambda=\lambda^3$, то есть $\lambda=(1+\sqrt{5})/2$. При этом $n$-я тройка будет такой: $\lambda(\lambda-1)^{n-1}$, $\lambda^2(\lambda-1)^{n-1}$, $\lambda^3(\lambda-1)^{n-1}$ (это легко проверить с помощью индукции), так что ни одно из чисел не будет равно 0.

Интересный, но более трудный вопрос: какие еще тройки чисел $(a, b, c)$ обладают тем свойством, что в возникающей из них последовательности не будет нулей? Попробуйте в нем разобраться. Не менее интересна аналогичная задача о преобразованиях четверок чисел

$$(a, b, c, d) \to (|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|).$$

*Н. Васильев*

◆

**Ф373.** *Два бильярдных шара, один из которых первоначально покоится, испытывают упругое «косое» столкновение. Линия, проходящая через центры шаров при столкновении, составляет угол 60° с направлением первоначального движения налетающего шара. Во время столкновения шары деформируются, и часть кинетической энергии налетающего шара переходит в потенциальную энергию упругой деформации шаров, которая при разлете шаров вновь переходит в кинетическую энергию. Определить максимальную часть энергии шаров, переходящую в энергию упругой деформации в процессе удара. Шары считать абсолютно гладкими.*

Обозначим через $\mathbf{v}_0$ начальную скорость первого (налетающего) шара, а через $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости первого и второго шаров в момент их максимальной деформации. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}+П,$$

где $m$ — масса каждого шара, $П$ — максимальное значение потенциальной энергии упругой деформации шаров.

Введем систему координат $XOY$ и найдем проекции скоростей $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ на соответствующие оси координат. Ось $OX$ направим по линии, соединяющей центры шаров при ударе (рис. 5). В этом направлении между шарами происходит обычный лобовой упругий удар. Поскольку система шаров изолирована, проекция импульса системы на ось $OX$ сохраняется. В начальный момент эта проекция равна $mv_0\cos\alpha$. В тот момент, когда деформации шаров максимальны, проекции их скоростей на ось $OX$ одинаковы: $v_{1_x}=v_{2_x}=v_x$. Из закона сохранения импульса

$$mv_0\cos\alpha=2mv_x,$$

или

$$v_{1_x}=v_{2_x}=v_x=\frac{1}{2}v_0\cos\alpha.$$

Так как шары абсолютно гладкие, взаимодействия их по оси $OY$ не происходит. Проекция скорости первого шара на эту ось не изменяется:

$$v_{1_y}=v_{0_y}=v_0\sin\alpha,$$

а проекция скорости второго шара остается равной нулю:

$$v_{2_y}=0.$$

Таким образом, закон сохранения энергии можно записать так:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{m\left(v_{1_x}^2+v_{1_y}^2\right)}{2}+\frac{m\left(v_{2_x}^2+v_{2_y}^2\right)}{2}+П,$$

или

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{4}+\frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2}+П.$$

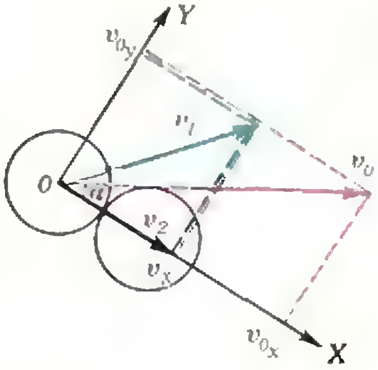


Рис. 5.

Отсюда найдем долю кинетической энергии налетающего шара, перешедшую в потенциальную энергию упругой деформации:

$$\frac{\Pi}{mv_0^2/2} = \frac{\cos^2\alpha}{2} = \frac{1}{8}.$$

◆

**Ф374.** *На дне стакана с водой лежат несколько запаянных с одного конца и заполненных воздухом капиллярных трубок. Диаметр трубок $d = 0{,}2$ мм, высота уровня воды в стакане $h = 10$ см. При кипении воды в открытых концов трубок образуются пузырьки пара. Чему равна температура воды на дне стакана, если атмосферное давление равно $10^5$ н/м²? Коэффициент поверхностного натяжения воды принять равным 57 дин/см. Считать, что давление насыщенных паров воды вблизи 100°C возрастает на 27 мм рт. ст. при повышении температуры на 1°.*

Пузырек пара отрывается от трубки в тот момент, когда давление насыщенного пара $p_н$ внутри пузырька равно внешнему давлению $p$ на пузырек. Это внешнее давление складывается из атмосферного давления $p_0$, из гидростатического давления $\rho gh$ и из добавочного давления $2\sigma/r$, обусловленного поверхностным натяжением жидкости. Здесь $p_0 = 10^5$ н/м², $\rho = 10^3$ кг/м³ — плотность воды, $\sigma = 57$ дин/см — коэффициент поверхностного натяжения воды и $r$ — радиус кривизны поверхности жидкости у трубки. В момент отрыва пузырька $r$ равно радиусу трубки, то есть $r = d/2$.

Таким образом,

$$p_н = p_0 + \rho gh + 4\sigma/d.$$

Давление $p_н$ отличается от давления насыщенного пара при 100°C, равного $p_0$, на величину

$$\Delta p = p_н - p_0 = \rho gh + 4\sigma/d \approx 16 \text{ мм рт. ст.}$$

Следовательно, температура $t$ воды у дна стакана

$$t = 100^\circ\text{C} + \frac{16}{27}\cdot 1^\circ\text{C} \approx 100{,}6^\circ\text{C}.$$

*И. Слободецкий*

◆

**Ф375.** *На горизонтальной поверхности лежат два бруска с массами $m_1$ и $m_2$, соединенных недеформированной пружиной. Какую наименьшую горизонтальную силу $F$ нужно приложить к одному из брусков, чтобы сдвинулся и второй брусок? Коэффициент трения брусков о поверхность равен $\mu$.*

Ясно, что второй брусок придет в движение в тот момент, когда сила упругости пружины $F_{упр}$ по абсолютной величине станет равной максимальному значению силы трения покоя $\mu m_2 g$ (рис. 6). Рассмотрим первый брусок и выясним, как при его движении меняется сила упругости пружины. Этот брусок начнет двигаться, если $F > \mu m_1 g$. При движении бруска на него кроме силы $F$ и силы трения $\mu m_1 g$ действует еще сила упругости (см. рис. 6), увеличивающаяся по абсолютной величине по мере удаления бруска от начального положения. Поэтому ускорение бруска будет уменьшаться, и в тот момент, когда $F - \mu m_1 g - F_{упр} = 0$, оно станет равным нулю. Затем ускорение изменит знак и будет направлено против скорости бруска. Скорость бруска начнет уменьшаться, в какой-то момент она обратится в нуль, затем брусок будет двигаться влево (если, конечно, второй брусок покоится).

Очевидно, что деформация пружины, а значит, и сила упругости максимальны тогда, когда скорость бруска равна нулю. И если в этот момент сила упругости будет равна (точнее, немного больше) максимальной силе трения покоя между вторым бруском и поверхностью:

$$F_{упр.max} = \mu m_2 g,$$

второй брусок придет в движение. Найдем $F_{упр.max}$.

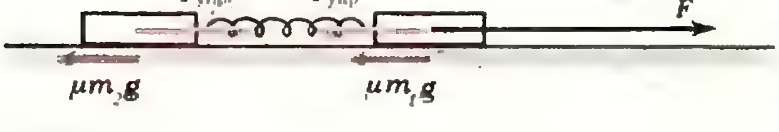


Рис. 6.

Поскольку кинетическая энергия брусков в рассматриваемый момент равна нулю, работа сил $F$ и $\mu m_1 g$ за все время движения первого бруска вправо будет равна изменению потенциальной энергии пружины:

$$\frac{kx_{\max}^2}{2} = (F - \mu m_1 g)\, x_{\max}.$$

Здесь $k$ — жесткость пружины, $x_{\max}$ — максимальное удлинение пружины. Отсюда

$$F_{\text{упр}\cdot\max} = kx_{\max} = 2(F - \mu m_1 g).$$

Следовательно, второй брусок сдвинется, если

$$2(F - \mu m_1 g) = \mu m_2 g,$$

или

$$F = \mu g(m_1 + m_2/2).$$

*Г. Коткин*

**Ф376.** *Песочные часы диаметра $d$ вставлены в запаянную и заполненную водой стеклянную трубку диаметра $D (D \approx d)$. В начальный момент часы находятся внизу трубки. При переворачивании трубки часы на некоторое время остаются вверху трубки, затем медленно опускаются вниз. Найти время, в течение которого часы находятся вверху трубки, если высота часов $h (h \gg d)$, их масса $M$, масса находящегося в часах песка $m$ и коэффициент трения часов о стенки трубки равен $k$. Время пересыпания песка из верхнего в нижний отсеки часов равно $\tau$.*

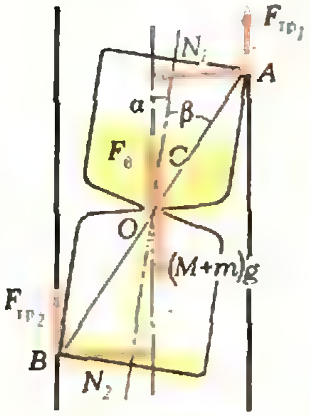


Рис. 7.

◆

При переворачивании часов их центр тяжести — точка $C$ на рисунке 7 — находится выше точки $O$, в которой приложена выталкивающая архимедова сила, и часы оказываются «перекошенными». При этом на часы со стороны стенок трубки действуют силы реакции $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ и силы трения $\mathbf{F}_{тр_1}$ и $\mathbf{F}_{тр_2}$. По мере просыпания песка силы $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ уменьшаются по абсолютной величине. В тот момент, когда часы начинают скользить вниз,

$$F_{тр_1} = kN_1 \text{ и } F_{тр_2} = kN_2.$$

Так как в горизонтальном направлении часы не перемещаются, то $N_1 = N_2 = N$. Следовательно,

$$F_{тр_1} = F_{тр_2} = kN.$$

Обозначим через $t$ время от момента переворачивания трубки до того момента, когда часы начали скользить относительно трубки. За это время вниз просыпалась $x = \frac{t}{\tau}$ часть песка. Найдем положение центра тяжести часов в момент времени $t$. При этом учтем, что внизу находится $x$-я часть песка, а вверху $(1-x)$-я. Если вся высота песка $l$, то внизу находится столбик песка высотой $xl$ с массой $xm$, а вверху — столбик высотой $(1-x)l$ с массой $(1-x)m$. Для простоты будем считать эти столбики цилиндрическими. Тогда нетрудно по обычным правилам найти положение центра тяжести часов:

$$OC = \frac{m}{2(M+m)}(2x^2l - hx + l - 2xl).$$

Полагая, что $l = h/4$ (как показано на рисунке 7), получим

$$OC = \frac{mh}{8(M+m)}(2x^2 - 6x + 1). \tag{1}$$

Теперь запишем условия равновесия часов. Во-первых, ясно, что $F_{тр_1} + F_{тр_2} + F_в = (M+m)g$, откуда

$$F_{тр_1} = F_{тр_2} = \frac{1}{2}[(M+m)g - F_в] = \frac{g}{2}(M + m - \rho V),$$

и

$$N = \frac{g}{2k}(M + m - \rho V), \tag{2}$$

где $\rho$ — плотность воды и $V$ — объем часов.

Кроме того, $N_1 \cdot OA \cdot \cos(\alpha+\beta)+N_2 \cdot OB \cdot \cos(\alpha+\beta)+F_{\text{тр}_1} \times$ $\times OA \cdot \sin(\alpha+\beta)=F_{\text{тр}_2} \cdot OB \cdot \sin(\alpha+\beta)+(M+m)g \cdot OC \cdot \sin\alpha$. (3)

Так как $d \approx D$ и угол $\alpha$ мал, то

$OA \cdot \cos(\alpha+\beta)=OA \cdot \cos\beta=h/2, \quad OA \cdot \sin(\alpha+\beta)=$ $=OB \cdot \sin(\alpha+\beta)$ и $OC \cdot \sin\alpha=OC \cdot \operatorname{tg}\alpha=OC \cdot (D-d)/h$.

В результате из равенства (3) получаем

$$N=(M+m)g\frac{D-d}{h^2}OC .$$

Подставляя сюда выражения для $N$ (из равенства (2)) и для $OC$ (равенство (1)) и решая полученное уравнение относительно $x$, найдем

$$x=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{7+2a}\right), \text{ и } t=x\tau=\frac{\tau}{2}\left(3-\sqrt{7+2a^2}\right),$$

где $a=\dfrac{4h(M+m-\rho V)}{mk(D-d)}$.

*И. Слободецкий*

◆

**Ф377.** *Если смотреть прищурившись на далекие яркие лампы, то обычно видны вертикальные или слегка наклоненные столбы света, идущие вниз и вверх от лампы. Объясните это явление. Придумайте и поставьте опыты для того, чтобы проверить ваше объяснение.*

*Подсказка. Поверхность роговицы не бывает сухой. Она всегда покрыта слоем слезной жидкости.*

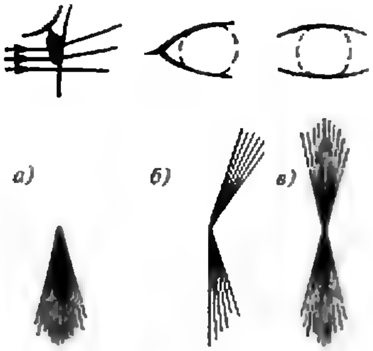


Рис. 8.

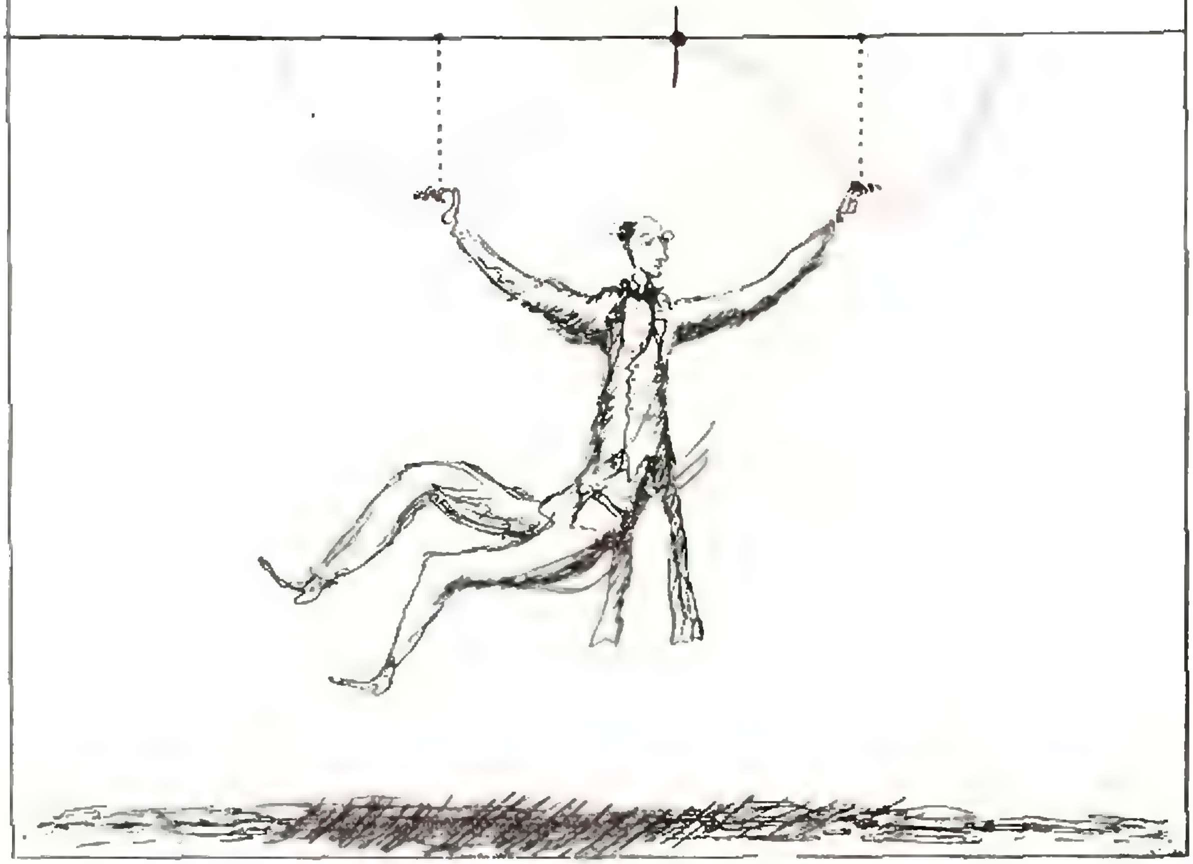
«Вдоль краев века слезная жидкость образует небольшой мениск, в котором преломляются световые лучи. Как показано на рисунке 8, *а*, лучи преломляются у верхнего века так, что кажутся идущими снизу, и источник света получает обращенный книзу «хвост». Подобным же образом у нижнего века возникает световой «хвост», направленный вверх. Появление этих «хвостов» можно хорошо проследить, если, закрыв один глаз, медленно прикрывать другой, или поднимать и опускать голову, держа полузакрытыми оба глаза. Лучи появляются в тот самый момент, когда веко начинает закрывать зрачок, что легко заметить близорукому человеку, так как источник света, который представляется ему расплывчатым кругом, в этот момент частично затмевается.

Лучи не вполне параллельны, даже если смотреть только одним глазом. Взгляните в упор на источник света, а затем поверните голову чуть вправо и скосите глаза так, чтобы снова увидеть этот источник. Теперь лучи направлены наклонно (рис. 8, *б*). Причина, по-видимому, состоит в том, что края век, там, где они пересекают зрачок, уже не горизонтальны, и каждый пучок лучей располагается под прямым углом к краю века. Видимые направления лучей согласуются с этим объяснением. Теперь можно понять, почему лучи не параллельны, если смотреть прямо перед собой: кривизна век сказывается даже при малой ширине зрачка (рис. 8, *в*). Закройте пальцем правый край зрачка, и расположенные слева лучи исчезнут.»

*Из книги М. Миннарта «Свет и цвет в природе»*

*А. Земляков*

# ОСТОРОЖНО — МАКСИМУМ!



**Эта заметка адресована старшеклассникам, в частности — десятиклассникам, в 9 классе учившимся по учебнику «Алгебра и начала анализа 9» (под редакцией А. Н. Колмогорова). Ниже мы ссылаемся именно на этот учебник (изд. 1-е или 2-е), обозначая его IX.**

Числовую функцию $f\colon x \to f(x)$ можно задавать многими способами, в том числе и графиком на координатной плоскости $Oxy$. Конечно, нарисовать график $y = f(x)$ «целиком» — при всех значениях $x \in D(f)$ — как правило, невозможно (скажем, если $D(f) = \mathbf{R}$, то есть функция $f$ *всюду определена*). Обычно рисуют часть графика, отмечая его характерные точки (см. ниже), и так, чтобы было понятно, каково поведение функции $f$ и как найти ее значения при произвольных значениях аргумента $x \in D(f)$.

Функции, описывающие различные процессы и зависимости реального мира, в большинстве своем являются *непрерывными*. Точное определение непрерывности функции $x \to f(x)$ в точке $x = a$ см. в IX, п. 38. Графиками всюду непрерывных функций являются *непрерывные кривые* (это пояснение, но отнюдь не определение непрерывности!).

К характерным точкам графиков функций в первую очередь относятся точки экстремумов. Напомним, что точка $x_0$ из области определения $D(f)$ функции $x \to f(x)$ называется точкой *максимума* этой функции, если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности (промежутка $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$) точки $x_0$ выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)$; аналогично определяются точки *минимума* (см. IX, п. 55). Точкам максимума и минимума (точкам *экстремума*) на графике непрерывной функции соответствуют «горки» и «впадины». Например, функция $f$, график которой изображен на рисунке 1, имеет одну точку минимума $x_1$ и одну точку максимума $x_2$ (предполагается, что на промежутках $]-\infty, x_1[$ и $]x_2, +\infty[$ функция $f$ убывает — «как показано на графике»).

Теперь мы предлагаем вам подумать над следующими вопросами. Не торопитесь; свои ответы подкрепите графиками или доказательствами.

Вопрос 1. *Существует ли всюду определенная и непрерывная функция, у которой:*

*а) было бы ровно две точки максимума $x_1$ и $x_3$ и ровно одна точка минимума $x_2$, расположенные, как на рисунке 2, а?*

*б) было бы ровно две точки минимума $x_1$ и $x_2$ и не было бы больше ни одной точки экстремума (ни максимума, ни минимума) — рис. 2, б?*

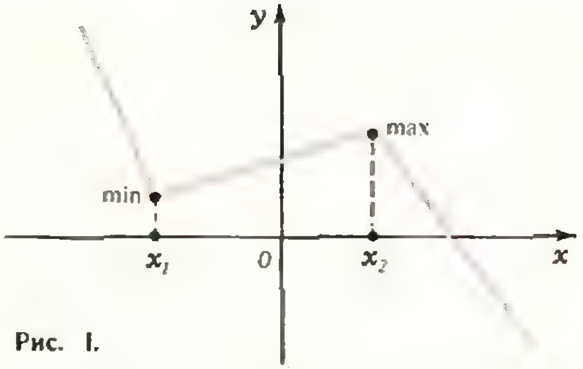


Рис. 1.

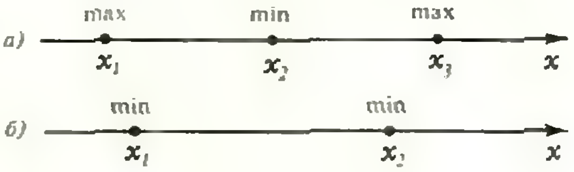


Рис. 2.

Вопрос 2. *Существует ли функция:*

*а) всюду определенная и непрерывная, имеющая бесконечно много экстремумов (максимумов и минимумов)?*

*б) определенная и непрерывная на отрезке (например, на [0, 1]), имеющая бесконечно много экстремумов (на этом отрезке)?*

*в) всюду (на всей числовой прямой) определенная и непрерывная, причем имеющая на отрезке [0, 1] бесконечно много точек экстремума?*

Ответы на вопросы и комментарии к ним см. на следующей странице.

---

# Задачи наших читателей

1. Докажите, что числа
а) $2^{17} + 2^5 - 1$;
б) $2^{12} - 2^5 - 1$;
в) $2^{13} - 2^4 + 1$

— составные.

*В. Федотов*
(г. Ленинград)

2. Решите уравнения ($\overline{yz}$ — число, записанное цифрами $y$, $z$ и т. п.):

а) $x^x = \overline{yz}$;

б) $\overline{xy}^x = \overline{yx(y+2)}$;

в) $\overline{xx}^{2x} = \overline{x(2x)x}$;

г) $\overline{xyz}^x = \overline{yz(x-1)yz}$.

*И. Михалкович*
(Минская обл.)

3. Неравнобедренная трапеция $ABCD$ со сторонами $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|AD| = d$ ($[AB] \parallel [CD]$, $c > a$) разбита двумя прямыми на три конгруэнтные трапеции так, что угол между прямыми разбиения равен углу $ADC$. Известно, что $a \geqslant d/2$.

а) Докажите, что и $b > d/2$.

б) Можно ли трапецию со сторонами $a = 10$, $b = 6$, $c = 17$, $d = 12$ разбить указанным способом?

*С. Азлецкий*
(г. Рязань)

## Ответ и комментарий к вопросу 1

а) Такая функция, конечно, существует — см. рисунки 3, *а* и 3, *б* (на рис. 3, *б* изображен график многочлена $y = x^4 - x^2$ — подтвердите это исследованием с помощью производной).

б) Оказывается, и такая функция существует! Соответствующие графики изображены на рисунках 4, *а* и 4, *б*: между точками минимума $x_1$ и $x_2$ этих функций расположена «плоская горка» — участок графика над отрезком $[a_1, a_2]$, на котором функция постоянна. Конечно, хочется считать эту горку состоящей целиком из точек максимума. Однако точки $x_0 \in [a_1, a_2]$ не подходят под наше определение максимума — «строгого» максимума ($f(x) < f(x_0)$ для точек $x \neq x_0$ в окрестности ($x_0$). Зато они являются точками *нестрогого максимума*: для точек $x$ в некоторой окрестности точки $x_0$ выполнено нестрогое неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$. Интуитивно ясно, что между двумя точками минимума непрерывная функция должна иметь точку максимума — между двумя впадинами должна быть хотя бы одна горка! Это действительно так, но максимум может оказаться нестрогим.

Понятие нестрогого экстремума (максимума или минимума) удобно, но несколько «двусмысленно»: точки интервала $[a_1, a_2]$ на рисунках 4, *а* и 4, *б* с полным правом можно считать и точками нестрогого минимума! Еще пример: функция, график которой изображен на рисунке 5, *а*, не

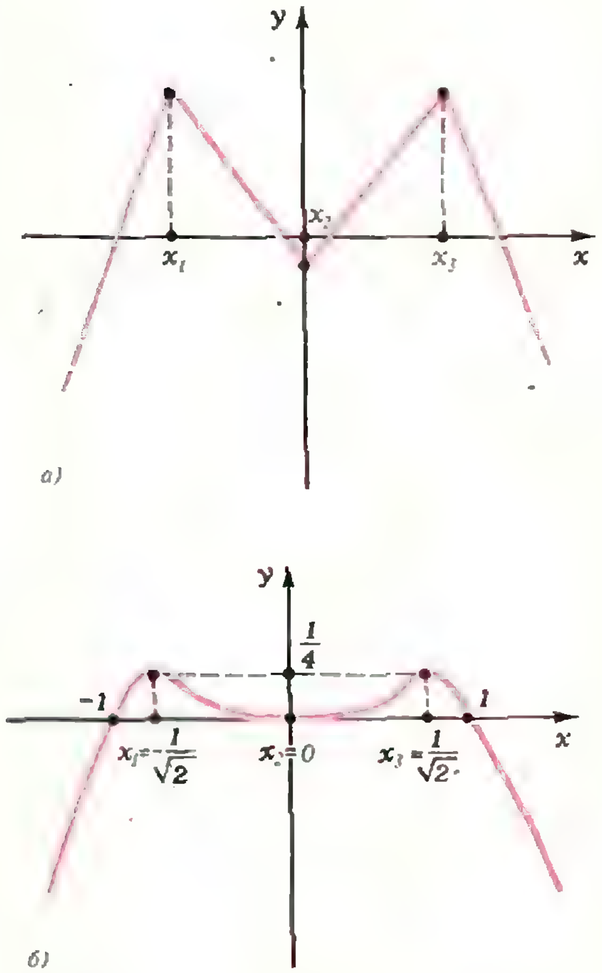


Рис. 3.

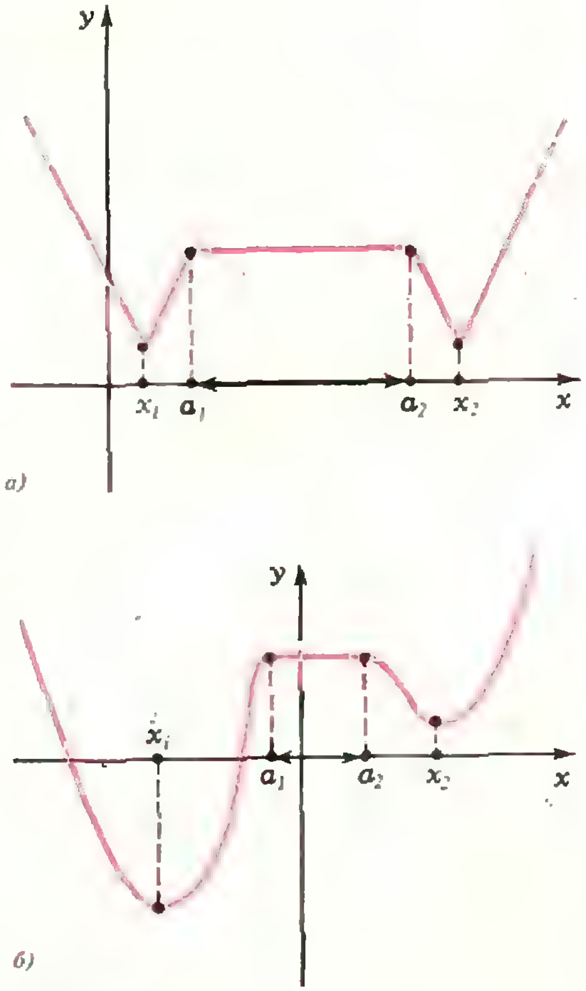


Рис. 4.

имеет строгих экстремумов, но точка $x_1$ является для нее точкой нестрогого максимума, $x_2$ — точкой нестрогого минимума, а все точки $x_0$ интервала постоянства $]x_1, x_2[$ являются одновременно точками нестрогого максимума и нестрогого минимума. Проанализируйте подобным образом функции $y = |x - 1| + |x + 1|$ и $y = |x - 1| - |x + 1|$ (их графики изображены на рис. 5, *б* и 5, *в* соответственно — проверьте!).

Итак, наряду со школьными понятиями максимума и минимума в математике приняты и понятия нестрогих максимума и минимума — более общие, «несколько двусмысленные» (см. выше), но иногда удобные при формулировке теорем. В качестве примера приведем следующее утверждение:

*Если функция $f$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем принимает в его концах одинаковые значения, то есть $f(a) = f(b)$, то существует точка $x_1 \in ]a, b[$, в которой функция $f$ имеет максимум или минимум (возможно, нестрогие).*

Рисунок 6 (*а*, *б*, *в*) иллюстрирует эту теорему, причем указанные на рисунке максимумы и минимумы являются строгими.

**Вопрос 3.** *Верно ли сформулированное утверждение, если максимумы и минимумы считать только строгими?*

В учебниках математического анализа для вузов максимумы и минимумы принято понимать в нестрогом смысле — по причине, указанной выше. В средней школе же в основном приходится иметь дело с такими функциями, у которых минимумы и максимумы только строгие. К этому классу функций, в частности, относятся многочлены и дробно-рациональные функции. Заметим, например, что график на рисунке 4, *б* не может быть графиком никакого многочлена (в отличие от графика на рисунке 3, *б*) — попробуйте это доказать!

### Ответ на вопрос 2

а) Такие функции существуют — например, «пила» на рисунке 7, *а*, или

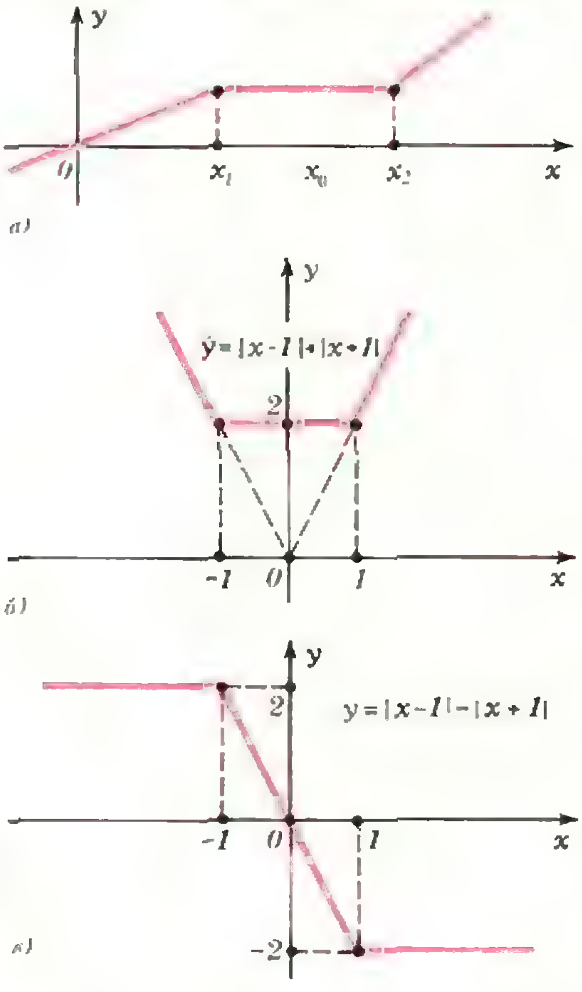


Рис. 5.

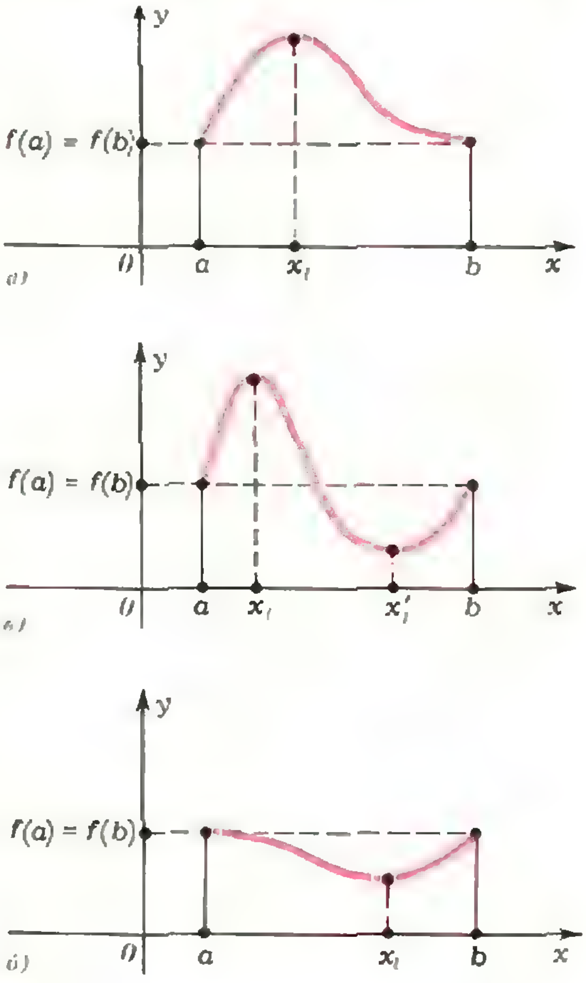


Рис. 6.

синусоида — график $y = \sin x$ (рис. 7, *б*).

б) Оказывается, такие функции тоже существуют. Точки экстремума могут «сгущаться» так, что на отрезке $[0, 1]$ их помещается бесконечно много. Например, на рисунке 8, *а* в точках $x_n = 1/n$ при четном $n$ — минимумы, при нечетном — максимумы. Однако график 8, *а* не определяет значения функции при $x = 0$. Можно взять $f(0) = 0$ или $f(0) = c$, но такая функция не будет непрерывной в точке $x = 0$: значение $f(x)$ *не* стремится к $f(0)$ при $x \to 0$. Чтобы получить непрерывную функцию, можно сделать так, чтобы значения функции в точках экстремума $x_n$ стремились к нулю при $n \to \infty$, как на рисунке 8, *б*. Если затем продолжить график, как показано на этом рисунке, то мы получим всюду определенную и непрерывную функцию, имеющую бесконечно много экстремумов на отрезке $[0, 1]$ — ответ на вопрос 2,в).

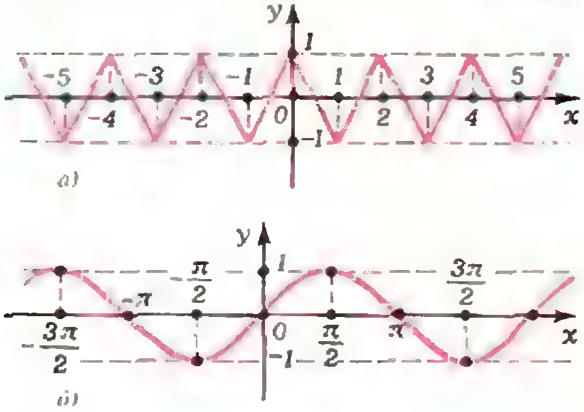


Рис. 7.

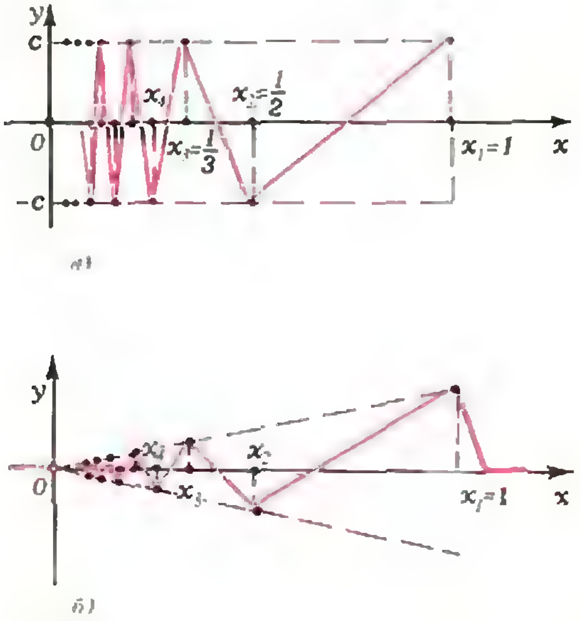


Рис. 8.

Графики, аналогичные изображенным на рисунках 8, *а* и 8, *б*, конечно, можно задать и формулами: проверьте, например, что таковы графики функций

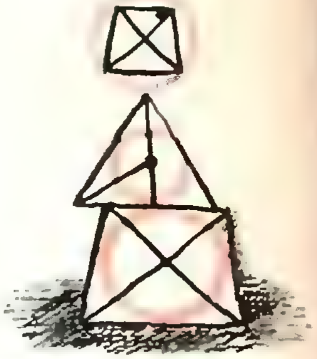
$$y = \sin\frac{1}{x}\left(\text{при } 0 < x \leqslant \frac{2}{\pi}\right),$$

$$y = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Не следует думать, что функции, о которых говорится в вопросе 2 — это какие-то «исключения». С подобными функциями приходится встречаться при изучении различного рода колебательных процессов в физике.

В заключение предложим вам еще один вопрос. Очевидно, если функция $x \to f(x)$ *возрастает слева* от точки $x_0$, то есть в некотором промежутке $]x_0 - \delta, x_0[$, и *убывает справа* от этой точки — в промежутке $]x_0, x_0 + \delta[$, то $x_0$ — точка максимума функции $f$ (поясните!).

Вопрос 4. *Верно ли обратное: если всюду непрерывная функция $f$ имеет в точке $x = x_0$ максимум, то слева от точки $x_0$ она возрастает, а справа от $x_0$ — убывает?*



*Я. Суконник*
*П. Горнштейн*

# Наш выбор — теорема синусов!

Во всяком треугольнике $ABC$ стороны $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$ и углы $\widehat{CAB}=\widehat{A}$, $\widehat{ABC}=\widehat{B}$, $\widehat{BCA}=\widehat{C}$ связаны следующими важными соотношениями.

Теорема косинусов*). *Квадрат произвольной стороны равен квадрату другой стороны плюс квадрат третьей стороны минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними*, то есть

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A},$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\widehat{B},$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}.$$

Теорема синусов. *Произвольная сторона равна произведению диаметра описанной окружности на синус противолежащего угла*, то есть

$$a=2R\sin\widehat{A},\quad b=2R\sin\widehat{B},$$
$$c=2R\sin\widehat{C},$$

или, в более употребимой форме,

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}=2R.$$

Но если бы вам предложили пользоваться лишь одной из этих двух теорем, а вторую отбросить, какую бы вы оставили? Из теоремы синусов можно вывести теорему косинусов, а из теоремы косинусов — теорему синусов (правда, без коэффициента пропорциональности $2R$ — как в школьном учебнике). Но теорема синусов позволяет выражение, однородное относительно сторон $a$, $b$, $c$ треугольника, заменить новым выражением, содержащим лишь тригонометрические функции. А поскольку эти функции в средней школе достаточно хорошо изучены, дальнейшее решение задачи не вызовет затруднений. Итак, наш выбор — теорема синусов!

Теперь перейдем к примерам.

Задача 1 (теорема Птолемея). *Доказать, что для всякого четырехугольника $ABCD$, вписанного в круг, справедливо соотношение*

$$|AB|\cdot|CD|+|BC|\cdot|DA|=|BD|\cdot|AC|.$$

Поскольку все эти шесть отрезков являются хордами одной и той же окружности, то, выбрав удачно опирающиеся на них вписанные углы, мы вправе ожидать от применения теоремы синусов простого рационального решения. Действительно, обозначив $\widehat{BAD}=\widehat{A}$, $\widehat{ABC}=\widehat{B}$, $\widehat{CAD}=\alpha$ (рис. 1), получим

$$\widehat{BAC}=\widehat{A}-\alpha,\quad \widehat{ABD}=\widehat{B}-\alpha,$$
$$\widehat{ACB}=\pi-\widehat{A}-\widehat{B}+\alpha.$$

По теореме **синусов**

$$|AB|=2R\sin(\widehat{A}+\widehat{B}-\alpha),$$
$$|BC|=2R\sin(\widehat{A}-\alpha),$$
$$|CD|=2R\sin\alpha,$$
$$|DA|=2R\sin(\widehat{B}-\alpha),$$
$$|BD|=2R\sin\widehat{A},$$
$$|AC|=2R\sin\widehat{B};$$

---

*) О теореме косинусов см. статью Э. Г. Готмана «Теорема косинусов и ее следствия» («Квант», 1972, № 7).

следовательно,

$$|AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|DA| = 4R^2\,|\sin(\hat{A}+\hat{B}-\alpha)\cdot\sin\alpha + \sin(\hat{A}-\alpha)\cdot\sin(\hat{B}-\alpha)| = 2R^2\,|\cos(\hat{A}+\hat{B}-2\alpha) - \cos(\hat{A}+\hat{B}) + \cos(\hat{A}-\hat{B}) - \cos(\hat{A}+\hat{B}-2\alpha)| = 4R^2\sin\hat{A}\sin\hat{B} = (2R\sin\hat{A})\cdot(2R\sin\hat{B}) = |BD|\cdot|AC|.$$

Наиболее естественным выглядит применение теоремы синусов в тех случаях, когда в задаче идет речь о сторонах, противолежащих углах и радиусе окружности, описанной около треугольника.

Задача 2 (МГУ, мехмат, 1961). *Дан треугольник, основание которого равно a, а угол при вершине α. Построена окружность, проходящая через центр вписанного в этот треугольник круга и концы основания. Найти ее радиус.*

Пусть $O$ (рис. 2) — центр вписанного круга. Тогда

$$\widehat{BOC} = 180° - \widehat{OBC} - \widehat{OCB} = 180° - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку треугольник $BOC$ вписан в искомый круг, по теореме синусов найдем радиус этого круга:

$$R = \frac{|BC|}{2\sin\widehat{BOC}} = \frac{a}{2\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 3 (МГУ, физфак, 1962; УрГУ, физфак, 1973). *В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на m. Определить основание треугольника и радиус описанного круга.*

Пусть вновь $O$ — центр вписанного круга (рис. 3). Тогда

$$|AO| = |AD| - |OD| = h_a - r = m,$$

$$\widehat{AOC} = 90° + \frac{\alpha}{2}, \quad \widehat{ACO} = \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому, применив теорему синусов дважды (для треугольников $ABC$ и $AOC$), получим

$$|BC| = |AC|\cdot\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}} = |AO|\frac{\sin\widehat{AOC}}{\sin\widehat{ACO}}\cdot\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}} = 2m\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$R = \frac{|AC|}{2\sin\hat{B}} = \frac{|AO|\sin\widehat{AOC}}{2\sin\widehat{ACO}\cdot\sin\hat{B}} = \frac{m\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha} = \frac{m}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 4. *Около круга описан четырехугольник ABCD, диагонали ко-*

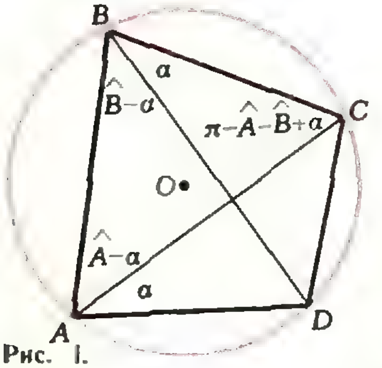


Рис. 1.

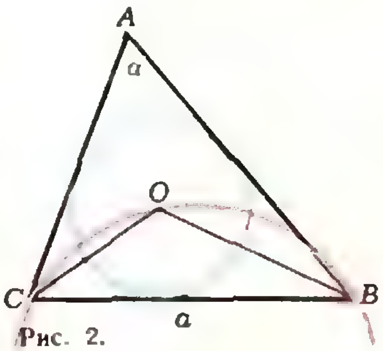


Рис. 2.

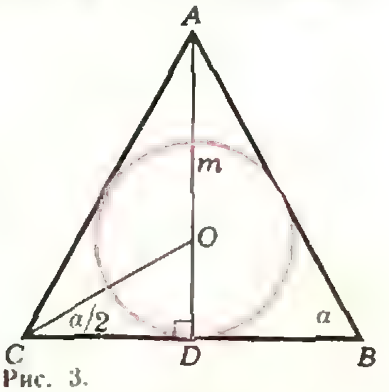


Рис. 3.

*торого пересекаются в точке $E$. Радиусы окружностей, описанных около треугольников $AEB$, $BEC$ и $CED$, соответственно равны $R_1$, $R_2$ и $R_3$. Найти радиус $R$ окружности, описанной около треугольника $AED$.*

Четырехугольник $ABCD$ (рис. 4) описан около круга, поэтому выполняется равенство

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|.$$

Кроме того,

$$\sin\widehat{AEB} = \sin\widehat{BEC} = \sin\widehat{CED} = \sin\widehat{DEA}.$$

Поэтому

$$\frac{|AB|}{\sin\widehat{AEB}} + \frac{|CD|}{\sin\widehat{CED}} = \frac{|BC|}{\sin\widehat{BEC}} + \frac{|AD|}{\sin\widehat{DEA}}.$$

Теперь по теореме синусов получим $R_1 + R_3 = R_2 + R$, откуда

$$R = R_1 - R_2 + R_3.$$

Иногда в задачах бывает необходимо перейти от данного известного отношения сторон или отрезков к соотношению между углами треугольника. И это удобнее всего делать с помощью теоремы синусов.

Задача 5 (ЛГУ, химфак, 1973). *В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($|AB| = |BC|$) проведена медиана $AD$. Найти угол $BAD$, если угол при вершине $B$ равен $\alpha$.*

Из треугольника $ABD$ (рис. 5), в котором $|AB| = 2|BD|$, следует по теореме синусов

$$2 = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{\sin\widehat{ADB}}{\sin\widehat{BAD}} = \frac{\sin(\alpha+\widehat{BAD})}{\sin\widehat{BAD}} = \sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\widehat{BAD} + \cos\alpha.$$

Отсюда

$$\widehat{BAD} = \operatorname{arcctg}\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Задача 6. *В данный правильный треугольник вписан второй правильный треугольник, причем отношение их площадей равно 3. Доказать, что стороны вписанного треугольника перпендикулярны соответствующим сторонам данного треугольника.*

Легко доказать (докажите!), что $|AF|$ равно $|BD|$ (рис. 6). Теперь из подобия треугольников $ABC$ и $DEF$ из теоремы синусов имеем

$$\sqrt{3} = \sqrt{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}}} = \frac{|AB|}{|DF|} = \frac{|AF| + |FB|}{|DF|} = \frac{|BD|}{|DF|} + \frac{|FB|}{|DF|} = \frac{\sin\widehat{BFD}}{\sin\widehat{DBF}} + \frac{\sin\widehat{BDF}}{\sin\widehat{DBF}} = \frac{\sin(120 - \widehat{BDF}) + \sin\widehat{BDF}}{\sin 60^\circ} = 2\cos(60^\circ - \widehat{BDF}),$$

$$\cos(60^\circ - \widehat{BDF}) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \widehat{BDF} = 90^\circ$$

(тогда $|FD| \perp |BC|$) или $\widehat{BDF} = 30^\circ$. (тогда $|FD| \perp |AB|$).

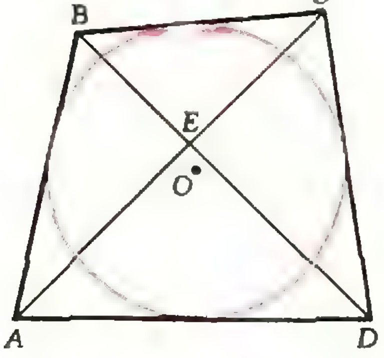


Рис. 4.

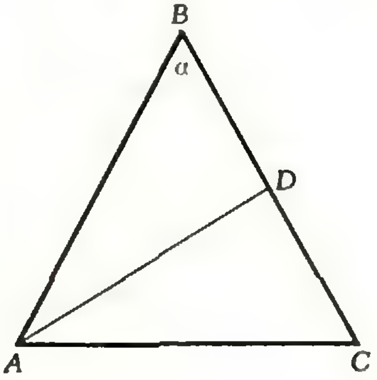


Рис. 5.

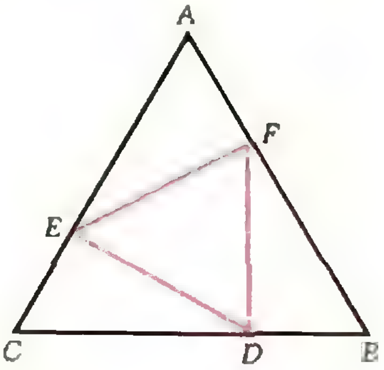


Рис. 6.

Задача 7 (МГУ, мехмат, 1972). *В треугольнике $ABC$ угол $C$ — тупой; биссектриса $BE$ угла $B$ делит сторону $AC$ на отрезки $AE$ и $EC$ длины 3 м и 2 м. Известно, что точка $K$, лежащая на продолжении стороны $BC$ за вершину $C$, является центром окружности, проходящей через точки $C$, $E$ и точку пересечения биссектрисы угла $B$ с биссектрисой угла $ACK$. Определить расстояние от точки $E$ до стороны $AB$.*

Очевидно, что искомое расстояние $EH$ (рис. 7) будет найдено, если станет известным $\sin\widehat{A}$. Но сначала найдем зависимость между углами треугольника $ABC$. Пусть $D$ — точка пересечения биссектрис углов $B$ и $ACK$. Проведем хорду $EF$, тогда

$\widehat{EDC} = \widehat{EFC}$, но

$$\widehat{EDC} = \widehat{DCF} - \widehat{DBC} = \frac{1}{2}\widehat{ACF} - \\ - \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{(180 - \widehat{C}) - \widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{A}}{2},$$

$$\widehat{EFC} = 90° - \widehat{ECF} = \\ = 90° - (180° - \widehat{C}) = \widehat{C} - 90°,$$

поэтому

$$\frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{C} - 90°,\ \widehat{C} = 90° + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

По теореме синусов и свойству биссектрисы из треугольника $ABC$ имеем

$$\frac{2}{3} = \frac{|EC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\sin A}{\sin\widehat{C}} = \\ = \frac{\sin\widehat{A}}{\sin\left(90 + \frac{\widehat{A}}{2}\right)} = 2\sin\frac{\widehat{A}}{2},$$

$$\sin\frac{\widehat{A}}{2} = \frac{1}{3},\quad \sin\widehat{A} = \frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$|EH| = |AE|\cdot\sin\widehat{A} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Бывают случаи, когда в задаче появляется произведение нескольких отношений отрезков. И здесь применение теоремы синусов приводит к простому решению.

Задача 8 (МГУ, эконом. фак., 1975). *Дан треугольник $ABC$, причем $|AB| = |AC|$ и $\widehat{A} = 80°$. Внутри треугольника $ABC$ взята точка $M$ такая, что $\widehat{MBC} = 30°$, и $\widehat{MCB} = 10°$. Найти угол $AMC$.*

Обозначим искомый угол $\widehat{AMC}$ через $x$ (рис. 8). Очевидно, что

$\widehat{ABM} = 20°$, $\widehat{ACM} = 40°$, $\widehat{CMB} = 140°$, и тогда $\widehat{AMB} = 220° - x$. Согласно условию и по теореме синусов из треугольников $AMB$ и $AMC$

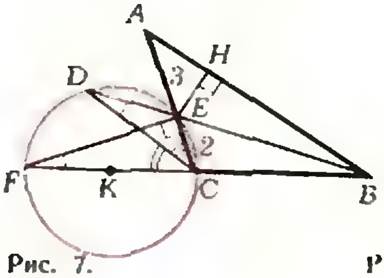


Рис. 7.

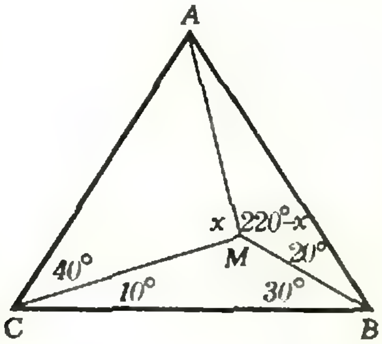


Рис 8.

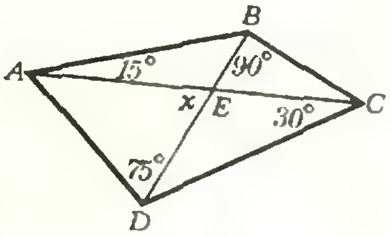


Рис. 9.

имеем

$$1=\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|AB|}{|AM|}\cdot\frac{|AM|}{|AC|}=$$

$$=\frac{\sin(220^\circ-x)}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{\sin 40^\circ}{\sin x}=$$

$$=\frac{2\sin(x-40^\circ)\cdot\cos 20^\circ}{\sin x}=$$

$$=\frac{\sin(x-20^\circ)+\sin(x-60^\circ)}{\sin x},$$

$$\sin x-\sin(x-60^\circ)=\sin(x-20^\circ),$$

$$2\sin 30^\circ\cdot\cos(x-30^\circ)=\sin(x-20^\circ),$$

$$\cos(x-30^\circ)=\cos(110^\circ-x),$$

$$x=\widehat{AMC}=70^\circ.$$

Задача 9. *В выпуклом четырехугольнике* $ABCD$ *даны углы:* $\widehat{BAC}=15^\circ$, $\widehat{CBD}=90^\circ$, $\widehat{DCA}=30^\circ$, $\widehat{ADB}=75^\circ$. *Найти угол между диагоналями.*

Обозначим $\widehat{AED}$ через $x$ (рис. 9). Тогда $\widehat{ABE}=x-15^\circ$, $\widehat{BCE}=90^\circ-x$, $\widehat{CDE}=x-30^\circ$, $\widehat{DAE}=105^\circ-x$, и из треугольников $AEB$, $BEC$, $CED$ и $DEA$ по теореме синусов имеем

$$\frac{|AE|}{|BE|}=\frac{\sin(x-15^\circ)}{\sin 15^\circ},\quad \frac{|BE|}{|CE|}=$$

$$=\frac{\sin(90^\circ-x)}{\sin 90^\circ},\quad \frac{|CE|}{|DE|}=\frac{\sin(x-30^\circ)}{\sin 30^\circ},$$

$$\frac{|DE|}{|AE|}=\frac{\sin(105^\circ-x)}{\sin 75^\circ}.$$

Перемножая почленно записанные равенства, после сокращения одинаковых сомножителей получим

$$\sin(x-15^\circ)\cdot\sin(90^\circ-x)\times$$
$$\times\sin(x-30^\circ)\cdot\sin(105^\circ-x)=$$
$$=\sin 15^\circ\cdot\sin 90^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 75^\circ,$$

$$[2\sin(x-15^\circ)\cdot\sin(105^\circ-x)]\times$$
$$\times[2\sin(x-30^\circ)\sin(90^\circ-x)]=$$
$$=2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ,$$

$$[\cos(2x-120^\circ)-\cos 90^\circ]\times$$
$$\times[\cos(2x-120^\circ)-\cos 60^\circ]=\frac{1}{2},$$

$$2\cos^2(2x-120^\circ)-$$
$$-\cos(2x-120^\circ)-1=0,$$

откуда искомый угол равен 60°.

Упражнения

1 (МГУ, ВМК, 1971). В окружности радиуса $R$ проведены две хорды: $AB$ и $AC$. На хорде $AB$ или на ее продолжении за точку $B$ взята точка $M$, расстояние от которой до прямой $AC$ равно длине хорды $AC$. Аналогично на хорде $AC$ или на ее продолжении за точку $C$ взята точка $N$, расстояние от которой до прямой $AB$ равно длине хорды $AB$. Найти длину отрезка $MN$.

2 (НГУ, мехмат, 1969). Доказать, что среди всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине наибольший периметр имеет равнобедренный треугольник.

3 (МФТИ, 1970). В треугольнике $ABC$ внешний угол при вершине $A$ в три раза больше угла $B$, а стороны $AB$, $BC$, $AC$ (в указанном порядке) образуют арифметическую прогрессию. Найти углы треугольника $ABC$.

4 (МИИТ, 1972). В прямоугольном треугольнике даны острый угол $\alpha$ и расстояние $a$ от вершины другого острого угла до центра вписанного круга. Определить площадь треугольника.

5 (МГУ, географ. фак., 1969). Прямая проходит через вершину $B$ равнобедренного треугольника $ABC$, пересекая его основание $AC$ в точке $D$. Известно, что

$$\widehat{ABD}=\frac{1}{3}\widehat{ABC}\text{ и }|AD|:|DC|=3:4.$$

Острый или тупой угол $ABC$?

6 (МГУ, биофак, 1968). В круг вписан равнобедренный треугольник $ABC$, в котором $|AB|=|BC|$ и $\widehat{ABC}=\alpha$. Из вершины $A$ проведена биссектриса угла $BAC$, пересекающая сторону $BC$ в точке $D$, а окружность — в точке $E$. Вершина $B$ соединена отрезком прямой с точкой $E$. Найти отношение площадей треугольников $ABE$ и $BDE$.

7 (МГУ, геолог. фак., 1975). В ромбе $ABCD$ со стороной $(1+\sqrt{5})$ *см* и острым углом $\widehat{BAD}=60^\circ$ расположена окружность, вписанная в треугольник $ABD$. Из точки $C$ к окружности проведена касательная, пересекающая сторону $AB$ в точке $E$. Найти длину отрезка $AE$.

8. В круг вписан четырехугольник $ABCD$. Через точку $E$ пересечения диагоналей проведен отрезок $FH$ ($F$ лежит на $AB$, $H$ — на $CD$). Доказать, что

$$\frac{|FE|}{|EH|}=\sqrt{\frac{|AF|}{|CH|}\cdot\frac{|BF|}{|DH|}}.$$

# Новое о гравитации

Силы тяготения привычны и вездесущи. Но наука еще не сумела ответить на многие вопросы, связанные с природой этих сил.

Почему все тела всегда только притягиваются друг к другу? Почему нельзя отгородиться от действия сил притяжения, создать не пропускающий их экран? Какова природа невидимых «пружинок», которые притягивают даже очень далекие тела? Существуют ли так называемые гравитационные волны, которые А. Эйнштейн теоретически предсказал еще полвека тому назад? Как выглядят «черные дыры» — удивительные «звездные трупы» с совершенно необычными свойствами?

Наука упорно атакует эту крепость, расширяя и углубляя наши представления о природе тяготения и строении Вселенной. Совершенствуется теория, ставятся удивительные эксперименты, шаг за шагом накапливаются знания об этой интереснейшей физической проблеме. Рассказ об этих достижениях содержится в небольшой научно-популярной брошюре профессора Я. А. Смородинского «Тяготение», выпущенной издательством «Знание» в конце 1975 года *).

В первой половине брошюры автор приводит основные сведения из области общей теории относительности и описывает ряд классических экспериментов по проверке этой теории. Вторая половина брошюры посвящена самым современным проблемам теории гравитации.

Автор рассказывает в ней о поисках гравитационных волн, недостоверное сообщение о регистрации которых было сделано американским физиком Вебером несколько лет тому назад. Тщательная проверка этого сообщения в нескольких других лабораториях (в том числе и в лаборатории профессора В. Б. Брагинского в Московском государственном университете) не подтвердила этого открытия. Таким образом, гравитационные волны по-прежнему остаются загадочным объектом современной физики.

Формула закона всемирного тяготения содержит наряду с массами притягивающихся тел и расстоянием между ними еще и гравитационную постоянную $\gamma$. До недавних пор физики считали эту величину такой же неизменной, как и величину скорости света в пустоте, заряда электрона или постоянной Планка. Но сравнительно недавно знаменитый английский физик-теоретик П. Дирак выдвинул гипотезу о том, что величина гравитационной постоянной уменьшается с течением времени примерно на $0,5 \cdot 10^{-10}$ своего значения за год. В начале 1975 года были получены первые экспериментальные подтверждения этого очень странного обстоятельства.

В брошюре рассказано и о недавних прямых экспериментах по измерению предсказанного общей теорией относительности так называемого «красного смещения» спектральных линий у света, испущенного очень массивными звездами. Оказалось, что для проверки этого предсказания с необычайно высокой степенью точности достаточно сравнить энергию квантов гамма-излучения, испускаемого искусственно-радиоактивным железом, на поверхности Земли и на высоте 20 *м* над Землею! Теория предсказывает, что энергия этих гамма-квантов будет отличаться на величину порядка $2 \cdot 10^{-15}$. Именно такое различие и было обнаружено в опытах американских физиков Паунда и Ребка.

В другом эксперименте при помощи необычайно точных атомных часов, размещенных на двух пассажирских самолетах, один из которых летел с запада на восток, а другой — в противоположном направлении, удалось измерить предсказываемое общей теорией относительности изменение хода часов на миллиардные доли секунды.

Брошюра заканчивается описанием различных теоретических моделей «черных дыр» и рассказом о поисках этих удивительных астрономических объектов. Силы тяготения вблизи них настолько велики, что испущенный ими свет не может удалиться за пределы близких окрестностей этих тел. Казалось бы, мы принципиально лишены возможности узнать о существовании таких объектов. Но выяснилось, что если черная дыра образует двойную систему вместе с какой-либо обычной звездой, то по некоторым особенностям спектра излучения этой звезды можно установить и наличие связанной с ней черной дыры. Первым кандидатом на роль черной дыры оказалась звезда X1 в созвездии Лебедя.

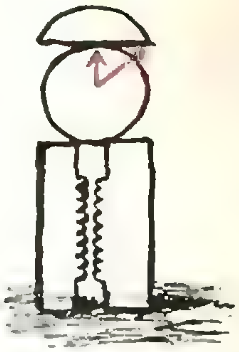
Автор рассказывает также о гипотетических вращающихся черных дырах и еще более удивительных объектах — «черных безднах», гравитационные поля которых могут разрывать звезды, совершать катастрофические разрушения и высвобождать при этом невероятные количества энергии.

*В. Лешковцев*

---

*) Я. А. Смородинский. Тяготение. М., «Знание», 1975. Тираж 53 300 экз., 64 с., цена 11 к.

# XXV Олимпиада по физике в Польше



В Физической олимпиаде могут принимать участие все ученики последних двух классов средних школ любого типа, а также наиболее способные ученики более младших классов. Олимпиада проходит в 4 этапа — вступительный, I, II и III туры. Все задания олимпиады разрабатываются Главным олимпийским комитетом.

Участие во вступительном и в I турах — заочное, а во II и III турах — очное. Каждый участник решает задания вступительного и I туров дома и может пользоваться любыми книгами и пособиями. Учитель может помогать ученику разъяснениями, не ведущими, однако, непосредственно к решению задачи. Не обязательно решать все задачи, поскольку на II тур допускаются те, кто участвовал во вступительном туре и набрал достаточное количество баллов в I туре. Решения вступительного задания каждого ученика проверяет его учитель в соответствии с собственными критериями оценок. Начиная с I тура, решения проверяются централизованно и оцениваются по 10-балльной шкале — от 0 до 10 баллов на каждую задачу. В экспериментальных задачах отдельно оцениваются теоретическая и экспериментальная части (таким образом, за одну задачу можно набрать в общей сложности 20 баллов). Задания I тура проверяются членами Окружных олимпийских комитетов, которые составляют списки участников, допущенных ко II туру. Соревнования II тура (очного) проходят в тех городах, в которых работают Окружные олимпийские комитеты. Участники, наиболее удачно выступившие на окружных соревнованиях, приглашаются на III (Общепольский) тур, который проходит в Варшаве.

*Все участники III тура* (независимо от результатов своих выступлений на этом туре) освобождаются от экзаменов по физике на аттестат зрелости и при поступлении в вузы (где имеется вступительный экзамен по физике).

*Победители Физической олимпиады* освобождаются от всех вступительных экзаменов при поступлении на факультеты точных наук университетов, в политехнические вузы и в Военно-техническую академию.

Ниже приводятся несколько теоретических и экспериментальных задач XXV Физической олимпиады в Польше.

## Теоретические задачи

Задача 1 (вступительное задание). Выбрать либо дать и кратко обосновать правильный ответ:

1) Тонкая оболочка в виде эллипсоида вращения разрезана на две части по окружности (пунктирная линия на рисунке 1) и из полости выкачан воздух. Сила $F$, необходимая для разъединения частей, пропорциональна: а) большой полуоси; б) малой

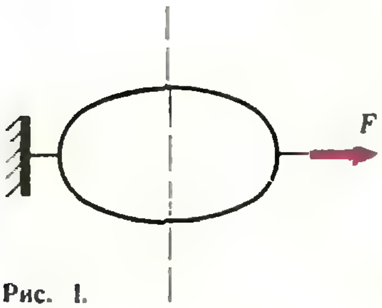


Рис. 1.

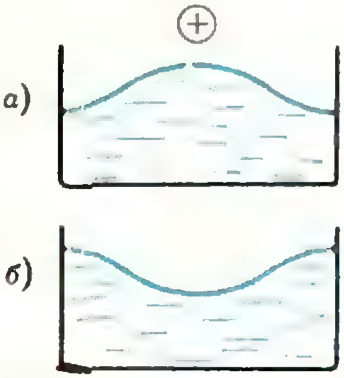


Рис. 2.

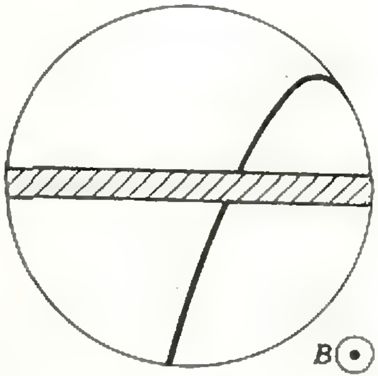


Рис. 3.

полуоси; в) площади поверхности эллипсоида; г) квадрату большой полуоси; д) квадрату малой полуоси; е) произведению большой и малой полуосей; ж) объему эллипсоида.

2) К поверхности электрически не заряженной жидкости (например, воды) подносится точечный положительный заряд. Поверхность жидкости искривляется так, как показано на рисунке 2, *а*. Если вместо положительного заряда поднести к жидкости отрицательный заряд, то поверхность жидкости примет форму: а) такую же; б) показанную на рисунке 2, *б*.

3) На рисунке 3 приведена фотография следа частицы, оставленного в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле с индукцией **B**. Эта частица двигалась в плоскости рисунка. Каким по знаку был ее электрический заряд?

4) Даны две индукционные катушки $L_1$ и $L_2$. Положения катушек и направления их обмоток указаны на рисунке 4. Первоначально через катушку $L_2$ ток не течет, в то время как через катушку $L_1$ протекает ток $I$ в направлении, обозначенном стрелкой. Если разомкнуть ключ $K$, то по цепи катушки $L_2$ потечет ток в направлении, обозначенном стрелкой: а) *1*; б) *2*.

5) В два касающиеся друг друга шарика ударяет третий шарик, скорость которого равна 7 *см/сек*. Массы всех шариков одинаковы. Шарики гладкие, и их центры лежат на одной прямой. После удара скорости шариков оказались соответственно равными $v_1 = 6$ *см/сек*, $v_2 = 3$ *см/сек*, $v_3 = 2$ *см/сек*. Был ли удар шариков упругим? Предполагается, что шарики не вращаются ни перед ударом, ни после него.

6) По горизонтальной поверхности движутся без трения два одинаковых диска (рис. 5). Зная линейные и угловые скорости дисков, размеры $R$ и $r$ ($r<R$), а также считая столкновение дисков упругим, можно ли однозначно определить скорости дисков после удара?

7) Имеются две одинаково изготовленные катушки (рис. 6). Около одной из них находится сверхпроводящая нить, обозначенная пунктирной линией. Если включить катушки в цепь и измерить их индуктивности, то оказалось бы, что индуктивность правой катушки: а) больше; б) равна; в) меньше индуктивности левой катушки.

Задача 2 (I тур). Между обкладками плоского конденсатора размерами $2a \times a \times 2d$ ($d \ll a$) вставлены две диэлектрические пластины размерами $a \times a \times d$ с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ и одна диэлектрическая пластина размерами $2a \times a \times d$ с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_3$ (рис. 7). Между пластинами вложена очень тонкая, длинная, изолированная проводящая лента ширины $a$. Вычислить емкость этой системы в зависимости от периметра $x$. Вычислить силу $F$, втягивающую (или выталкивающую) ленту в конденсатор, если к его обкладкам подсоединен источник постоянного напряжения $U$. Сделать набросок графика $F(x)$. Подсчитать наибольшее значение силы $F$, приняв $\varepsilon_1 = 10$, $\varepsilon_2 = 2$, $\varepsilon_3 = 1$, $a/d = 100$ и $U = 3\,000$ *в*. Какой будет сила $F$, если, зарядив конденсатор до напряжения $U$, отключить его от источника и лишь после этого ввести в него ленту?

Задача 3 (II тур). Известны следующие экспериментальные данные: 1) угловой диаметр $\alpha$ Солнца, наблюдаемого с Земли, составляет 32′; 2) солнечная постоянная $s$, равная лучистой энергии, проходящей за 1 *сек* через 1 *см*$^2$ поверхности, перпендикулярной прямой Земля — Солнце и удаленной от Солнца на расстояние между Землей и Солнцем, составляет $s = 0{,}135$ *дж*$\cdot$*см*$^{-2}\cdot$*сек*$^{-1}$; 3) постоянная $\sigma$ Стефана — Больцмана равна $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-12}$ *дж*$\cdot$*см*$^{-2}\cdot$*сек*$^{-1}\cdot$*град*$^{-4}$; 4) Солнце излучает практически так же, как абсолютно черное тело. Пользуясь указанными данными, вычислить: а) температуру поверхности Земли, полагая, что температура не меняется со временем и что Земля является телом абсолютно черным и абсолютно теплопроводным (это последнее предположение означает, что температура

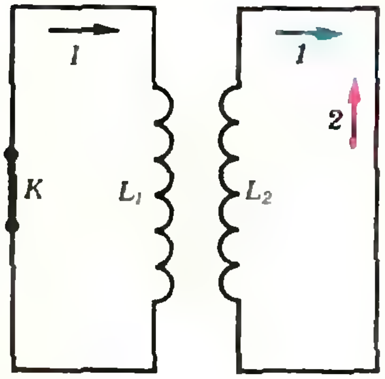


Рис. 4.

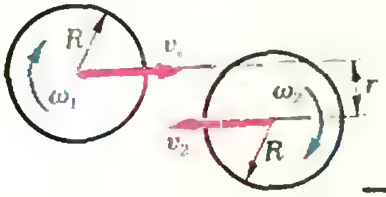


Рис. 5.

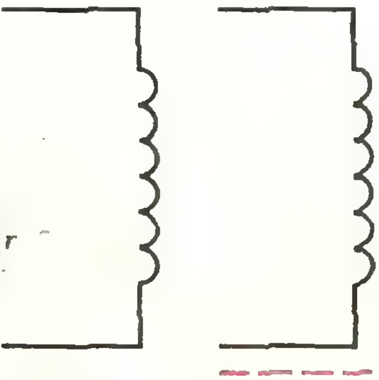


Рис. 6

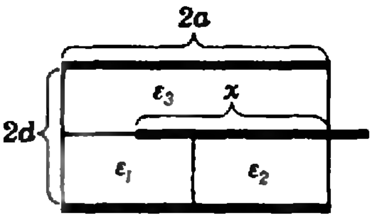


**Рис. 7.**

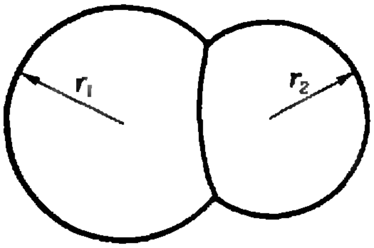


**Рис. 8.**

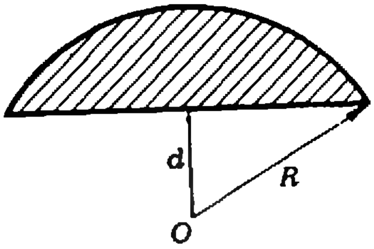


**Рис. 9.**

всех точек поверхности Земли одна и та же); б) температуру поверхностных слоев Солнца.

*Указание.* Полная энергия, излучаемая в течение 1 *сек* с 1 *см*$^2$ поверхности абсолютно черного тела, согласно закону Стефана — Больцмана равна $\sigma T^4$, где $T$ — абсолютная температура тела.

Задача 4 (II тур). Два мыльных пузыря, прежде чем соединиться в один, часто образуют промежуточный сдвоенный пузырь с внутренней перепонкой (рис. 8). а) Зная величины $r_1$ и $r_2$, вычислить радиус кривизны $r_{12}$ пленки, разделяющей пузыри. б) Предположим, что $r_1=r_2=r$. Какие радиусы $R_1$ и $R_2$ имели пузыри, прежде чем образовали промежуточный пузырь? Каким будет радиус пузыря $R$ после того, как лопнет разделяющая пленка?

Предполагается, что избыточное давление внутри пузыря зависит исключительно от поверхностного натяжения мыльной пленки, радиуса пузыря и числовых постоянных. Сверх того, считается, что избыточное давление в пузырях намного меньше внешнего атмосферного давления, в силу чего суммарный объем газа в пузырях не изменяется.

*Указание.* Объем шарового сегмента с размерами $d$ и $R$ (рис. 9) равен

$$\frac{1}{3}\pi(2R^3-3R^2d+d^3).$$

Задача 5 (III тур). Над обширной горизонтальной равниной с самолета распылили жидкое бесцветное вещество, уничтожающее насекомых. Коэффициенты преломления для крайних областей видимого спектра равны: $n_{\text{кр}}=1{,}460$ (для красного цвета) и $n_{\text{ф}}=1{,}470$ (для фиолетового цвета). До того как капельки жидкости попали на землю, над равниной наблюдалась радуга, обусловленная наличием этих капелек в воздухе. Вычислить угловые радиусы красной и фиолетовой дуг радуги. Какое ограничение на угловую высоту Солнца над горизонтом вытекает из того только факта, что радуга вообще наблюдалась? Принимается, что Солнце является точечным очень отдаленным от Земли источником света.

*Указание.* Показать, что различным длинам волн отвечают различные экстремальные значения угла, под которым луч выходит из капельки после однократного внутреннего отражения. Далее показать, что максимум интенсивности данного цвета соответствует экстремальному значению упомянутого выше угла. Эффектов, вызванных многократными отражениями лучей в капельках, можно не учитывать.

### Экспериментальные задачи

Задача 1 (вступительное задание).

а) Располагая высоким сосудом, поплавком, сделанным из пробирки, в которую насыпано немного дроби и которая закупорена, водой, испытуемым маслом, линейкой, миллиметровкой, определить отношение плотности масла к плотности воды. Описать и обосновать метод измерения. Оценить ошибку результата.

б) В литровую колбу влить около 100 *мл* жидкого стекла и примерно 600 *мл* воды. После тщательного перемешивания бросить в раствор небольшие кристаллики белильной извести, медного купороса, азотнокислого серебра и других имеющихся в вашем распоряжении солей. Описать и объяснить наблюдаемые явления.

*Указание.* Ознакомиться с явлением осмоса.

Задача 2 (I тур). Имея в распоряжении посеребренный изнутри шарик радиуса $R$, сосуд с матовыми стенками, наполненный водой, гирьку с ниткой, линейку, металлический стержень на штативе, определить коэффициент преломления света на границе воды и воздуха (не обязательно использовать все перечисленные приспособления).

*Перевели и подготовили публикацию*
*Ф. Варпаховский и Л. Максимюк*

# Лингвистика + математика

В воскресенье 21 ноября 1976 года в 10 часов утра в здании гуманитарных факультетов МГУ на Ленинских горах состоится первый тур очередной XIII Олимпиады по языковедению и математике. В Олимпиаде могут принять участие все желающие.

Лингвистика и математика! Откуда такое сочетание? Современная лингвистика стремится к логической отчетливости и строгости изложения, свойственным точным наукам, в первую очередь — математике. Именно поэтому математические дисциплины занимают большое место в учебных программах Отделения структурной и прикладной лингвистики филологического факультета МГУ. Математика дает лингвистам не только и не столько конкретные результаты и теоремы, сколько строгий и формальный стиль мышления.

Ниже приводится две задачи, предлагавшиеся на прежних Олимпиадах. Предмета «лингвистика» нет в школьной программе. Поэтому условия предлагаемых задач содержат все сведения, необходимые для их решения. Решение должно быть получено путем точных логических рассуждений. Кроме того, при решении вам придется *в явной форме* сделать ряд допущений об устройстве естественных языков.

## Задача 1

Даны три грузинские фразы:

1. ლამაზი შვილების კარგი ამხანაგი
2. კარგი ამხანაგის ლამაზი შვილი
3. ლამაზი ამხანაგების კარგი შვილები

Две из них переводятся на русский язык как «хороший друг красивых сыновей» и «хорошие сыновья красивых друзей».

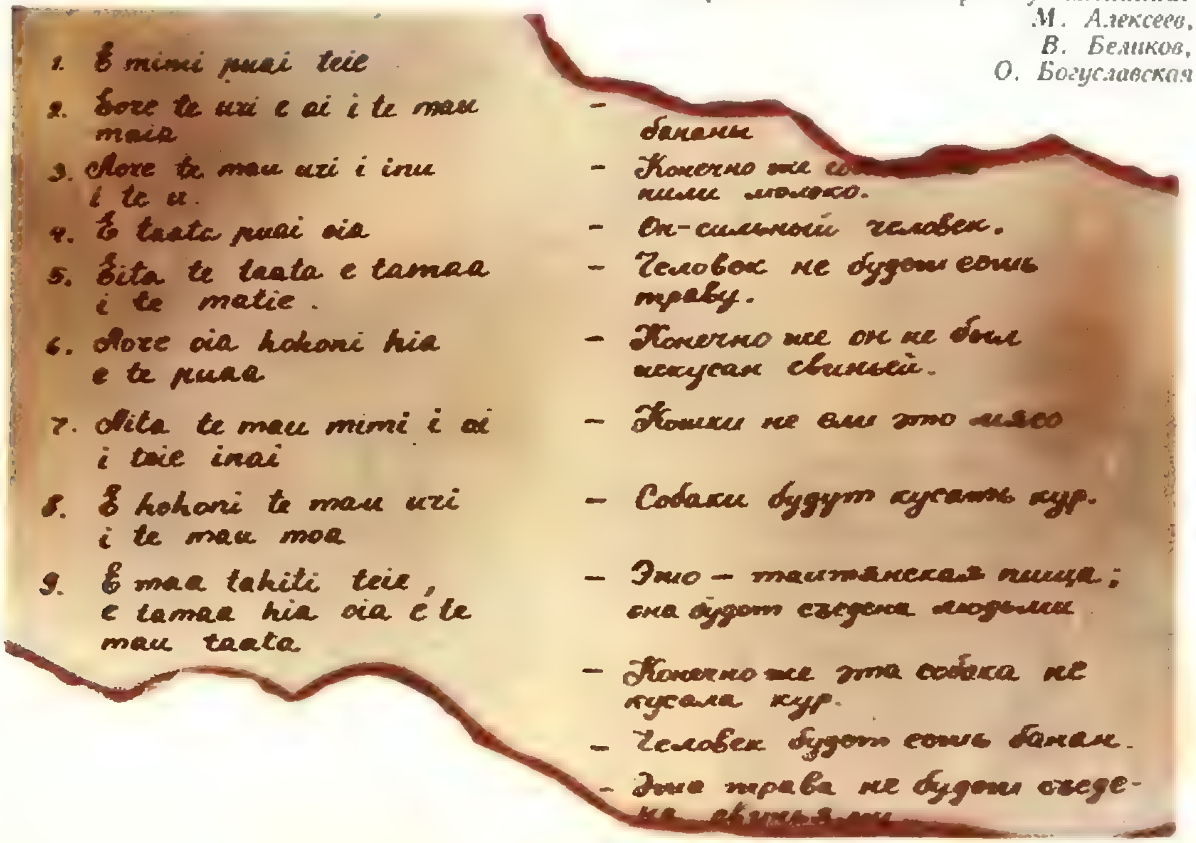
Определите перевод каждой грузинской фразы.

## Задача 2

Один таитянин, будучи в Москве проездом, попросил определить, что означают таитянские слова *i* и *e*. Для этого он предложил несколько фраз с переводом на русский язык.

Листок, на котором были написаны фразы, размок под дождем (см. рисунок). Может быть, вам удастся восстановить отсутствующие строчки и выполнить просьбу таитянина?

*М. Алексеев,*
*В. Беликов,*
*О. Богуславская*



1. E mimi puai teie
2. Eore te uri e ai i te mau maia
3. Aore te mau uri i inu i te u.
4. E taata puai oia
5. Eita te taata e tamaa i te matie.
6. Aore oia hohoni hia e te puaa
7. Aita te mau mimi i ai i teie inai
8. E hohoni te mau uri i te mau moa
9. E maa tahiti teie, e tamaa hia oia e te mau taata

–
бананы
– Конечно же с
пили молоко.
– Он — сильный человек.
– Человек не будет есть траву.
– Конечно же он не был искусан свиньей.
– Кошки не ели это мясо
– Собаки будут кусать кур.
– Это — таитянская пища; она будет съедена людьми
– Конечно же эта собака не кусала кур.
– Человек будет есть банан.
– Эта трава не будет съедена свиньями

# «Квант» для младших школьников

## Задачи

1. Мастер спорта Седов, кандидат в мастера Чернов и перворазрядник Рыжов встретились в клубе перед началом турнира.

— Обратите внимание,— заметил черноволосый,— один из нас седой, другой рыжий, а третий черноволосый. Но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии. Забавно, не правда ли?

— Ты прав,— подтвердил мастер.

Какого цвета волосы у кандидата в мастера?

2. Золотой призер школьного чемпионата по футболу набрал 7 очков, серебряный — 5, бронзовый — 3. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место? Сколько команд участвовало в чемпионате? (За выигрыш дается 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0; если две команды набрали одинаковое количество очков, то места определяются по разности забитых и пропущенных мячей.)

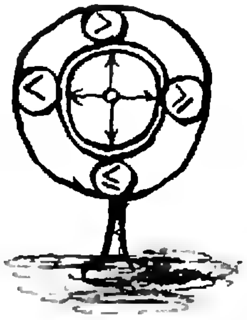
3. На пяти фишках проставлено по одной цифре: 0, 2, 4, 6, 8. Отберите из этих фишек четыре и расположите их в ряд так, чтобы получившееся четырехзначное число было квадратом некоторого целого числа.

4. Как вы думаете, будет ли в ракете, в которой все тела находятся в состоянии невесомости, гореть свечка?

*Рис. Э. Назарова*

*А. Дейнега*

# Логические задачи и неравенства



Сделав уроки, пятиклассник Володя занялся решением логической задачи № 1291 из учебного пособия «Математика, 5» (М., 1976), заданной на дом на математическом кружке. Вот она.

*В соревновании по бегу участвовали три бегуна: Авдеев, Васильев и Семенов. Перед забегом один зритель сказал, что первым придет Авдеев, второй — что Семенов не будет последним, а третий — что Васильев не придет первым. После забега оказалось, что один зритель угадал, а два других ошиблись. Как закончились соревнования?*

Шло время, а Володя так и не мог решить задачу. Наконец он обратился за помощью к своей старшей сестре Наташе.

— Думай сам! — сказала сестра, занимаясь своим делом.

— Так я же все время думаю... пожалуйста... я же не часто к тебе обращаюсь...

— Ну ладно,— согласилась Наташа.— Только, давай, решим эту задачу с помощью неравенств. Хорошо?

— Я не против, только как это — неравенств? Учитель так не показывал, мы решали логически...— удивился Володя.

— Ну и что же? А мы решим посвоему. Сначала обозначим место, занятое Авдеевым, через $a$, Васильевым — через $b$, Семеновым — через $c$. Бегунов было трое, поэтому каждый из них мог занять 1, 2 или 3 место. Значит, $a$, $b$ и $c$ могут быть равны лишь 1, 2 или 3. Подумай, как это записать в виде неравенств? Между какими натуральными числами находится $a$? $b$? $c$?

Володя подумал и записал: $1 \leqslant a \leqslant 3$, $1 \leqslant b \leqslant 3$, $1 \leqslant c \leqslant 3$.

— Правильно,— сказала сестра.— А теперь попробуем записать условия задачи с помощью величин $a$, $b$ и $c$. В задаче сказано «первым придет Авдеев», поэтому $a = 1$. Дальше «Семенов не будет последним», значит, он может занять 1 или 2 место, поэтому, как ты сам уже догадываешься, запишем $c = 1$ или $c = 2$. Как это выразить с помощью неравенств?

— Я понял, сказал Володя.— Надо записать так: $1 \leqslant c \leqslant 2$. Тогда и предложение «Васильев не придет первым» запишется аналогично: $2 \leqslant b \leqslant 3$.

— Очень хорошо. Давай все, что мы получили, выпишем вместе:

$$\begin{cases} \text{(I) } a = 1, \\ \text{(II) } 1 \leqslant c \leqslant 2, \\ \text{(III) } 2 \leqslant b \leqslant 3. \end{cases} \qquad (*)$$

Такую запись будем называть «системой». Но эта система еще не все выражает в задаче. Например, нами еще не использовано то, что «один зритель угадал, а два других ошиблись». Как эти данные записать с помощью неравенств?

— Неравенств?... ума не приложу...

— Смотри. Слова «угадал» и «ошибся» выражают противоположные логические «действия», они отрицают друг друга:

«угадал» — «НЕошибся»
«ошибся» — «НЕугадал».

Как видишь, это делается с помощью частицы НЕ.

Что касается нашей задачи, то давай составим таблицу:

| Прямое высказывание | Противоположное высказывание |
|---|---|
| $A$ равно $B$ $(A = B)$ | $A$ не равно $B$ $(A \neq B$; $A > B$ или $A < B)$ |
| $A$ больше $B$ $(A > B)$ | $A$ не больше $B$ $(A \leqslant B)$ |
| $A$ меньше $B$ $(A < B)$ | $A$ не меньше $B$ $(A \geqslant B)$ |
| Противоположное высказывание | Прямое высказывание |

— Используя эту таблицу,— продолжала Наташа,— можно перевести на язык неравенств фразу «один из трех зрителей угадал занятое бегуном место, а два других ошиблись». Попробуй это сделать сам.

С таким заданием Володя справился, приводим его записи.

Если I зритель угадал, а II и III ошиблись (см. систему (*)):

$$\begin{cases} a = 1, \\ c = 3, \\ b = 1. \end{cases}$$

Если II зритель угадал, а I и III ошиблись:

$$\begin{cases} 2 \leqslant a \leqslant 3, \\ 1 \leqslant c \leqslant 2, \\ b = 1. \end{cases}$$

Если III зритель угадал, а I и II ошиблись:

$$\begin{cases} 2 \leqslant a \leqslant 3, \\ c = 3, \\ 2 \leqslant b \leqslant 3. \end{cases}$$

— Все верно,— сказала сестра.— Теперь смотри: первая система не годится...

— Да, это видно сразу: в ней $a = 1$ и $b = 1$, но Авдеев и Васильев не могли занять одинаковые места. А вторая... из нее следует, что $b = 1$, $c = 2$, $a = 3$. Она годится! Посмотрим теперь третью... кто же занял первое место? Никто? Значит, и третья система не годится.

Итак,— провозгласил Володя,— соревнования закончились со следующим результатом: *Васильев занял* первое место, Семенов — второе, Авдеев — третье.

— Ну, а теперь реши еще одну задачу,— сказала Наташа, достав какую-то книгу *).

*Аня, Варя и Клава ходили на демонстрацию. Одна из них была в*

---

*) И. Я. Депман, Рассказы о старой и новой алгебре, Л., 1967, с. 122.

*красном платье, другая — в белом, третья — в синем. На вопрос, какое на каждой девушке было платье, они дали ответ: Аня была в красном, Варя — не в красном, Клава — не в синем. В этом ответе одно из трех утверждений — верное, два — неверные. В каком платье была каждая из девушек?*

— И тоже с помощью неравенств? — спросил Володя.

— Конечно! — ответила сестра.

— А я не знаю, что больше — синее, красное или белое,— возмутился Володя,— и вообще это совсем другая задача, ничем не похожая на предыдущую.

— Хорошо, я тебе немного помогу,— сказала Наташа.— Давай занумеруем цвета. Красный цвет пусть будет первым, белый — вторым, а синий — третьим.

— А... Тогда я, наверное, смогу решить задачу,— чуть помедлив произнес Володя.— Я обозначу через $a$ — цвет платья Ани, через $b$ — цвет платья Вари и через $c$ — цвет платья Клавы. Теперь запишу условия задачи с помощью неравенств

$$\begin{cases} a = 1, \\ 2 \leqslant b \leqslant 3, \\ 1 \leqslant c \leqslant 2, \end{cases}$$

— Смотри, Наташа! Да ведь получилась та же самая система! И точно так же нужно рассмотреть три случая, в которых одно утверждение верно, а два других неверны. Значит, я, не решая задачи, могу сразу сказать, что $a = 3$, $b = 1$, а $c = 2$. Аня была в синем платье, Варя в красном, а Клава в белом!

— Совершенно верно,— ответила сестра.— Здесь проявилось, наверное, самое важное достоинство математики: совершенно разные задачи, записанные на ее языке, могут стать одной и той же задачей. Таким образом, решив одну из них, мы получаем решение и остальных задач. Когда подрастешь, увидишь, что нередко различные задачи из физики, химии, экономики, биологии часто оказываются одной и той же математической задачей.

Ну, и теперь уже без моей помощи реши еще две задачи.

1. Написав контрольную работу по математике, сестры сообщили родителям:

Света.— На этот раз я написала на «5».

Люда. — Я написала не на «3».

Ира. — Я написала не на «5».

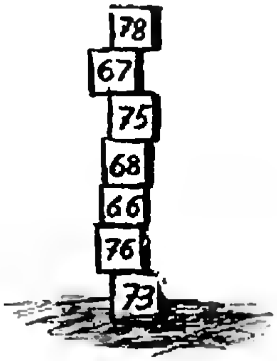
После проверки работ оказалось, что сестры получили разные положительные оценки и из трех высказываний сестер одно верное, остальные — ошибочны. Какие оценки получили за контрольную Света, Люда и Ира?

2. Три брата имеют звания капитана, старшины сержанта. Из трех утверждений «Алексей — старшина», «Владимир — не старшина», «Семен — не сержант» лишь одно — верное. Какие воинские звания у братьев?

*Б. Кордемский*

# Считайте обдуманно

**(Диалог двух друзей)**



Петя. Мне нравится считать, находить числовые значения алгебраических выражений, выполнять арифметические действия — делай действия по правилам в том порядке, как указано, да только старайся не просчитаться.

Коля. Я тоже люблю считать, но не хочу низводить себя до уровня арифмометра. Если надо произвести подряд несколько действий, то затратив минуту для обдумывания возможных упрощений, я экономлю 5 минут, а может быть и больше.

Пример 1. *Вычислить сумму* $73 + 76 + 66 + 68 + 75 + 67 + 78.$

Петя. Складываю единицы: $3 + 6 + 6 + 8 + 5 + 7 + 8 = 43$. Пишу 3 единицы, а 4 десятка прибавляю к остальным десяткам...

Коля. А я бы действовал иначе. Замечаю, что все 7 слагаемых близки к числу 70, вот и надо 70 умножить на 7, да учесть избытки и недостатки: $70 \cdot 7 + 3 + 6 - 4 - 2 + 5 - 3 + 8 = 490 + 13 = 503.$

Пример 2. *Вычислить*

$$\left(\frac{72}{13}\right)^2 + \left(\frac{30}{13}\right)^2.$$

Петя. Теперь и мне хочется поискать более рациональный путь. У чисел 72 и 30 есть общий множитель 6, следовательно, $\left(\frac{6}{13}\right)^2$ можно вынести за скобку, и тогда

$$\left(\frac{6}{13}\right)^2 \cdot (12^2 + 5^2) = \frac{36 \cdot 169}{169} = 36.$$

Оказывается, даже я в силах «в уме» справиться с такими вычислениями.

Пример 3. *Разделить* 28 902 *на* $7\frac{1}{2}$.

Коля. Удобно применить такой способ: прибавить к данному числу одну треть его и результат разделить на 10, — ведь $1 : 7\frac{1}{2} = \frac{2}{15} = \frac{4}{30} = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{3}\right)$, поэтому $28\,902 : 7\frac{1}{2} = (28\,902 + 9\,634) : 10 = 3\,853{,}6.$

Пример 4. *Найти* $a^2 + ab + b^2$, *если* $a = 236$, $b = 164$.

Петя. Сумма $a + b = 400$. Это — удачно. Такое число легко возводить в квадрат. Значит, пребразую данное выражение к виду: $(a + b)^2 - ab$, и теперь $400^2 - 236 \cdot 164 = \ldots$ Стоп. Я, кажется, в самом деле стал наблюдательным. Вижу, что и произведение $236 \cdot 164$ вычислить нетрудно. Действительно, $236 \cdot 164 = (200 + 36) \cdot (200 - 36) = 200^2 - 36^2$. Окончательно получаю $400^2 - 200^2 + 36^2 = 600 \cdot 200 + 36^2 = 120\,000 + 1296 = 121\,296$.

Коля. Ну раз так, то я решу тебе один пример, а ты объясни, почему так получается.

Пример 5. *Вычислит* $58^2$.

Решаю. $58 - 25 = 33$, $8^2 = 64$. Приписываю 64 к 33, получаю 3364. Или так: $25 + 8 = 33$, $8^2 = 64$; ответ: 3364. Когда еще можно так вычислять квадраты целых чисел?

## К статье «В фокусе линзы»

1. Интенсивность в фокусе линзы

$$I_F = I_0K.$$

Интенсивность $I_0$ до фокусировки убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до источника. Поэтому при удалении Солнца на звездное расстояние $R$ она будет равна

$$I_{0R} = I_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^2,$$

где $I_0 = 0{,}14$ *вт/см²* — интенсивность излучения на расстоянии, равном радиусу орбиты Земли $R_0 = 1{,}5\cdot10^{11}$ *м*. Подставив $R = 4\cdot10^{16}$ *м*, найдем

$$I_{0R} = 2\cdot10^{-12}\ вт/см^2.$$

Угловой размер Солнца при удалении на расстояние $R = 4\cdot10^{16}$ *м* уменьшается до $\theta_0 = 1{,}75\cdot10^{-8}$ *рад* (радиус Солнца $\approx 7\cdot10^8$ *м*). Считая, что длина волны излучения $\lambda\approx 4{,}5\cdot10^{-5}$ *см*, найдем значение угла дифракционного размытия: $\theta_d\approx 2{,}25\cdot10^{-5}$ *рад*.

Таким образом, $\theta_0 \ll \theta_d$, и следовательно, для коэффициента усиления следует пользоваться дифракционной формулой

$$K = K_d \approx \frac{a^4}{\lambda^2 f^2} \approx 8\cdot10^7.$$

Окончательный результат:

$$I_F = I_{0R}K\approx 1{,}6\cdot10^{-4}\ вт/см^2.$$

2. Радиус фокального пятна равен

$$r_F\approx f(\theta_0+\theta_d)\approx f\left(\theta_0+\frac{\lambda}{a}\right).$$

Площадь фокального пятна $S_F = \pi r_F^2 \approx \pi f^2\left(\theta_0+\frac{\lambda}{a}\right)^2$. Так как $K = \frac{S_0}{S_F}$ ($S_0 = \pi a^2$ — площадь апертуры), то в общем случае

$$K\approx \frac{a^2}{f^2\left(\theta_0+\frac{\lambda}{a}\right)^2}.$$

3. Интенсивность излучения звезды до фокусировки $I_{0R} = 2\cdot10^{-12}$ *вт/см²* (см. задачу 1). Следовательно, для получения в фокальном пятне интенсивности $I_F = 100$ *вт/см²* коэффициент усиления линзы должен быть равен

$$K = \frac{I_F}{I_{0R}} = 5\cdot10^{13}.$$

Поскольку радиус линзы (а следовательно, и соотношение между $\theta_0$ и $\theta_d$) не известен, для коэффициента усиления следует пользоваться общей формулой (см. задачу 2)

$$K\approx \frac{a^2}{f^2\left(\theta_0+\frac{\lambda}{a}\right)^2}.$$

Подставив в эту формулу известные величины $\left(\frac{a}{f} = 0{,}2,\quad \theta_0 = 1{,}75\cdot10^{-8}\ рад,\quad \lambda = 4{,}5\cdot10^{-5}\ см\right)$, получим

$$5\cdot10^{13}\approx \frac{1}{25\left(1{,}75\cdot10^{-8}+\frac{4{,}5\cdot10^{-5}}{a}\right)^2}.$$

Отсюда найдем радиус линзы:

$$a \approx 43\ м.$$

## К статье «Осторожно — максимум!»

*Ответ на вопрос 3.* Сформулированное утверждение, если понимать максимумы и минимумы только в строгом смысле, неверно — пример см. на рис. 1 (соответствующая функция не имеет строгих экстремумов). Самый же простой опровергающий пример — функция, постоянная на отрезке $[a,\ b]$!

*Ответ на вопрос 4.* Сформулированное утверждение неверно. График соответствующей функции изображен на рисунке 2 (точки экстремумов сгущаются к точке максимума $x_0$).

## К статье «Наш выбор — теорема синусов!»

1. $|MN| = 2R$. Указание. Доказать, что треугольник $AMN$ подобен треугольнику $ABC$, и рассмотреть треугольники $MDN$ ($[MD]\perp[AN]$) и $ABC$.

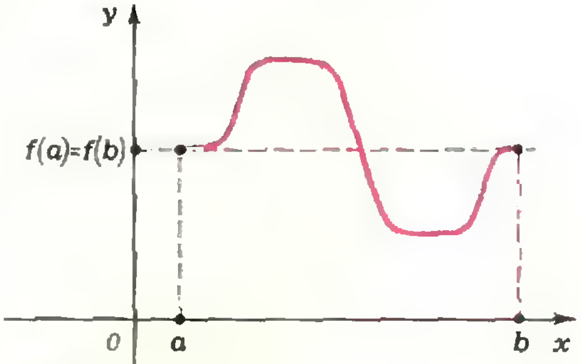


Рис. 1.

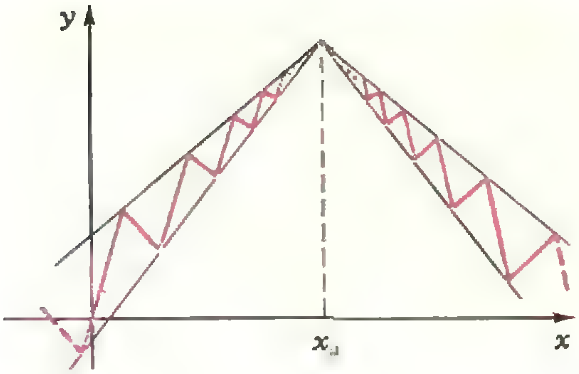


Рис. 2.

3. $\hat{B} = \arccos\frac{3}{4}$, $\hat{C} = 2\arccos\frac{3}{4}$, $\hat{A} = \pi - 3\arccos\frac{3}{4}$. Указание. Из условия следует, что $2|BC| = |AB| + |AC|$, или по теореме синусов $2\sin 3\hat{B} = \sin 2\hat{B} + \sin\hat{B}$.

4. $S = \frac{1}{2}a^2\cos\alpha\cdot\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Указание. По теореме синусов из треугольника $BOC$ ($C$ — вершина прямого угла, $O$ — центр вписанного круга, $|BO| = a$, $\widehat{BOC} = 90° + \alpha/2$) *определить катет $BC$. Затем по* катету и противолежащему углу найти площадь.

5. Угол $ABC$ — тупой. Указание. $\frac{|DC|}{|AD|} = \frac{|DC|}{|BD|}\cdot\frac{|BD|}{|AD|} = 2\cos\frac{\widehat{ABC}}{3}$ по теореме синусов.

6. $\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta BDE}} = \frac{\sin^2\left(45° + \frac{3\alpha}{4}\right)}{\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)}$. Указание. Записать отношение площадей

$$\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta BDE}} = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|AE|}{|BE|}\cdot\frac{|BE|}{|DE|}$$

и с помощью теоремы синусов перейти к отношению синусов противолежащих углов.

7. $|AE| = 2$ *см*. Указание. Применить теорему синусов к треугольнику $ACE$.

### К статье «Логические задачи и неравенства»

1. Света — 3, Люда — 4, Ира — 5.

2. Алексей — сержант, Владимир — старшина, Семен — капитан.

### К задачам

*(см. с. 42)*

1. а) $2^{17}+2^5-1=(2^6-1)(2^{11}+2^5+1)$;
б) $2^{12}-2^5-1=(2^4+1)(2^8-2^4-1)$;
в) $2^{13}-2^4+1=(2^4+1)(2^9-2^5+1)$.

2. а) $x=3$, $y=2$, $z=7$; б) $x=2$, $y=7$; в) $x=1$; г) $x=2$, $y=7$, $z=6$.

3. б) Нельзя.

### К задачам «Квант» для младших школьников»

*(см. «Квант» № 9)*

1. $64\,001=7\cdot41\cdot223$ (все эти числа простые). В классе не может быть 223 ученика, поэтому в классе 41 ученик, и они вносили по 2 руб. 23 коп.

2. 8 орехов.

3. Воспользовавшись правилом рычага, найдем, что свободный конец рычага придется переместить на $1{,}2\cdot10^{23}$ *м* (для сравнения: расстояние от Земли до Солнца $\approx 1{,}5\cdot10^{11}$ *м*).

4. Выпали 352 страницы (176 листов). Указание. Число выпавших страниц должно быть четным.

5. Числа вида $p^2$, где $p$ — простое число. Указание. Если $p$ — простой делитель числа $x$, то и $x/p$ — делитель числа $x$; из равенства $x/p=p$ получаем $x=p^2$.

### К задачам

*(см. «Квант» № 9, с. 65)*

1. Ответ: $\frac{Sa}{d(a+b)}$. Указание. Продолжить боковые стороны трапеции до пересечения и воспользоваться подобием полученных треугольников.

2. $A < 1$.

4. Ответ: $\hat{B} = 30°$. Указание. Легко найти отношение $|AC| : |AB|$, оно равно $1 : 2$.

### «Арифметический ребус»

*(см. «Квант» № 9, 3-я с. обл.)*

$$\begin{array}{r} 347845126 \\ +347845126 \\ 82087525 \\ \hline 777777777 \end{array}$$

Номер оформили художники: Ю. Ващенко, С. Верховский, М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, Н. Смирнова
Корректор В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 21.VII.1976 г.
Подписано к печати 15.IX.1976 г.
Бумага $70\times100\ ^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 5,57 Т-13110 экз.
Цена 30 коп. Заказ 1617 Тираж 314 005 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

*Рукописи не возвращаются*

# Дорогой читатель!

Для улучшения работы журнала нам очень важно знать Ваше мнение о публикуемых в журнале материалах, о том, насколько журнал учитывает в своей работе Ваши стремления и интересы. Просим Вас ответить на вопросы анкеты кратко, подчеркнуть ответ, с которым Вы согласны, заполнить пропуски. Мы, конечно, будем очень Вам благодарны также за все развернутые советы и пожелания, которыми Вы хотели бы дополнить нашу анкету. Чтобы мы могли оперативно использовать Ваши советы, просим прислать нам заполненную анкету возможно быстрее, желательно сразу же по получении.

Пишите нам по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», «Анкета».

---

**1. Ваша фамилия, имя и отчество.**

---

**2. Возраст, класс или профессия и специальность.**

---

**3. Место жительства и школа.**

---

**4. Являетесь ли Вы подписчиком «Кванта»:**
**а) 1 год; б) 2 года; в) 3 года; г) более 3-х лет!**

**5. Ваше отношение к журналу в целом:**
**а) нравится; б) не очень; в) не нравится.**

**6. Что Вам в нашем журнале больше нравится:**
**а) математика; б) физика; в) одинаково — математика и физика; г) не нравится ни математика, ни физика!**

**7. По мере того как Вы читаете наш журнал, стала ли для Вас более интересной:**
**а) математика; б) физика!**

**8. Справляетесь ли Вы с задачами из раздела «Задачник «Кванта»:**
**а) часто; б) не очень; в) не справляетесь!**

9. Понятны ли Вам решения «Задачника «Кванта»:
а) да; б) не очень; в) не понятны?

10. Интересны ли Вам статьи, помещенные в «Кванте» в 1976 г.? Если да, назовите несколько таких статей:
а) по математике; б) по физике.

11. Доступны ли Вам статьи, публикуемые в «Кванте»:
а) по математике; б) по физике?

12. Какие конкретные статьи по математике или физике Вы хотели бы видеть в нашем журнале, какие темы для статей Вы хотели бы нам предложить?

13. Какие материалы Вам более интересны:
а) общие статьи; б) статьи из раздела «Математический кружок»; в) статьи из раздела «Практикум абитуриента»; г) статьи из раздела «Лаборатория «Кванта»; д) «Квант» для младших школьников»; е) исторические статьи?

14. Какие новые разделы журнала Вы хотели бы видеть в будущем?

15. Прорабатываете ли Вы материалы «Кванта» индивидуально или вместе с другими любителями математики и физики?

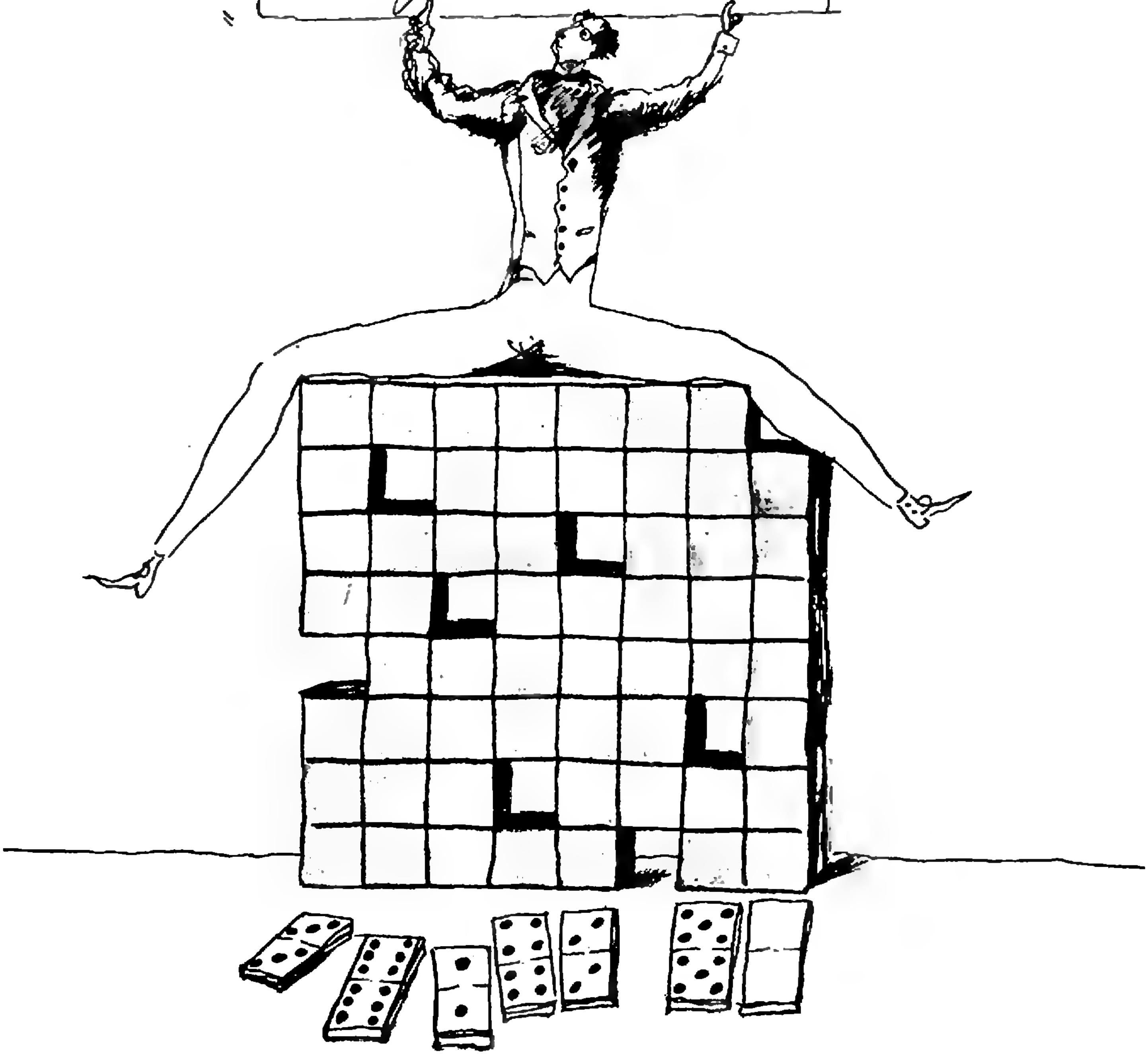
16. Нравится ли Вам оформление журнала:
а) да; б) не очень; в) не нравится?

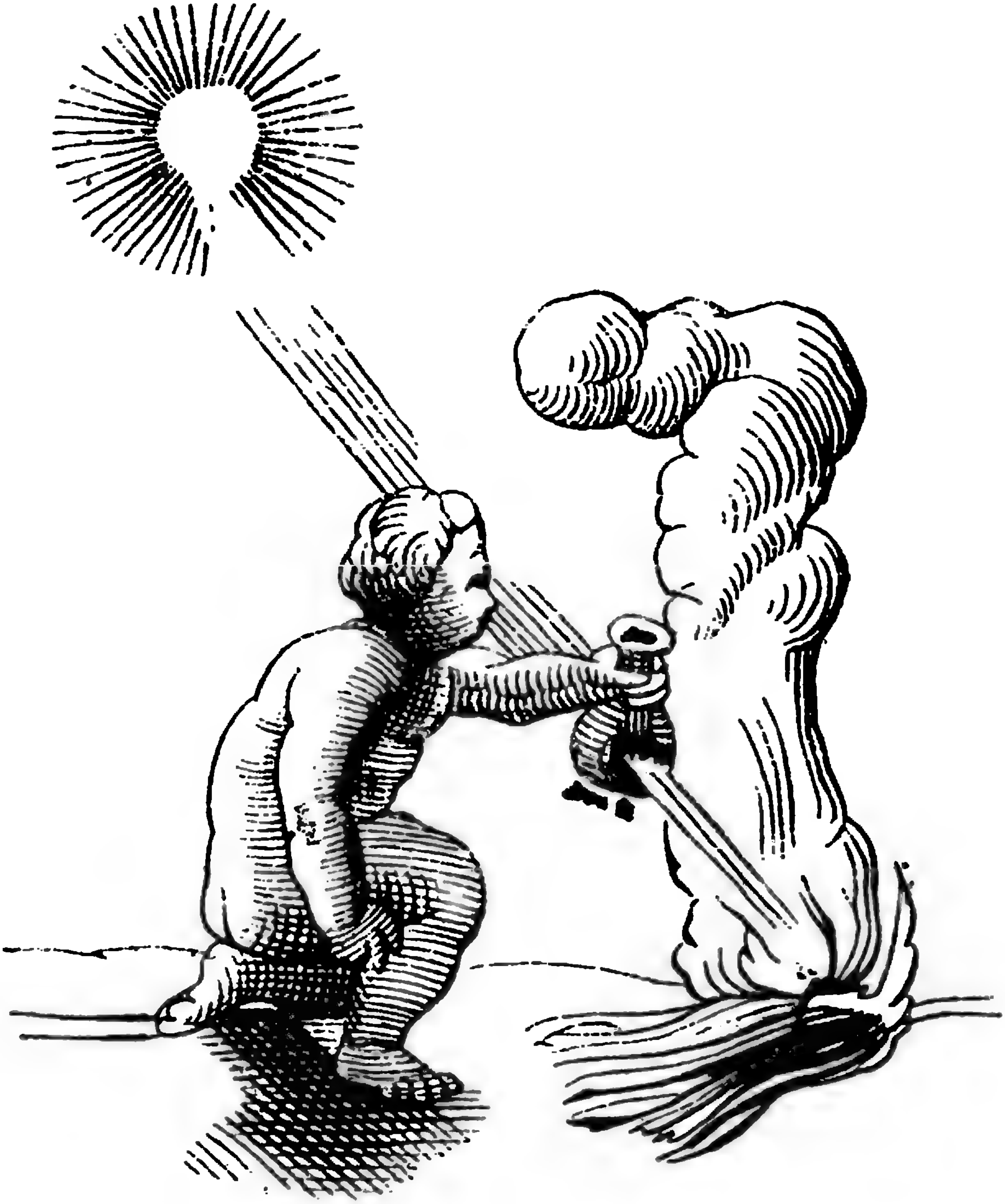
17. Каким бы Вы хотели видеть журнал в 1977 году?

„Испорченный квадрат"

Из 28 косточек домино (полный комплект) сложите квадрат с 8 отверстиями так, чтобы суммы очков по вертикалям, горизонталям и большим диагоналям квадрата были всюду одинаковы.

Л. Моганов





Эта картинка — копия с гравюры 1636 года. В руках у мальчика стеклянный сосуд, наполненный водой. Сфокусировав с помощью этой своеобразной линзы солнечные лучи, мальчик зажег пучок соломы.

А не задумывались ли вы над тем, почему, сфокусировав солнечные лучи, можно разжечь костер, а зажечь бумагу с помощью линзы звездным светом не удается? Если это вам интересно, прочитайте статью «В фокусе линзы» (с. 13).

# КЛЯКСЫ И ВЫЦИНАНЬКИ

Во всем мире известны кружевные польские «выцинаньки» (одноцветные и многоцветные вырезки), которые используются и в качестве украшений интерьеров, и как мотивы для художников в графике и в текстильной промышленности. Наверное, не менее известны во всем мире кляксы, которые до появления шариковых ручек вызывали огорчения у многих школьников, писарей и делопроизводителей.

Попробуем подойти к вопросу о кляксах и выцинаньках математически.

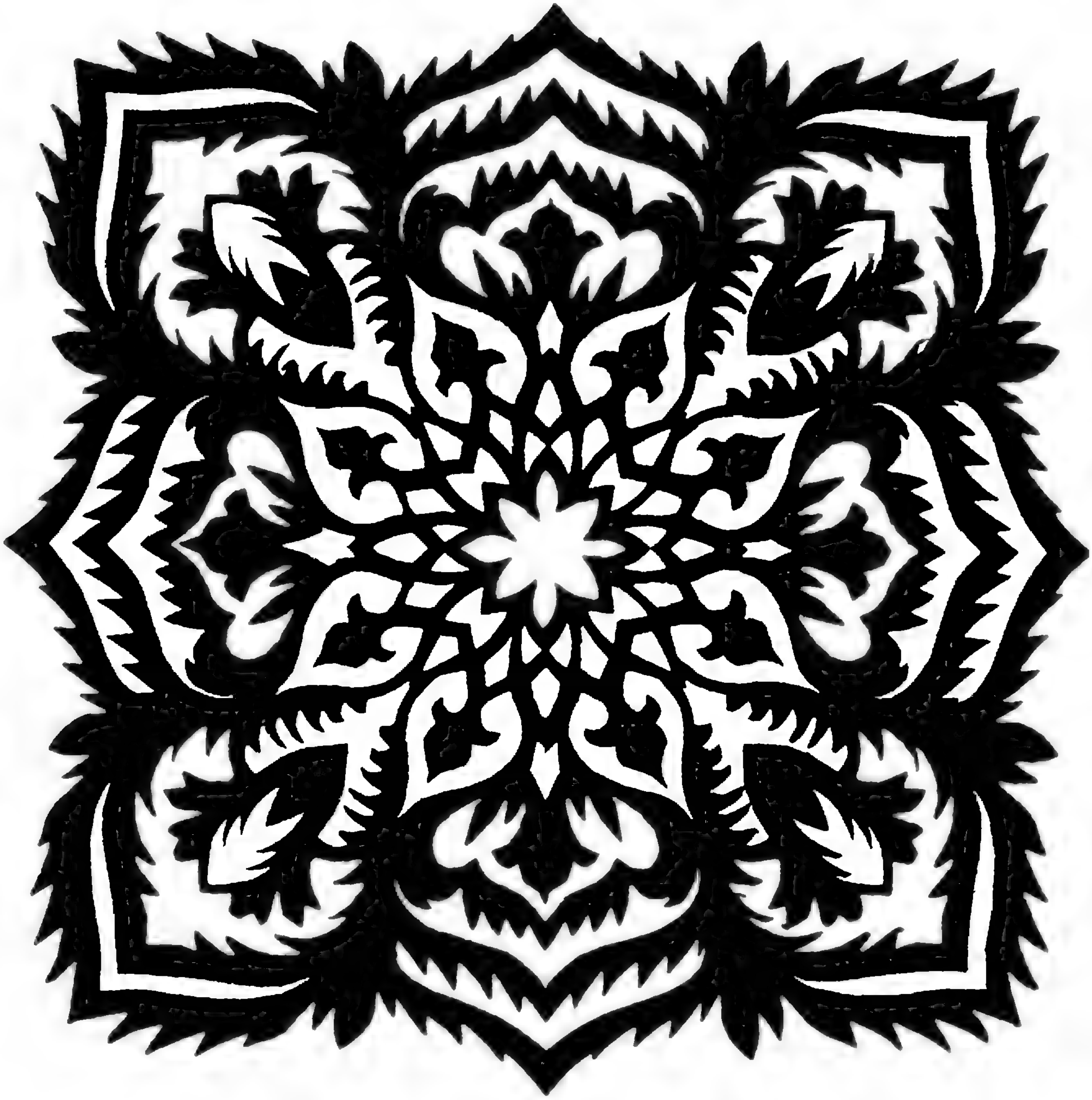
И изображенная здесь выцинанька, и клякса на первой странице обложки симметричны — с этим, видимо, согласится каждый. А какая из них «более симметрична»? Нельзя ли описать это понятие количественно, ввести «меру симметричности» фигуры?

Клякса получилась так. на лист бумаги побрызгали чернил, сложили лист вдвое, а затем разогнули. Линия сгиба — ось симметрии кляксы, при отражении в этой оси клякса перейдет в себя.

Сходным образом получилась выцинанька, только лист бумаги согнули несколько раз, вырезали из полученного «пирога» кусок, а затем развернули лист. Поэтому выцинанька перейдет в себя при отражении в любой линии сгиба листа бумаги.

Оказывается, именно множеством таких линий сгиба и описывается степень симметричности фигуры.

Подробно об этом рассказывается в статьях на с. 2—12.



# НОМЕР
# 11

Основан в 1970 году
1976
11

# Квант

*Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*

*Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы*

Главный редактор
*академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора
*академик* А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов *(главный художник)*
С. М. Козел
В. А. Лешковцев *(зам. главного редактора)*
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский *(зам. главного редактора)*
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

**Редакция:**
В. Н. Березин
А. Н. Виленкин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова *(художественный редактор)*
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чернова *(зав. редакцией)*

**В НОМЕРЕ:**

2 *А. Дозоров.* Электрические мультиполи
9 *Л. Цинман.* «Парадокс исследователя»
13 *Я. Смородинский.* Сверхтяжелые элементы — открытие или ошибка?
15 *В. Ярмоленко.* Складывание фигур

**Лаборатория «Кванта»**

19 *В. Майер, Н. Назаров.* Автоматический сифон

**Математический кружок**

22 *И. Шарыгин.* Теоремы Чевы и Менелая

**Задачник «Кванта»**

32 Задачи М411 — М415; Ф423 — Ф427
34 Решения задач М371—М375; Ф378—Ф382

**По страницам школьных учебников**

44 *В. Гутенмахер, Б. Ивлев, Ж. Раббот.* Сложение гармонических колебаний

**Практикум абитуриента**

47 *Г. Перевалов.* Графическое задание функции
53 *А. Буров, В. Ионов, В. Ляховский.* Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева

**X Всесоюзная олимпиада школьников**

56 *М. Смолянский, В. Стеценко, Е. Турецкий.* Олимпиада по математике
60 *Л. Лиманов.* Задачи олимпиады по математике
63 *Т. Петрова, Л. Чернова.* Олимпиада по физике
68 **Спрашивайте — отвечаем**

**Рецензии, библиография**

69 *А. Кужель, Т. Чикирисова.* Чему равен $\sqrt[0,5]{4}$?
70 *Б. Гельфгат.* Поиски и открытия планет
71 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги

**«Квант» для младших школьников**

73 Задачи
74 *Е. Семенов.* Фигуры конгруэнтны... фигуры неконгруэнтны?
78 **Ответы, указания, решения**
**Смесь** *(с. 8, 21, 30, 31, 42, 55, 64, 77)*

«Леверье, открывающий Нептун» — так названа в книге К. Фламмариона гравюра, которую мы воспроизводим на второй странице обложки. Недавно издательство «Наука» выпустило книгу Е. А. Гребеникова и Ю. А. Рябова «Поиски и открытия планет». Рецензию на эту книгу мы помещаем на с. 70.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1976 год

*А. Дозоров*

# Электрические мультиполи

Потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом в какой-нибудь точке окружающего пространства, обратно пропорционален расстоянию от заряда до этой точки (смотри приложение в конце статьи). Казалось бы, что и любое множество зарядов, сосредоточенных в некоторой области, вдали от этой области будет создавать потенциал, обратно пропорциональный расстоянию. Однако такое заключение в общем случае неверно. Оказывается, что, располагая заряды в определенном порядке, можно получить потенциал, обратно пропорциональный любой целой степени расстояния.

Для того чтобы убедиться в этом необычном свойстве, нам потребуется лишь одно математическое утверждение: если величина $|x|$ меньше единицы, то справедливо соотношение

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \qquad (1)$$

Это — хорошо знакомое вам выражение суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Перейдем к рассмотрению различных систем электрических зарядов. На расстоянии $r$ от точечного заряда $q$ величина потенциала $\varphi$, создаваемого этим зарядом, обратно пропорциональна расстоянию: $\varphi = \frac{kq}{\varepsilon r}$. Коэффициент пропорциональности $k$ зависит от выбора системы единиц. В СИ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Нам будет удобнее выбрать систему единиц, в которой $k = 1$ (система СГСЭ). Кроме того, будем считать, что все заряды находятся в вакууме, то есть $\varepsilon = 1$.

Рассмотрим, например, три заряда, расположенные на одной прямой на некотором расстоянии друг от друга (рис. 1). Пусть $AB = a$, $AC = b$, а величины зарядов равны $q$, $nq$ и $mq$, где $n$ и $m$ — некоторые числа. Найдем потенциал в точке $D$, лежащей на продолжении отрезка $AC$ на расстоянии $r$ от точки $A$ и находящейся достаточно далеко от всех трех зарядов. Математически последнее условие можно записать в виде $r \gg a + b$. Согласно принципу суперпозиции электрических полей потенциал $\varphi$ в точке $D$ равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым зарядом:

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{nq}{r-a} + \frac{mq}{r-b} = \frac{q}{r}\left(1 + \frac{n}{1-\frac{a}{r}} + \frac{m}{1-\frac{b}{r}}\right).$$

Так как нас интересует лишь случай $r \gg a + b$, то можно воспользоваться соотношением (1). При этом получим

$$\varphi = \frac{q}{r}\left[1 + n\left(1 + \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^3}{r^3} + \ldots\right) + m\left(1 + \frac{b}{r} + \frac{b^2}{r^2} + \frac{b^3}{r^3} + \ldots\right)\right] = \frac{q + nq + mq}{r} + q\frac{na + mb}{r^2} + q\frac{na^2 + mb^2}{r^3} + q\frac{na^3 + mb^3}{r^4} + . \qquad (2)$$

Из этого выражения видно, что для больших расстояний $r$ абсолютная величина каждого последующего слагаемого значительно меньше, чем предыдущего, если только числитель предыдущего слагаемого не равен нулю. Например, если сумма зарядов не равна нулю ($q + nq + mq \neq 0$), то основную роль в формуле (2) будет играть первое слагаемое, и потенциал поля системы зарядов будет обратно пропорционален первой степени расстояния. Если сумма зарядов равна нулю (система в целом нейтральна), то основную роль играет второе слагаемое: потенциал обратно пропорционален квадрату расстояния от зарядов до точки наблюдения. Но можно выбрать и такое расположение зарядов, при котором и первое, и второе слагаемые будут равны нулю. Из формулы (2) видно, что для этого необходимо выполнение двух условий:

$$q + nq + mq = 0 \qquad (3а)$$

и

$$q\,(na + mb) = 0. \qquad (3б)$$

Условие (3а) говорит о том, что полный заряд системы равен нулю, то есть заряды не могут быть одного знака. Сокращая в (3а) и (3б) произвольный заряд $q$, получим два уравнения с четырьмя параметрами $n$, $m$, $a$, $b$. Это означает, что можно выбрать бесконечное число вариантов расположения и величин зарядов, удовлетворяющих уравнениям (3). Выберем два параметра, например характеризующие расположение зарядов, по своему желанию. Пусть $b = 2a$, то есть $AB = BC$. В этом случае из уравнений (3а) и (3б) получим $n = -2$, $m = 1$, то есть в точке $A$ (см. рис. 1) находится заряд $q$, в точке $B$ — заряд $-2q$, а в точке $C$ — заряд $q$, $AB = BC = a$. Такая система зарядов на больших расстояниях создает поле, потенциал которого (см. формулу (2))

$$\varphi = \frac{2\,qa^2}{r^3} + \frac{6\,qa^3}{r^4} + \ldots$$

Основную роль играет здесь первое слагаемое, то есть потенциал обратно пропорционален третьей степени расстояния.

Если потребовать, чтобы наряду с условиями (3а) и (3б) выполнялось также условие

$$na^2 + mb^2 = 0, \qquad (3в)$$

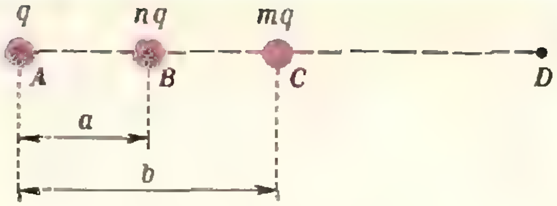


Рис. 1.

то, как это следует из формулы (2), потенциал будет пропорционален $r^{-4}$. Однако система уравнений (3а)—(3в) не имеет решений. Действительно, умножим уравнение (3б) на $a$ и сравним полученное уравнение с (3в). Получим $a = b$, после чего (3б) превращается в уравнение $n + m = 0$, а (3а) приводит к противоречию $1 = 0$ (если только $q \neq 0$, а случай $q = 0$ не представляет физического интереса). Аналогичный результат мы получим и для всех остальных членов в формуле (2).

Таким образом, три заряда, изображенные на рисунке 1, могут в зависимости от их величин и взаимного расположения создавать на больших расстояниях поля, потенциалы которых будут пропорциональны $1/r$, $1/r^2$ или $1/r^3$.

Аналогичным образом можно рассмотреть поле любой системы зарядов. Кроме того, можно указать изящный метод построения системы зарядов, создающих на больших расстояниях поле с потенциалом

$$\varphi_n = \frac{C_n}{r^{n+1}}, \qquad (4)$$

где $n$ — целое число, $C_n$ — некоторая постоянная, зависящая от величин зарядов и их взаимного расположения. Система зарядов, создающая поле с потенциалом (4), называется электрическим мультиполем $n$-го порядка или $2^n$-полем. Простейший случай $n = 0$ — мультиполь нулевого порядка — соответствует точечному заряду. В общем случае мультиполь $n$-го порядка содержит $2^n$ зарядов. Так вот, если имеется мультиполь $n$-го порядка ($2^n$-поль), то из него легко построить мультиполь $(n + 1)$-го порядка. Для этого нужно к прежнему $2^n$-полю добавить такой же $2^n$-поль, но только симметрично сдвинутый на некоторое расстояние и к тому же с противоположными по знаку зарядами. Получится система, состоящая, как принято говорить, из двух противоположных $2^n$-полей. Эта новая система образует мультиполь $(n+1)$-го порядка ($2^{n+1}$-поль).

Рассмотрим несколько примеров.

Точечный заряд $-q$ — мультиполь нулевого порядка. Образуем из него мультиполь первого порядка (2-поль), который принято называть диполем. Сдвинем точечный заряд $-q$ на расстояние $l$ и изменим знак заряда. При этом получим диполь, изображенный на рисунке 2. Его принято характеризовать так называемым дипольным моментом $\mathbf{d} = q\mathbf{l}$; вектор $\mathbf{l}$ направлен от отрицательного заряда к положительному, а его длина равна расстоянию между зарядами.

Вычислим потенциал $\varphi_1$, создаваемый полем диполя в удаленной точке $D$, лежащей на продолжении линии, соединяющей заряды ($AD = r \gg l$):

$$\varphi_1 = \frac{-q}{r} + \frac{q}{r-l} = \frac{q}{r}\left(-1+\frac{1}{1-\frac{l}{r}}\right).$$

Применяя соотношение (1), получим главную часть потенциала, создаваемого диполем:

$$\varphi_{\text{вн}} = \frac{ql}{r^2} = \frac{d}{r^2}. \tag{5}$$

Если точка наблюдения не лежит на линии, соединяющей заряды, то ее положение можно охарактеризовать двумя координатами: расстоянием до одного из зарядов и, например, углом между дипольным моментом и радиусом-вектором, проведенным от положительного*) заряда в точку наблюдения.

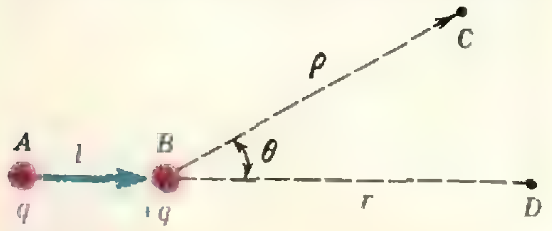


Рис. 2.

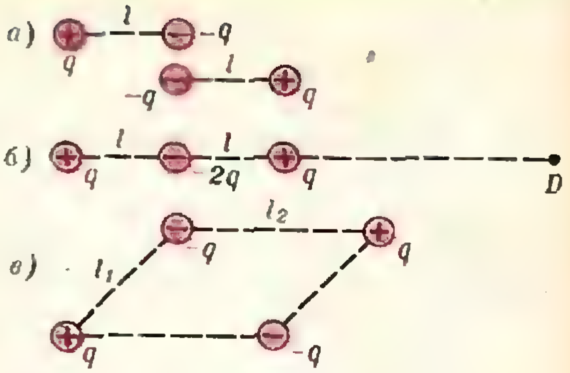


Рис. 3.

На рисунке 2 точка $C$ характеризуется координатами $\rho = BC$ и углом $\theta$. В этом случае расчет потенциала несколько усложняется. Приведем лишь результат:

$$\varphi_1 = \frac{d\cos\theta}{\rho^2}. \tag{5a}$$

Чтобы из диполя — мультиполя первого порядка — образовать мультиполь второго порядка ($2^2$-поль, чаще его называют квадруполем), надо к прежнему диполю добавить такой же диполь, смещенный на некоторое расстояние и изменить в нем знаки зарядов на противоположные. Сделаем это так, как показано на рисунке 3, *а*: сместим диполь на величину его длины $l$. (Смещение можно выполнить и на меньшее расстояние. В этом случае расчеты будут несколько длиннее.)

Если заряды мультиполя расположены на одной оси, то мультиполь называют аксиальным. На рисунке 3, *б* изображен аксиальный квадруполь, получающийся из системы зарядов рисунка 3, *а*, а на рисунке 3, *в* общий случай квадруполя — заряды равной величины и противоположных знаков симметрично расположены в вершинах параллелограмма. Потенциал квадруполя $\varphi_2$,

---

*) В силу того, что $r \gg l$, результат не изменится, если радиус-вектор провести от отрицательного заряда.

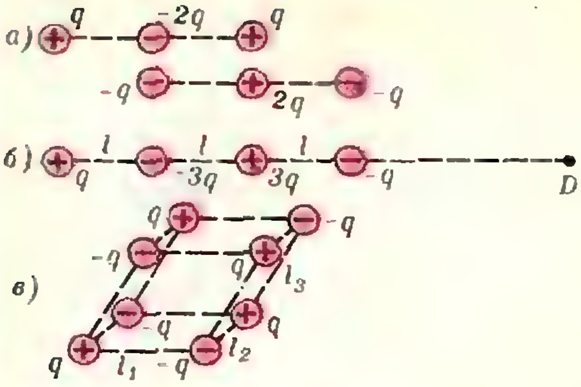


Рис. 4.

согласно формуле (4), должен быть пропорционален $1/r^3$. Следовательно, в разложении (1) достаточно учесть члены суммы лишь до $x^2$.

Определим коэффициент пропорциональности $C_2$ для аксиального квадруполя, изображенного на рисунке 3, *б*. Расчет выполним для удаленной точки $D$, лежащей на оси квадруполя:

$$\varphi_2 = \frac{q}{r} + \frac{(-2q)}{r-l} + \frac{q}{r-2l} \approx$$
$$\approx \frac{q}{r}\left[1 - 2\left(1 + \frac{l}{r} + \frac{l^2}{r^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{2l}{r} + \frac{4l^2}{r^2}\right)\right] = \frac{2ql^2}{r^3}.$$

Образуем теперь мультиполь третьего порядка, называемый обычно октуполем, так как в общем случае в него входит 8 одинаковых по величине зарядов. Для этого дополним аксиальный квадруполь (рис. 3, *б*) симметричным аксиальным квадруполем так, как показано на рисунке 4, *а*. При этом получим аксиальный октуполь (рис. 4, *б*). В общем случае из квадруполя (рис. 3, *в*) получается октуполь, изображенный на рисунке 4, *в*, заряды которого расположены в вершинах параллелепипеда. Потенциал электростатического поля октуполя $\varphi_3$, согласно формуле (4), должен быть пропорционален $1/r^4$. Определим потенциал, создаваемый полем аксиального октуполя в точке $D$:

$$\varphi_3 = \frac{q}{r} + \frac{(-3q)}{r-l} + \frac{3q}{r-2l} + \frac{(-q)}{r-3l} \approx$$
$$\approx \frac{q}{r}\left[1 - 3\left(1 + \frac{l}{r} + \frac{l^2}{r^2} + \frac{l^3}{r^3}\right) + \right.$$
$$+ 3\left(1 + \frac{2l}{r} + \frac{4l^2}{r^2} + \frac{8l^3}{r^3}\right) -$$
$$\left. - \left(1 + \frac{3l}{r} + \frac{9l^2}{r^2} + \frac{27l^3}{r^3}\right)\right] = -\frac{6ql^3}{r^4}.$$

Аналогичным образом вычисляются поля мультиполей более высоких порядков.

Вдали от любой системы электрических зарядов поле этой системы можно представить как результат сложения полей мультиполей различных порядков. Чем выше порядок мультиполя, соответствующего рассматриваемой системе зарядов, тем в целом нейтральнее система, тем быстрее уменьшается поле при удалении от зарядов.

Мы рассмотрели потенциалы электростатических полей, создаваемых аксиальными мультиполями на их оси. Вычисление потенциала в произвольной точке пространства производится таким же образом, но расчеты становятся более громоздкими. Если известен вид потенциала мультиполя $\varphi_n = C_n/r^{n+1}$, то однозначно определяется значение напряженности электрического поля $E$, а следовательно, и силы $F = qE$, действующей со стороны мультиполя на заряд $q$ (смотри § 76 в учебном пособии «Физика-9»). Если $n \geqslant 0$ (что верно для любого мультиполя), то

$$E \sim \frac{1}{r^{n+2}}. \qquad (6)$$

Опуская математические подробности, рассмотрим картины силовых линий диполя и аксиального квадруполя, представленные на рисунках 5, *а* и 5, *б*. На рисунке 5, *а* изображено поле диполя. Полная напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в каждой точке получается путем геометрического сложения поля положительного заряда $\mathbf{E}_+$ с полем отрицательного заряда $\mathbf{E}_-$: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$.

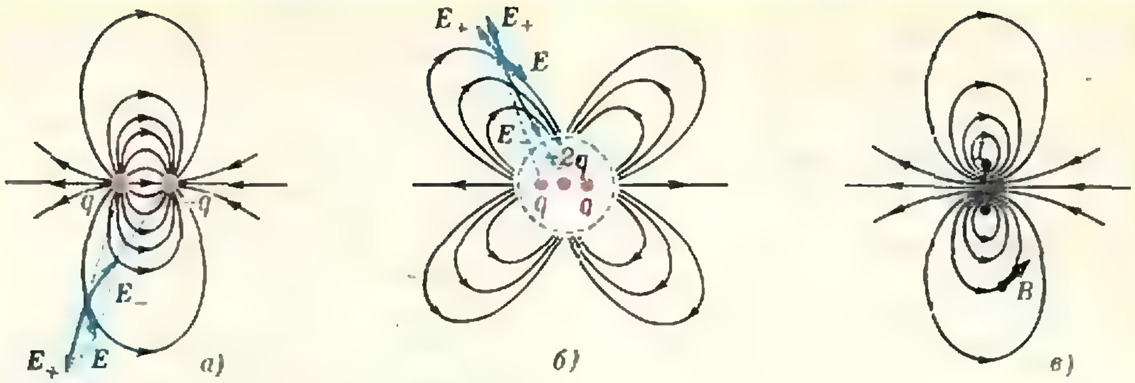


Рис. 5.

На рисунке эти векторы показаны в одной из точек пространства. Аналогичная картина изображена на рисунке 5, *б* для аксиального квадруполя. В каждой точке пространства полное поле $\mathbf{E}$ есть результат суммирования трех векторов: двух векторов напряженности $\mathbf{E}_+$ полей, созданных положительными зарядами, и одного вектора напряженности $\mathbf{E}_-$ поля, созданного отрицательным зарядом, величина которого равна сумме положительных зарядов. Полная картина распределения силовых линий электрического поля в пространстве для диполя и квадруполя получится, если рисунки 5 вращать вокруг соответствующих осей симметрии.

Кроме электрических можно рассматривать также и магнитные мультиполи — системы, состоящие из магнитов или замкнутых токов. Единственное отличие состоит в том, что отдельные магнитные заряды до сих пор не обнаружены, поэтому рассмотрение надо начинать сразу с магнитного диполя. На рисунке 5, *в* показаны линии индукции магнитного диполя, образованного круговым током $I$, плоскость которого перпендикулярна плоскости рисунка. На больших расстояниях от диполей рисунки 5, *а* и 5, *в* имеют одинаковый вид.

Сходство магнитного диполя с электрическим можно проиллюстрировать еще одним примером. Магнитная стрелка компаса — магнитный диполь — ориентируется вдоль линий магнитной индукции. Аналогично в электрическом поле ведет себя и электрический диполь: он также устанавливается вдоль силовых линий, то есть является своеобразным «электрическим компасом» (рис. 6).

Примерами электрических мультиполей могут служить атомы и молекулы. Если при образовании молекулы в результате перераспределения электронов между атомами центры распределения положительных и отрицательных зарядов в ней не совпадают, то молекула обладает собственным дипольным моментом и называется полярной. Молекулы соляной кислоты и воды — полярные (рис. 7). Если в молекуле положительные и отрицательные заряды раздвинуты на расстояние порядка радиуса атома водорода ($l = 0{,}5 \times 10^{-8}$ *см*), то дипольный момент молекулы должен быть порядка $d = el$ *), то есть $d \approx 2{,}4 \cdot 10^{-18}$ *см* × ед. заряда СГСЭ. По порядку величины это согласуется с опытными данными, приведенными на рисунке 7. Если же молекула состоит из одинаковых атомов ($O_2$, $H_2$, $Cl_2$), то электроны, образно говоря, «не знают», какой атом выбрать и располагаются в молекуле более равномерно, что приводит к нулевому значе-

---

*) Заряд электрона $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. заряда СГСЭ.

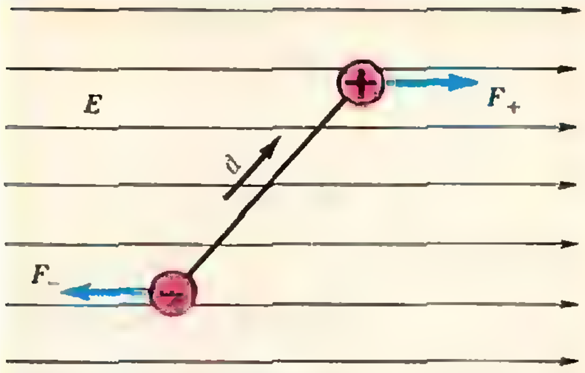


**Рис. 6.**

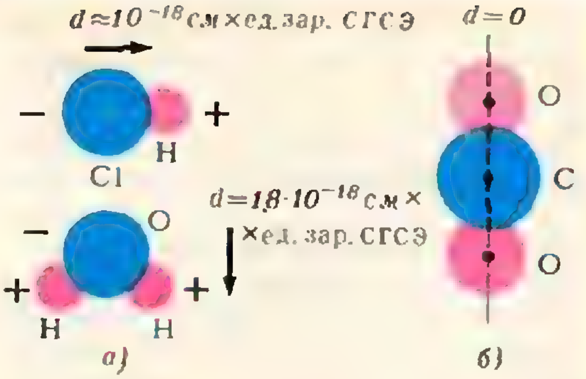


**Рис. 7.**

нию дипольного момента молекулы. Такие молекулы называют неполярными. На рисунке 7 показана линейная молекула углекислого газа $CO_2$, являющаяся неполярной. Даже «внешний вид» этой молекулы наталкивает на предположение, что перераспределение электронов между атомами должно образовать из нее аксиальный квадруполь (сравните с рисунком 3, *б*), а электрическое поле, создаваемое молекулой углекислого газа, должно иметь вид, представленный на рисунке 5, *б*.

Более сложное распределение атомов и электронов в молекулах приводит к образованию мультиполей высших порядков.

## Приложение. Вычисление потенциала электрического поля, созданного точечным зарядом

В учебном пособии «Физика-9» формулы для потенциала поля, созданного точечным зарядом, приведены без вывода (смотри формулы (8.28) и (8.29) на стр. 144). Приведем простой вывод этих формул для вакуума.

Если точечный заряд $q$ находится в точке $O$ (рис. 8), то потенциал $\varphi$ созданного им поля в точке $N$ на расстоянии $r$ от заряда $q$ равен работе $A$, которую совершило бы электрическое поле при перемещении единичного положительного заряда из точки $N$ в бесконечно удаленную точку, в которой $\varphi=0$. Так как работа перемещения не зависит от формы траектории, по которой перемещается заряд, будем считать, что единичный заряд перемещается вдоль силовой линии.

Подсчитаем, чему же равна эта работа? Для этого разобьем весь путь, пройденный единичным положительным зарядом, на очень малые участки $NN_1$, $N_1N_2$, $N_2N_3$ и т. д. (см. рис. 8). На каждом из этих участков вычислим работу перемещения единичного заряда. Сумма этих работ и равна потенциалу поля в точке $N$ по отношению к бесконечности.

Вычислим работу $A_1$ перемещения единичного заряда из точки $N$ в точку $N_1$, отстоящую от $N$ на очень малое расстояние $(r_1-r)$. Как показано в учебном пособии «Физика-9» (см. формулу (8.20)), в однородном электрическом поле напряженностью $E$ работа по перемещению единичного заряда численно равна

$$A=E\,(r_1-r). \qquad (1)$$

Поле точечного заряда, конечно, не является однородным. Его напряженность в точке $N$ равна $E_N=\frac{q}{r^2}$, а в точке $N_1$ $E_{N_1}=\frac{q}{r_1^2}$.

Какое же значение $E$ мы должны подставить в формулу (1)? Очевидно, надо принять такое значение напряженности поля, которое было бы средним между этими двумя значениями. Так как $r$ и $r_1$ мало отличаются друг от друга, то вместо $r^2$ и $r_1^2$ в выражениях для напряженностей $E_N$ и $E_{N_1}$ можно взять произведение $rr_1$, которое немного больше, чем $r^2=rr$, и немного меньше, чем $r_1^2=r_1r_1$. Тогда можно считать, что на всем протяжении участка $NN_1$ напряженность поля определяется формулой

$$E_{NN_1}=\frac{q}{rr_1}.$$

При этом работа $A_1$ будет численно равна

$$A_1=\frac{q}{rr_1}(r_1-r),$$

или

$$A_1=\frac{q}{r}-\frac{q}{r_1}.$$

Точно так же можно вычислить работу перемещения единичного заряда из точки $N_1$ в

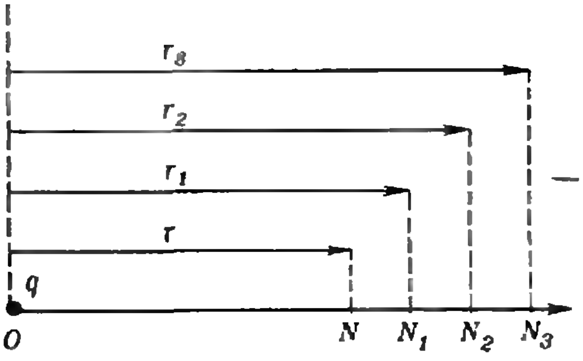


Рис. 8.

точку $N_2$, находящуюся на расстоянии $r_2$ от источника поля:

$$A_2 = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}.$$

Работа перемещения единичного заряда из точки $N$ в точку $N_2$ равна сумме найденных двух работ:

$$A_1 + A_2 = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_2}.$$

Повторив эти рассуждения, мы получим, что работа перемещения единичного заряда из той же точки $N$ в точку $N_3$, отстоящую от источника поля на расстояние $r_3$, численно равна

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_3}.$$

Таким образом, работа перемещения единичного заряда из одной точки поля точечного заряда $q$ в любую другую точку зависит только от расстояний этих точек до заряда $q$. Работа же перемещения единичного положительного заряда из точки $N$ в бесконечность может быть найдена так:

$$A = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_\infty}.$$

Но

$$\frac{q}{r_\infty} = 0.$$

Следовательно,

$$A = \varphi = \frac{q}{r}.$$

В случае, если диэлектрическая проницаемость среды отлична от единицы,

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}.$$

Для тех, кто знаком хотя бы с интегралами от простейших функций, вывод этой формулы становится намного более простым:

$$\varphi = \int_r^\infty E\,dr = \int_r^\infty \frac{q}{\varepsilon r^2}\,dr = \frac{q}{\varepsilon}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{\varepsilon r}.$$

Так как в СИ напряженность поля точечного заряда $q$ равна $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$, то потенциал, рассчитанный аналогичным методом, будет равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}.$$

### Упражнения

1. Нарисуйте аксиальный квадруполь, состоящий из четырех зарядов, и вычислите потенциал на оси в удаленной точке.

2. Нарисуйте аксиальный мультиполь четвертого порядка и найдите потенциал на оси.

*Приложение подготовлено редакцией*

## Задачи наших читателей

1. Доказать, что из любого множества $10^n$ натуральных чисел можно выкинуть одно число, а оставшиеся разбить на подмножества по 3 числа в каждом так, что сумма чисел в каждом подмножестве даст при делении на 3 остаток 0 или 1.

*А. Верховод*
(г. Алма-Ата)

2. Доказать неравенства:

а) $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} > \left|\frac{c}{b} - \frac{c}{a}\right| \times \sqrt{ab}$, где $0 < c < a$, $c < b$;

б) $\sum_{i=1}^{k}[a_{i1}a_{i2}\ldots a_{in}]^{1/n} \leqslant [\prod_{j=1}^{n}(a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{kj})]^{1/n}$, где $a_{ij} \geqslant 0$;

в) $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)\cdot\sqrt{ab} < \sqrt{(a+c)(b+c)} + \sqrt{(a-c)(b-c)} \leqslant 2\sqrt{ab}$, где $0 < c < a$, $c < b$.

*С. Берколайко*
(с. Котово
Старооскольского р-на)

*Л. Цинман*

# «Парадокс исследователя»

При доказательстве утверждений методом математической индукции иногда возникает необычная ситуация. Проиллюстрируем ее на двух примерах.

### Пример 1

Докажем методом математической индукции, что для всех натуральных $n$ справедливо следующее утверждение: *сумма кубов первых $n$ натуральных чисел есть квадрат некоторого натурального числа.*

Обозначим это утверждение через $A(n)$. Доказательства методом математической индукции проводятся, как известно, в два этапа.

а) Базис индукции: $A(1)$. Убеждаемся в справедливости $A(1)$:

$$1^3 = 1^2.$$

б) Индукционный шаг: $A(k) \Rightarrow A(k+1)$. Предположим, что для некоторого натурального числа $k$ справедливо утверждение $A(k)$, и докажем, что тогда справедливо и $A(k+1)$. Итак, пусть нашлось такое натуральное число $p$, для которого

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = p^2. \qquad (1)$$

Докажем, что тогда существует такое натуральное число $q$, для которого

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = q^2. \qquad (2)$$

Из (2) и (1) следует, что нам надо доказать существование такого $q$, для которого

$$(k+1)^3 = q^2 - p^2. \qquad (3)$$

Но как это можно было бы доказать? Естественного пути доказательства не видно.

Итак, попытка доказать наше утверждение непосредственным применением метода математической индукции натолкнулась на трудности при проведении индукционного шага.

Вернемся снова к рассмотрению $A(n)$ и проверим его справедливость для нескольких начальных значений $n$:

$$1^3=1^2;$$
$$1^3+2^3=3^2;$$
$$1^3+2^3+3^3=6^2;$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2;$$
$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=15^2.$$

Присмотревшись к этим равенствам, приходим к гипотезе: для всех натуральных $n$ справедливо утверждение: *сумма кубов первых $n$ натуральных чисел есть квадрат натурального числа, равного сумме этих чисел.*

Обозначим это утверждение через $B(n)$. Конечно, $B(n)$ несет в себе больше информации, чем $A(n)$, и потому его естественно считать более сильным утверждением. Доказав $B(n)$, мы получим справедливость $A(n)$ в качестве очевидного следствия.

Попробуем теперь применить метод математической индукции к доказательству усиленного утверждения.

а) Справедливость $B(1)$ фактически уже установлена:

$$1^3 = 1^2.$$

б) Допустим, что для некоторого натурального числа $k$ справедливо $B(k)$:

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = (1 + 2 + \dots + k)^2. \qquad (4)$$

Докажем, что тогда справедливо и $B(k+1)$:

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = (1 + 2 + \dots + k + k + 1)^2. \qquad (5)$$

Используя равенство (4), можно свести доказательство равенства (5) к доказательству равенства

$$(k+1)^3 = (1+2+\ldots+k+k+1)^2 - (1+2+\ldots+k)^2. \qquad (6)$$

Преобразуем правую часть равенства (6):

$$(1+2+\ldots+k+k+1)^2-(1+2+\ldots+k)^2 = \left[\frac{(k+2)(k+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(k+1)k}{2}\right]^2 = (k+1)^3.$$

Итак, равенство (6) установлено. Тем самым для всех $n$ доказано $B(n)$, а значит, и $A(n)$.

### Пример 2 *)

Однажды учитель задал ученикам на дом такую задачу: доказать, пользуясь методом математической индукции, что для любого натурального числа $n$ верно неравенство $A(n)$:

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Коля В., садясь дома за доказательство этого неравенства, случайно переписал условие неравенства с ошибкой, добавив в знаменателе 1. Таким образом, он принялся за доказательство более сильного неравенства $B(n)$:

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Вот его доказательство.

а) Убеждаемся в справедливости $B(1)$:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

б) Покажем, что из справедливости $B(k)$ для некоторого натурального $k$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2k} < \frac{1}{\sqrt{k+1}} \qquad (7)$$

следует справедливость этого неравенства и для $k+1$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)(2k+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2k\cdot(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{k+2}}. \qquad (8)$$

Для этого достаточно показать справедливость неравенства, полученного почленным делением неравенства (8) на неравенство (7):

$$\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}}.$$

После равносильных преобразований получаем очевидное неравенство: $3k+2>0$. Итак, $B(n)$ доказано для любого натурального $n$.

В школе Колю вызвали к доске для доказательства домашнего неравенства $A(n)$. Только теперь он увидел, что доказывал дома неравенство, более сильное, чем требуемое. Конечно, он мог воспроизвести на доске доказательство неравенства $B(n)$, а справедливость $A(n)$ получить затем в качестве очевидного следствия. Но Коля решил применить свой способ доказательства прямо к $A(n)$.

а) Убеждаемся, что $A(1)$ справедливо:

$$\frac{1}{2} < 1.$$

б) Покажем, что из справедливости $A(k)$ для некоторого натурального $k$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2k} < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

следует справедливость этого неравенства и для $k+1$:

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)(2k+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2k\cdot(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}. \qquad (9)$$

Но неравенство (9) равносильно неверному неравенству $k+1<0$.

---

*) «Квант», 1970, № 7, с. 37 и № 12, с. 58.

Получился абсурд. Более сильное неравенство оказалось и более легким для доказательства.

### «Парадокс исследователя»

Итак, в обоих примерах при использовании метода математической индукции мы столкнулись с тем, что приходится доказывать утверждение более сильное, чем это нужно на самом деле.

Эту необычную ситуацию известный американский математик Д. Пойа в своей популярной книге «Как решать задачу» назвал «inventor's paradox» («парадокс исследователя» или «парадокс изобретателя»).

Возникает вопрос: действительно ли существуют такие парадоксальные ситуации? Быть может, в обоих приведенных примерах, потрудившись еще немного, мы бы нашли доказательство интересующего нас утверждения, не прибегая к рассмотрению более сильного утверждения?

Конечно, прежде чем искать ответ на этот вопрос, нужно более точно описать, в чем заключается парадоксальность ситуации.

Предлагается такое определение: два утверждения $A(n)$ и $B(n)$ назовем *парадоксальной парой*, если они удовлетворяют следующим условиям:

1. $A(n)$ является очевидным следствием $B(n)$;
2. $A(1)$; $B(1)$, $B(k) \Rightarrow B(k+1)$ могут быть доказаны без использования метода математической индукции;
3. $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ нельзя доказать без использования этого метода.

Теперь поставленный вопрос можно сформулировать так: *существуют ли парадоксальные пары?*

Действительно, пусть два утверждения $A(n)$ и $B(n)$ составляют парадоксальную пару и нам требуется доказать справедливость утверждения $A(n)$ для всякого $n$. Если мы попробуем применить метод математической индукции непосредственно к $A(n)$, то наткнемся на трудности: при проведении индукционного шага нам предстоит по крайней мере еще раз обратиться к этому методу (см. пункт 3 определения). В то же время, прибегнув к помощи $B(n)$, мы быстро достигнем цели: сначала методом математической индукции устанавливаем справедливость $B(n)$ (см. пункт 2 определения), а затем из $B(n)$ выводим $A(n)$ (см. пункт 1 определения).

Итак, существуют ли парадоксальные пары?

### Что такое доказательство?

Давайте теперь подумаем, можем ли мы в принципе про какую-нибудь пару конкретных утверждений $A(n)$, $B(n)$ доказать, что они образуют парадоксальную пару. Главную трудность представляет пункт 3 определения. Каким образом можно было бы убедиться, что для некоторого утверждения не существует доказательства, обладающего требуемым свойством? Чтобы установить, что доказательства не существует, по-видимому, надо знать, что такое *доказательство*. Нельзя же показать, что «нет того, не знаю чего».

Итак, что же такое «доказательство»? И тут нам неожиданно приходится констатировать, что мы этого не знаем, что у нас нет никакого определения для этого важнейшего понятия. В математике, строящейся в том виде, к которому мы привыкли, с понятием доказательства оперируют на интуитивном уровне: *доказательство — это рассуждение, которое убеждает*. Пока математикам приходилось решать только вопросы типа, является ли то или иное предъявленное рассуждение *доказательством*, этого интуитивного уровня хватало. Однако его принципиально не хватает, когда надо доказать, что некоторого *доказательства* **не существует вообще.**

Здесь искушенный читатель, возможно, захочет возразить. Позвольте, скажет он, а как же, например, удается показать, что некоторая геометрическая задача на построение не может быть решена с помощью циркуля и линейки? В чем же разница?

А разница в том, что в задачах на построение речь идет не о построениях *вообще*, а о построениях *только с помощью циркуля и линейки*. Таким образом, мы точно формулируем средства, которые собираемся использовать для решения. А в таком случае появляется возможность как-то описать класс задач, которые решаются этими средствами. Поэтому, когда нам предлагают конкретную задачу на построение, мы можем попытаться установить, принадлежит она этому классу или нет.

На рубеже XIX и XX веков был предложен такой способ построения математики, который позволял определить понятие доказательства вполне точно. Различные разделы математики строятся при этом способе в виде *формальных систем*.

Здесь мы не будем пытаться точно объяснить, что такое формальная система. Скажем только, что в формальных системах содержательные математические утверждения записываются в виде *формул*, которые строятся по точным правилам. Формула называется *доказуемой*, если она может быть выведена из *аксиом* (аксиомы — это заранее фиксированные исходные формулы) за конечное число шагов с помощью фиксированных заранее *правил вывода*. Это и есть упомянутое уточнение понятия доказательства.

Изучением формальных систем занимается математическая логика *). В этой статье не место писать о ней. Подчеркнем только, что решение вопроса о парадоксальных парах, а также многих других более важных вопросов (например, о непротиворечивости того или иного раздела математики или о независимости некоторой аксиомы) зачастую возможно лишь после предварительной формализации.

## Теорема

В рамках арифметики натуральных чисел, заданной в виде формальной системы, можно ответить на поставленный выше вопрос. Существует несколько — по существу, равносильных — формальных арифметических систем. Пусть $S$ — одна из этих систем. Автором статьи получен следующий результат.

Теорема. *В системе $S$ имеются парадоксальные пары.*

В пункте 1 определения парадоксальной пары требуется, чтобы $A(n)$ было *очевидным следствием* $B(n)$. Понятие очевидного следствия, естественно, тоже требует уточнения. В доказательстве сформулированной теоремы некоторая конкретная конъюнкция $B(n)$ образует парадоксальную пару с любым ее членом.

Конъюнкция нескольких утверждений соответствует сложно-сочиненному предложению, составленному из этих утверждений с помощью союза «и». Таким образом, конъюнкция нескольких утверждений справедлива тогда и только тогда, когда справедливо каждое из этих утверждений. Поэтому естественно считать, что каждый член конъюнкции является ее очевидным следствием.

Сформулированная теорема показывает, что в формальной арифметической системе действительно можно столкнуться с «парадоксом исследователя». Это надо учитывать и при содержательных рассуждениях, использующих метод математической индукции.

---

*) Школьнику, желающему познакомиться с математической логикой, мы рекомендуем книги Р. Р. Столла «Множества. Логика. Аксиоматические теории» (М., «Просвещение», 1968), Э. Мендельсона «Введение в математическую логику» (М., «Наука», 1971) и П. С. Новикова «Элементы математической логики» (М., «Наука», 1973).

*Я. Смородинский*

# Сверхтяжелые элементы — открытие или ошибка?

В середине июня 1976 года в газетах разных стран появились сообщения о том, что группа американских ученых, в которую входили физики, химики и геологи, обнаружила в микроскопических кристаллах монацита следы сверхтяжелых элементов, которые должны стоять в таблице Менделеева на 116, 124 и 126 местах! Корреспонденты ссылались на выступление Поля Дирака, одного из создателей квантовой механики, во время научной конференции. 5 июля в американском журнале «Physical Review Letters» появилась научная статья об этом открытии.

Но можно ли верить сразу этому сообщению? Ведь безуспешные поиски сверхтяжелых элементов ведутся давно, и надо очень тщательно проверить всевозможные интерпретации полученных результатов, чтобы наступила полная уверенность в подлинности открытия.

История, которая разворачивается сейчас на наших глазах, очень хорошо иллюстрирует, как трудно доказать достоверность научного открытия, которое сделано на самой границе чувствительности современной физической аппаратуры.

Пройдет еще некоторое время, пока можно будет окончательно ответить на вопрос «открытие или ошибка?». Сейчас же мы можем лишь рассказать о том, в чем состоит сама проблема и что позволило экспериментаторам заподозрить существование новых элементов в их образцах породы.

## Конец таблицы Менделеева

В таблице Менделеева в клетке под номером 92 стоит последний элемент, который можно найти в природе — уран.

Физики получили в лабораториях много новых элементов — список их теперь простирается более чем на 10 клеток дальше урана. Элементы 93 (нептуний) и 94 (плутоний), которые получаются из урана после захвата нейтрона и последующего β-распада, были получены в первые годы развития атомной энергетики. Последующие элементы получались либо после многократных захватов нейтронов образцами, помещенными в атомные реакторы, либо при бомбардировке тяжелых элементов более легкими ядрами при помощи ускорителей. Физики надеются, что в ближайшие годы можно будет даже посмотреть, что произойдет, когда столкнутся два ядра урана.

Почему же обрывается таблица Менделеева? В тяжелых ядрах слишком велик электрический заряд, в них слишком много протонов. Электрические силы отталкивания так велики, что ядро самопроизвольно делится. Конечно, между всеми частицами ядра действуют ядерные силы, которые удерживают их от разлета, но все же у ядер с большим числом протонов электрическое отталкивание оказывается сильнее.

## «Магические числа»

Давно было обнаружено, что когда число нейтронов или протонов в ядре оказывается равным одному из так называемых «магических» чисел, например, 20, 56, 82, то такие ядра оказываются более устойчивыми, чем их соседи. Из теоретических соображений следовало, что «магическими» должны быть и числа 114 и 126. Поэтому некоторые ученые считали возможным существование очень устойчивых ядер с такими зарядами, несмотря на то, что ядра с меньшими зарядами распадаются очень быстро.

Конечно, устойчивость таких ядер не абсолютная, как, например, у ядер железа или золота. Но если физикам повезет и время жизни таких ядер окажется порядка миллиарда лет, их можно даже поискать в природе, например, в каких-нибудь старых минералах.

Но как они могли бы туда попасть?

Наши взгляды на происхождение элементов связаны с представлением о постепенном возникновении все более и более тяжелых элементов в результате захвата нейтронов. Такие процессы происходили на раннем этапе развития Вселенной и, может быть, происходят и сейчас в ядрах галактик и в недрах звезд. Но последовательный захват нейтронов не может превратить ядро урана в сверхтяжелое ядро с зарядом 114 или 126 — таким путем нельзя перескочить через область элементов с порядковыми номерами 100—110, нельзя навести мост между «материком» обычных ядер и «островом стабильности». Если, тем не менее, ядра с острова стабильности будут обнаружены, то вопрос о том, как возник такой остров, станет весьма актуальным.

## Эксперимент

Именно поэтому существование сверхтяжелых элементов в природе встречает скептическое отношение со стороны многих ученых. Однако, никто не может доказать, что их в природе нет. Нужны опыты.

В опытах, о которых говорилось вначале, сверхтяжелые элементы искали в очень старых образцах слюды, содержащих включения микрокристаллов монацита. В этих микрокристаллах находились ядра радиоактивных тория и урана. Альфа-частицы, вылетающие из этих ядер, застревали в слюде, создавая сферические гало (темные сферы), проходящие через места, где они нанесли атомам слюды наибольшие повреждения. Некоторые гало имели радиус больший, чем обычно, что указывало на вылет альфа-частиц большой энергии (до 14 миллионов электрон-вольт). В этих местах и были предприняты поиски новых элементов.

В циклотроне создавался очень тонкий пучок протонов с энергией 4,7—5,7 миллионов электрон-вольт, диаметром $\sim$ 30 *мкм*. Этим пучком обстреливалось место, где надеялись обнаружить атомы сверхтяжелых элементов — центр гало. Протоны должны выбивать из внутренних оболочек этих атомов электроны. При этом на освободившиеся места переходили бы электроны более дальних от ядра слоев, излучая рентгеновские лучи. Зная энергию рентгеновских лучей, можно было вычислить заряд ядра.

Полученные таким путем рентгеновские лучи указывали на присутствие в образцах элементов 116*) и 126 (и менее четко 124). Но интенсивность рентгеновских лучей была крайне невелика, и необходимы новые еще более точные опыты, «которые должны подтвердить или опровергнуть указание на сверхтяжелые элементы» (это цитата из статьи).

Если считать интерпретацию опытов правильной, то можно оценить, что в образцах находилось несколько сот пикограммов (1 *пг* $= 10^{-12}$ *г*) сверхтяжелых элементов. И тогда мы скоро узнаем о свойствах этих новых элементов.

---

*) А не 114, как это предсказывали теоретики

*В. Ярмоленко*

# Складывание фигур

Будем рассматривать плоские фигуры, ограниченные замкнутой линией, не имеющей самопересечений.

В этой статье конгруэнтные фигуры отождествляются (не различаются), т. е. множество фигур, конгруэнтных данной фигуре, считается одной фигурой. Для классов конгруэнтных между собой фигур можно было бы ввести какой-нибудь новый термин, например назвать такие классы «абстрактными фигурами». Однако, поскольку в статье будут рассматриваться только «абстрактные фигуры», мы будем их называть просто *фигурами*. Обозначим множество рассматриваемых фигур через $\Gamma$. Таким образом, в $\Gamma$ входит ровно один треугольник со сторонами 3, 4 и 5 (ведь все такие треугольники конгруэнтны!), ровно один круг радиуса 17 и т. д.

Если фигура $A$ имеет ось симметрии, то эта ось разбивает фигуру на две конгруэнтные части. Назовем каждую из этих частей *результатом складывания* фигуры $A$ (по рассматриваемой оси). Результат складывания может в свою очередь иметь ось симметрии. Таким образом, исходная фигура может, вообще говоря, допускать многократное складывание.

Существуют фигуры, допускающие бесконечное складывание. Такими фигурами являются, например, круг, сектор круга, круговая трапеция (фигура, ограниченная дугами концентрических окружностей и соответствующими отрезками радиусов), равнобедренный прямоугольный треугольник и прямоугольник. Впрочем, слово «например» является в предыдущей фразе излишним: можно доказать, что других фигур, допускающих бесконечное складывание, в $\Gamma$ нет (бесконечная полоса, ограниченная параллельными прямыми, не входит в $\Gamma$!).

Обозначим через $A^\triangledown$ множество всех фигур, либо конгруэнтных фигуре $A$, либо получающихся из фигуры $A$ в результате одного или нескольких складываний.

Если фигура $A$ не имеет оси симметрии, то множество $A^\triangledown$ состоит только из самой фигуры $A$.

Если $A$ — круг, то $A^\triangledown$ состоит из самого круга $A$ и его секторов с центральными углами $\frac{2\pi}{2^n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Если $A$ — ромб, не являющийся квадратом, то $A^\triangledown$ состоит из четырех фигур. На рисунке 1 изображено это множество; стрелками указан порядок складывания. Результаты складывания фигур $B$ и $D$ совпадают. Заменим каждую из фигур множества $A^\triangledown$ точкой, обозначенной той же буквой, что и сама фигура. Точку, соответствующую фигуре, соединим отрезком с точкой, соответствующей результату складывания этой фигуры, причем первую точку поместим выше второй. На рисунке 2 изображена полученная диаграмма.

Подобную *диаграмму складывания* можно построить для любой фигуры. Диаграмма складывания делает наглядной «степень симметричности» фигуры.

На рисунке 3 изображены фигура $A$ и ее диаграмма складывания. В результате складывания фигуры $A$ могут быть получены две неконгруэнтные фигуры $B$ и $K$; поэтому на диаграмме складывания из точки $A$ исходят два отрезка. В результате складывания неконгруэнтных фигур $C$ и $L$ получается фигура $D$; поэтому на диаграмме складывания отрезки

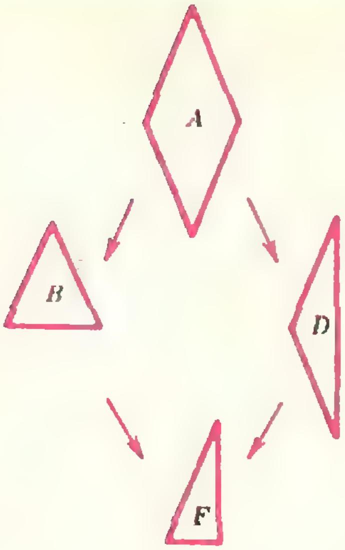


Рис. 1

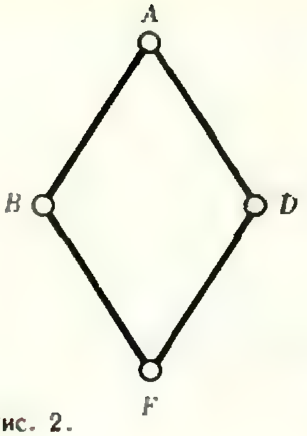


Рис. 2.

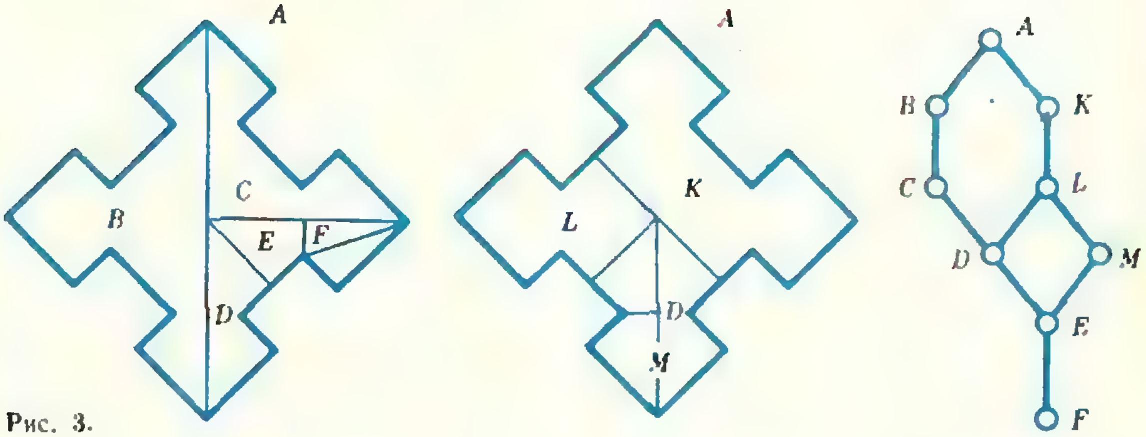

A
C
B
E
F
D
A
K
L
D
M
A
B
K
C
L
D
M
E
F

Рис. 3.

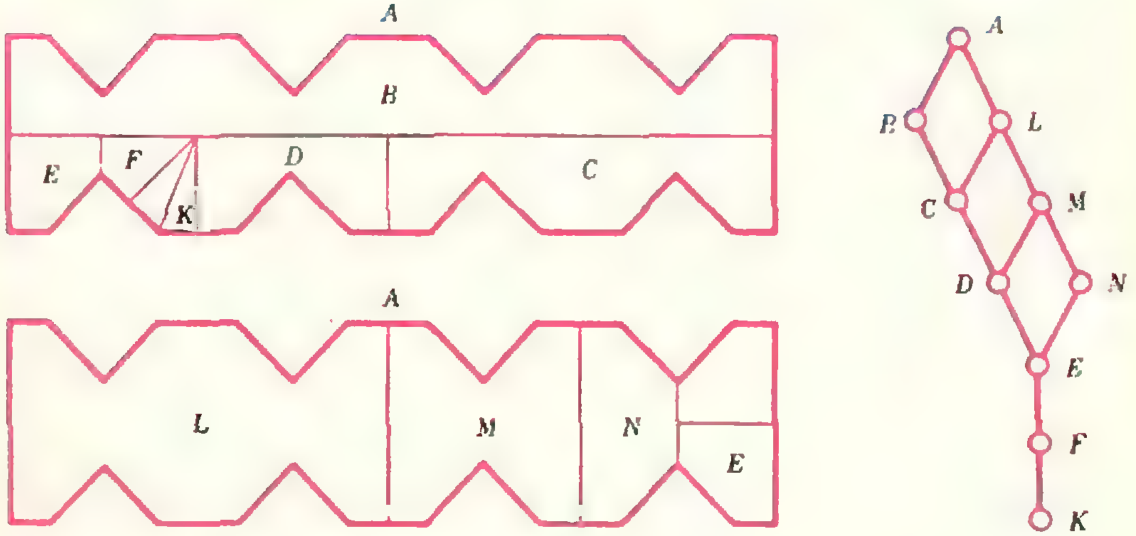

A
B
E
F
D
C
K
A
L
M
N
E
A
B
L
C
M
D
N
E
F
K

Рис. 4.

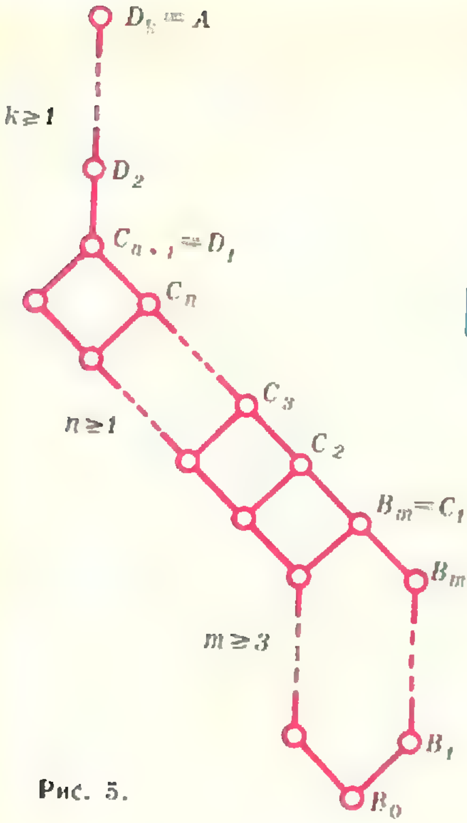

$D_k = A$
$k \geq 1$
$D_2$
$C_{n+1} = D_1$
$C_n$
$C_3$
$n \geq 1$
$C_2$
$B_m = C_1$
$B_{m-1}$
$m \geq 3$
$B_1$
$B_0$

Рис. 5.

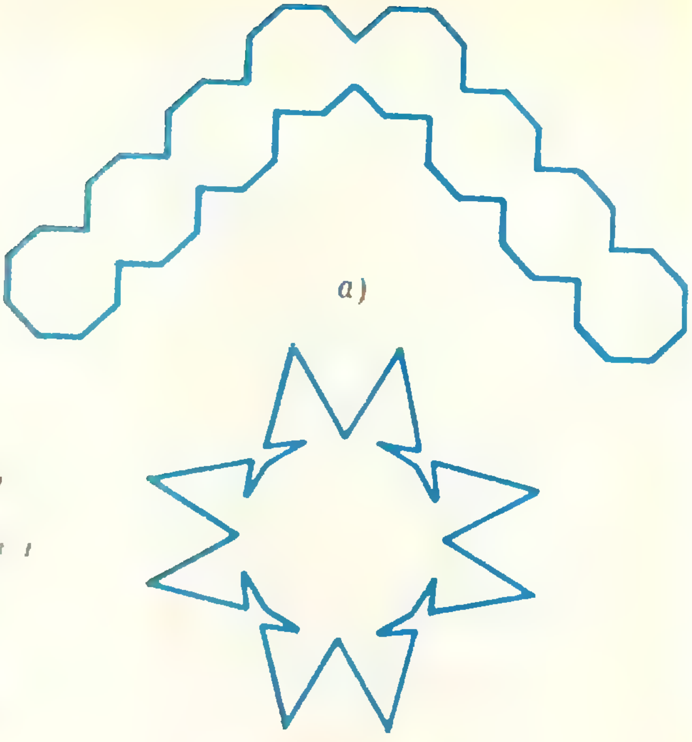


Рис. 6. б)

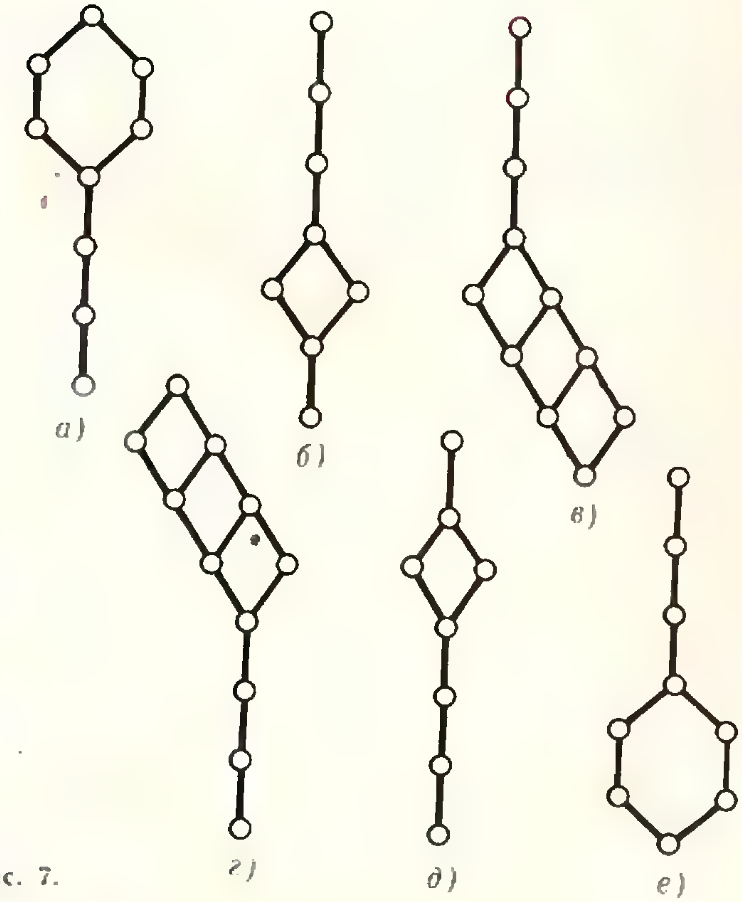

а) б) в) г) д) е)

Рис. 7.

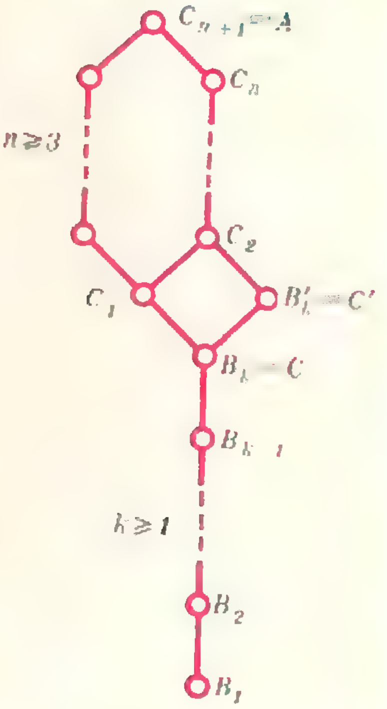

$C_{n+1} = A$
$C_n$
$n \geq 3$
$C_2$
$C_1$
$B'_k = C'$
$B_k = C$
$B_{k-1}$
$k \geq 1$
$B_2$
$B_1$

Рис. 8.

из точек $C$ и $L$ входят в точку $D$.

На рисунке 4 изображены еще одна фигура $A$ и ее диаграмма складывания.

Поставим теперь обратную задачу: дана диаграмма (вроде тех, которые изображены на рисунках 2—4; мы не уточняем понятия диаграммы); найти фигуру, диаграммой складывания которой будет данная диаграмма.

Для решения таких задач полезно ввести понятие раскладывания: назовем фигуру $A$ *результатом раскладывания* фигуры $B$ по прямой $l$, если фигура $B$ является результатом складывания фигуры $A$ по этой прямой.

Построение фигуры $A$ по диаграмме рисунка 3 можно осуществить раскладыванием прямоугольного треугольника $F$ с острым углом 22,5° последовательно по соответствующим прямым в фигуры $F$, $D$, $C$, $B$, $A$. Фигуру $A$ из треугольника $F$ можно получить еще двумя «цепочками раскладываний» (см. диаграмму).

Для диаграммы, изображенной на рисунке 5, аналогичная задача решается следующим образом (сделайте чертеж!). Возьмем в качестве $B_0$ разносторонний выпуклый четырехугольник $MNPQ$, у которого $\hat{M}=\frac{\pi}{2^{m-1}}$, $\hat{N}=\frac{\pi}{2}$, $\hat{Q}<\frac{\pi}{2}$; разложим его последовательно $m$ раз по прямым $c_1 \supset \supset MN$, $c_2, \ldots, c_m$, проходящим через $M$, в фигуры $B_1$, $B_2$, ..., $B_m$; фигура $B_m= = C_1$ — выпуклый многоугольник с центром симметрии $M$, противоположные стороны которого параллельны. Разложим теперь $C_1$ последовательно $n$ раз по параллельным прямым $a_1 \perp \perp c_1$, $a_2$, ..., $a_n$ в фигуры $C_2$, $C_3$, ... ..., $C_{n+1}$. В многоугольнике $C_{n+1}=D_1$ фиксируем такие соседние стороны $l$, $l_1$, что $l \perp c_1$; разложим его последовательно $k-1$ раз по параллельным прямым $b_1 \supset l_1$, $b_2$, ..., $b_{k-1}$ (такие прямые найдутся, так как сторона $l_1$ многоугольника $D_1$ параллельна его противоположной стороне) в фигуры $D_2$, $D_3$, ..., $D_k$. Многоугольник $D_k = A$ — искомый.

Для каждой конкретной «обратной задачи» трудность состоит в нахождении начальной фигуры для раскладывания.

### Задачи

**1** Докажите, что треугольник только тогда допускает бесконечное складывание, когда он — равнобедренный прямоугольный

**2** Докажите, что четырехугольник только тогда допускает бесконечное складывание, когда он — прямоугольник

**3** Докажите, что многоугольник только тогда допускает бесконечное складывание, когда он — треугольник или четырехугольник (*Указание* При $n>4$ всякое складывание $n$-угольника приводит к многоугольнику с меньшим числом сторон )

**4** Постройте диаграммы складывания круга, сектора круга, круговой трапеции и равнобедренного прямоугольного треугольника

**5** Постройте диаграмму складывания прямоугольника, если отношение длин его сторон а) равно $2^i$ ($i=0, 1, 2, 3,$ ), б) не равно $2^i$

**6** Постройте диаграммы складывания фигур, изображенных на рисунке 6

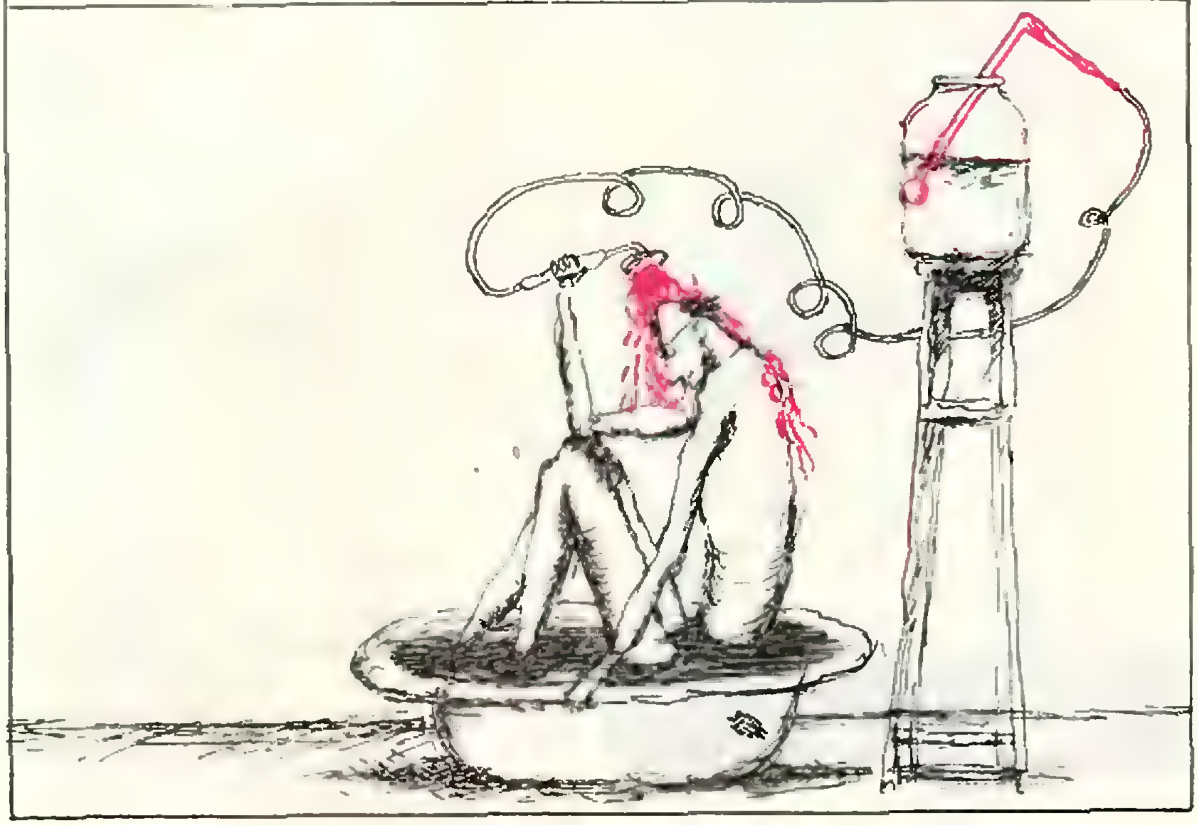
**7** Докажите, что любой треугольник допускает бесконечное раскладывание

**8** Найдите фигуры, диаграммы складывания которых имеют вид, указанный на рисунках 7 и 8

**Лаборатория «Кванта»**

# АВТОМАТИЧЕСКИЙ СИФОН

*В. Майер,*
*Н. Назаров*



С работой сифона — простейшего устройства для перекачки жидкостей — вы познакомились еще в шестом классе. Рассказывают, что знаменитый американский физик Роберт Вуд еще мальчишкой начинал свои увлекательные эксперименты именно с сифона.

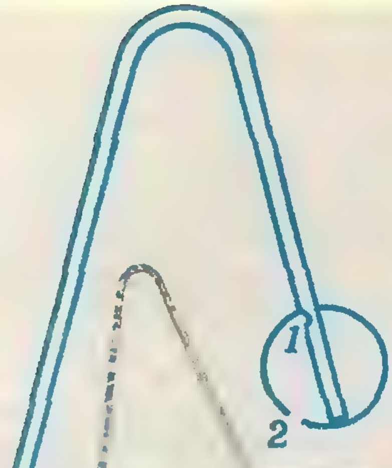
«Вокруг лужи было возвышение больше чем на фут, и все хорошо знали, что вода не течет в гору. Роб положил шланг на землю, велел одному из мальчиков заткнуть конец пальцем, а сам начал наливать воду в другой, пока весь шланг не наполнился. Уже тогда, по природе своей — демонстратор, Роб взял этот конец и вместо того, чтобы просто положить его на землю, перекинул шланг через высокий забор, который отделял дорогу от канавы. Вода потекла через сифон. Это, вероятно, была первая публичная научная победа Вуда» *).

Обычный сифон настолько прост, что, казалось бы, не нуждается в усовершенствованиях. Однако его недостатком является необходимость удалять воздух из колен сифона перед

---

*) В. Сибрук. Роберт Вуд. М., «Физматгиз», 1960.

Рис. 1.



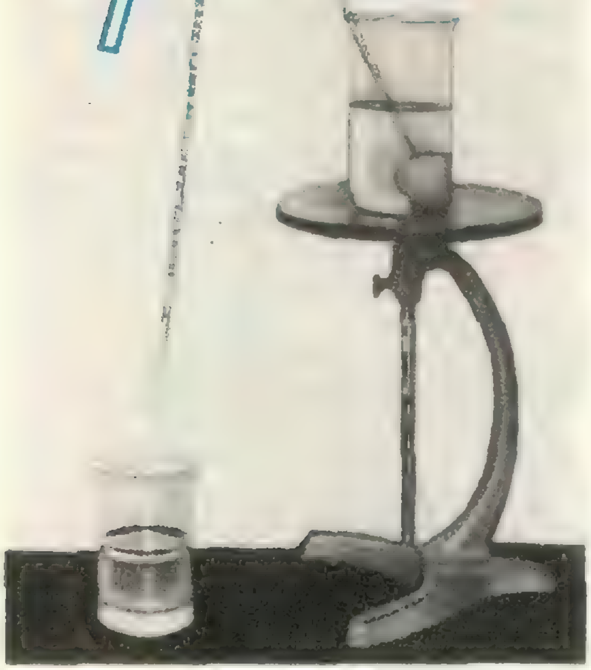


Рис. 2.

тем, как он начнет работать. Просто поразительна изобретательность человеческого ума, который, уяснив для себя суть этого недостатка, сумел устранить его примитивнейшими средствами!

Мы расскажем вам об автоматическом сифоне *). Стеклянную трубку длиной около 60 *см* и внутренним диаметром 3—4 *мм* над пламенем изогните так, чтобы образовались два колена, одно из которых имеет длину порядка 25 *см* (рис. 1). В этом колене на расстоянии 33—35 *мм* от его конца ребром надфиля (смоченного водой) аккуратно пропилите небольшое отверстие (*1*). Площадь его должна быть не более 0,5—1 *мм*$^2$. В стенке шарика для пинг-понга шилом проколите отверстие и круглым надфилем расширяйте его до тех пор, пока стеклянная трубка не будет с трением входить в него. Проденьте трубку в сделанное отверстие так, чтобы ее конец уперся в диаметрально противоположную точку стенки шарика. При этом отверстие в стеклянной трубке должно оказаться внутри шарика вблизи его поверхности (см. рис. 1). Соединение стеклянной трубки с шариком должно быть герметичным. Если вы немного ошиблись и сделали отверстие в шарике слишком большого диаметра, место соединения обмажьте пластилином. В шарике вблизи конца трубки, упирающегося в его стенку, проколите еще одно отверстие (*2*). Его первоначальный диаметр должен быть примерно равен 1 *мм*.

Быстро опустите колено сифона с шариком на его конце в стакан с водой. Почти сразу в этом колене появляется поднимающийся вверх столб воды, разделенный пузырьками воздуха. Он доходит до места перегиба сифона, опускается по второму колену вниз (рис. 2) и спустя небольшое время из отверстия второго колена начинает бить сплошная струя!

Если опыт не получается, нужно просто тщательно отладить прибор. Работа автоматического сифона зависит от правильного подбора площадей отверстий в стеклянной трубке и шарике. Неудачное расположение стеклянной трубки относительно шарика или недостаточная герметичность соединения шарика с трубкой также могут привести к плохой работе сифона. Диаметр отверстия в шарике можно постепенно увеличивать надфилем, добиваясь наилучших результатов. После наладки прибора шарик можно приклеить к стеклянной трубке клеем БФ-2.

---

*) Автоматический сифон изобретен С. Д. Платоновым и описан в журнале «Заводская лаборатория», № 6 (том 4), 1935.

Как работает автоматический сифон? Обратимся снова к рисунку 1. Когда шарик опускают в стакан с водой, вода начинает заходить внутрь его через отверстие *2*. Одновременно вода поднимается и по стеклянной трубке, попадая в нее через открытый конец трубки. Скорость подъема воды в трубке больше, чем в шарике. Столб воды, поднявшийся по трубке до отверстия *1* в ее стенке, как бы перекрывает его. По мере заполнения шарика водой давление воздуха в шарике увеличивается. В какой-то момент в отверстие *1* трубки «проталкивается» маленький воздушный пузырек. Он отсекает небольшой столбик воды и поднимает его вверх. Поднимающаяся по трубке вода вновь перекрывает отверстие *1*, и снова сжатый воздух проталкивается в виде пузырька в это отверстие и отсекает новую порцию воды. Таким образом, в колене трубки с шариком образуется воздушно-водяной столб, средняя плотность которого меньше плотности воды. Под действием гидростатического давления этот столб поднимается до перегиба трубки, спускается по второму колену и, когда шарик полностью заполнится водой, «вытягивает» за собой сплошной поток воды. Сифон начинает работать.

### Упражнения

1. Экспериментально покажите, что в шарик вода должна затекать медленнее, чем в стеклянную трубку. Объясните, почему так происходит.

2. Чтобы убедиться в правильности объяснения принципа действия автоматического сифона, замените непрозрачный шарик небольшим стеклянным пузырьком с резиновой пробкой. В целом все устройство с пузырьком должно быть точно таким же, как и при использовании шарика. Стеклянную трубку воткните в пузырек через отверстие в резиновой пробке. Прозрачные стенки пузырька позволят вам наблюдать процесс образования воздушно-водяного столба в стеклянной трубке.

3. Выясните, зависит ли высота подъема воздушно-водяного столба от глубины погружения в воду колена сифона с шариком.

4. Изготовьте автоматический сифон, заменив стеклянную трубку резиновой.

## Задачи наших читателей

1. На плоскости на прямой $p$ задан отрезок $AB$ длины $l$. Его можно перемещать по плоскости, но так, чтобы:

1) в любой момент он был параллелен прямой $p$;

2) траектории точек $A$ и $B$ не пересекались;

3) в конечном положении отрезок снова попал на прямую $p$.

Насколько далеко может сместиться по прямой $p$ этот отрезок?

*В. Измайлов*
*(г. Тюмень)*

2. Решить уравнения ($\overline{xyz}$ — число, записанное цифрами $x$, $y$, $z$ и т п.):

а) $(x+y+z)^3=\overline{xyz}$;

б) $(x+y+z+u)^3=\overline{xyzu}$;

в) $(x+y)^3=\overline{xyx}$;

г) $\left(\dfrac{x+y+z}{2}\right)^3=\overline{xyz}$.

*И. Михалкович*
(Минская обл.)

3. $a$, $b$, $c$ — действительные положительные числа.

а) Доказать, что

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leqslant a^a b^b c^c.$$

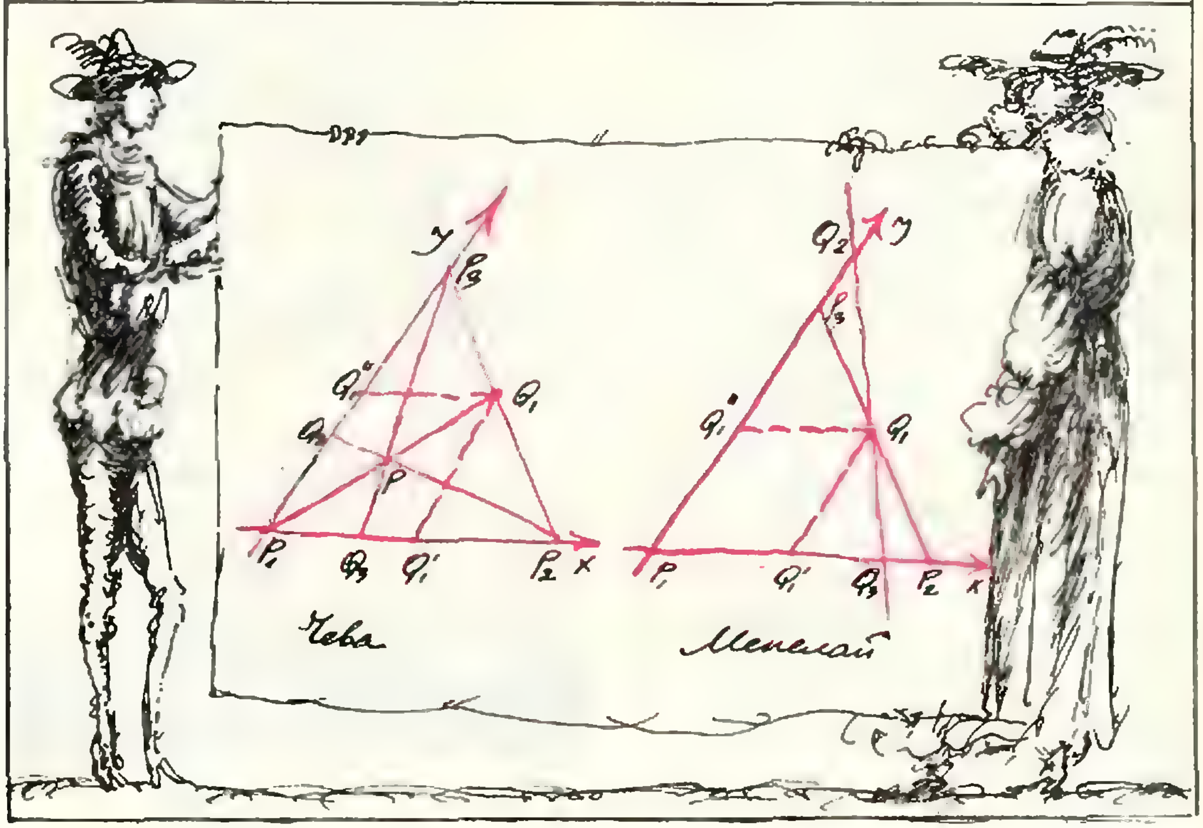
б) $a<b<c$. Доказать, что

$$a^c b^a c^b < a^b b^c c^a < a^a b^b c^c.$$

*Р. Шейнцвит*
(г. Киев)

И. Шарыгин

# ТЕОРЕМЫ ЧЕВЫ И МЕНЕЛАЯ



Геометрия начинается с треугольника. Взяв школьный учебник по геометрии, мы увидим, что первые содержательные теоремы касаются именно треугольника. Все предыдущее — лишь аксиомы, определения или простейшие из них следствия. На заре своего возникновения планиметрия по существу и была «геометрией треугольника».

«Геометрия треугольника» может гордиться теоремами, носящими имена Эйлера, Торричелли, Лейбница. На рубеже XIX—XX веков благодаря большому количеству работ посвященных треугольнику, образовался даже целый раздел планиметрии, названный «Новой геометрией треугольника». Многие из этих работ сейчас выглядят малоинтересными, несовершенными; используемая в них терминология полузабыта и встречается разве что в энциклопедиях. Однако некоторые теоремы «Новой геометрии» продолжают жить и по сей день. О двух таких теоремах — Чевы и Менелая — рассказывается в этой статье *).

Теоремы Чевы и Менелая можно назвать «двойственными» теоремами: они похоже формулируются (причем каждая теорема выступает как бы в двух обличьях) и доказываются, они взаимозаменяемы при решении задач. Теоремы Чевы и Менелая оказываются особенно полезными в тех случаях, когда нужно «выяснить отношения» между точками и прямыми, — например, доказать, что какие-то три прямые пересекаются в одной точке, три точки лежат на одной прямой и т. п.

---

*) Желающих познакомиться с геометрией треугольника более подробно мы отсылаем к книге С. И. Зетеля «Новая геометрия треугольника» (М., Учпедгиз, 1962).

Что вы знаете о медианах, высотах, биссектрисах треугольника? Наверное, каждый из вас, подумав, сможет доказать, что, например, биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и высоты — тоже, и медианы (теоремы о биссектрисах и медианах треугольника, конечно же, есть в школьных учебниках по геометрии)... Однако доказательства этих теорем не так-то уж просты. Оказывается, любое из этих утверждений легко получить, если знать... теорему Чевы.

### Обозначения и формулировки теорем

Нам понадобятся векторы; мы будем обозначать их, как обычно: либо маленькими латинскими буквами со стрелочкой сверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}_1$, ..., либо двумя большими буквами со стрелочкой: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1}$ и т. д. Под *углом* $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ *между двумя векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ мы будем понимать угол, на который нужно повернуть вектор $\vec{a}$ в положительном направлении (против хода часовой стрелки) до совпадения с направлением вектора $\vec{b}$ (рис. 1). Положим для определенности, что $0 \leqslant \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) < 2\pi$*). Из этого определения и свойств функции $y = \sin x$ сразу следует, что

$$\sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = -\sin \measuredangle(\vec{b}, \vec{a}).$$

Рассмотрим два треугольника: $ABC$ (обозначим его через $\Delta$) и $A_1B_1C_1$, вершины $A_1$, $B_1$ и $C_1$ которого лежат на прямых $BC$, $AC$ и $AB$ соответственно; обозначим треугольник $A_1B_1C_1$ через $\Delta_1$. Легко видеть, что векторы $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{C_1B}$ коллинеарны; точно так же коллинеарны и векторы $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{B_1A}$. Введем для коллинеарных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ величину $\left\{\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}\right\}$, равную отношению длин векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, взятую со знаком «+», если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, и со знаком «—» в противном случае. Определим теперь для треугольников $\Delta$ и $\Delta_1$ величину $R(\Delta, \Delta_1)$:

$$R(\Delta, \Delta_1) = \left\{\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\right\} \cdot \left\{\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\right\} \cdot \left\{\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\right\}. \qquad (1)$$

Пусть далее $\omega$ — тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, коллинеарных векторам $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ (сторонам треугольника $ABC$), $\omega_1$ — тройка векторов $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$ и $\vec{c}_1$, коллинеарных векторам $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$. Определим для $\omega$ и $\omega_1$ величину $R^*(\omega, \omega_1)$:

$$R^*(\omega, \omega_1) = \frac{\sin \measuredangle(\vec{b}, \vec{c}_1)}{\sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{c}_1)} \times$$

$$\times \frac{\sin \measuredangle(\vec{c}, \vec{a}_1)}{\sin \measuredangle(\vec{b}, \vec{a}_1)} \cdot \frac{\sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}_1)}{\sin \measuredangle(\vec{c}, \vec{b}_1)}. \qquad (2)$$

Лемма.

$$R(\Delta, \Delta_1) = R^*(\omega, \omega_1). \qquad (3)$$

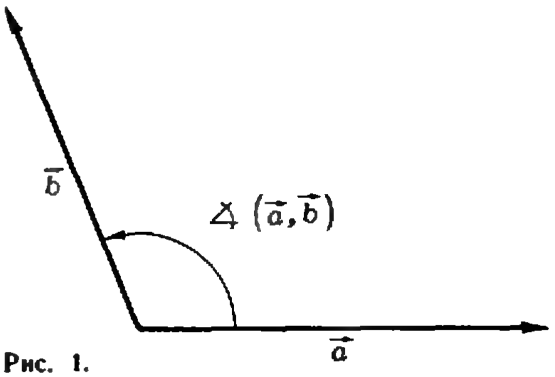


Рис. 1.

---

*) Наше определение угла между векторами несколько отлично от школьного. Поэтому мы и ввели обозначение $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ (а не $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$). Благодаря такому определению угла, как это будет видно из дальнейшего, удается доказать ряд довольно изящных утверждений.

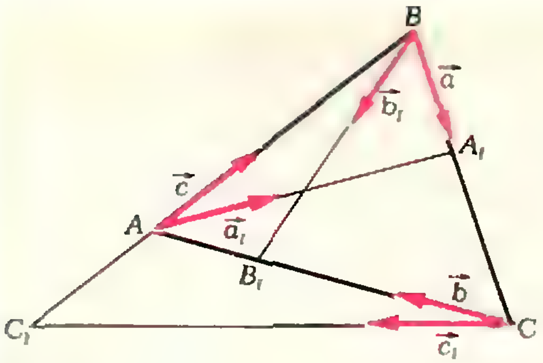


Рис. 2.

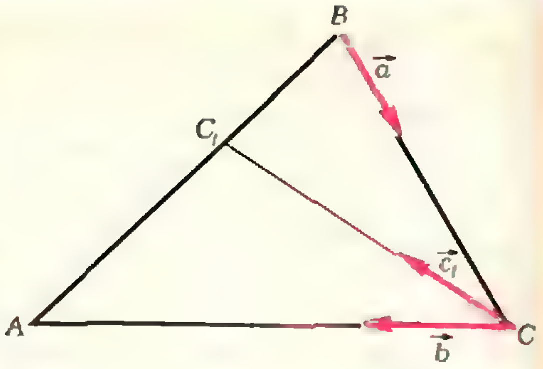


Рис. 3.

Доказательство. Сначала проверим, что $R$ и $R^*$ одного знака. Легко убедиться, что изменение направления одного из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$ не изменит величины $R^*(\omega, \omega_1)$, поэтому можно выбрать направление каждого из них определенным образом; например, можно считать векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$ совпадающими по направлению с векторами $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ (рис. 2). В этом случае каждая из трех дробей, входящих в выражение $R(\Delta, \Delta_1)$, имеет тот же знак, что и соответствующая дробь, входящая в выражение $R^*(\omega, \omega_1)$. Например, дроби

$$\left\{\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\right\} \text{ и } \frac{\sin\angle(\vec{b}, \vec{c}_1)}{\sin\angle(\vec{a}, \vec{c}_1)}$$

будут положительны, если точка $C_1$ расположена между точками $A$ и $B$, и отрицательны в противоположном случае (рис. 3 и 2).

Осталось доказать, что $|R(\Delta, \Delta_1)| = |R^*(\omega, \omega_1)|$. Имеем

$$\left|\left\{\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\right\}\right| = \frac{S_{\Delta ACC_1}}{S_{\Delta BCC_1}} =$$

$$= \frac{{}^1/_2\,|AC| \cdot |CC_1| \cdot |\sin\angle(\vec{b}, \vec{c}_1)|}{{}^1/_2\,|BC| \cdot |CC_1| \cdot |\sin\angle(\vec{a}, \vec{c}_1)|} =$$

$$= \times \frac{|AC|}{|BC|} \cdot \frac{|\sin\angle(\vec{b}, \vec{c}_1)|}{|\sin\angle(\vec{a}, \vec{c}_1)|},$$

$$\left|\left\{\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\right\}\right| = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|\sin\angle(\vec{c}, \vec{a}_1)|}{|\sin\angle(\vec{b}, \vec{a}_1)|},$$

$$\left|\left\{\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\right\}\right| = \frac{|BC|}{|AB|} \cdot \frac{|\sin\angle(\vec{a}, \vec{b}_1)|}{|\sin\angle(\vec{c}, \vec{b}_1)|}.$$

Перемножая эти три равенства, получим, что $|R(\Delta, \Delta_1)| = |R^*(\omega, \omega_1)|$. Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобится равенство, непосредственно вытекающее из определения $R^*(\omega, \omega_1)$:

$$R^*(\omega, \omega_1) = \frac{1}{R^*(\omega_1, \omega)}\,{}^{*)}. \qquad (4)$$

Сформулируем теперь теоремы Чевы и Менелая.

Теорема Чевы. *Для того чтобы прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$R(\Delta, \Delta_1) = 1, \qquad (5)$$

*или эквивалентное ему равенство*

$$R^*(\omega, \omega_1) = 1. \qquad (5')$$

Теорема Менелая. *Для того чтобы точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$R(\Delta, \Delta_1) = -1, \qquad (6)$$

*или эквивалентное ему равенство*

$$R^*(\omega, \omega_1) = -1. \qquad (6')$$

## Доказательство теоремы Чевы

Необходимость. Пусть прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке. Докажем, что выполняются условия (5) и (5').

---

*) Выражение $R^*(\omega_1, \omega)$ получается из выражения $R^*(\omega, \omega_1)$ взаимной заменой векторов $\vec{a}$ и $\vec{a}_1$, $\vec{b}$ и $\vec{b}_1$, $\vec{c}$ и $\vec{c}_1$.

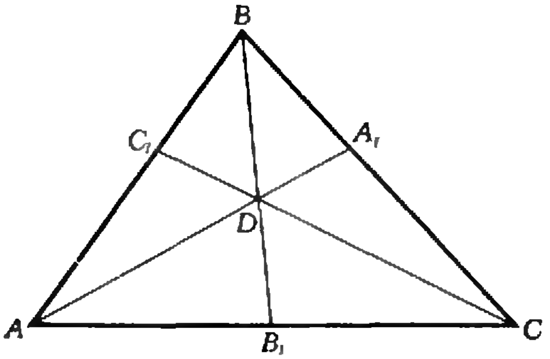


Рис. 4а.

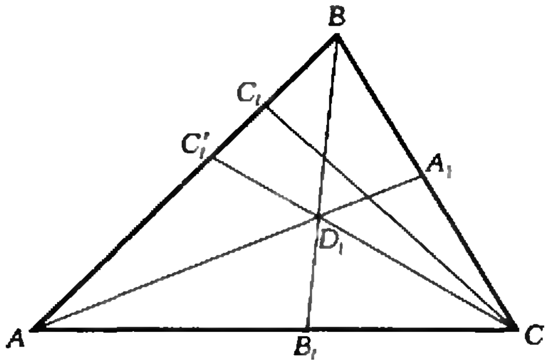


Рис. 4б.

Заметим, что если прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке, то либо все три точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ лежат на сторонах треугольника $ABC$, либо же одна из точек лежит на стороне треугольника, а две другие — на продолжениях соответствующих сторон. В первом случае все дроби, входящие в выражение $R\ (\Delta,\ \Delta_1)$, положительны, а во втором случае одна из трех дробей, входящих в $R\ (\Delta,\ \Delta_1)$, положительна, а две другие — отрицательны, так что снова выражение $R\ (\Delta,\ \Delta_1)$ (а следовательно, и $R^*\ (\omega,\ \omega_1)$ — см. лемму) больше нуля. Докажем теперь, что $|\,R^*\ (\omega,\ \omega_1)\,| = 1$ (так как $R^*\ (\omega,\ \omega_1) > 0$, из этого будет следовать, что $R^*\ (\omega,\ \omega_1)$ равно единице). Обозначим точку пересечения прямых $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ через $D$ (рис. 4а). Применяя теорему синусов, получим

$$\frac{\left|\sin \measuredangle \left(\vec{b},\ \vec{c}_1\right)\right|}{\left|\sin \measuredangle \left(\vec{b},\ \vec{a}_1\right)\right|} = \frac{|DA|}{|DC|},$$

$$\frac{\left|\sin \measuredangle \left(\vec{c},\ \vec{a}_1\right)\right|}{\left|\sin \measuredangle \left(\vec{c},\ \vec{b}_1\right)\right|} = \frac{|DB|}{|DA|},$$

$$\frac{\left|\sin \measuredangle \left(\vec{a},\ \vec{b}_1\right)\right|}{\left|\sin \measuredangle \left(\vec{a},\ \vec{c}_1\right)\right|} = \frac{|DC|}{|DB|}.$$

Перемножая эти равенства, видим, что $|\,R^*\,(\omega,\ \omega_1)\,| = 1$. Тем самым необходимость доказана.

Достаточность. Доказательство достаточности проведем методом «от противного». Допустим, что $R(\Delta,\ \Delta_1)\ (= R\,(\omega,\ \omega_1)) = 1$, но прямые $AA_1, BB_1$ и $CC_1$ не проходят через одну точку (рис. 4б). Обозначим точку пересечения прямых $AA_1$ и $BB_1$ через $D_1$, а через $C_1'$ — точку пересечения прямых $AB$ и $CD_1$. Поскольку прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1'$ пересекаются в одной точке,

$$\left\{\frac{\overrightarrow{AC_1'}}{\overrightarrow{C_1'B}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\right\} = 1.$$

Но по условию

$$\left\{\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{CB_1'}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\right\} = 1,$$

откуда $\left\{\frac{\overrightarrow{AC_1'}}{\overrightarrow{C_1'B}}\right\} = \left\{\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\right\}$. Так как и точка $C_1$, и точка $C_1'$ лежат на прямой $AB$, из этого следует, что точки $C_1$ и $C_1'$ совпадают. Теорема Чевы доказана.

## Доказательство теоремы Менелая

Необходимость. Известно, что точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ лежат на одной прямой. Нужно доказать равенства (6) и (6′).

Снова заметим, что если точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ лежат на одной прямой, то либо все они находятся на продолжениях $BC$, $AC$ и $AB$ сторон треуголь-

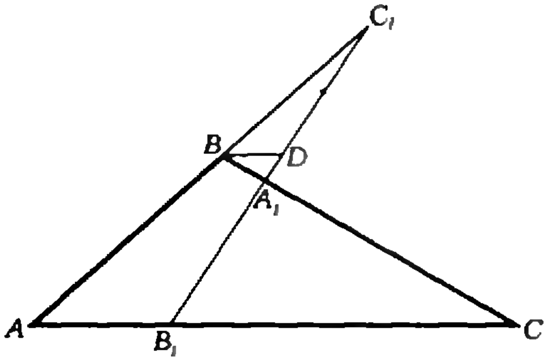


Рис. 5.

ника $ABC$, либо же две из точек $A_1$, $B_1$, $C_1$ находятся на соответствующих им сторонах, а третья — на продолжении. В обоих случаях выражение $R(\Delta, \Delta_1)$ будет отрицательным (убедитесь в этом). Докажем теперь, что если точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ — на одной прямой, то $|R(\Delta, \Delta_1)| = 1$ (поскольку $R(\Delta, \Delta_1) < 0$, из этого будет следовать, что $R(\Delta, \Delta_1) = -1$).

Проведем через точку $B$ прямую, параллельную $AC$, и обозначим точку ее пересечения с прямой $B_1A_1C_1$ через $D$ (рис. 5).

Используя подобие, легко получим

$$\left\{\frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}}\right\} = \frac{|B_1C|}{|BD|}, \quad \left\{\frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}}\right\} = \frac{|BD|}{|AB_1|}.$$

Добавив очевидное равенство $\frac{|\overrightarrow{AB_1}|}{|\overrightarrow{B_1C}|} = \frac{|AB_1|}{|B_1C|}$ и перемножив все три равенства, получим, что $|R(\Delta, \Delta_1)| = 1$. Необходимость условий теоремы Менелая доказана.

Доказательство достаточности условий (6) и (6′) теоремы Менелая проводится аналогично доказательству достаточности условий (5) и (5′) теоремы Чевы.

### Несколько следствий

Введение в формулировки теорем Чевы и Менелая двух эквивалентных условий (5) и (5′), (6) и (6′) сделано не только для облегчения доказательства этих теорем. В одних задачах оказывается удобным использовать одно из условий, в других — другое. Убедитесь в этом, попробовав самостоятельно доказать следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если три прямые, проходящие через вершины треугольника, пересекаются в одной точке, то и прямые, им симметричные относительно соответствующих биссектрис треугольника, также пересекаются в одной точке. Если же эти три прямые пересекают противоположные стороны треугольника в трех точках, расположенных на одной прямой, то и прямые, им симметричные относительно соответствующих биссектрис, также пересекают противоположные стороны треугольника в трех точках, расположенных на одной прямой.*

Если мы вспомним про равенство (4), то легко докажем

Утверждение 2. *Если три прямые, проходящие через вершины $A$, $B$ и $C$ треугольника $ABC$ параллельно сторонам $B_1C_1$, $A_1C_1$ и $A_1B_1$ треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке, то и прямые, проходящие через вершины $A_1$, $B_1$ и $C_1$ треугольника $A_1B_1C_1$ параллельно сторонам $BC$, $AC$ и $AB$ треугольника $ABC$, также пересекаются в одной точке. Если же первые три прямые пересекают соответствующие стороны треугольника $ABC$ в трех точках, расположенных на одной прямой, то то же самое имеет место и для прямых, проходящих через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ параллельно $BC$, $AC$ и $AB$* (рис. 6, 7).

Докажите самостоятельно также

Утверждение 3. *Если прямые, проходящие через вершины $A$, $B$ и $C$ треугольника $ABC$ перпендикулярно сторонам $B_1C_1$, $A_1C_1$ и $A_1B_1$ треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из вершин $A_1$, $B_1$ и $C_1$ треугольника $A_1B_1C_1$ на прямые $BC$, $AC$ и $AB$, также* *пересекаются в одной точке. Если же первая тройка прямых пересекает соответствующие стороны треугольника $ABC$ в трех точках, расположенных на одной прямой, то и прямые, проходящие через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярно сторонам треугольника $ABC$, пересекают соответствующие стороны треугольника $A_1B_1C_1$ в трех точках, расположенных на одной прямой* (рис. 8, 9).

Приведем еще два примера использования теорем Чевы и Менелая.

Утверждение 4 (*теорема Паскаля*). *Пустъ $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ и $A_6$ — точки, расположенные на одной окружности. Тогда точки пересечения прямых $A_1A_2$ и $A_4A_5$, $A_2A_3$ и $A_5A_6$, $A_3A_4$ и $A_6A_1$ лежат на одной прямой.*

Доказательство. Обозначим точки пересечения прямых, о которых говорится в условии, буквами $K$, $L$ и $M$ соответственно. Будем считать, что прямые $A_1A_2$, $A_3A_4$ и $A_5A_6$ не пересекаются в одной точке; тогда они образуют треугольник — обозначим его $ABC$, где $A$ — точка пересечения прямых $A_1A_2$ и $A_5A_6$, $B$ — прямых $A_1A_2$ и $A_4A_3$ и, наконец, $C$ — прямых $A_3A_4$ и $A_5A_6$.

Составим следующую таблицу:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $K$ | $A_1$ | $A_2$ | $B$ |
| $B$ | $A_4$ | $M$ | $A_3$ | $C$ |
| $C$ | $A_5$ | $A_6$ | $L$ | $A$ |

Буквы, стоящие в каждой строке и каждом столбце этой таблицы, соответствуют точкам, расположенным на одной прямой.

Поскольку точки $K$, $A_4$ и $A_5$ лежат на одной прямой и на сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$, должно выполняться условие (6), а именно:

$$\left\{\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{BA_4}}{\overrightarrow{A_4C}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{CA_5}}{\overrightarrow{A_5A}}\right\} = -1. \tag{7}$$

Аналогично

$$\left\{\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1B}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{CA_6}}{\overrightarrow{A_6A}}\right\} = 1, \tag{8}$$

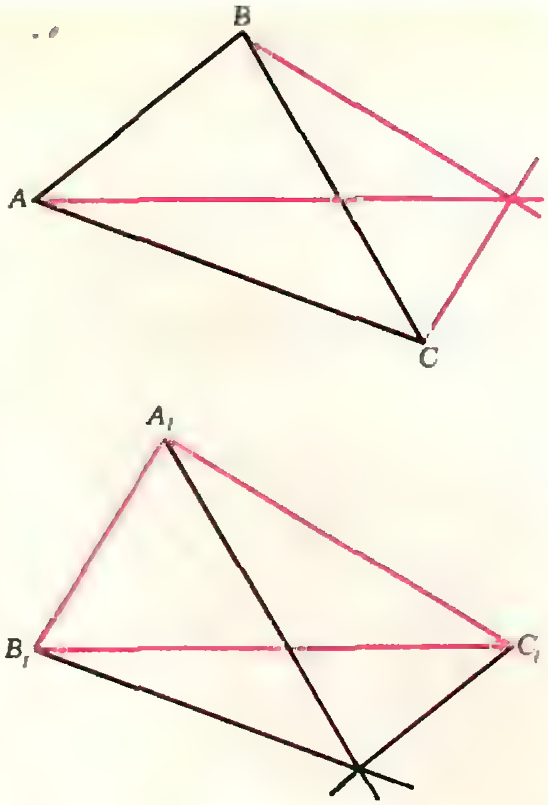


Рис. 6

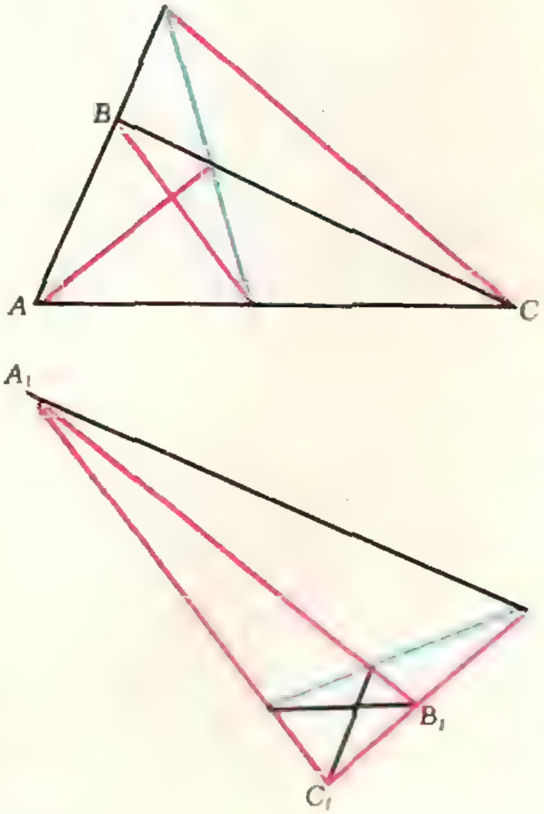


Рис. 7.

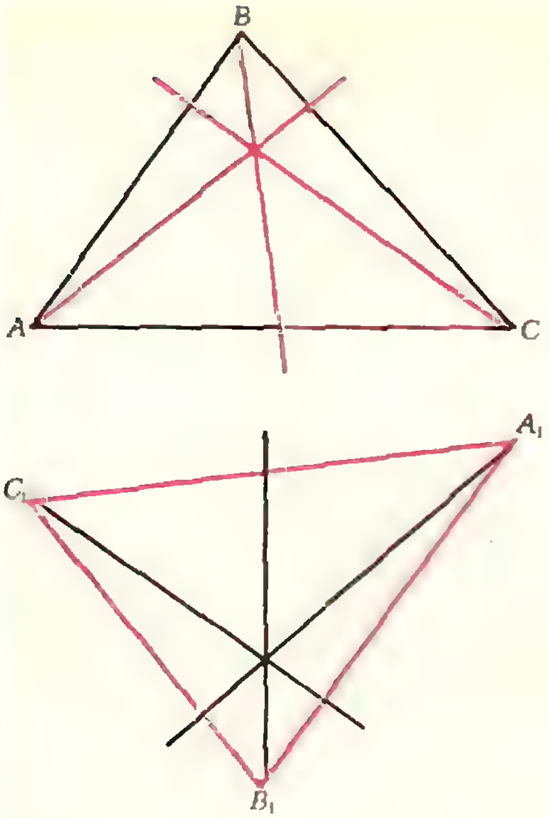


Рис. 8.

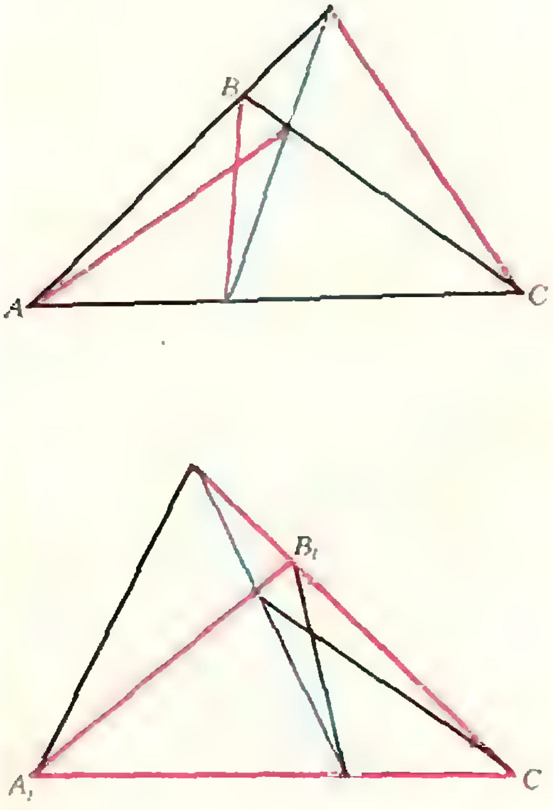


Рис. 9.

$$\left\{\frac{\overrightarrow{AA_2}}{\overrightarrow{A_2B}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{BA_3}}{\overrightarrow{A_3C}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{LA}}\right\} = -1. \qquad (9)$$

Поскольку точки $A_1$, $A_2$, $A_5$ и $A_6$ лежат на одной окружности и точка $A$ — точка пересечения прямых $A_1A_2$ и $A_5A_6$, то $|AA_1|\cdot|AA_2| = |AA_5|\cdot|AA_6|$. Определим для коллинеарных векторов $\overrightarrow{AA_i}$ и $\overrightarrow{AA_j}$ величину $\{\overrightarrow{AA_i}\cdot\overrightarrow{AA_j}\}$, равную произведению длин векторов $\overrightarrow{AA_i}$ и $\overrightarrow{AA_j}$, взятому со знаком «+», если векторы $\overrightarrow{AA_i}$ и $\overrightarrow{AA_j}$ сонаправлены, и со знаком «—», если они направлены противоположно. Тогда последнее равенство в новых обозначениях мы можем переписать так:

$$\{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AA_2}\} = \{\overrightarrow{AA_5}\cdot\overrightarrow{AA_6}\} = \\ = \{\overrightarrow{A_5A}\cdot\overrightarrow{A_6A}\}. \qquad (10)$$

Аналогично

$$\{\overrightarrow{BA_4}\cdot\overrightarrow{BA_3}\} = \{\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{A_2B}\}, \qquad (11)$$

$$\{\overrightarrow{CA_5}\cdot\overrightarrow{CA_6}\} = \{\overrightarrow{A_4C}\cdot\overrightarrow{A_3C}\}. \qquad (12)$$

Перемножая равенства (7) — (9) с учетом равенств (10 — (12) и того, что, согласно определению, например, $\left\{\frac{\overrightarrow{BA_4}}{\overrightarrow{A_4C}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{BA_3}}{\overrightarrow{A_3C}}\right\} = \frac{\{\overrightarrow{BA_4}\cdot\overrightarrow{BA_3}\}}{\{\overrightarrow{A_4C}\cdot\overrightarrow{A_3C}\}}$, получаем $\left\{\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}}\right\}\times$ $\times\left\{\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}}\right\}\cdot\left\{\frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{LA}}\right\} = -1$, что по теореме Менелая и означает принадлежность точек $K$, $L$ и $M$ одной прямой.

Случай, когда прямые $A_1A_2$, $A_3A_4$ и $A_5A_6$ пересекаются в одной точке (и тем самым не образуют треугольника $ABC$), разберите самостоятельно.

На рисунках 10—12 изображены три различных случая расположения точек $A_1$, …, $A_6$. Ими, конечно, не исчерпываются все возможности.

И в заключение — еще одно следствие.

Утверждение 5. *Пусть из точки $A$, взятой вне окружности, проведены две касательные $AM$ и $AN$ к окружности и две секущие, и пусть $P$ и $Q$ — точки пересечения окружности с первой секущей, а точки $K$*

*и $L$ — со второй. Тогда прямые $PK$, $QL$ и $MN$ пересекаются в одной точке.*

Доказательство (рис. 13). Применим теорему Чевы к треугольнику $KLM$. Заметим, что прямые $PK$, $QL$ и $MN$ пересекутся в одной точке, если выполняется равенство

$$\frac{\sin \widehat{LMN}}{\sin \widehat{NMK}}\cdot\frac{\sin \widehat{KLQ}}{\sin \widehat{QLM}}\cdot\frac{\sin \widehat{MKP}}{\sin \widehat{PKL}}=1. \qquad (13)$$

Все углы, фигурирующие в последнем выражении, — вписанные в данную окружность; синусы этих углов пропорциональны длинам стягиваемых ими хорд (так, например, $\sin \widehat{LMN}=\frac{|LN|}{2R}$, где $R$ — радиус окружности). Поэтому равенство (13) эквивалентно такому равенству:

$$\frac{|LN|}{|NK|}\cdot\frac{|KQ|}{|QM|}\cdot\frac{|MP|}{|PL|}=1. \qquad (13')$$

Покажем, что (13′) в самом деле выполняется. Из подобия треугольников $AMP$ и $AMQ$ получаем $\frac{|PM|}{|MQ|}=\frac{|AM|}{|AQ|}$.

Из подобия треугольников $APL$ и $AQK$ $\frac{|KQ|}{|PL|}=\frac{|AQ|}{|AL|}$, и, наконец, из подобия треугольников $ALN$ и $ANK$ $\frac{|LN|}{|NK|}=\frac{|AL|}{|AM|}$. Перемножая последние три равенства, получаем (13).

Замечание. Из утверждения 5 следует, что с помощью одной линейки через данную точку вне окружности можно провести касательную. Способ построения показан на рисунке 14.

**Задачи**

1. Докажите, что: а) биссектрисы внешних углов треугольника пересекают прямые,

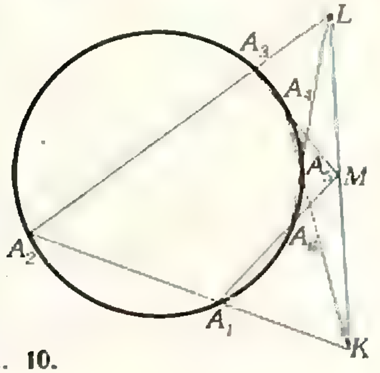


Рис. 10.

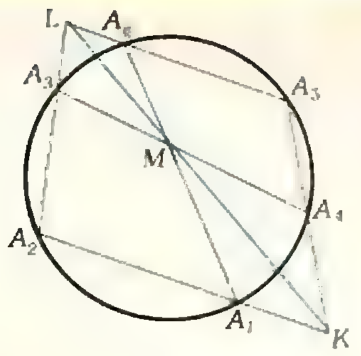


Рис. 11.

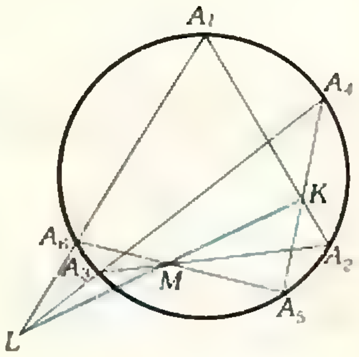


Рис. 12.

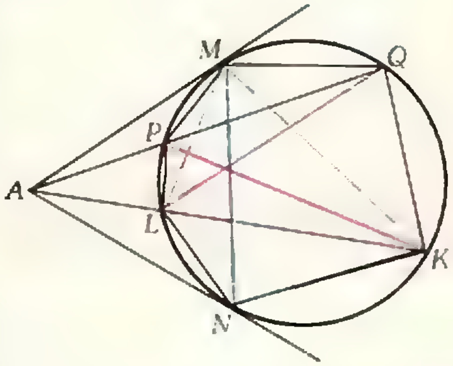


Рис. 13.

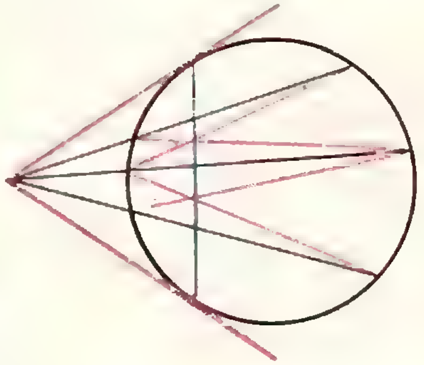


Рис. 14.

на которых лежат противоположные стороны, в трех точках, расположенных на одной прямой; б) касательные к окружности, описанной около треугольника, проведенные в вершинах треугольника, пересекают прямые, на которых лежат противоположные стороны треугольника, в трех точках, принадлежащих одной прямой.

2. На сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ взяты точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$ так, что прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке. Докажите, что если $\widehat{CA_1B_1}=90°$, то $A_1B_1$ — биссектриса угла $AA_1C$.

3. Докажите, что перпендикуляры, восставленные к биссектрисам треугольника в их серединах, пересекают стороны треугольника (или продолжения сторон), на которые опущены соответствующие этим перпендикулярам биссектрисы, в трех точках, лежащих на одной прямой.

4. Окружность пересекает сторону $AB$ треугольника $ABC$ в точках $C_1$ и $C_2$, сторону $BC$ — в точках $A_1$ и $A_2$, сторону $CA$ — в точках $B_1$ и $B_2$. Докажите, что если прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке, то и прямые $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$ также пересекаются в одной точке.

5. Даны три непересекающиеся окружности. Для каждой пары окружностей определена точка пересечения общих внешних и точка пересечения общих внутренних касательных. Докажите, что получившиеся шесть точек расположены на трех прямых, по три точки на каждой.

6. На сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ взяты точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$. Пусть $C_2$ — точка пересечения прямых $AB$ и $A_1B_1$, $A_2$ — точка пересечения прямых $BC$ и $B_1C_1$, $B_2$ — точка пересечения прямых $AC$ и $A_1C_1$. Докажите, что если прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке, то точки $A_2$, $B_2$, $C_2$ лежат на одной прямой.

7. Прямая пересекает стороны $AB$, $BC$ и продолжение стороны $AC$ треугольника $ABC$ в точках $D$, $E$ и $F$. Докажите, что середины отрезков $DC$, $AE$ и $BF$ лежат на одной прямой.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\widehat{ADB}=26°$, $\widehat{BCD}=51°$, $\widehat{BCA}=13°$, $\widehat{ACD}=73°$. Найдите $\widehat{ABD}$.

9. На стороне $AC$ треугольника $ABC$ взята точка $K$, а на медиане $BD$ — точка $P$ так, что площадь треугольника $BPC$ равна площади треугольника $APK$.

Определите геометрическое место точек пересечения прямых $AP$ и $BK$.

10. Дан треугольник $ABC$. Определим точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ следующим образом. Точка $A_1$ — это середина хорды, высекаемой на стороне $BC$ окружностью, касающейся сторон $BA$ и $CA$ треугольника $ABC$. Аналогично $B_1$ — середина хорды, высекаемой на стороне $AC$ окружностью, касающейся сторон $AB$ и $CB$, а $C_1$ — середина хорды, высекаемой на стороне $AB$ окружностью, касающейся сторон $AC$ и $BC$. Дугам всех трех окружностей, находящимся внутри треугольника, соответствуют равные центральные углы. Докажите, что прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке.

11. На ребрах $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки $K$, $L$, $M$, $N$. Докажите, что для того чтобы фигура $KLMN$ являлась плоским четырехугольником, необходимо и достаточно выполнения следующего условия:

$$|AK|\cdot|BL|\cdot|CM|\cdot|DM| = |KB|\cdot|LC|\cdot|MD|\cdot|NA|.$$

12. Через вершины $A$ и $B$ четырехугольника $ABCD$ проведена окружность. Прямые $AD$ и $BC$ вторично пересекают окружность в точках $K$ и $L$, а прямые $AC$ и $BD$ — в точках $M$ и $N$. Докажите, что прямые $KL$, $MN$ и $CD$ пересекаются в одной точке или параллельны.

---

# Как устроено атомное ядро

**В 1937 году сотрудник министерства иностранных дел Великобритании полковник Дж. Мур-Брабазон обратился в редакцию английского журнала «Nature» («Природа») с просьбой рассказать о некоторых непонятных ему особенностях строения атомного ядра. Отвечал полковнику профессор Андраде, известный физик, автор многих популярных книг и статей. Эту любопытную переписку мы решили довести до сведения наших читателей. Перевод и подготовка публикации выполнены В. Березиным.**

Вот что писал Мур-Брабазон в своем письме:

«Взялся бы хоть один из ученых-популяризаторов объяснить, как преодолеть возникающие у любителей физики трудности в понимании современной картины строения атома. Мы знаем, что она очень приблизительна. Нам известно, что биллиардный шар в качестве модели атома неприемлем. Недавние эксперименты по бомбардировке атома позволили построить общую огрубленную схему. Гейзенберг, с его принципом неопределенности, внушает сомнения в ее правильности. Но нам не хотелось бы, чтобы объяснения опирались на квантовую механику; мы бы рассматривали такие объяснения как «недружественное действие».

*(Продолжение см. с. 42)*

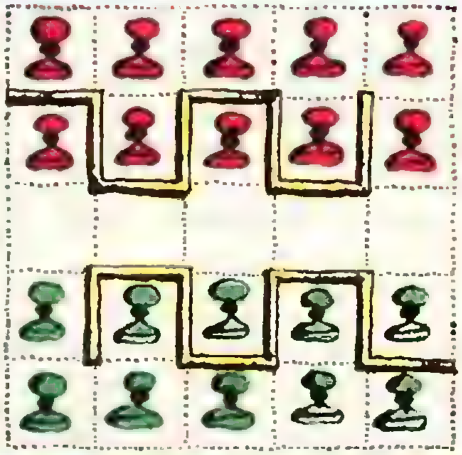
# Головоломки

### Фишки на поле

На игровом поле, состоящем из 25 клеток и 2 перегородок (см. рисунок), стоят 20 фишек: 10 красных и 10 зеленых.

За один ход можно передвинуть любую фишку на любую свободную клетку по свободным клеткам.

Какое наименьшее количество ходов надо сделать, чтобы поменять местами красные и зеленые фишки?



### Звезда из домино

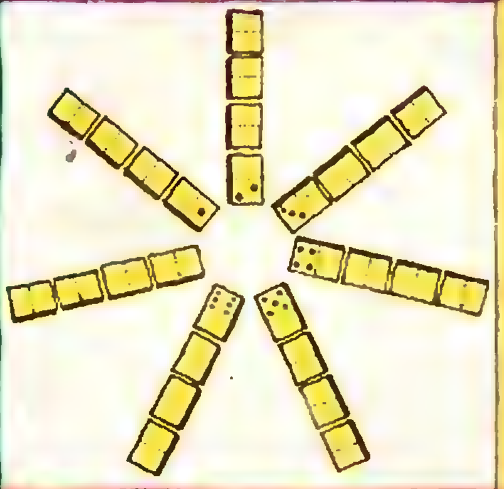
Расположите все 28 косточек домино в виде семиконечной звезды (по четыре костяшки на каждом луче), но так, чтобы:

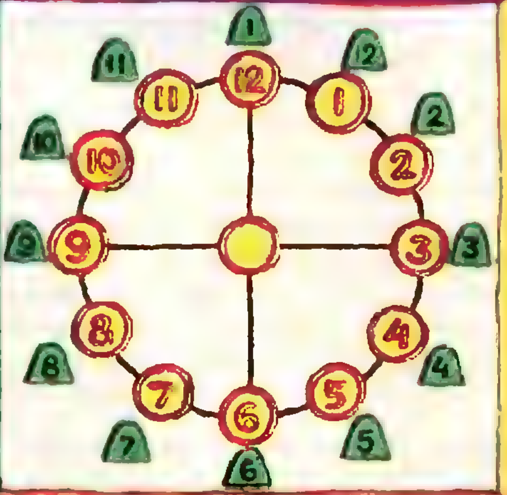
1) в центр выходили кости с 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 очками;

2) на концах лучей также были все очки от 0 до 6;

3) в каждом луче косточки укладывались согласно правилам игры в домино: 0 к 0, 1 к 1 и т. д.;

4) суммы очков на косточках домино во всех лучах были одинаковы.





### Циферблат

На окружности нарисованы 12 кружков, тринадцатый в центре. Некоторые кружки соединены линиями, на крайних кружках стоят 12 фишек с числами от 1 до 12 (см. рисунок). Наша цель: передвигая по одной фишке на свободный кружок по линиям, поставить каждую фишку на кружок с ее номером. Задача имеет решение, состоящее из 49 ходов (перемещений). А может, вы найдете более короткое?

*Л. Мочалов*

# задачник кванта

## Задачи

### М411—М415; Ф423—Ф427

**Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 31 декабря 1976 г. по адресу: 113035, Москва, М-35 Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М411» или «...Ф423». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта». новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).**

**Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.**

**М411.** Три отрезка с концами на сторонах треугольника, параллельные его сторонам, проходят через одну точку и имеют одинаковую длину $x$ (рис. 1). Найдите $x$, если длины сторон треугольника равны $a$, $b$, $c$.

*А. Ягубьянц*

**М412.** В городе на каждую площадь выходит не менее трех улиц. На всех улицах введено одностороннее движение так, что с любой площади можно проехать на любую другую. Докажите, что можно запретить движение по одной из улиц (на участке между двумя площадями) так, что по-прежнему с любой площади можно будет проехать на любую другую.

*А. Гольдберг*

**М413.** Для каких положительных чисел $a$ верно следующее утверждение: для любой функции $f$, определенной на отрезке $[0, 1]$, непрерывной в каждой точке этого отрезка и такой, что $f(0) = f(1) = 0$, уравнение $f(x+a) - f(x) = 0$ имеет решение?

а) Выясните сначала этот вопрос для случая $a = 1/2$.

б) Докажите, что для $a = 1/n$, где $n$ — натуральное число, сформулированное утверждение верно.

в) Докажите, что для остальных положительных $a$ оно не верно.

При решении этой задачи может пригодиться такое свойство непрерывных функций: если функция $g$ определена на отрезке $[a, b]$, непрерывна в каждой точке этого отрезка и на концах его принимает значения разных знаков, то между $a$ и $b$ найдется точка $c$, в которой $g(c) = 0$.

*И. Яглом*

**М414.** а) Из пяти треугольников, отсекаемых от данного выпуклого пятиугольника, площади четырех равны $S$, площадь пятого — $3S/2$. Найдите площадь $x$ пятиугольника.

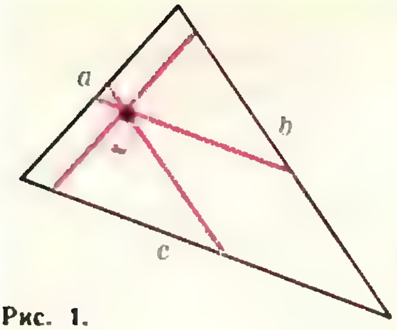


**Рис. 1.**

б)* Докажите, что если $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_5$ — площади пяти этих треугольников, а $x$ — площадь пятиугольника, то

$$x^2-(S_1+S_2+S_3+S_4+S_5)\,x+$$
$$+(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_4+S_4S_5+S_5S_1)=0.$$

*А. Тихомиров*

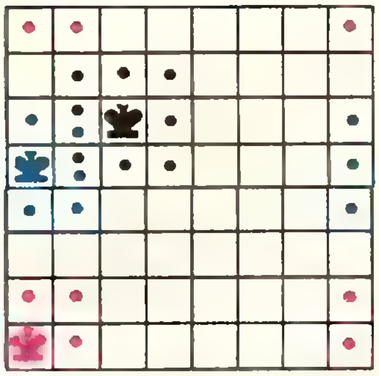


**Рис. 2.**

**М415.** Какое наибольшее число королей можно расставить на торической шахматной доске $n\times n$, чтобы они не били друг друга? Торическая шахматная доска получается из обычной размером $n\times n$, у которой верхняя и нижняя горизонтали, а также левая и правая вертикали считаются склеенными. На торической доске с каждого поля король может пойти на восемь соседних полей (рис. 2).

*А. Футер*

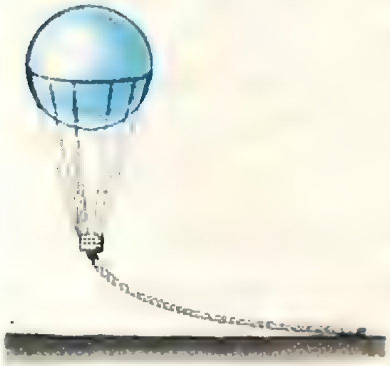
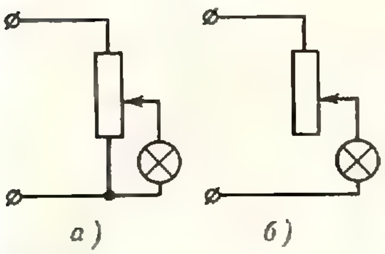


**Рис. 3.**

**Ф423.** Масса воздушного шара вместе с волочащимся за ним канатом равна $M$ (рис. 3). Действующая на шар архимедова выталкивающая сила равна $F$, коэффициент трения каната о землю $\mu$. Сила сопротивления воздуха, действующая на воздушный шар, пропорциональна скорости шара относительно воздуха $\mathbf{F}_c=-\alpha\mathbf{v}$. Найти скорость шара относительно земли, если дует горизонтальный ветер со скоростью $u$.

*А. Трубачев*

**Ф424.** Для того чтобы лампочку, рассчитанную на напряжение сети 110 *в*, включить в сеть с напряжением 220 *в*, можно воспользоваться реостатом, который может быть включен по схемам *а* и *б* (рис. 4). Найти к. п. д. каждой из схем. Сопротивление лампочки 1 000 *ом*, а реостата 2 000 *ом*.



*а)* *б)*

**Рис. 4.**

**Ф425.** В пространство между пластинами незаряженного плоского конденсатора вносится металлическая пластина, имеющая заряд $Q$. Между пластиной и обкладками конденсатора при этом остаются зазоры $l_1$ и $l_2$. Площади всех пластин одинаковы и равны $S$. Определить разность потенциалов между обкладками конденсатора.

**Ф426.** В дымовой завесе из непрозрачных частиц радиуса $r_1=5$ *мкм* при содержании массы вещества $m=0{,}04$ *г* в кубометре воздуха дальность видимости составляет $l_1=50$ *м*. Сколько вещества в кубометре воздуха распыляется другим источником завесы, который создает частицы радиуса $r_2=10$ *мкм*, если видимость сокращается до $l_2=20$ *м*?

**Ф427.** Две катушки с числами витков $n_1 = 125$ и $n_2 = 1\,000$ намотаны на тороидальный ферромагнитный сердечник диаметром $d = 5$ *см* и площадью поперечного сечения $S = 1$ *см*$^2$. По первой катушке течет постоянный ток 1 *а*, вторая катушка подключена к гальванометру. При размыкании цепи первой катушки через гальванометр проходит заряд $10^{-3}$ *к*. Полное сопротивление цепи второй катушки 100 *ом*. Определить магнитную проницаемость материала, из которого сделан сердечник.

# Решения задач

## М371—М375; Ф378—Ф382

**М371.** *В каждой клетке шахматной доски написано целое число от 1 до 64, причем в разных клетках — разные числа. За один вопрос можно, указав любую совокупность полей, узнать совокупность (множество) чисел, стоящих на этих полях. За какое наименьшее число вопросов можно узнать число в каждой клетке?*

Докажем, что наименьшее необходимое число вопросов — 6. Для этого, во-первых, покажем, что за 6 вопросов можно узнать все числа, и, во-вторых, докажем, что за меньшее число вопросов этого сделать нельзя. Но сначала разберемся в формулировке задачи.

Задавая один вопрос, мы указываем некоторое множество $A$ полей и узнаем, какие из чисел от 1 до 64 записаны на полях из множества $A$, а какие — на остальных полях (множество дополнительных полей обозначим через $\overline{A}$). Таким образом, каждый вопрос — это некоторое разбиение доски на два множества $A$ и $\overline{A}$. Мы должны задать несколько вопросов $(A_1, \overline{A}_1)$, $(A_2, \overline{A}_2)$, ..., $(A_q, \overline{A}_q)$ так, чтобы по ним однозначно определить, какое число записано на каждом поле, то есть так, чтобы для любых двух разных полей обязательно нашлось такое разбиение $(A_i, \overline{A}_i)$ из наших $q$, которое разделяет эти два поля: одно из полей принадлежит $A_i$, а другое — $\overline{A}_i$. Иначе говоря, нужно, чтобы пересечение любых $q$ множеств, $i$-е из которых — $A_i$ или $\overline{A}_i$ — содержало не более одного поля. При этом число вопросов $q$ должно быть возможно меньше.

I. Пример шести разбиений, позволяющих узнать все числа, показан на рисунке 1 (множества $A_i$, которые мы предлагаем спросить, — розовые, $\overline{A}_i$ — белые; $i = 1, 2, \ldots, 6$). В том, что наш план правилен, убедиться нетрудно: за три первых вопроса мы узнаем множество чисел, записанных в каждой строке, за три последних — в каждом столбце, поэтому в результате мы угадаем число в каждой клетке. (Здесь пересечение любой совокупности шести подмножеств, $i$-е из которых — $A_i$ или $\overline{A}_i$ — содержит ровно один элемент!)

II. Докажем, что за 5 вопросов все числа определить нельзя. Пусть первый вопрос — $(A_1, \overline{A}_1)$. Тогда в одном из множеств $A_1$, $\overline{A}_1$ (можно считать, что в $A_1$ — ведь они совершенно равноправны) не менее 32 полей. Пусть второй вопрос — $(A_2, \overline{A}_2)$. Этот вопрос разделяет множество $A_1$ на два: $A_1 \cap A_2$ и $A_1 \cap \overline{A}_2$, причем в одном из них (можно считать, что в $A_1 \cap A_2$) не менее 16 полей. И, наконец, после пятого вопроса останется множество $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$ из двух или более «неразличимых» полей. Ясно, что узнать, как расставлены числа в этом множестве по заданным вопросам мы не сможем.

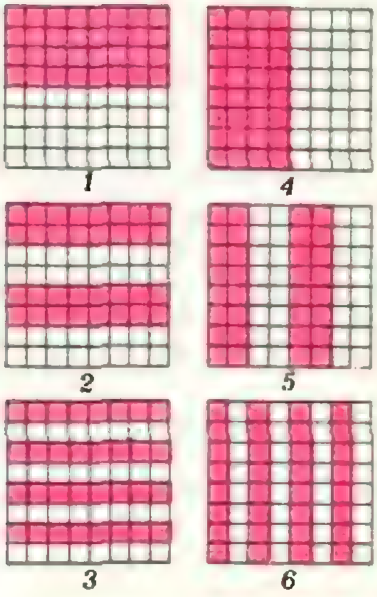


Рис. 1.

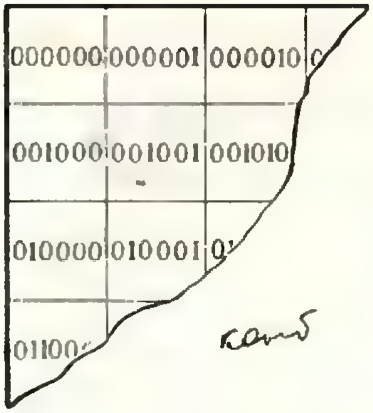


**Рис. 2.**

Заметим в заключение, что хотя шахматная доска и помогла нам описать пример из шести разбиений, на самом деле она в этой задаче ни при чем. Как получился пример на рисунке 1, можно объяснить с помощью двоичной системы счисления. Если все поля занумеровать по порядку двоичными числами от 000000 до 111111 ($2^6$ как раз равно 64 — вот чем хороша доска), как показано на рисунке 2, и отнести к множеству $A_i$ те номера, у которых $i$-я цифра 0 (а к $\overline{A}_i$ — те, у которых 1), то получится наш пример. Приведенных соображений достаточно, чтобы решить задачу в общем виде — для любого количества $N$ полей (расположенных как угодно — для определенности, в ряд), на которых написана любая перестановка чисел от 1 до $N$. Если $2^{q-1} < N \leqslant 2^q$, то все числа можно узнать за $q$ вопросов, и нельзя — за $q-1$.

О подобном использовании двоичной системы для математических фокусов рассказывалось неоднократно в «Кванте» для младших школьников (см. «Квант», 1976, № 6, с. 67, статья А. Бендукидзе «О двоичной системе счисления» и № 7, с. 55, статья А. Орлова «Поиск предмета»).

◆

**М372.** *Дан треугольник $ABC$. Доказать, что условие $\widehat{ACB} \geqslant 120°$ необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $P$ плоскости выполнялось неравенство $|AP| + |BP| + |CP| \geqslant |AC| + |BC|$*

В связи с этой задачей естественно возникает такая. *Пусть $ABC$ — данный треугольник. Для какой точки плоскости сумма ее расстояний до вершин $A$, $B$ и $C$ наименьшая?* Решим эту задачу. Наиболее интересный ответ получается для того случая, когда все углы $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ треугольника меньше 120° (рис. 3).

**(Т1)** *Искомая точка $T$ — та, для которой $\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{CTA} = 120°$.* Точка $T$ называется «точкой Торичелли» треугольника $ABC$. Красивое доказательство теоремы **Т1** использует такую лемму 1: *пусть $A_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник с длиной высоты $h$; тогда сумма расстояний до прямых $A_1B_1$, $B_1C_1$ и $C_1A_1$ от любой точки $P$, лежащей внутри или на контуре треугольника, равна $h$, а от точки $P$, лежащей вне треугольника, — больше $h$.*

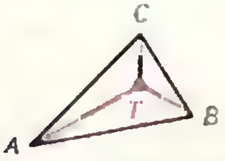


**Рис. 3.**

Для доказательства леммы 1 достаточно вместо суммы расстояний от $P$ до прямых рассмотреть сумму площадей треугольников $A_1PB_1$, $B_1PC_1$, $C_1PA_1$ и сравнить ее с площадью треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 4).

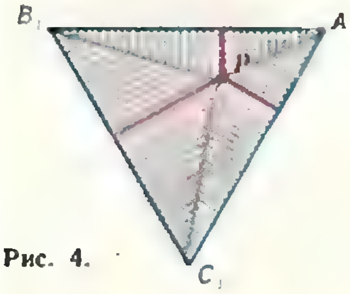


**Рис. 4.**

Чтобы доказать (**Т1**), проведем через точки $A$, $B$ и $C$ прямые, перпендикулярные соответственно отрезкам $TA$, $TB$ и $TC$. Получим равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 5). Для любой точки $P$ сумма расстояний от $P$ до точек $A$, $B$ и $C$ не меньше, чем сумма расстояний от $P$ до прямых $B_1C_1$, $C_1A_1$ и $A_1B_1$, — ведь наклонная не короче перпендикуляра, — а последняя сумма по лемме 1 равна высоте $h$ треугольника $A_1B_1C_1$. Таким образом, $|AP| + |BP| + |CP| \geqslant h$, а в точке $T$ сумма $|AT| + |BT| + |CT|$ равна $h$.

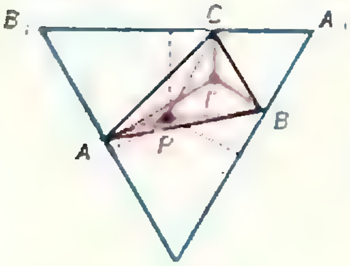


**Рис. 5.**

Теперь изучим другой случай.

(**Т2**) *Если в треугольнике $ABC$ один из углов — пусть $\widehat{C}$ — больше* **120°**, *то искомая точка — сама эта вершина $C$, то есть $|AP| + |BP| + |CP| \geqslant |AC| + |BC|$ для всех $P$.*

Последуем прежним путем.

Лемма 2. *Пусть $A_1B_1C_1$ — равнобедренный треугольник с углами $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 > 60°$ при основании, $h$ — длина высоты, опущенной на его боковую сторону; тогда сумма расстояний до прямых $A_1B_1$, $B_1C_1$ и $C_1A_1$ от любой точки $P$, лежащей на отрезке $A_1B_1$, равна $h$, а для всех других точек $P$ плоскости — больше $h$.*

При доказательстве леммы 2 нужно учесть, что боковая сторона $|A_1C_1| = |B_1C_1|$ длиннее основания $|A_1B_1|$.

Чтобы доказать (**Т2**), проведем через точки $A$, $B$ и $C$ прямые, перпендикулярные отрезкам $CA$, $CB$ и биссектрисе угла

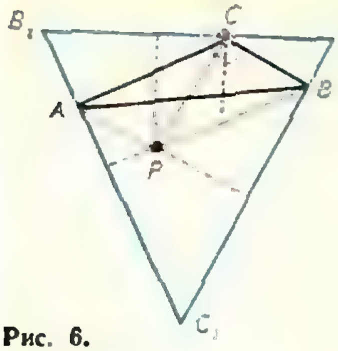


Рис. 6.

$ACB$ (рис. 6). Получим равнобедренный треугольник $A_1B_1C_1$, удовлетворяющий условиям леммы 2. Дальше рассуждаем так же, как в доказательстве (**T1**).

Мы переходим, наконец, к самой задаче М372. Теперь для ее полного решения осталось сделать лишь небольшой логический шаг.

В условии М372 требуется доказать два утверждения: необходимость условия $\widehat{C} > 120°$ и его достаточность для выполнения неравенства $|AP| + |BP| + |CP| \geqslant |AC| + |BC|$ для любой точки $P$ плоскости. Достаточность мы только что доказали: это и есть теорема (**T2**). Докажем необходимость, то есть докажем, что если $\widehat{C} < 120°$, то существует $P = P_0$, для которой это неравенство неверно. Рассмотрим два случая. Если все углы в треугольнике $ABC$ меньше 120°, то, согласно (**T1**), в качестве такой точки $P_0$ можно взять точку Торичелли $T$. Если же один из углов — скажем $\widehat{A}$ — больше или равен 120°, то в роли точки $P_0$ может выступить сама вершина $A$ (поскольку $|BC| > |AB|$).

◆

**М373.** *а) Все натуральные числа (записанные в десятичной системе) разбиты на два класса. Докажите, что любую бесконечную десятичную дробь можно разрезать на такие конечные куски, чтобы все они, кроме, быть может, первого куска, принадлежали одному классу.*

*б) Та же задача, но натуральные числа разбиты не на два, а на несколько классов.*

Решение этой задачи требует только аккуратных логических умозаключений для бесконечных множеств. Вот самый характерный пример: «Пусть $P$ — какое-то свойство члена последовательности $x_n$. Тогда либо для всех членов, начиная с некоторого, свойство $P(x_n)$ выполнено, либо найдется бесконечно много членов, для которых $P(x_n)$ не выполнено». Рассуждения такого типа особенно часто встречаются в учебниках по анализу — при изучении пределов и т. п.

а) Конечные куски последовательности цифр (натуральные числа) будем называть *словами* (для нас это действительно слова — в алфавите из «букв» 0, 1, …, 9). Тогда либо для каждого знака нашей десятичной дроби (начиная с некоторого) есть слово первого класса, начинающееся с этого знака, либо существует бесконечно много знаков таких, что все начинающиеся с них слова — не первого класса (то есть все — второго класса).

Первый случай: мы можем (начиная с некоторого места) отрезать от нашей дроби последовательно одно слово первого класса за другим, то есть десятичную дробь удастся разрезать на слова первого класса (кроме, быть может, начального слова; рис. 7).

Второй случай: отметим (на рисунке 7 — красным) знаки нашей дроби, с которых начинаются слова лишь второго класса. Ясно, что слова, начинающиеся красными буквами и идущие до следующей красной буквы, дают требуемое разрезание дроби на слова второго класса.

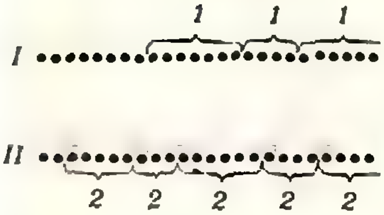


Рис. 7.

б) Пусть слова разбиты на $N$ классов. Мы докажем индукцией по $N$ утверждение задачи в несколько усиленном виде (как часто бывает, доказать больше оказывается легче *). А именно, мы докажем, что если дробь уже как-то (начиная с некоторого места $n_0$) разделена на куски — назовем их слогами, — то можно ее разрезать (начиная с некоторого места $n_1$) на слова одного класса, не разрезая слогов, то есть так, что *каждое слово будет состоять из нескольких слогов*. Вы легко проверите, что для $N = 2$ этот усиленный вариант доказывается точно так же, как прежний (роль «знаков» дроби играют не цифры, а слоги). Но формально это и не нужно: ведь

---

*) См. статью Л. Цинмана «Парадокс исследователя», с. 9.

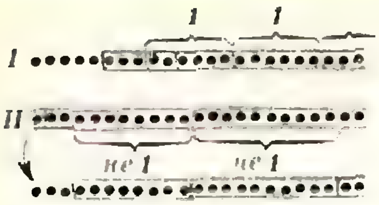


Рис. 8.

начать индукцию можно с $N = 1$, где все очевидно. Под словом мы понимаем ниже «слово из слогов».

Шаг индукции. Пусть для $N - 1$ классов утверждение доказано, а у нас их $N$. Пусть наша дробь разрезана на слоги (рис. 8). Тогда либо для каждого слога в дроби (начиная с некоторого) найдется слово первого класса, начинающееся с этого слога, либо существует бесконечно много слогов таких, что все начинающиеся с них слова — не первого класса. Первый случай ясен. Во втором случае разрежем всю дробь на куски, начинающиеся с «красных» слогов, и объявим эти более крупные куски слогами. Поскольку все слова, состоящие из таких укрупненных слогов, не первого класса, у нас теперь могут быть слова не более чем $(N - 1)$ разных классов; и по предположению индукции мы можем разрезать нашу дробь требуемым образом.

Приведенное здесь доказательство существования требуемого разрезания неконструктивно—не дается никакого общего способа построить (сконструировать) разрезание для произвольных правил, задающих полседовательность, и разбиение слов на классы.

*Н. Васильев*

◆

**М374.** *Пусть $a$, $b$ и $c$ — положительные числа, $a > c$ и $b > c$. Докажите неравенство*
$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}.$$

Мы приведем два решения, первое из которых — алгебраическое, а второе — геометрическое.

1. Положим $a = (1 + \alpha)c$, $b = (1 + \beta)c$, где $\alpha, \beta > 0$. Тогда $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = c(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})$, $\sqrt{ab} = c\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}$, и нам нужно доказать, что $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \leqslant \sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)}$. Напишем очевидное неравенство: $(\sqrt{\alpha\beta} - 1)^2 \geqslant 0$, или $2\sqrt{\alpha\beta} \leqslant 1 + \alpha\beta$, и прибавим к обеим частям его по $(\alpha + \beta)$. Получим

$$\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \leqslant 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta,$$

то есть $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \leqslant (\sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)})^2$, что и требовалось.

Равенство имеет место в случае, если $\alpha\beta = 1$, то есть $\left(\frac{a}{c} - 1\right)\left(\frac{b}{c} - 1\right) = 1$, или $(a - c)(b - c) = c^2$, откуда $c = \frac{ab}{a+b}$.

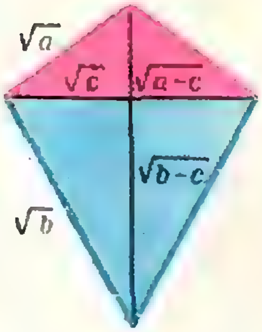


Рис. 9.

2. Составим четырехугольник $ABCD$ из двух равнобедренных треугольников с равными по длине числу $2\sqrt{c}$ основаниями и с боковыми сторонами длины $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ соответственно (рис. 9). Поскольку длины высот, опущенных на основания этих треугольников, равны $\sqrt{a-c}$ и $\sqrt{b-c}$ соответственно, площадь четырехугольника $ABCD$ равна $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}$. С другой стороны, $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \sin(\widehat{BAD}) \leqslant \sqrt{ab}$, откуда и вытекает требуемое неравенство.

Равенство будет в случае $\sin(\widehat{BAD}) = 1$, то есть если $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{2}$; тогда $|AB|^2 + |AD|^2 = |BD|^2$, или $a + b = (\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c})^2$, откуда $c = \frac{ab}{a+b}$.

Подумайте, как доказать более общее неравенство

$$\sqrt{kl}+\sqrt{mn}\leqslant\sqrt{(k+n)(m+l)},$$

где $k$, $l$, $m$, $n$ — неотрицательные числа (наше неравенство получается отсюда при $k=m=c$, $l=a-c$, $n=b-c$).

*А. Резников*

◆

**М375.** *Внутри выпуклого многогранника объема 1 отмечено $3\cdot(2^n-1)$ точки.*

*Докажите, что из него можно вырезать выпуклый многогранник объема $(1/2)^n$, не содержащий внутри себя ни одной отмеченной точки.*

Доказательство будем вести по индукции.

База индукции. $n=1$, то есть в выпуклом многограннике объема 1 отмечено три точки. Проведя через две из этих точек плоскость, разбивающую наш многогранник на два равных по объему многогранника, мы получим, что в одном из них (объема 1/2) не окажется ни одной отмеченной точки.

Шаг индукции. Допустим теперь, что для всех $n\leqslant k$ утверждение задачи доказано, и докажем его для $n=k+1$ (но вначале заметим, что если утверждение задачи справедливо для многогранника с $N$ отмеченными точками, то оно тем более справедливо и для многогранника с меньшим числом отмеченных точек). Итак, сейчас у нас внутри многогранника объема 1 отмечено $3(2^{k+1}-1)=6\cdot2^k-3$ точки. Проведем через две из них плоскость, разбивающую наш многогранник на два равновеликих многогранника. Поскольку теперь у нас осталось $6\cdot2^k-3-2=6\cdot2^k-5$ «внутренних» отмеченных точек, в одном из этих многогранников (объема 1/2) окажется не более чем $3\cdot2^k-3=3(2^k-1)$ точки. По предположению индукции, из такого многогранника мы можем вырезать многогранник объема $\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$, не содержащий отмеченных точек, что и доказывает утверждение задачи.

Внимание! Тот факт, что через две точки, взятые внутри выпуклого многогранника, можно провести плоскость, делящую многогранник на два равновеликих, не так-то уж и очевиден. Подумайте, в чем тут дело, и попробуйте строго обосновать его.

*Л. Липов*

◆

**Ф378.** *Пассажиры самолета не испытывают неприятных ощущений, если только их вес в полете не увеличивается более чем вдвое. Какое максимальное ускорение в горизонтальном полете допускает это условие?*

На пассажира самолета, летящего с горизонтальным ускорением **a**, со стороны кресла действуют две силы: горизонтальная сила $m$**a** и вертикальная сила $-mg$, компенсирующая силу тяжести. Такие же по абсолютной величине силы, но направленные в противоположные стороны, действуют (по третьему закону Ньютона) со стороны пассажира на кресло. Абсолютная величина результирующей силы, действующей на опору, т. е. вес пассажира, есть

$$P=\sqrt{(ma)^2+(mg)^2}.$$

По условию задачи

$$P\leqslant 2mg.$$

Отсюда

$$a\leqslant\sqrt{3}\,g.$$

*С. Козел*

◆

**Ф379.** *Внешний диаметр стеклянной капиллярной трубки существенно боль-*

Обозначим через $AO$ радиус канала капиллярной трубки (рис. 10). Рассмотрим ход такого луча $AB$, который после преломления на внешней поверхности капилляра пойдет *ше диаметра канала. Показатель преломления стекла $n=4/3$. Видимый через боковую поверхность трубки диаметр канала $d'=2{,}66$ мм. Определить истинный диаметр канала.*

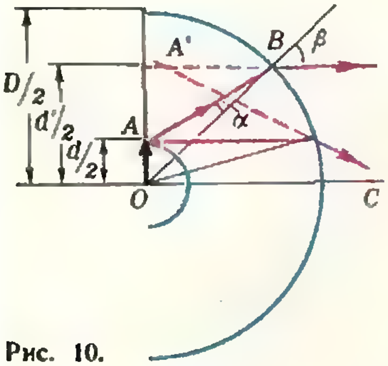


Рис. 10.

параллельно оптической оси $OC$. Очевидно, что именно этот луч определяет линейный размер $d'$ изображения канала капиллярной трубки.

Из рисунка 10

$$\frac{d'}{2}=\frac{D}{2}\sin\beta,$$

где $D$ — внешний диаметр трубки. По закону преломления

$$\sin\beta = n\sin\alpha \text{ и } d' = Dn\sin\alpha.$$

Из треугольника $AOB$ по теореме синусов получаем

$$\frac{d/2}{\sin\alpha}=\frac{D/2}{\sin(90^\circ+\beta-\alpha)}.$$

Отсюда

$$d=D\frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ+\beta-\alpha)}=D\frac{\sin\alpha}{\cos(\beta-\alpha)}=$$

$$=\frac{d'}{n}\,\frac{1}{\cos(\beta-\alpha)}.$$

Поскольку внешний диаметр $D$ трубки существенно больше диаметра $d$ канала, угол $\alpha$ мал. Следовательно, мал и угол $\beta$, и разность $\beta-\alpha$. Тогда $\cos(\beta-\alpha)\approx 1$, и окончательно

$$d\approx d'/n = 2 \text{ мм}.$$

*Е. Кузнецов*

◆

**Ф380.** *Найти период малых колебаний системы, изображенной на рисунке 11. Стержни считать невесомыми, их длины $l_1$ и $l_2$, массы шаров $m_1$ и $m_2$.*

Описанная в условии система представляет собой физический маятник. Нахождение периода колебаний физического маятника — задача достаточно сложная. Дело в том, что период зависит от формы физического маятника, его конфигурации. Но для любого физического маятника можно подобрать такой математический маятник, период колебаний которого будет равен периоду колебаний данного физического маятника. Так мы и поступим: подберем математический маятник, «эквивалентный» системе, изображенной на рисунке 11.

Период малых колебаний математического маятника зависит только от его длины. Так что нам достаточно найти длину «эквивалентного» математического маятника — так называемую приведенную длину физического маятника.

На рисунке 11 показано положение равновесия нашей системы. При этом центр тяжести системы (точка $M$) находится на вертикали, проходящей через центр вращения $O$; $\mathbf{d}$ — радиус-вектор точки $M$ относительно $O$. Пусть $l$ — приведенная длина физического маятника. Если при колебаниях угловые скорости $\omega$ и $\omega'$ вращения векторов $\mathbf{d}$ и $\mathbf{l}$ вокруг точки $O$ одинаковы, то и периоды колебаний маятников одинаковы. Найдем $\omega$ и $\omega'$.

Пусть $\varphi$ — максимальный угол отклонения радиуса-вектора $\mathbf{d}$ от вертикали. Найдем угловую скорость точек системы в тот момент, когда радиус-вектор $\mathbf{d}$ составляет угол $\theta$ с вертикалью. Потенциальная энергия системы в момент максимального отклонения равна (рис. 12)

$$\Pi_\varphi=(m_1+m_2)gh_\varphi=(m_1+m_2)gd(1-\cos\varphi).$$

(Потенциальная энергия системы в положении равновесия принята равной нулю.) В момент отклонения на угол $\theta$ потенциальная энергия равна

$$\Pi_\theta=(m_1+m_2)gh_\theta=(m_1+m_2)gd(1-\cos\theta),$$

а кинетическая энергия равна

$$K_\theta=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2},$$

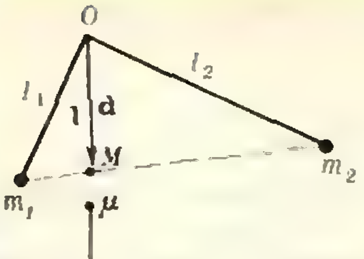


Рис. 11.

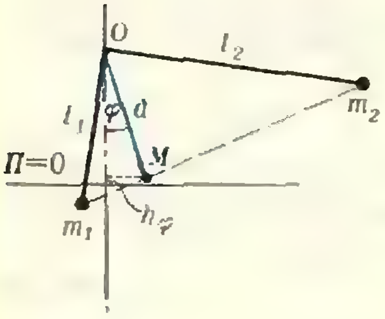


Рис. 12.

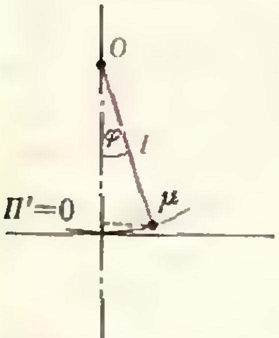


Рис. 13

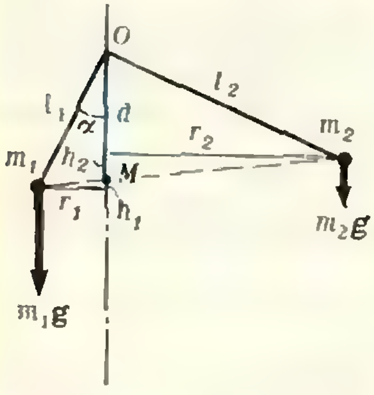


Рис. 14.

где $v_1 = \omega l_1$ и $v_2 = \omega l_2$ — линейные скорости шариков в этот момент. Согласно закону сохранения энергии $K_\theta = П_\varphi - П_\theta$, т. е.

$$\frac{m_1\omega^2 l_1^2}{2} + \frac{m_2\omega^2 l_2^2}{2} = (m_1 + m_2)\,gd\,(\cos\varphi - \cos\theta),$$

откуда

$$\omega = \sqrt{2gd\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\,(\cos\varphi - \cos\theta)}\,. \qquad (1)$$

Для математического маятника (точка массы $\mu$, подвешенная на нити длиной $l$) потенциальная энергия в момент максимального отклонения на угол $\varphi$ равна (рис. 13)

$$П'_\varphi = \mu g l\,(1 - \cos\varphi).$$

При отклонении на угол $\theta$ —

$$П'_\theta = \mu g l\,(1 - \cos\theta),$$

$$K'_\theta = \mu\,\frac{(v')^2}{2} = \mu\,\frac{(\omega')^2 l^2}{2}\,.$$

Из закона сохранения энергии

$$\mu g l\,(1 - \cos\theta) + \mu\,\frac{(\omega')^2\,l^2}{2} = \mu g l\,(1 - \cos\varphi)$$

найдем $\omega'$:

$$\omega' = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\theta)}\,. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) видно, что если подобрать математический маятник такой длины $l$, чтобы

$$\frac{2g}{l} = 2gd\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\,,$$

то колебания этого маятника будут синхронны колебаниям системы, изображенной на рисунке 11.

Итак, приведенная длина физического маятника равна

$$l = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{d\,(m_1 + m_2)}\,. \qquad (3)$$

Найдем теперь расстояние $d$ от центра качаний $O$ до центра тяжести системы. Пусть $\alpha$ — угол, который в положении равновесия образует стержень длины $l_1$ с вертикалью (рис. 14). Тогда $m_1 g r_1 = m_2 g r_2$, или

$$m_1 g l_1 \sin\alpha = m_2 g l_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = m_2 g l_2 \cos\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_2 l_2}{m_1 l_1},\quad \sin\alpha = \frac{m_2 l_2}{\sqrt{m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{m_1 l_1}{\sqrt{m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2}}\,.$$

Потенциальную энергию системы в положении равновесия мы приняли равной нулю. Это означает, что $m_2 g h_2 - m_1 g h_1 = 0$ (см. рис. 14), т. е.

$$m_1 g\,(d - l_1\cos\alpha) + m_2 g\,(d - l_2\sin\alpha) = 0.$$

Из последнего равенства, подставив найденные выражения для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, найдем

$$d = \frac{\sqrt{m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2}}{m_1 + m_2}.$$

Подставив это выражение для $d$ в формулу (3), найдем приведенную длину физического маятника:

$$l = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{\sqrt{m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2}}.$$

Таким образом, период свободных колебаний системы равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\,\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{\sqrt{m_1^2 l_1^2 + m_2^2 l_2^2}}}.$$

*Т. Петрова*

◆

**Ф381.** *В устройстве для определения изотопного состава (масс-спектрографе) однозарядные ионы калия с атомными весами* $A_1 = 39$ *и* $A_2 = 41$ *сначала ускоряются в электрическом поле, а затем попадают в однородное магнитное поле, перпендикулярное к направлению их движения (рис. 15). В процессе опыта из-за несовершенства аппаратуры ускоряющий потенциал меняется около среднего значения* $u_0$ *на величину* $\pm\Delta u$. *С какой относительной точностью* $\frac{\Delta u}{u_0}$ *нужно поддерживать значение ускоряющего потенциала, чтобы пучки изотопов калия не перекрывались?*

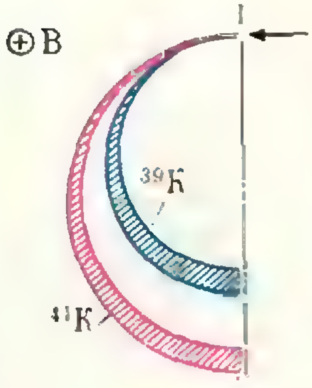


Рис. 15.

На движущуюся заряженную частицу в магнитном поле действует сила Лоренца, перпендикулярная скорости частицы и равная по абсолютной величине $qvB$. Здесь $q$ — заряд частицы, $v$ — ее скорость, $B$ — индукция магнитного поля. В однородном магнитном поле частица будет двигаться по окружности, радиус $R$ которой можно найти из второго закона Ньютона:

$$m\frac{v^2}{R} = qvB, \quad \text{и} \quad R = \frac{mv}{qB},$$

где $m$ — масса частицы. Если воспользоваться законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = qu,$$

то радиус траектории можно выразить через ускоряющий потенциал $u$:

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2um}{q}}.$$

Это соотношение показывает, что радиус траектории зависит от произведения $um$. При изменении ускоряющего потенциала радиус траектории каждого из пучков калия будет изменяться (см. рис. 15). Чтобы пучки ионов не перекрывались, необходимо выполнение следующего условия:

$$(u_0 + \Delta u)m_1 < (u_0 - \Delta u)\,m_2,$$

или

$$m_1 + \frac{\Delta u}{u_0}m_1 < m_2 - \frac{\Delta u}{u_0}m_2,$$

где $m_1$ и $m_2$ — массы ионов калия, пропорциональные атомным весам $A_1$ и $A_2$ соответственно. Отсюда

$$\frac{\Delta u}{u_0} < \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1} = 0{,}025 = 2{,}5\%.$$

Заметим, что современная экспериментальная техника позволяет фиксировать ускоряющий потенциал с гораздо более высокой точностью (на несколько порядков).

*С. Козел*

**Ф382.** *Найти радиус наибольшей капли воды, которая может испариться, не поглотив тепла извне.*

При испарении капли без поглощения тепла извне необходимое для испарения количество теплоты $Q$ получается за счет уменьшения поверхностной энергии капли $U_п$ при уменьшении площади ее поверхности.

Пусть радиус капли уменьшился на $\Delta R$, тогда объем капли уменьшился на

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(R-\Delta R)^3 =$$

$$= 4\pi R^2\Delta R - 4\pi R(\Delta R)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta R)^3.$$

При малом $\Delta R$ можно пренебречь вторым и третьим членами этого равенства по сравнению с первым членом, так что

$$\Delta V = 4\pi R^2\Delta R.$$

Масса испарившейся при этом воды равна

$$m = \rho\Delta V = 4\pi\rho R^2\Delta R.$$

Для ее испарения необходимо количество теплоты

$$Q = Lm = 4\pi L\rho R^2\Delta R$$

где $L = 2{,}26\cdot 10^6$ *дж/кг* — удельная теплота парообразования воды. Площадь поверхности капли уменьшилась на

$$\Delta S = 4\pi R^2 - 4\pi(R-\Delta R)^2 = 8\pi R\Delta R$$

(членом, содержащим $(\Delta R)^2$, мы пренебрегаем), поэтому поверхностная энергия уменьшилась на

$$\Delta U_п = 8\pi R\Delta R\sigma,$$

где $\sigma = 7{,}2\cdot 10^{-2}$ *дж/м²* — коэффициент поверхностного натяжения воды.

Приравняем выражения для $Q$ и $\Delta U_п$:

$$4\pi L\rho R^2\Delta R = 8\pi R\Delta R\sigma,$$

откуда

$$R = \frac{2\sigma}{\rho L} \sim 10^{-10}\ м = 10^{-8}\ см.$$

Такая капля существовать не может, так как мы получили, что $R$ порядка межмолекулярных расстояний в воде. Следовательно, никакая капля не может испариться, не поглощая тепла извне.

При решении задачи мы предполагали, что температура капли и, следовательно, ее внутренняя энергия не изменяются. Это изменение можно, в принципе, учесть, но это не изменит ответ. Действительно, удельная теплоемкость воды равна 1 *кал/г·град*, а удельная теплота парообразования — 539 *кал/г·град*. Следовательно, если температура капли комнатная (20°С), то при охлаждении ее до 0°С может испариться примерно $\frac{20}{539} \approx 0{,}04$ массы капли. Поэтому ясно, что учет изменения внутренней энергии капли не может изменить ответ.

*И. Слободецкий*

---

# Как устроено атомное ядро

*(Начало см. с. 30)*

...Воображению приходится особенно тяжко, когда стараешься представить строение ядра тяжелого атома. Как нам говорят, в ядре каждого атома присутствует компактное образование из протонов (число которых соответствует числу электронов на орбитах вокруг ядра) и нейтронов (необходимых для объяснения существования протонов и других надобностей). Однако протоны, будучи заряжены положительно, должны испытывать отвращение к себе подобным и избегать тесной близости с ними аналогично электронам. Как можно представить их упакованными вместе?

Ответ профессора Андраде не заставил себя ждать:

«Полковник Мур-Бразон, стараясь идти в ногу со временем, задает капитальные вопросы относительно таких современных фундаментальных понятий физики, как протон и нейтрон.

*(Продолжение см. с. 55)*

**В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М366—М375 и Ф373—Ф382 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).**

## Математика

Почти все читатели, приславшие нам решения задач **М366, М371, М374**, успешно справились с этими задачами. Остальные задачи решили: *Г. Аветисян* (Акаран Арм. ССР) **2**; *А. Алексеев* (Пермь) **7, 8, 5**; *Б. Аронов* (Саратов)**3а), б)**; *К. Аршалян* (Очамчира) **5**; *Г. Атоян* (Чаренцаван) **5**; *В. Батырев* (Москва) **9**; *А. Бер* (Ташкент) **7, 5**; *П. Билер* (ПНР) **7, 8, 0, 2, 5**; *И. Билецкий* (Рогатин) **2**; *И. Блиадзе* (Тбилиси) **5**; *Б. Блок* (Москва) **7, 8, 3а), 5**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **5**; *А. Варламов* (Ленинград) **8**; *А. Воронков* (Кемерово) **8**; *И. Воронович* (г. п. Сопоцкин Гродненской обл.) **7, 0, 5**; *И. Гандельсман* (Ленинград) **5**; *А. Гатилов* (Воронеж) **5**; *М. Гершенгорин* (Харьков) **8, 0**; *Б. Гисин* (Ленинград) **3а), б), 5**; *Г. Гительсон* (Ленинград) **3а), 5**; *Е. Глезин* (Ленинград) **3а), б)**; *Ю. Голембиовский* (Ворошиловград) **7**; *И. Гонин* (Томск) **3а)**; *А. Грицук* (Дрогичин) **7**; *С. Гришечкин* (Москва) **2, 3а), б)**; *В. Гроссман* (Одесса) **0**; *С. Губанов* (Ворошиловград) **2, 3а), б), 5**; *Э. Гузовский* (Минск) **2**; *А. Диденко* (Краснодар) **3а)**; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) **7**; *В. Ерофеев* (Новосибирск) **2**; *А. Ефашкин* (Оренбург) **8, 0**; *И. Калика* (Киев) **2, 3а)**; *Ю. и Я. Камень* (Днепропетровск) **8**; *А. Кирилов* (Ленинград) **0, 2, 5**; *В. Книжник* (Москва) **3а)**; *Л. Корельштейн* (Москва) **3а), б), 5**; *Н. Крайнюков* (Куйбышев) **7**; *М. Кузнецов* (Камышин) **5**; *Г. Куликова* (Егорьевск) **8**; *М. Кутернин* (Алма-Ата) **3а)**; *С. Лавренченко* (Москва) **2, 3а)**; *Е. Лаврова* (Ленинград) **0**; *Р. Леманн* (ГДР) **8**; *Я. Логвинович* (с. Дивны Брестской обл.) **7**; *В. Любимов* (Харьков) **7, 0, 2, 3а), 5**; *В. Медведь* (Молодечно) **0, 3а), б)**; *С. Мелихов* (Донецк) **7, 9, 0**; *А. Морозов* (Москва) **8**; *В. Мысик* (Донецк) **9**; *М. Народицкий* (Куйбышев) **8, 2, 3а), 5**; *Е. Огиевецкий* (Днепропетровск) **2, 5**; *О. Окунев* (Казань) **0**; *Д. Папуш* (Харьков) **7**; *А. Петухов* (Новокузнецк) **2**; *А. Полев* (Н. Тагил) **5**; *С. Полыгалов* (Пермь) **5**; *А. Радул* (Кишинев) **7, 9, 0, 5**; *А. Разборов* (Москва) **3а), б)**; *В. Решетов* (Троицк) **0, 3а)**; *А. Родников* (Москва) **9**; *А. Саблин* (р. п. Хохольский Воронежской обл.) **8**; *Д. Самощенко* (Свердловск) **7**; *Э. Свылан* (Рига) **7, 0**; *М. Селектор* (Ленинград) **8, 0, 3а), б) 5**; *Н. Тренев* (Москва) **8, 0, 5**; *В. Трофимов* (Москва) **3а), б)**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **7—0, 2, 3а), 5**; *В. Угриновский* (Хмельник) **9**; *В. Фалько* (Харьков) **5**; *И. Царьков* (Москва) **3а), б)**; *А. Цуканов* (Тарту) **2**; *Ю. Шмидт* (Алма-Атинский табак-совхоз) **7**; *В. Шумилов* (Череповец) **3а)**; *Л. Энтин* (Москва) **3а), б)**; *В. Ясинский* (Винница) **5**.

## Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф378** и **Ф381**. Остальные задачи правильно решили: *Х. Абдуллин* (Алма-Ата) **3**; *Г. Айзин* (Брест) **3, 4, 7**; *Е. Алексеев* (Москва) **2**; *А. Алмазов* (Пушкин) **5**; *В. Андреев* (Ленинград) **3, 5, 7, 9, 0**; *С. Антонюк* (Киев) **9**; *М. Бабаев* (Баку) **3**; *А. Бабанин* (Жданов) **4, 2**; *Ф. Багдасарян* (Баку) **3, 9**; *А. Байменов* (Джетысай) **9**; *К. Балашов* (д. Клишева Московской обл.) **9**; *С. Балашов* (Москва) **4, 7, 9**; *О. Баркалов* (п. Черноголовка Московской обл.) **4**; *А. Бахиров* (Ленинград) **2**; *В. Бегларян* (Калинин) **9, 0**; *Г. Бежиашвили* (Рустави) **0**; *Т. Бейко* (Киев) **4**; *А. Беликов* (Москва) **3, 4**; *Н. Беляева* (Алма-Ата) **4**; *Г. Бетин* (с. Счастливцево Херсонской обл.) **4, 9**; *П. Билер* (Вроцлав, ПНР) **0**; *О. Болтенков* (Днепропетровск) **3**; *А. Бондарев* (Львов) **4, 0**; *В. Бондаренко* (Тростянец Сумской обл.) **6, 7**; *О. Будиловский* (Киев) **3, 5**; *В. Буртовой* (Килия) **7, 9, 0, 2**; *М. Вардиашвили* (Тбилиси) **3**; *Б. Васиев* (Самарканд) **3, 4, 9**; *А. Вечер* (Минск) **2**; *Б. Виноградова* (Великие Луки) **5—7, 9**; *Б. Гайфуллин* (Салават) **7**; *И. Гарибашвили* (Тбилиси) **3, 4**; *В. Гаркавый* (Лида) **5**; *В. Гармаш* (Запорожье) **3—5**; *Ф. Гезаков* (Тбилиси) **9**; *А. Гетман* (Моздок) **3, 4, 7**; *Р. Гибадуллин* (*Бугульма*) **3, 4**; *И. Гиззатуллин* (д. Старый Ашит ТАССР) **9**; *О. Годин* (Симферополь) **3, 9, 0**; *Ю. Гончаров* (Ставрополь) **9**; *А. Грайфер* (Запорожье) **4, 5**; *А. Грицук* (Дрогичин) **3**; *В. Гурьянов* (Канаш) **5**; *С. Дваренас* (Клайпеда) **3—5**; *К. Дежурко* (д. Полторановичи Брестской обл.) **7**; *П. Демкин* (Донецк) **3, 4**; *С. Дохоян* (Ереван) **0**; *А. Дубровин* (д. Березовка Кировской обл.) **7**; *В. Житарь* (Кишинев) **0**; *В. Жуков* (Абаза) **4, 7**; *А. Забродин* (п. Черноголовка Московской обл.) **3, 5, 0**; *М. Заржевский* (Москва) **3**; *В. Засимчук* (Киев) **4, 9**; *А. Захаров* (Брест) **2**; *И. Ивашков* (Челябинск) **4**; *И. Ильинский* (Ленинград) **9**; *И. Ихсанов* (р. п. Лапшево ТАССР) **9**; *В. Казаков* (Омск) **2, 3, 5**; *А. Караджев* (Москва) **3**; *Р. Кашаева* (Волжский) **9**; *В. Киреев* (Саратов) **9**; *В. Кириаков* (Тбилиси) **4**; *М. Кирсанов* (Тула) **4, 2**; *И. Кирюшин* (Ивано-Франковск) **2**; *Ю. Кленов* (Целиноград) **3, 2**; *А. Козодой* (Челябинск) **9**; *В. Конотоп* (Харьков) **3—5**; *К. Копейкин* (Ленинград) **4—7**; *С. Копыловский* (п. Знобь-Новгородское Сумской обл.) **3, 4**; *С. Кулагин* (Москва) **9**, *С. Курдюков* (Москва) **3, 0**; *Ю. Лебединский* (Могилев) **3—5**; *А. Лебедь* (Днепропетровск) **3—5, 7**; *Р. Леманн* (Петерхаген, ГДР) **0**; *Ю. Литвинович* (п/о Ситница Брестской обл.) **7, 0**; *О. Лищенко* (Киев) **3—6, 9, 0, 2**; *В. Лобзин* (Свердловск) **3, 9**;

*(Окончание см. с. 80)*

*В. Гутенмахер,*
*Б. Ивлев,*
*Ж. Раббот*

# Сложение гармонических колебаний

В п. 80 § 16 учебника «Алгебра и начала анализа 10» понятие гармонического колебания вводится на примере движения шарика, прикрепленного к двум горизонтальным пружинам (рис. 1). О физических процессах, в которых естественно возникают гармонические колебания, мы здесь говорить не будем. Наша цель — разобраться со сложением гармонических колебаний одинаковой частоты.

Как мы уже отметили (рис. 1), гармоническое колебание можно представить как колебание точки около начала координат $O$ вдоль оси $Ox$. График этого движения такой же, как у функции

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Наибольшее отклонение точки $x(t)$ от точки $O$ в процессе колебания равно, разумеется, числу $|A|$ и называется *амплитудой* колебания. *Период колебания* равен $\frac{2\pi}{|\omega|}$. Величина $|\omega|$ называется *частотой* колебания. Начальное положение точки $x(t)$ (в момент времени $t = 0$) задается величиной $A\cos\varphi$.

Разумеется, одно и то же гармоническое колебание может быть задано различными формулами.

На примере движения колеблющихся точек поясним, что означает сложение двух гармонических колебаний. Если одна точка $x_1$ с начальным положением на оси $Ox$ $A_1\cos\varphi_1$ совершает колебание по закону $x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, а другая точка $x_2$ с начальным положением $A_2\cos\varphi_2$ — по закону $x_2(t) = A_2(\cos\omega_2 t + \varphi_2)$, то суммой этих колебаний будет колебание некоторой точки $x$ с начальным положением $A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2$ по закону $x(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$. Оказывается, что если точки $x_1$ и $x_2$ колеблются с одинаковой частотой $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то суммой их будет также гармоническое колебание той же частоты $\omega$. Этот факт в п. 82 § 16 учебника выводится из того, что сумма двух решений дифференциального уравнения $y'' = -\omega^2 y$ — снова решение этого уравнения (а все его решения имеют вид $y = A\cos(\omega t + \varphi)$. А нельзя ли получить этот результат как-нибудь попроще, не зная дифференциальных уравнений?

Можно попробовать складывать гармонические колебания графически. На рисунке 2 изображены графики двух функций с одинаковым периодом: $y = 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$ и $y = \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$. По этим двум графикам совсем непонятно, что их сумма $y = 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ будет гармоническим колебанием. Так что, как видим, это не очень-то удобно.

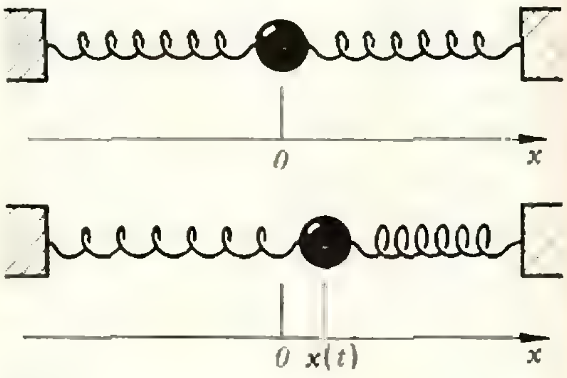


Рис. 1.

В случае, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, гораздо проще проиллюстрировать сложение гармонических колебаний с помощью их *векторных диаграмм*. Объясним, что это такое.

Прежде всего условимся гармоническое колебание записывать в виде $A\cos(\omega t + \varphi)$, где $A > 0$, $\omega > 0$ и $\varphi \in [0, 2\pi[$. К такому виду мы можем привести любое гармоническое колебание. Рассмотрим теперь некоторую систему координат $XOY$ и возьмем окружность радиуса $A$ с центром $O$ в начале координат (напомним, что $A$ выбрано положительным). Предположим, что по этой окружности против часовой стрелки движется некоторая точка $P(t)$ — ее положение зависит от времени $t$, — так, что вектор $\vec{OP}(t)$ вращается равномерно, проходя $\omega$ радиан за единицу времени ($\omega$ выбрано положительным). Допустим, что в начальный момент времени ($t = 0$) вектор $\vec{OP}(0)$ составляет с положительным направлением оси $OX$ угол $\varphi$ ($\varphi \in [0, 2\pi[$), то есть, что координаты точки $P(0)$ — это ($A\cos\varphi$; $A\sin\varphi$). Тогда угол, который образует вектор $\vec{OP}(t)$ с положительным направлением оси $OX$ в момент времени $t$, равен $\omega t + \varphi$, так что координаты вектора $\vec{OP}(t)$ — это $(A\cos(\omega t + \varphi);\ A\sin(\omega t + \varphi))$, и мы получаем, что проекция точки $P(t)$ на ось $OX$ и проекция точки $P(t)$ на ось $OY$ совершают гармонические колебания, имеющие одинаковые амплитуды и частоты! Поэтому гармоническое колебание точки, например, на оси $OX$, можно интерпретировать как колебание проекции некоторого вектора $\vec{OP}(t)$, равномерно вращающегося вокруг точки $O$, на ось $OX$. Начальное положение вектора $\vec{OP}(t)$, то есть $\vec{OP}(0)$, определяет амплитуду колебания (она равна длине вектора $\vec{OP}(0)$) и начальную фазу $\varphi = (\widehat{\vec{OP}(0), \vec{OX}})$; — нет только частоты. Вектор $\vec{OP}(0)$ и называется *векторной диаграммой* гармонического колебания с амплитудой $A$ и начальной фазой $\varphi$.

Задача 1. Нарисуйте векторные диаграммы следующих гармонических колебаний:

а) $-3\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $3\cos\left(2t + \frac{4\pi}{3}\right)$;

в) $3\cos\left(-2t + \frac{2\pi}{3}\right)$; г) $4\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$;

д) $3\sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$; е) $3\sin\left(-2t + \frac{\pi}{3}\right)$.

С помощью векторных диаграмм разобраться со сложением гармонических колебаний уже легко. Нарисуем векторные диаграммы двух гармонических колебаний (одинаковой частоты!): векторы $\vec{OP}_1$ и $\vec{OP}_2$ (рис. 3). Тогда векторной диаграммой суммы этих колебаний будет вектор $\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$. В самом деле,

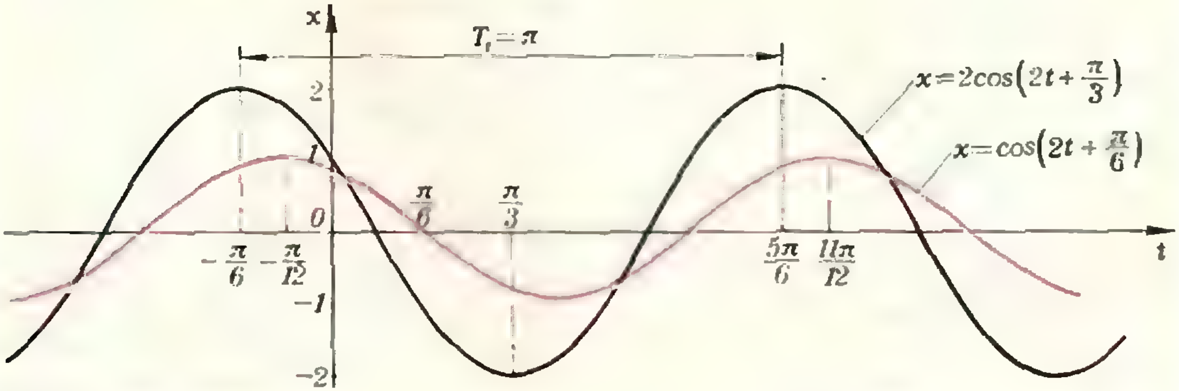


Рис. 2.

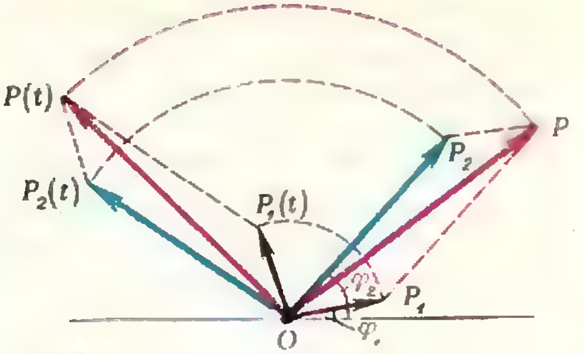


Рис. 3.

проекции векторов $\overrightarrow{OP}_1(t)$ и $\overrightarrow{OP}_2(t)$ на ось $OX$ записываются так:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1),$$

где $A_1 = |\overrightarrow{OP}_1|$, $\varphi_1 = (\widehat{\overrightarrow{OP}_1, \overrightarrow{OX}})$;

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2),$$

где $A_2 = |\overrightarrow{OP}_2|$, $\varphi_2 = (\widehat{\overrightarrow{OP}_2, \overrightarrow{OX}})$. Проекция на ось $OX$ их суммы $\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OP}_1(t) + \overrightarrow{OP}_2(t)$ равна $x_1 + x_2$, то есть $A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$, так что вектор $\overrightarrow{OP}$ в самом деле является векторной диаграммой для суммы наших гармонических колебаний.

Заметим теперь, что вектор $\overrightarrow{OP}(t)$ — диагональ параллелограмма со сторонами $OP_1(t)$ и $OP_2(t)$ (см. рис. 3). Поскольку векторы $\overrightarrow{OP}_1(t)$ и $\overrightarrow{OP}_2(t)$ вращаются с одинаковой угловой скоростью, весь параллелограмм вращается как жесткая фигура. Поэтому и диагональ его вращается с той же угловой скоростью $\omega$, так что проекция вектора $\overrightarrow{OP}(t)$ на ось $OX$ (абсцисса точки $P(t)$) совершает гармоническое колебание с той же частотой $\omega$, что и проекции векторов $\overrightarrow{OP}_1(t)$ и $\overrightarrow{OP}_2(t)$ на ось $OX$ (абсциссы точек $P_1(t)$ и $P_2(t)$).

Ясно, как вычислить амплитуду и начальную фазу этой суммы (амплитуда — это длина диагонали параллелограмма, а начальная фаза — угол, который эта диагональ составляет с осью $OX$ — см. задачу № 260 на с. 59 учебника).

Задача 2. Изобразите векторные диаграммы суммы колебаний а) и б), г) и е) из задачи 1 и найдите их амплитуды и начальные фазы.

С помощью векторных диаграмм можно доказать еще одно важное утверждение, именно, что *всякое гармоническое колебание можно представить формулой* $f(t) = a\cos\omega t - b\sin\omega t$. Остановимся на этом подробнее.

Пусть у нас есть гармоническое колебание $A\cos(\omega t + \varphi)$ с частотой $\omega$, и пусть $\overrightarrow{OP}(0) = (A\cos\varphi;\ A\sin\varphi)$ — его векторная диаграмма в системе координат $XOY$. Пусть $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — взаимно перпендикулярные единичные векторы, задающие систему координат $XOY$ (см. п. 70 § 14 учебника «Алгебра и начала анализа, 9»). Тогда $\overrightarrow{OP}(0) = A\cos\varphi\cdot\vec{i} + A\sin\varphi\cdot\vec{j}$. Допустим теперь, что векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ равномерно и одновременно с вектором $\overrightarrow{OP}(t)$ вращаются вокруг точки $O$ с той же угловой скоростью $\omega$, что и вектор $\overrightarrow{OP}(t)$. Тогда $\vec{i}(t) = (\cos\omega t;\ \sin\omega t)$, $\vec{j}(t) = (-\sin\omega t;\ \cos\omega t)$. Поскольку векторы $\overrightarrow{OP}(t)$, $\vec{i}(t)$ и $\vec{j}(t)$ вращаются как жесткая фигура, и в начальный момент времени $\overrightarrow{OP}(0) = a\cdot\vec{i} + b\cdot\vec{j}$ ($a = A\cos\varphi$, $b = A\sin\varphi$), то в момент времени $t$ $x$-я координата, то есть число $A\cos(\omega t + \varphi)$, вектора $\overrightarrow{OP}(t)$ будет равна сумме $x$-х координат векторов $a\cdot\vec{i}(t)$ и $b\cdot\vec{j}(t)$, то есть

$$A\cos(\omega t + \varphi) = a\cos\omega t - b\sin\omega t = A(\cos\varphi\cos\omega t - \sin\varphi\sin\omega t).$$

Таким образом, мы представили гармоническое колебание $A\cos(\omega t + \varphi)$ в виде суммы двух также гармонических колебаний той же частоты $\omega$: $a\cos\omega t$ и $-b\sin\omega t$ (ведь график синуса — это сдвинутый по фазе на четверть периода график косинуса.

*Г. Перевалов*

# Графическое задание функции

Летом этого года на вступительном устном экзамене по математике в одном из вузов между экзаменатором (Э) и абитуриентом (А) произошел следующий разговор.

Э. Какие способы задания функции вы знаете?

А. Существует три способа задания функции: аналитический, табличный и графический.

Э. Приведите пример функции, заданной графическим способом.

А (после некоторой паузы). Это что, надо построить график функции? А какой функции?

Э. Речь идет не о построении графика функции, заданной, например, с помощью формулы, а о самом задании функции с помощью графика. Ведь вы только что сказали, что функция может быть задана графически. Вот и требуется задать, определить какую-нибудь функцию графически.

А ... (молчит).

Э. Вспомните, что значит задать функцию.

А. Чтобы задать функцию, надо взять два множества — множество $X$ и множество $Y$ — и указать такое соответствие между ними, при котором каждому $x \in X$ ставится в соответствие один и только один элемент из множества $Y$.

Э. Хорошо. А теперь возьмите координатную плоскость — на листе бумаги нарисуйте прямоугольную систему координат и на каждой оси отметьте единицу измерения. Далее, на оси $Ox$ возьмите какой-нибудь отрезок — это будет множество $X$, а на оси $Oy$ — другой отрезок — множество $Y$. Для определения функции осталось только определить соответствие между этими множествами. Как это можно сделать?

А. Соответствие можно задать с помощью формулы.

Э. А графически как задать? Нас же интересует именно этот способ.

А... (молчит).

Не будем дальше приводить этот разговор. Поставленная задача оказалась для абитуриента непосильной. Затруднения у абитуриентов вызывают и другие «графические» вопросы, т. е. вопросы, связанные с графиками функций — описание свойств функции по ее графику (исследование функции), построение графиков функций путем преобразования данного графика и т. д. Обсуждение таких вопросов и является целью настоящей статьи.

### Некоторые напоминания

Нам потребуются два знакомых вам определения. Напомним их и сделаем некоторые замечания.

Первое возьмем из школьного учебника*).

Определение 1. Соответствие между множеством $X$ и множеством $Y$, при котором каждому элементу множества $X$ соответствует один и только один элемент множества $Y$, называется *функцией*. Множество $X$ называется *областью определения функции*.

Второе — из статьи А. Н. Колмогорова **).

---

*) Алгебра. Учебное пособие для 6 класса средней школы, под редакцией А. И. Маркушевича (М., «Просвещение», 1976, с. 69).

**) А. Н. Колмогоров. Что такое график функции, «Квант», 1970, № 2.

Определение 2. Пусть на множестве $X$ задана функция $y = f(x)$. *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество всех таких пар $(x, y)$, что:

1) первый элемент $x$ пары $(x, y)$ принадлежит области определения $X$ функции $y = f(x)$;

2) второй элемент $y$ пары $(x, y)$ есть значение функции $y = f(x)$ в точке $x$.

Так, для функции $f(x)$, заданной таблицей

| $x$ | а | б | в | г | д | е |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 5 |

графиком будет множество

$$\Gamma_f = \{(а, 2), (б, 1), (в, 3), (г, 2), (д, 1), (е, 5)\}.$$

Для функций с бесконечной областью определения все пары $(x, f(x))$ выписать, естественно, нельзя. Поэтому приходится описывать эти пары иначе. Например, для функции $y = f(x) = x^2$, $x \in R$ график состоит из всевозможных пар действительных чисел вида $(x, x^2)$, т. е из всех пар $(x, y)$, для которых выполнено условие $y = x^2$. Используя обозначения, принятые в теории множеств, определение графика функции $y = x^2$ можно записать в виде формулы

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in R, \ y = x^2\}.$$

А общее определение графика функции $y = f(x)$, $x \in X$, можно записать в виде следующей формулы:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in X, \ y = f(x)\}.$$

Далее мы ограничимся числовыми функциями. У числовых функций $y = f(x)$ область определения состоит из действительных чисел, значения этих функций также являются действительными числами, а график состоит из всех пар $(x, y)$ действительных чисел $x$ и $y$, для которых выполняется условие $y = f(x)$.

Напомним, что множество всех пар $(x, y)$ действительных чисел $x$ и $y$ называется *числовой плоскостью* и обозначается символом $R^2$, а любое подмножество точек числовой плоскости называется *геометрической фигурой*. Геометрической фигурой будет, например, ось $Ox$, т. е. множество точек

$$\{(x, y) \mid x \in R, \ y = 0\}.$$

График числовой функции $y = f(x)$ также будет фигурой числовой плоскости $R^2$.

Точки и геометрические фигуры числовой плоскости (в частности, графики числовых функций) можно наглядно изображать на чертеже. Для этого строим координатную плоскость и на ней точкой с координатами $x$, $y$ изображаем точку $(x; y)$ числовой плоскости.

Согласно определению 1 каждому элементу $x \in X$ соответствует один и только один элемент $y$ из множества $Y$, поэтому множество $\Gamma_f$ — график функции $y = f(x)$ — не должно содержать двух пар с общими первыми элементами и различными вторыми, т. е. на графике числовой функции не должно быть двух точек с одинаковыми абсциссами и различными ординатами. Этот факт сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Если множество $\Gamma_f$ есть график числовой функции $y = f(x)$, то каждая прямая, параллельная оси $Oy$, должна иметь не более одной общей точки с множеством $\Gamma_f$.*

После этих предварительных замечаний обратимся к поставленным в начале вопросам.

### Графический способ задания функции

Возьмем на координатной плоскости точку $(x; y)$. Будем считать, что точка $(x; y)$ числу $x$ — абсциссе точки — ставит в соответствие число $y$ — ординату точки.

Теперь на координатной плоскости возьмем некоторое точечное множество $M$, т. е. множество пар $(x; y)$ действительных чисел $x$ и $y$. Множество всех абсцисс $x$ точек $(x; y) \in M$

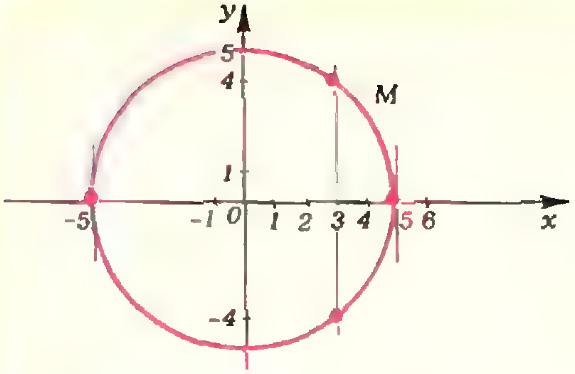


Рис. 1.

обозначим через $X = \{x\}$, множество всех ординат $y$ этих точек — через $Y = \{y\}$. Будем считать, что множество $M$ числу $x \in X$ ставит в соответствие все те числа $y \in Y$, которые являются ординатами точек $(x; y) \in M$ (т. е. точек, имеющих одну и ту же абсциссу, равную $x$). Тогда говорят, что *точечное множество $M$ задает соответствие $f$ между множествами $X$ и $Y$*. Само же множество $M$ называют *графиком соответствия $f$*.

Например, на рисунке 1 множество $M$ — окружность радиуса 5 с центром в начале координат. Эта окружность задает соответствие между отрезком $[-5; 5]$ на оси $Ox$ и отрезком $[-5; 5]$ на оси $Oy$. Точке 3 на оси $Ox$ соответствуют 4 и $-4$ на оси $Oy$, точке 5 на оси $Ox$ — точка 0 на оси $Oy$ и т. д.

Когда соответствие $f$, заданное множеством $M$ на координатной плоскости, будет функцией? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к определению функции. Из него сразу следует, что соответствие $f$, определяемое множеством $M$, будет функцией, если каждой абсциссе $x \in X$ соответствует единственная ордината $y \in Y$. Получаем теорему, обратную теореме 1.

Теорема 2. *Если точечное множество $M$ на координатной плоскости таково, что каждая прямая, параллельная оси $Oy$, пересекает его не более чем в одной точке, то множество $M$ есть график некоторой функции $y = f(x)$.*

Объединяя теоремы 1 и 2, получим следующую теорему.

Теорема 3. *Для того чтобы множество $M$ на координатной плоскости являлось графиком некоторой функции (определяло функцию) необходимо и достаточно, чтобы каждая прямая, параллельная оси $Oy$, пересекала его не более одного раза* (имела с $M$ не более одной общей точки).

Теперь мы видим, что множество $M$ на рисунке 1 функцию не определяет — прямая, параллельная оси $Oy$ и проходящая через точку $(3,0)$, пересекает множество $M$ в двух точках; то же самое верно и для всех других точек интервала $]-5; 5[$.

А вот соответствие $f$ между множествами $X = [1; 5]$ на оси $Ox$ и $Y = [1; 3]$ на оси $Oy$, определенное множеством $M$ на рисунке 2, является функцией,—каждая прямая, параллельная оси $Oy$, пересекает множество $M$ не более чем в одной точке.

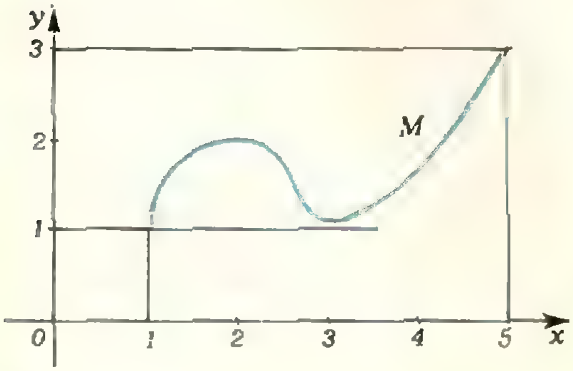


Рис. 2.

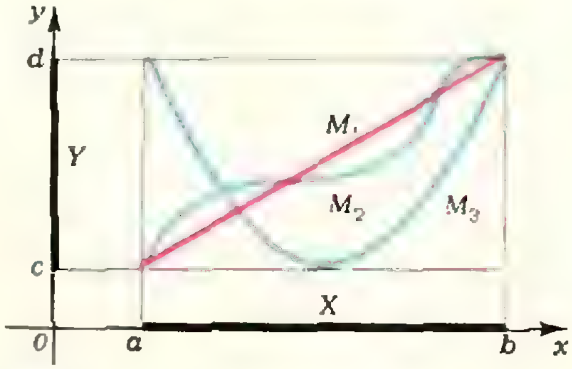


Рис. 3.

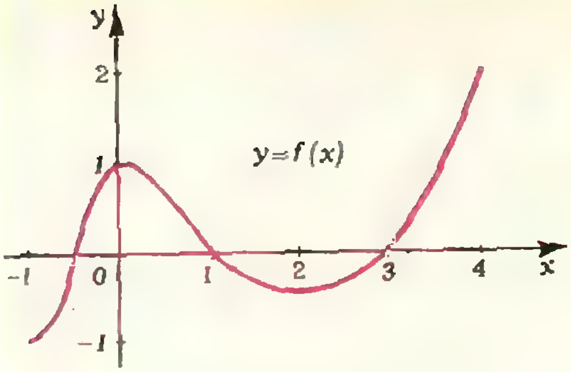


Рис. 4.

Заметим, что для данных множеств $X \subset (Ox)$, $Y \subset (Oy)$ можно построить бесконечно много функций с областью определения $X$, принимающих значения в $Y$. Так, на рисунке 3 каждая из трех кривых является графиком некоторой функции с областью определения $[a; b] \subset (Ox)$, принимающей значения в $[c; d] \subset (Oy)$, т. е. каждая из них определяет функцию графически.

Вот что примерно следует знать абитуриенту по вопросу о графическом задании функции.

## Исследование функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана своим графиком. Требуется исследовать ее.

Это означает следующее.

1. *Найти область определения функции.*

2. *Найти множество значений функции; выяснить, является ли функция ограниченной.*

3. *Выяснить, имеет ли функция наибольшее и наименьшее значение.*

4. *Определить, является ли функция четной (нечетной), периодической.*

5. *Найти промежутки, на которых функция положительна, отрицательна; выяснить, где функция обращается в нуль.*

6. *Найти промежутки возрастания, убывания, постоянства функции.*

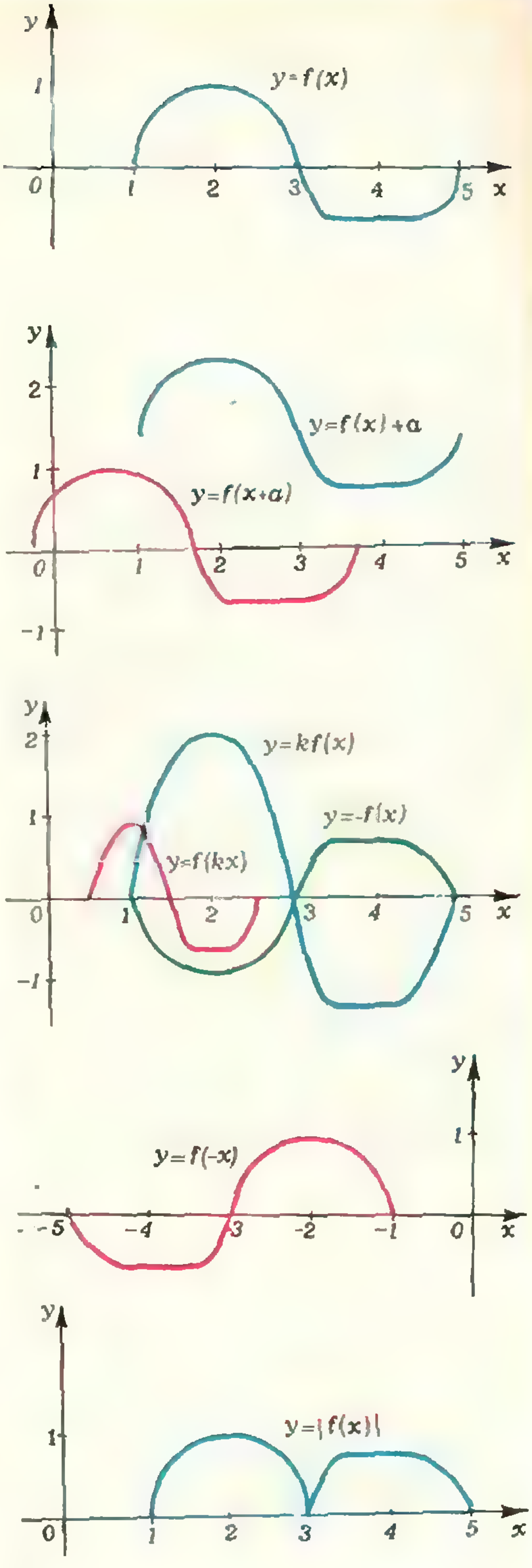


Рис. 5.

| | |
|---|---|
| $y = f(x) + a$ | перенос графика функции $y = f(x)$ на $a$ единиц вверх (по оси $Oy$) |
| $y = f(x + a)$ | перенос графика функции $y = f(x)$ на $a$ единиц влево (по оси $Ox$) |
| $y = kf(x)$ $(k > 0)$ | сжатие графика функции $y = f(x)$ к оси $Ox$ в отношении $1/k$ |
| $y = -f(x)$ | отражение графика функции $y = f(x)$ относительно оси $Ox$ |
| $y = f(kx)$ $(k > 0)$ | сжатие графика функции $y = f(x)$ к оси $Oy$ в отношении $1\ (1/k)$ |
| $y = f(-x)$ | отражение графика функции $y = f(x)$ относительно оси $Oy$ |
| $y = \|f(x)\|$ | отражение относительно оси $Ox$ частей графика функции $y = f(x)$, лежащих ниже оси $Ox$ |

Для такого исследования функции требуются известные определения: четной (нечетной) функции, возрастающей (убывающей) в промежутке функции, ограниченной функции и так далее. Все эти определения обычно используются для исследования функции, заданной формулой (аналитически), но они пригодны для исследования всякой числовой функции, каким бы способом она ни задавалась. Поэтому все определения будут «работать» и для функций, заданных графически (Надо только учитывать, что каждое изображение графика функции — скажем, карандашом на бумаге — приблизительное и дает лишь общее представление о функции, не позволяя точно определить значение функции в данной точке.) Рассмотрим один пример.

На рисунке 4 задана функция $y = f(x)$. Исследуем ее по приведенной схеме.

1. Область определения функции $f : X = [-1;\ 4]$.

2. Множество значений функции $f : Y = [-1;\ 2]$. Функция $f$ ограничена, так как для всех $x \in X$ будет $|f(x)| \leqslant 2$.

3 Наибольшее значение функция $f$ принимает в точке $x = 4$, $f(4) = 2$, наименьшее — в точке $x = -1$, $f(-1) = -1$.

4 Функция $f$ не является ни четной, ни нечетной, так как ее область определения $X$ несимметрична относительно начала координат (впрочем, этот вывод не изменится, если огра-

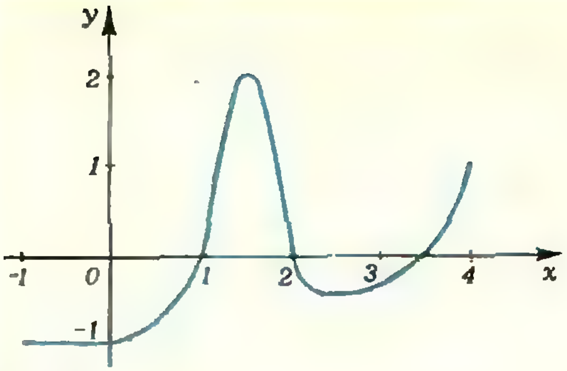


Рис. 6.

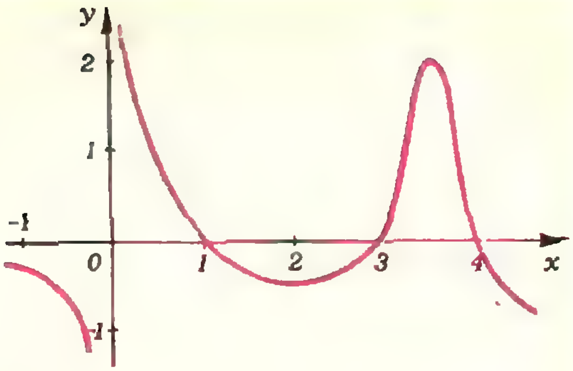


Рис. 7.

ничить область определения функции $f$ промежутком $[-1; 1]$, так как $f(-1)=-1$, $f(1)=0$, и $f(1)\neq f(-1)$, $f(1)\neq -f(-1)$. Функция $f$ непериодическая, так как ее область определения ограничена.

5. Функция $f$ положительна в промежутках $]-\frac{1}{2}; 1[$ и $]3; 4]$, отрицательна в промежутках $[-1; -\frac{1}{2}[$ и $]1; 3[$. В точках $x=-\frac{1}{2}$, $x=1$ и $x=3$ функция обращается в нуль.

6. Функция $f$ возрастает в промежутках $[-1; 0]$ и $[2; 4]$ и убывает в промежутке $[0; 2]$.

Так проводится исследование функции по ее графику.

### Построение графиков функций с помощью преобразования данного графика

Путем преобразования графика функции $y=\sin x$ вы в 10 классе получали графики функций $y=A\sin(kx+0)$, где $A$, $k$, $0$ — действительные числа. Точно так же путем преобразования графика функции $y=f(x)$ можно строить графики ряда других функций. Пусть функция $y=f(x)$ задана своим графиком. По этому графику абитуриент должен уметь строить графики следующих функций: $y=f(x)+a$, $y=f(x+a)$, $y=kf(x)$, $y=f(kx)$, $y=|f(x)|$ ($a$, $k$ — действительные числа), а также графики функций, получающиеся при различных комбинациях этих преобразований (типа $y=kf(x+a)$ и т. п.). Геометрические преобразования графика функции $y=f(x)$, при которых получаются графики приведенных выше функций, собраны в таблице (см. с. 51 и рис. 5).

Описание способов построения графиков функций читатель может найти в пособиях по математике, например: Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. Пособие по математике. М., «Наука», 1976.

#### Упражнения

1. Исследовать функцию $y=f(x)$, заданную графически (рис. 6).

2. Дан график функции $y=f(x)$ (рис. 7). Построить графики функций: а) $y=f(x)-2$; б) $y=f(x+2)$; в) $y=-f(x)$; г) $y=2f(x)$; д) $y=f(2x)$; е) $y=|f(x)|$; ж) $y=f(-x)$.

3. Дана функция $y=f(x)$. Построить графики функций, перечисленных в упражнении 2, если: а) $f(x)=x^2$; б) $f(x)=10^x$; в) $f(x)=\lg x$; г) $f(x)=\sin x$.

# Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева

Завод-втуз при автозаводе им. И. А. Лихачева является новым типом высшего учебного заведения, органически сочетающий в своей программе теоретическую и производственную подготовку специалистов высшей квалификации. Институт готовит инженеров для производственного объединения ЗиЛ, АЗЛК, 1-ГПЗ и их филиалов, расположенных в 15 городах Советского Союза.

Завод-втуз при ЗиЛе имеет три факультета: автомобильный, механико-технологический и вечерний. Автомобильный факультет готовит инженеров-механиков по проектированию и исследованию автомобилей, автомобильных поршневых двигателей и автомобильных кузовов, причем подготовка инженеров по специальности автомобильные кузова является единственной в Советском Союзе. К автомобильному факультету относятся следующие специальности.

1. Автомобили и тракторы со специализацией автомобильные кузова.
2. Двигатели внутреннего сгорания.
3. Машины и технология обработки металлов давлением.
4. Машины и технология сварочного производства.
5. Экономика и организация машиностроительной промышленности.

Механико-технологический факультет готовит инженеров-механиков по специальностям.

1. Металловедение, оборудование и технология термической обработки металлов.
2. Технология машиностроения, станки и инструменты со специализациями:
   а) технология машиностроения;
   б) инструментальное производство;
   в) ремонт и модернизация металлорежущего оборудования;
   г) электрофизические и электрохимические методы обработки металлов.
3. Машины и технология литейного производства.
4. Автоматизация и комплексная механизация машиностроения.

Вечерний факультет готовит инженеров-механиков по вышеперечисленным специальностям.

Подготовка специалистов высшей квалификации осуществляется высококвалифицированным профессорско-преподавательским составом с привлечением ведущих специалистов базовых предприятий.

В институте имеется военная кафедра, где по окончании обучения юношам присваивается звание офицера. Все юноши получают права водителей-профессионалов.

Студенты института пользуются всеми льготами, установленными для студентов обычных дневных вузов, а также льготами, представленными для рабочих таких крупных заводов как ЗиЛ, АЗЛК, 1-ГПЗ.

За все время обучения студенты за проработанное время ежемесячно получают 0,5 месячной зарплаты, а за учебное время — 0,5 месячной стипендии, повышенной на 15% по сравнению со стипендией студентов обычных дневных вузов.

В чем же состоит особенность подготовки инженеров по системе «завод-втуз»?

На 1-м курсе дневных факультетов института занятия проводятся как и обычных институтах. Начиная со 2-го курса обучение производится попеременно с отрывом и без отрыва от производственной деятельности с недельным чередованием, т. е. на учебной неделе студенты занимаются в аудиториях института, на следующей рабочей неделе студенты работают на базовых заводах (ЗиЛ, АЗЛК, 1-ГПЗ), участвуя в выпуске основной продукции предприятий. Учебным планом института в разделе производственной подготовки предусмотрено, что на втором и третьем курсах студенты работают на рабочих местах в качестве рабочих в зависимости от выбранной специальности (слесари-сборщики, слесари-ремонтники, станочники, штамповщики и т. д.). Начиная с четвертого курса студенты переводятся на инженерно-технические должности, где они выполняют функции техников, инженеров (технологов, исследователей, конструкторов, испытателей) или функции административно-линейного персонала (мастерами производственных участков, отделений).

На старших курсах под руководством высококвалифицированных преподавателей профилирующих кафедр института студенты проводят самостоятельные научно-исследовательские работы, связанные с решением задач, стоящих перед базовыми заводами.

Программа общетеоретической подготовки инженеров, несмотря на участие в производственном процессе базовых заводов, предусматривает изучение общетеоретических дисциплин в объеме, эквивалентном объему в обычном высшем техническом учебном заведении. Программа же инженерной подготовки по выбранной специальности несколько сокращена, что оправдывается тем, что студенты часть специальных знаний получают непосредственно на производстве.

Инженерам-выпускникам завода-втуза, хорошо изучившим за время обучения организацию и экономику производства значительно легче сразу же включиться в ритм работы производства и активно участвовать в выполнении плановых заданий предприятия.

Как показала практика, наши инженеры-выпускники успешно работают на базовых предприятиях и их филиалах, становятся подлинными руководителями производства, активно решающими задачи научно-технического прогресса.

Так, хотя в этом году завод-втуз выпустил только свой десятый выпуск, среди его питомцев есть директора заводов, заместители директоров, главные механики заводов, заместители главных инженеров, начальники отделов и частей. Только на ЗиЛе более 10 цехов возглавляют выпускники завода-втуза.

Студенты завода-втуза имеют возможность принимать активное участие в спортивной жизни одного из крупнейших спортивных клубов страны «Торпедо» ЗиЛ, спортивных клубах «Москвич» и «Подшипник».

На заводе-втузе ежегодно проводится широкая вузовская Спартакиада, привлекающая к себе практически всех студентов I—V курсов. Студенты соревнуются и на зимней Спартакиаде ЗиЛа, где показывают отличные результаты. Во втузе работают секции волейбола, баскетбола, футбола, гандбола, лыжного спорта, легкой атлетики. Все студенты обучаются плаванию. Студенты, занимающиеся спортом, регулярно соревнуются с командами вузов и производственных коллективов Москвы и других городов. Большая группа студентов входит в состав сборных команд базовых заводов, МГС и ЦС ДСО «Труд». В заводе-втузе обучается ряд студентов, входящих в сборные команды СССР по отдельным видам спорта.

Студенты завода-втуза участвовали в составе сборной команды СССР в олимпийских играх в Монреале.

На дневное отделение института принимаются лица, работающие на базовых заводах (ЗиЛ, АЗЛК, 1-ГПЗ), школьники г. Москвы, направленные на обучение этими заводами, и иногородние абитуриенты, направленные администрацией филиалов базовых заводов. Студентам, направленным на учебу филиалом базовых заводов объединения Авто-ЗиЛ, АЗЛК, а также с КАМАЗа, предоставляется благоустроенное общежитие.

Поступающие на 1-й курс завода-втуза при ЗиЛе сдают вступительные конкурсные экзамены в объеме программы средней школы по следующим предметам: математика (письменно и устно), физика (письменно) и сочинение.

Вступительные экзамены принимаются в три срока: июль (на вечерние и дневные факультеты), август (на дневные факультеты) и сентябрь (на вечерние факультеты).

Ниже мы приводим варианты вступительных экзаменов по математике и физике 1976 года.

### Математика

Вариант 1

1. Конус, высота которого $H$ и радиус основания $R$, укреплен в отвесном положении вершиной вниз. В конус налита вода до высоты $h$ и вложен железный шар радиуса $r$, погрузившийся в нее полностью. На какой высоте будет уровень воды?

2. Решить неравенство

$$\log_{x^2}(x^2-4x+3)>1.$$

3. Решить уравнение

$$1+2\cos 2x+2\cos 4x+2\cos 6x=0.$$

Вариант 2

1. В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Найти радиус шара, если длина стороны основания пирамиды равна $l$ и высота пирамиды равна $h$.

2. Решить уравнение

$$(4+\sqrt{15})^x+(4-\sqrt{15})^x=62.$$

3. Решить уравнение

$$5\sin 2x+\sin x+\cos x=1.$$

### Физика

1. С крутого берега реки высотой $h=20$ *м* бросают горизонтально камень со скоростью $v_0=15$ *м/сек*. Через какое время камень достигнет воды? С какой скоростью он упадет в воду? Ускорение свободного падения принять $g=10$ *м/сек*$^2$.

2. К концам нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешены два груза: слева массой $m_1=40$ *г*, справа — массой $m_2=120$ *г*. Определить натяжение нити. Принять $g=10$ *м/сек*$^2$.

3. Диск вращается в горизонтальной плоскости, делая $n=30$ *об/мин*. На расстоянии $r=20$ *см* от оси вращения лежит тело. Каким должен быть коэффициент трения, чтобы тело не было сброшено с диска?

4. Снаряд массой $m_1=10$ *кг*, летящий горизонтально со скоростью $v_1=500$ *м/сек*, попадает в вагон с песком массой $m_2=10^4$ *кг* и застревает в нем. Какова будет скорость вагона, если до попадания снаряда он двигался со скоростью $v_2=36$ *км/час* в том же направлении, что и снаряд?

5. Стальной резец массой $m=400$ *г* нагрели до температуры $t_1=800°$C и погрузили для закалки в воду. Объем воды 10 *л*, температура $t_2=20°$C. До какой температуры охладится резец? Удельная теплоемкость воды $c_в=4{,}19\cdot 10^3$ *дж/(кг·град)*, стали $c_{ст}=$ $=460$ *дж/(кг·град)*. Ответ округлить до целого числа.

6. С какой скоростью свинцовая пуля должна удариться о преграду, чтобы расплавиться? Считать, что при ударе 50% выделившегося количества теплоты идет на нагревание пули. Начальная температура пули 212°С. Удельная теплоемкость свинца $c_{св} = 130$ *дж/(кг·град)*, удельная теплота плавления свинца $\lambda = 0,25 \cdot 10^5$ *дж/кг*, температура плавления свинца $t_{пл} = 327$°С.

7. Поверхностная плотность электрического заряда на проводящем шаре $\sigma = 8,85 \cdot 10^{-7}$ *к/м²*. Напряженность электрического поля на расстоянии $r=2$ *м* от поверхности шара $E=3,6 \cdot 10^4$ *н/к*. Определить радиус шара.

8. В электрическом поле, образованном зарядом $Q=-2 \cdot 10^{-7}$ *к*, перемещают заряд $Q_1 = 10^{-9}$ *к* из точки, находящейся на расстоянии $r_1=0,3$ *м* от первого заряда, в точку на расстоянии $r_2=1,5$ *м* от него. Какова необходимая для этого работа?

9. Какое количество электричества пройдет по проводнику сопротивлением $R=10$ *ом* за время $t=20$ *сек*, если к концам проводника приложено напряжение $U=12$ *в*? Какая работа будет произведена при этом?

10. При замыкании элемента на сопротивление $R_1=4,5$ *ом* ток в цепи $I_1=0,2$ *а*, а при замыкании того же элемента на сопротивление $R_2=10$ *ом* ток в цепи $I_2=0,1$ *а*. Найти э. д. с. элемента.

11. Определить величину э. д. с., индуцируемой в прямом проводнике, который перемещается в однородном магнитном поле со скоростью $v=7$ *м/сек*. Длина проводника $l=0,4$ *м*, магнитная индукция поля $B=0,9$ *тл*, а направление вектора скорости составляет угол $\alpha=30$° с направлением поля.

12. Две свечи, поставленные рядом, освещают экран. Расстояние от свечей до экрана $l=1$ *м*. Одну свечу погасили. На сколько надо приблизить экран, чтобы освещенность его осталась прежней? Ответ округлить до десятых долей.

13. Собирающая линза дает изображение предмета, помещенного на расстоянии $s_1=30$ *см*, по другую сторону линзы на расстоянии $s_2=60$ *см*. Чему равны фокусное расстояние $F$ линзы и ее оптическая сила $D$?

14. Показатель преломления вещества $n=1,2$. Определить длину волны света в веществе, если частота света $\nu=5 \cdot 10^{14}$ $сек^{-1}$. Ответ дать в микрометрах.

15. Найти энергию фотона для оранжевых лучей с длиной волны $\lambda=0,6$ *мкм*. Ответ дать в электрон-вольтах, округлить его до целого числа. Постоянная Планка $h=6,63 \times 10^{-34}$ *дж·сек*; 1 *эв* $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ *дж*.

*А. Буров, В. Ионов, В. Ляховский*

---

# Как устроено атомное ядро

*(Начало см. с. 30, 42)*

Он хочет объяснить их свойства либо с помощью антропоморфных терминов «тесная близость», «испытывать отвращение» и т. п., либо в терминах механики макроскопических тел, к которой она имеет весьма отдаленное отношение.

...Для того чтобы вникнуть в суть явления, приходится воспользоваться системой правил, установленных в ходе изучения атомных и ядерных явлений, и принять «не поддающуюся здравому смыслу» трактовку квантовой теории в ее современной волновой форме. Далее я мог бы сказать полковнику Мур-Брабазону, что так уж принято считать протон и нейтрон разными состояниями одной и той же частицы вещества. Я мог бы ввести в рассмотрение статистики Ферми и Бозе и привести правила, позволяющие определять структуру ядра, в частности устанавливать, содержит ли оно электроны. Все это, однако, требует введения в рассмотрение многих сложных для понимания деталей и может быть расценено как попытка «пустить пыль в глаза».

Заканчивалось письмо так:

«Если полковник Мур-Брабазон все еще неудовлетворен, я напомню ему о ньютоновской эпохе. Разве пытался в то далекое время Ньютон привязывать (хотя бы мысленно) планеты пружинами к Солнцу на том основании, что тело не может оказывать воздействие там, где его нет?

...Не могу обещать, что все ученые разделяют мои взгляды, но они найдут в них такое, что могут оценить по достоинству. А теперь, может быть, в свою очередь полковник Мур-Брабазон проведет для нас обзор британской внешней политики за последние десять лет? Она для меня столь же загадочна, как для него развитие ядерной механики за тот же период.»

Следующее письмо полковника Мур-Брабазона явно свидетельствует о том, что ответ профессора Андраде на вопрос, касающийся строения ядра, его не совсем удовлетворил. Однако, будучи человеком очень обязательным, полковник выполнил пожелание профессора и в свою очередь рассказал о внешней политике Великобритании за истекшее десятилетие. В частности, в письме говорилось:

«Поскольку приближаются рождественские праздники, подобная взаимовыручка вполне своевременна.

*(Окончание см. с 77)*

# X Всесоюзная олимпиада школьников

*М. Смолянский,*
*В. Стеценко,*
*Е. Турецкий*

## Олимпиада по математике

Юбилейная X Всесоюзная математическая олимпиада проходила в Средней Азии. 156 мальчиков и девочек съехались 14 апреля 1976 года в столицу солнечного Таджикистана — город Душанбе для участия в этой олимпиаде.

Математические олимпиады проводятся в нашей стране с середины тридцатых годов по инициативе известного советского математика Бориса Николаевича Делоне. Первая такая олимпиада состоялась в 1934 году в Ленинграде. С 1967 года проводятся Всесоюзные олимпиады школьников, в которых принимают участие команды областей, краев, союзных республик.

В 1974 году было утверждено новое положение о Всесоюзной олимпиаде школьников, согласно которому олимпиада проходит в пять этапов: школьные, районные (городские), областные, республиканские олимпиады и, наконец, заключительный этап. По положению в заключительном этапе олимпиады участвуют команды союзных республик, Москвы, Ленинграда, Главного Политуправления Советской Армии и Военно-Морского флота и Министерства путей сообщения СССР, а также участники заключительного этапа предыдущей олимпиады, занявшие I—II места. Численный состав команды определяется в соответствии с числом учащихся в республике: от РСФСР — 48 человек, от УССР — 12 человек, от БССР, Каз. ССР и Уз. ССР — по 6 человек; остальные команды состоят из 3 человек.

15 апреля 1976 года в актовом зале Республиканской музыкальной школы-интерната состоялось открытие заключительного этапа X Всесоюзной математической олимпиады. На открытии присутствовали заместитель председателя Совета Министров Таджикской ССР Р. Ю. Юсуфбеков, зав. отделом науки и учебных заведений ЦК КП Таджикистана А. А. Абдуназаров, министр народного образования республики Р. Д. Дадабаев, секретарь ЦК ЛКСМ Таджикистана Х. Абдуназаров.

Открыл олимпиаду председатель Оргкомитета зам. министра народного образования Таджикской ССР Н. З. Волощук. С приветственным словом к участникам обратился Р. Ю. Юсуфбеков.

Заместитель председателя Всесоюзного Оргкомитета по проведению олимпиады М. Н. Тамбеева огласила письмо министра просвещения СССР

М. А. Прокофьева, в котором он поздравил участников олимпиады с началом состязаний и пожелал им успехов.

Юные математики отправили приветственные телеграммы в Киев и Минск, в которых в этот же день открывались заключительные этапы Всесоюзных олимпиад химиков и физиков.

Следующий день, 16 апреля, был первым днем состязаний. В них приняли участие 41 учащийся восьмого класса, 50 — девятого класса и 65 — десятого класса. Интересно отметить, что два участника: Олег Окунев, десятиклассник из Казани, и Вилаят Гусейнов, десятиклассник из Нахичевани, приняли участие во Всесоюзной олимпиаде в четвертый раз, по три раза приезжали на олимпиаду 19 человек.

Ученикам 8 и 9 классов было предложено 4 задачи, учащимся десятых классов — пять задач (разбор некоторых задач приводится в статье Л. Лиманова; см. с. 60).

Несколько слов о подборе предложенных задач. Отбор задач для Всесоюзной олимпиады — это, по-видимому, один из самых трудных моментов работы жюри. Не так-то просто придумать задачу, которая была бы новой для всех ребят, приехавших на заключительный тур, многие из которых учатся в специализированных физматшколах, хорошо знакомы с популярной математической литературой, регулярно читают журнал «Квант». Кроме того, олимпиадная задача должна удовлетворять непременному условию: она не должна выделять тех, кто больше знает, тех, кто лучше «технически» оснащен, она должна выявить способность анализа новой незнакомой ситуации, остроту логического мышления, способность быстрой ориентации.

Стоит заметить, что при отборе задач жюри старалось удовлетворить еще одному важному требованию — занимательности предложенных задач. При этом за внешней занимательностью должны стоять какие-то серьезные математические факты, к открытию которых, возможно в простой ситуации, должны прийти ученики. Почти половина всех предложенных на X олимпиаде задач составлена студентом 3-го курса Ленинградского университета, членом жюри С. В. Фоминым.

Итоги первого дня состязаний видны из таблицы внизу (в ней используются следующие обозначения: «+» — задача решена, «±» — задача решена не полностью, но ее решение продвинуто достаточно далеко, «∓» — задача не решена, но имеются некоторые продвижения в решении, «—» — задача не решена, «0» — задача не решалась вовсе).

Во второй день состязаний, 18 апреля, был проведен интересный эксперимент. Прообраз такого эксперимента был впервые проведен пять лет назад на Всесоюзной олимпиаде в Риге для десятого класса. Участникам каждого класса было предложено по три сложных задачи, каждая из которых была разбита на несколько пунктов, расположенных в порядке возрастания трудности. В предисловии к задачам отмечалось, что полное решение каждой из этих задач

| Классы | 8 | | | | 9 | | | | 10 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Задачи | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| + | 6 | 10 | 2 | 13 | 20 | 41 | 6 | 1 | 20 | 40 | 10 | 24 | 2 |
| ± | 2 | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 5 | 8 | 6 | 7 | 3 | 3 | 4 |
| ∓ | 10 | 6 | 10 | 2 | 3 | 1 | 5 | 0 | 8 | 4 | 2 | 0 | 0 |
| —, 0 | 23 | 22 | 29 | 25 | 26 | 8 | 24 | 41 | 31 | 14 | 50 | 38 | 59 |

представляет небольшое математическое исследование и что жюри рекомендует, чтобы в одной (максимум в двух) из них (по своему выбору) каждый участник продвинулся как можно дальше. Задачи эти были разные по характеру с тем, чтобы каждый мог найти задачу по своему вкусу. Надо сказать, что подготовка таких задач — дело очень трудное, так как требуется составить задачи примерно одинакового уровня, достаточно сложные и разнообразные по тематике. Жюри получило ряд интересных работ, в которых было достаточно полное продвижение в решении одной-двух задач. В целом жюри признало проведенный эксперимент полезным и считает, что задачи такого исследовательского плана желательны не только на заключительном туре олимпиады, но и на самых различных этапах работы со школьниками.

Проверка работ участников проходила в комиссиях по классам. В обсуждении каждой работы участвовало сразу несколько членов жюри. Затем был организован разбор задач для участников олимпиады и руководителей команд. Участники имели возможность ознакомиться с результатами проверки всех работ и в случае необходимости обжаловать решение жюри.

Все это потребовало большого напряжения от членов жюри, которым иногда приходилось работать до 3—4 часов утра.

Напряженная работа участников олимпиады сменялась активным разнообразным отдыхом. Участники олимпиады совершили интересные увлекательные экскурсии на завод холодильников «Памир», на уникальную Нурекскую ГЭС, осмотрели высотную плотину, спустились в машинный зал; с увлечением знакомились с Гиссарской обсерваторией, Гиссарской крепостью, посетили ВДНХ и Республиканский краеведческий музей. Вся эта насыщенная программа перемежалась встречами с новыми друзьями — учащимися душанбинских школ. Дружба, зародившаяся с первых дней олимпиады, получила свое продолжение: ребята обменялись адресами, пишут письма, составляют планы встреч.

В свободное время ребятам был прочитан цикл интересных лекций: «Минимальные расстояния», «Разные бесконечности», «Биллиарды», «Основы математической логики», «Задачи Московской математической олимпиады».

Редакция журнала «Квант» провела несколько, ставших уже традиционными, встреч со школьниками. Практически все «олимпийцы» являются активными читателями нашего журнала. На этих встречах, проходивших живо и интересно, школьники высказали ряд пожеланий, которые редакция постарается учесть в своей работе.

Мы с удовольствием хотели бы отметить очень хорошую организацию олимпиады. И сама олимпиада, и досуг ребят были организованы очень четко и интересно.

По итогам двух дней состязаний жюри X Всесоюзной математической олимпиады постановило присудить 12 первых, 25 вторых и 33 третьих премии. Кроме того, решено отметить похвальными отзывами I степени 29 участников, похвальными отзывами II степени 32 участника.

Многие ребята получили призы, учрежденные разными организациями и предприятиями для участников заключительного этапа Всесоюзной олимпиады.

Специальным призом журнала «Квант» награжден школьник 8 класса г. Москвы Виктор Гальперин.

За отличные успехи в олимпиаде призами журнала «Квант» (подписка на 1977 год) награждены Самвел Абаджян, Павел Боровиков, Вячеслав Кротов, Андрей Летчиков, Бидзина Мидодашвили, Рустам Убайдуллаев, Алексей Фолин, Ольга Шарапова.

1

2

3

4

## Олимпиада у математиков

1. Победители олимпиады, получившие дипломы I степени, десятиклассники Н. Нецветаев, С. Миронов, Т. Хованова, Б. Соломяк и Ю. Пасс.
2. Победители олимпиады, награжденные дипломами I степени, восьмиклассники Г. Мамедов, Л. Лисничук, С. Оревков, В. Бугаенко и В Гальперин.
3, 4, 5, 6. Участники заключительного этапа олимпиады за работой.
7. Победители олимпиады, получившие дипломы I степени, девятиклассники В. Бальчитис и Г. Рыбников.

5

6

7

*Л. Лиманов*

# Задачи олимпиады по математике

**В этой статье разбираются четыре задачи заключительного тура X Всесоюзной математической олимпиады, которые не вошли в «Задачник «Кванта». Решения задач, опубликованных в «Задачнике», появятся в соответствующих номерах журнала в следующем году.**

## 8 класс

1. На столе как-то лежат 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

Рассмотрим треугольник с такими вершинами: центр стола $O$, конец минутной стрелки $i$-х часов в момент времени $t$ — обозначим его буквой $A_i$ — и конец минутной стрелки этих же часов через полчаса — точка $B_i$ (рис. 1). Ясно, что центр $i$-х часов — точка $O_i$ — является основанием медианы треугольника $A_iOB_i$, проведенной из вершины $O$. Легко доказать, что в произвольном треугольнике удвоенная длина медианы меньше суммы длин заключающих ее сторон (рис. 2.) Равенство же возможно лишь в том случае, когда $\widehat{A_iOB_i} = 0$ (т. е. когда точки $A_i$ и $B_i$ лежат на луче с вершиной в точке $O$). Но если в любой момент времени $\widehat{A_iOB_i} = 0$, то $i$-е часы стоят, что противоречит условию задачи, согласно которому все часы идут правильно. Поэтому найдется момент времени $t_0$, когда $\widehat{A_iOB_i} \neq 0$ и $2|OO_i| < |OA_i| + |OB_i|$. Для момента времени $t_0$ будет выполнено неравенство

$$2(|OO_1| + |OO_2| + \ldots + |OO_{50}|) < (|OA_1| + |OA_2| + \ldots + |OA_{50}|) + (|OB_1| + |OB_2| + \ldots + |OB_{50}|).$$

Из этого неравенства следует, что либо в момент времени $t_0$ $|OO_1| + |OO_2| + \ldots + |OO_{50}| < |OA_1| + |OA_2| + \ldots + |OA_{50}|$, либо же в момент времени $t_0 - {}^1/_2$ час — $|OO_1| + |OO_2| + \ldots + |OO_{50}| < |OB_1| + |OB_2| + \ldots + |OB_{50}|$. А именно это нам и требовалось доказать.

## 9 класс

2. *Можно ли вершины куба занумеровать различными трехзначными числами, составленными из цифр 1 и 2 так, чтобы номера любых двух соседних вершин различались не менее, чем в двух разрядах?*

Рассмотрим такую систему координат: начало координат — в вершине нижнего основания куба, а положительные направления координатных осей совпадают с направлениями ребер куба, выходящих из этой вершины (рис. 3). В этой системе координаты вершин куба имеют вид: (0, 0, 0); (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1), причем только те вершины, у которых совпадают ровно две координаты, являются соседними. Поэтому вопрос задачи можно переформулировать так: *существует ли такое отображение множества вершин куба на себя, при котором все соседние вершины куба перестают быть соседними?* Такое отображение существует; как оно устроено, видно из рисунка 4 (куб на

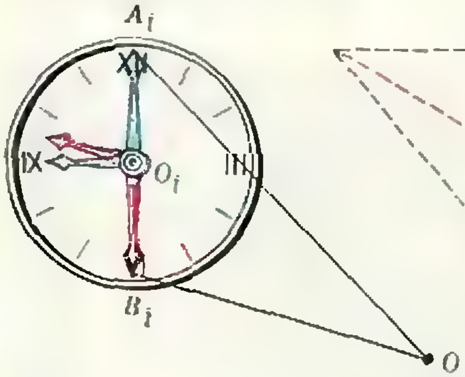


Рис. 1.

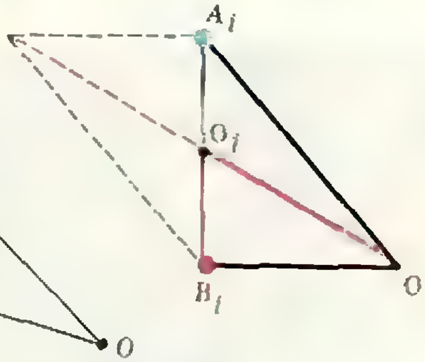


Рис. 2.

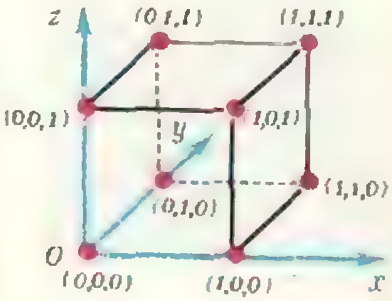


Рис. 3.

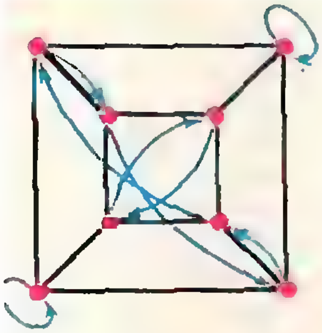


Рис. 4.

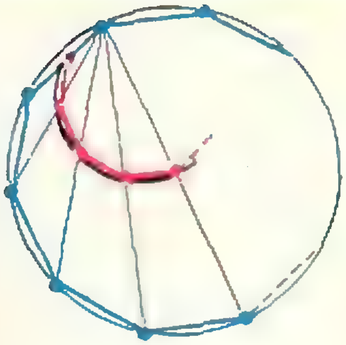


Рис. 5.

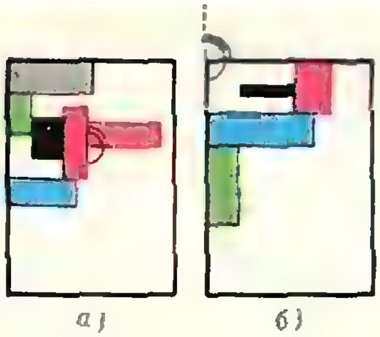


Рис. 6.

этом рисунке изображен несколько необычно — в виде двух «концентрических» квадратов с «ребрами»). Синие стрелочки показывают, куда переходят вершины (на рисунке 4 две вершины остаются на месте). Постарайтесь выяснить, сколько *различных* таких отображений существует.

### 10 класс

2. В правильном 1976-угольнике отмечены середины всех сторон и середины всех диагоналей. Какое наибольшее число отмеченных точек лежит на одной окружности?

Ответ: 1976. Докажем это. Середины всех диагоналей одинаковой длины $l$ лежат на одной окружности, концентрической с окружностью, в которую вписан многоугольник. Поскольку всего есть диагонали $\frac{1976}{2} = 988$ различных длин (к «диагоналям» мы причисляем и стороны), все отмеченные точки лежат на 988 концентрических окружностях, причем самая маленькая из них — радиуса ноль (вырождается в точку — центр нашего многоугольника). Поэтому окружность не из этого семейства может содержать не больше $1 + 2 \cdot 987 = 1975$ отмеченных точек, поскольку две «полноценные» окружности пересекаются по двум точкам, и у нас — еще одна «неполноценная» окружность — точка, являющаяся центром многоугольника. Окружность же из «концентрического» семейства, проходящая через середины сторон нашего 1976-угольника, содержит 1976 отмеченных точек. В заключение отметим, что окружности, содержащие ровно 1975 отмеченных точек, существуют. Одна из них изображена на рисунке 5 — это окружность, описанная вокруг правильного 1976-угольника, подобного исходному (с коэффициентом $1/2$), у которого одна вершина совпадает с вершиной данного многоугольника, а остальные 1975 вершин — отмеченные: середины двух сторон и 1973 диагоналей, выходящих из этой вершины.

**3.** На квадратном листе бумаги нарисованы $n$ прямоугольников со сторонами, параллельными сторонам листа. Никакие два из этих прямоугольников не имеют общих внутренних точек. Докажите, что если вырезать эти прямоугольники, то количество кусков, на которые распадается оставшаяся часть листа, не больше $n + 1$.

Утверждение задачи легко вывести из такого замечания: сумма величин внешних углов многоугольника, примыкающих к его внутренним углам, меньшим $\pi$, не меньше $2\pi$. (Этот факт вы без труда докажете сами.) Из условия же задачи сразу видно, что внешние углы получающихся частей являются либо внутренними углами вырезанных прямоугольников (рис. 6, *а*), либо же внешними углами нашего листа бумаги (рис. 6, *б*), т. е. сумма всех внешних углов не превышает $2\pi(n + 1)$. Но это и означает, что получится не больше $(n + 1)$ кусков. Из доказательства видно, что если получилось $(n + 1)$ кусков, то все эти куски выпуклы.

*Т. Петрова,*
*Л. Чернова*

# Олимпиада по физике

Заключительный тур X Всесоюзной олимпиады по физике проходил в этом году в Минске — столице Белорусской ССР. Его участниками были победители республиканских олимпиад, а также дипломанты предыдущей Всесоюзной олимпиады. Всего в Минск приехали 144 школьника: 42 восьмиклассника, 48 девятиклассников и 54 десятиклассника.

15 апреля в Республиканской школе-интернате по музыке и изобразительному искусству состоялось торжественное открытие заключительного тура X Всесоюзной олимпиады по физике. Успехов в предстоящей борьбе участникам пожелали: заместитель министра просвещения БССР Р. И. Сернов, председатель жюри олимпиады заведующий кафедрой ядерной физики Белорусского государственного университета профессор С. С. Шушкевич; приветствие министра просвещения СССР М. А. Прокофьева зачитал представитель Министерства просвещения СССР М. В. Грабиленков.

16 апреля проходил первый — теоретический — тур олимпиады. Как и всегда, восьмиклассникам были предложены 4 задачи, девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач. На решение задач восьмиклассникам и девятиклассникам отводилось по 4 часа, десятиклассникам — 5 часов.

17 апреля ребята отдыхали. А жюри проверяло работы. После проверки выяснилось, что наиболее трудной для восьмиклассников оказалась задача № 3 (ее решили только 2 человека), а самой легкой — задача № 1 (тексты задач приведены в конце статьи). Из девятиклассников задачу № 5 решили только 2 человека, и почти все успешно справились с задачей № 3. Среди десятиклассников наибольшие трудности вызвала задача № 3 (ее довели до конца только 4 человека), а задачу № 2 решили многие.

18 апреля состоялся второй — экспериментальный — тур олимпиады. Как и в прошлом году, задания экспериментального тура выполняли все участники олимпиады. Но, в отличие от предыдущих олимпиад, на этот раз в каждом классе предлагалось по 2 экспериментальных задачи.

День 19 апреля для членов жюри был, пожалуй, самым сложным днем. Снова были просмотрены все работы теоретического тура, обсуждены результаты экспериментальных работ, и после тщательного анализа и взвешивания названы имена лучших.

20 апреля на торжественном закрытии X Всесоюзной олимпиады по физике ее участникам было объявлено решение жюри. Дипломы I, II и III степени получили 42 участника олимпиады. Грамотами и спецпризами за успешное участие в олимпиаде были награждены 32 участника олимпиады. Специальный приз — подшивка журнала «Квант» за 1975 год с автографом главного редактора академика И. К. Кикоина — получил *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.). Подпиской на журнал «Квант» на 1977 год награждены восьмиклассники: *Д. Захаров* (п. Палатка Магаданской обл.), *А. Дик* (с. Лебединовка КиргССР), *С. Канджа* (с. Гура МолдССР), *И. Вайсбурд* (Томск), *А. Спиридонова* (Курган), *С. Русанов* (ст. Новопокровская Краснодарского кр.).

Все, кто принимал участие в заключительном этапе X Всесоюзной олимпиады по физике, надолго запомнят дни, проведенные в Минске. Устроители олимпиады — сотрудники кафедры ядерной физики Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина — сделали все, чтобы ее участники работали спокойно и организованно, а свободное время проводили интересно.

Огромное впечатление осталось у ребят от посещения Хатыни — мемориального комплекса, посвященного памяти жертвам фашизма. Настоящий «профессиональный» интерес вызвала у школьников экскурсия на атомный реактор Академии наук БССР. Очень интересной была встреча участников олимпиады с учеными, преподавателями университета и его студентами. Закончилась эта встреча веселой викториной. Чтобы ответить на вопросы викторины, надо было быть настоящим эрудитом: знать историю и музыку, математику и поэзию, уметь рисовать и пользоваться счетной машиной.

В заключительный день олимпиады состоялся последний «бой» — команда Ленинграда вызвала на физбой команду Москвы. Началось состязание с конкурса капитанов. За короткое время капитаны должны были решить следующие задачи:

1. При испарении жидкости молекулы, покидающие жидкость, теряют часть своей энергии. Однако температуры жидкости и насыщенного пара над ней одинаковы. Как объяснить этот «парадокс»?

2. Нарисовать (быстро!) графики зависимости кинетических энергий двух шариков, испытывающих упругое столкновение, от отношения их масс.

3. Колесо радиуса $r$ катится без проскальзывания по внутренней поверхности обода колеса радиуса $4r$. Нарисовать (быстро!) траекторию точки колеса.

Следующий этап физбоя проходил по такому принципу: из задач, предложенных «судьями» заранее всем участникам боя, каждая команда выбирала по одной и приводила свое решение, а вторая команда выступала в качестве оппонента. Право первого выбора задачи получила команда Ленинграда, победившая в конкурсе капитанов. Ленинградцы решали такую задачу:

Упрощенно атом гелия можно представить как систему, в которой два электрона совершают колебания около общего центра — неподвижного ядра. Используя эту модель, попробуйте оценить приближенно диэлектрическую проницаемость жидкого гелия в постоянном электрическом поле, принимая во внимание, что гелий сильно поглощает ультрафиолетовое излучение на длине волны $\lambda = 0{,}06$ *мкм;* плотность жидкого гелия $\rho = 0{,}14$ *г/см*$^3$.

Москвичи выбрали следующую задачу:

Оценить максимальный размер дождевой капли, которая может отскочить от земли как упругий шарик, не разлетаясь в брызги.

А окончилось это состязание тем, что «болельщики», которых, как всегда, было гораздо больше, чем самих участников боя, предложили командам «на скорость» решить такую задачу:

Самолет, пролетев расстояние $l_1$ по прямой $AB$, попадает из пункта $A$ в пункт $B$ за время $t_1$. Затем он пролетает расстояние $l_2$ по прямой $BC$ из пункта $B$ в пункт $C$ за время $t_2$ и возвращается в пункт $A$ по прямой $CA$, пролетев расстояние $l_3$ за время $t_3$. Во время перелета дует ветер, скорость которого не меняется в течение всего перелета. Определить скорость ветра, если скорость самолета относительно воздуха во время всего полета по абсолютной величине постоянна.

По единому мнению судей победа в физбое со счетом 35 : 22 была присуждена команде Ленинграда.

Итак, 20 апреля закончилась X Всесоюзная олимпиада школьников по физике. Но у десятиклассников — победителей олимпиады — впереди был еще один этап борьбы — Международная олимпиада. Она состоялась в июле этого года в столице Венгерской народной республики Будапеште. О ней мы расскажем в одном из ближайших номеров нашего журнала.

Ниже приводятся задачи, предлагавшиеся на экспериментальном туре X Всесоюзной олимпиады по физике (все задачи теоретического тура и некоторые задачи физбоя вошли в «Задачник «Кванта»; см. «Квант», 1976, № 7, 8, 9).

### Экспериментальный тур

Задачи для этого тура были подготовлены преподавателями и научными сотрудниками кафедры ядерной физики и мирного использования ядерной энергии Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина.

### 8 класс

1. С помощью источника постоянного тока, резисторов, амперметра и вольтметра определить схему соединения и электрические параметры деталей, расположенных в коробочке.
2. Определить вес груза, используя штатив, неоднородный стержень, динамометр школьный, груз, вес которого больше пределов измерения динамометра, нить, миллиметровую бумагу.

### 9 класс

1. Измерить атмосферное давление. Оборудование: 1) стеклянные трубки, 2) резиновая трубка, 3) пробка, 4) штатив, 5) линейка, 6) стакан с водой.
2. Определить емкости конденсаторов. Оборудование: 1) конденсаторы — 2 шт., 2) источник э. д. с., 3) вольтметр, 4) соединительные проводники, 5) секундомер, 6) эталонные сопротивления — 3 шт.

### 10 класс

1. Определить, какие электрические детали находятся в коробочке и по какой схеме они соединены, используя ампер-вольт-омметр.
2. Определить коэффициент преломления жидкости, находящейся в стакане. Можно использовать линейку, лампочку, батарейку и экран.

---

## Советуем купить!

Буховцев Б. Б. и др. *Сборник задач по элементарной физике* (пособие для самообразования). Ц. 72 к.

Голомб С. В. *Полимино*. Пер. с англ. Ц. 48 к.

Кантор И. Л., Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа*. Ц. 22 к.

Калинин Р. А. *Алгебра и элементарные функции*. Ц. 73 к.

Кошкин Н. И. и Ширкевич М. Г. *Справочник по элементарной физике*. Ц. 69 к.

Ландау Л. Д., Китайгородский А. И. *Физика для всех*. Ц. 71 к.

Литлвуд Дж. *Математическая смесь*. Пер. с англ. Ц. 37 к.

Окстоби Дж. *Мера и категория*. Пер. с англ. Ц. 48 к.

Пойа Д. *Математика и правдоподобные рассуждения*. Ц. 1 р. 71 к.

Шаскольская М. П., Эльцин И. А. *Сборник избранных задач по физике*. Ц. 30 к.

Шклярский Д. О. и др. *Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии*. Ц. 87 к.

*Элементарный учебник физики* (под ред Г. С. Ландсберга), т. 3. Колебания, волны. Оптика. Строение атома. Ц. 1 р. 13 к.

Эллиот Л., Уилкокс У. *Физика*. Пер. с англ. Ц. 1 р. 94 к.

**Заказы направляйте по адресу: 103031. Москва, К-31, Петровка, 15, Магазин № 8 «Техническая книга». Книги будут высланы наложенным платежом.**

1

3

## Олимпиада у физиков

1. Председатель жюри олимпиады по физике профессор С. С. Шушкевич вручает награды победителям.

2. Победители олимпиады, получившие дипломы I степени: Е. Пономарев, О. Лищенко (оба — победители Конкурса «Кванта»), Р. Шарипов и А. Сорокин.

3. Ю. Мухарский, получивший диплом III степени, победитель Конкурса «Кванта».

4. И. Гаврилов, награжденный дипломом II степени; самый юный участник заключительного тура олимпиады.

5. Х. Абдуллин, получивший диплом III степени; победитель Конкурса «Кванта».

6. В. Булатов, награжденный дипломом II степени и спецпризом за лучшее решение задач теоретического тура.

7. Л. Черных, получившая диплом III степени и спецприз за лучшее выполнение экспериментального задания.

# Победители
# X Всесоюзной олимпиады
# школьников

## Математика

### Дипломы I степени

по 8 классам получили
*Бугаенко В.* (Киев, ФМШ № 145),
*Гальперин В.* (Москва, с. ш. № 57),
*Лисничук Л.* (Васильков, с. ш. № 1),
*Мамедов Г.* (Баку, с. ш. № 160),
*Оревков С.* (Москва, с. ш. № 57);

по 9 классам—
*Бальчитис В.* (Шяуляй, с. ш. № 5),
*Рыбников Г.* (Москва, с. ш. № 42);

по 10 классам —
*Миронов С.* (Сафоново Смоленской обл., с. ш. № 6),
*Нецветаев Н.* (Ленинград, ФМШ № 45),
*Пасс Ю.* (Ленинград, с. ш. № 121),
*Соломяк Б.* (Ленинград, ФМШ № 45),
*Хованова Т.* (Москва, с. ш. № 444).

### Дипломы II степени

по 8 классам получили
*Алексеев А.* (Пермь, с. ш. № 111),
*Арафаилов С.* (Лениногорск КазССР, с. ш. № 14),
*Вялый М.* (Енакиево, с. ш. № 37),
*Костусяк В.* (Запорожье, с. ш. № 28),
*Лысенок И.* (п. Нароч Минской обл., с. ш. № 1),
*Ненашев А.* (Ленинград, ФМШ № 45),
*Саблин А.* (п. Хохольский Воронежской обл., с. ш. № 1),
*Скубович Д.* (Ленинград, ФМШ № 45);
*Текко Я.* (Вильянди, с. ш. № 1),

по 9 классам—
*Амброладзе А.* (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
*Арбузов Л.* (Новосибирск, ФМШ № 165),
*Аузиньш А.* (Рига, с. ш. № 1),
*Калика И.* (Киев, ФМШ № 145),
*Кодряну А.* (Москва, с. ш. № 2),
*Ослон В.* (Киев, с. ш. № 173),
*Сиденко С.* (с. Александровка Одесской обл., с. ш. № 1),
*Флаасс Д.* (Новосибирск, ФМШ № 165);

по 10 классам—
*Гончаров А.* (Никополь, с. ш. № 13),
*Любашенко В.* (Киев, ФМШ № 145),
*Мельник А.* (Новосибирск, ФМШ № 165),
*Смирнов А.* (Ленинград, ФМШ № 45),
*Трегуб С.* (Ташкент, с. ш. № 103),
*Финашин С.* (Ленинград, ФМШ № 45),
*Хазанов С.* (Куйбышев, с. ш. № 41),
*Царев С.* (Великие Луки, с. ш. № 11).

### Дипломы III степени

по 8 классам получили
*Кротов А.* (Иваново, с. ш. № 28),
*Летчиков А.* (Ижевск, с. ш. № 30),
*Мидодашвили Б.* (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
*Убайдуллаев Р.* (Ташкент, с. ш. № 5),
*Фомин А.* (Новосибирск, с. ш. № 130),
*Шарипова О.* (Ташкент, с. ш. № 110);

по 9 классам—
*Абаджян С.* (Ереван, с. ш. № 1),
*Боровиков П.* (Ангарск, с. ш. № 10),
*Глезин Е.* (Ленинград, с. ш. № 30),
*Григорьева И* (Казань, с. ш. № 131),
*Конев-Барышников Ю.* (Москва, с. ш. № 91),
*Нигматулин Р.* (Альметьевск, с. ш. № 16),
*Самуни М.* (Ленинград, с. ш. № 30),
*Спиваковский М.* (Москва, с. ш. № 57),
*Хишин С* (Москва, ФМШ № 18);
*Шматов Ю.* (Москва, ФМШ № 18),

по 10 классам —

*Белов А.* (Свердловск, с. ш. № 5),
*Буров Ю.* (Москва, с. ш. № 2),
*Гриневич П.* (Москва, с. ш. № 204),
*Гусейнов В.* (Нахичевань, с. ш. № 3),
*Клепцын А.* (Ульяновск, с. ш. № 25),
*Козлов В.* (Москва, ФМШ № 18),
*Красаускас Р.* (Вильнюс, с. ш. № 1),
*Лайдерман А.* (Ленинград, с. ш. № 30),
*Ландман Е.* (Могилев-Подольский, с. ш. № 5),
*Литвиненко Д.* (Севастополь, с. ш. № 34),
*Лукьяненко С.* (Москва, ФМШ № 18),
*Малышев А.* (Новосибирск, ФМШ № 165),
*Медведь В.* (Молодечно, с. ш. № 3),
*Панин И.* (Ленинград, ФМШ № 45),
*Соркин Ю.* (Москва, с. ш. № 2),
*Федоров В.* (Москва, ФМШ № 18),
*Щербина М.* (Харьков, с. ш. № 27),

## Физика

### Дипломы I степени

по 8 классам получил
*Пономарев Е.* (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82);

по 9 классам —

*Лищенко О.* (Киев, ФМШ № 145),
*Шарипов Р.* (Каракуль Бухарской обл., с. ш. № 18);

по 10 классам —

*Сорокин А.* (Киров, с. ш. № 22).

### Дипломы II степени

по 8 классам получили

*Гаврилов И.* (Москва, с. ш. № 19),
*Газда Н.* (п. Клевань Ровенского р-на УССР, с. ш. № 1),
*Мичинский С.* (Новосибирск, с. ш. № 126),
*Пиктрис Р.* (Вильнюс, с. ш. № 22),
*Рылов С.* (Москва, с. ш № 2);

по 9 классам —

*Моржаков А.* (Новокузнецк, с. ш. № 11),
*Мошков И.* (Ленинград, ФМШ № 45),
*Решетов В.* (Рославль, с. ш. № 3),
*Третьяченко К.* (Киев, ФМШ № 145),
*Щукин В.* (Ленинград, ФМШ № 45);

по 10 классам —

*Булатов В.* (Ленинград, ФМШ № 45),
*Голубенцев А.* (Саратов, с. ш. № 13),
*Старшенко В.* (Запорожье, с. ш. № 28).

### Дипломы III степени

по 8 классам получили

*Вайсбурд И.* (Томск, с. ш. № 6),
*Гаркавый В.* (Лида, с. ш. № 1),
*Гербач А.* (Дрезден (ГСВГ), с. ш. № 15),
*Деражне А.* (Киев, ФМШ № 145),
*Ковригин Д.* (Ломоносов, с. ш. № 1),
*Коробейников М.* (Ашхабад, с. ш. № 7),
*Метлицкий В.* (Калуга, с. ш. № 23),
*Нейман В.* (Ленинград, ФМШ № 45);

по 9 классам —

*Гонопольский А.* (Минск, с. ш. № 88),
*Грибов Б.* (Воронеж, с. ш. № 66),
*Григорьев Ю.* (Чебоксары, школа-интернат № 2),
*Мухарский Ю.* (Киев, ФМШ № 145),
*Налибоцкий Б.* (Минск, с. ш. № 98),
*Хейдельберг М.* (Таллин, с. ш. № 1),
*Черных Л.* (Лида, с. ш. № 1),
*Чистяков П.* (Москва, с. ш. № 2),
*Шкаровский Ю.* (с. Станишовка Киевской обл., с. ш. № 1);

по 10 классам —

*Абдуллин Х.* (Алма-Ата, РФМШ),
*Будько С.* (Витебск, с. ш. № 9),
*Кривцун В.* (Харьков, с. ш. № 27),
*Семенов А.* (Москва, с. ш. № 179),
*Тарасов В.* (Ленинград, ФМШ № 45),
*Тетерин Ю.* (Ленинград, с. ш. № 239),
*Хамитов И.* (Ленинград, ФМШ № 45),
*Цыбулевский М.* (Винница, с. ш. № 17).

# Спрашивайте — отвечаем

**Альфия Сулейманова, ученица Дрожжановской средней школы (село Старое Дрожжаное ТАССР), спрашивает, можно ли создать так называемые сверхаккумуляторы, т. е. аккумуляторы, основанные на явлении сверхпроводимости, и использовать их как источники энергии.**

На эти вопросы мы попросили ответить консультанта отдела физики нашего журнала А. Володина.

Аккумуляторы энергии, работа которых основана на явлении сверхпроводимости, в настоящее время уже не фантастика. В лабораториях научно-исследовательских институтов построены и изучаются подобные устройства, называемые сверхпроводящими накопителями энергии. В общих чертах такой накопитель представляет собой сверхпроводящую катушку, по которой течет незатухающий ток. Энергия в нем запасена в виде энергии магнитного поля. В принципе это самый компактный способ хранения энергии, поскольку в малом объеме, занимаемом интенсивным магнитным полем, может быть запасена очень большая энергия. Этого нельзя сказать про другие накопители энергии. Например, аккумулятор электрической энергии не может быть столь компактным, так как для электрического поля существует предельное значение напряженности, связанное с возможностью электрического пробоя. Для магнитного же поля ограничений, связанных с «пробоем», нет.

Единственное принципиальное ограничение плотности энергии, запасенной в магнитном поле, обусловлено давлением магнитного поля на материал катушки. Такое давление возникает из-за взаимодействия тока в катушке с магнитным полем и растет пропорционально квадрату индукции магнитного поля. Превышение предельно допустимых механических нагрузок на катушку может привести к ее разрушению.

Разработка прочных конструкций катушек представляет собой лишь одну из проблем, требующих своего решения для практического использования сверхпроводящих накопителей энергии. Другие проблемы связаны с поиском новых сверхпроводников с высокими критическими параметрами (т. е. большим незатухающим током и высокой температурой перехода в нормальное, несверхпроводящее, состояние), с созданием эффективных криогенных систем (ведь сверхпроводимость пока «работает» только при очень низких температурах, меньших — 250°C). Над решением этих проблем успешно работают ученые, и практическое использование сверхпроводящих аккумуляторов энергии — дело ближайшего будущего.

# Чему равен $\sqrt[0{,}5]{4}$?

В ряде пособий по математике для поступающих и в некоторых других изданиях получила распространение трактовка решения одного типа уравнений, противоречащая принятому в школе определению. Мы считаем необходимым предостеречь читателей от слишком доверчивого отношения к ошибочным утверждениям авторов этих книг.

Рассмотрим уравнение № 7.053 из «Сборника задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы» под редакцией М. И. Сканави (М., «Высшая школа», 1973):

$$\sqrt{2^x\cdot\sqrt[3]{4^x\cdot\sqrt[x]{0{,}125}}} = 4\sqrt[3]{2}. \qquad (1)$$

В качестве корней этого уравнения в ответе приводятся два значения:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{1}{5}. \qquad (2)$$

По-видимому, составители «Сборника» исходили из следующего решения: уравнение (1) после несложных преобразований, использующих свойства степеней и корней, переписывается в виде

$$\sqrt[6]{\sqrt[x]{2^{5x^2-3}}} = 2^{7/3}; \qquad (3)$$

далее имеем

$$\sqrt[6x]{2^{5x^2-3}} = 2^{7/3}, \qquad (4)$$

откуда

$$2^{\frac{5x^2-3}{6x}} = 2^{7/3}; \qquad (5)$$

наконец, приравняв показатели степени, приходим к квадратному уравнению с корнями (2).

Однако указанное решение нельзя считать исчерпывающим, поскольку из проведенных формальных вычислений еще совсем не ясно, являются ли на самом деле найденные значения (2) корнями исходного уравнения (1). Этот вопрос требует специальной проверки.

Прежде чем такую проверку осуществить, напомним, что *в школьном курсе математики при определении выражения $\sqrt[n]{a}$ (арифметического корня n-й степени из числа a) четко оговаривается, что n — натуральное число, большее единицы* (см. «Алгебра 8» п. 24). Таким образом, с точки зрения принятого в школе определения выражения

$$\sqrt[0{,}5]{4}, \quad \sqrt[-2]{2/5}, \quad \sqrt[\pi]{\pi}$$

так же лишены смысла, как и выражения

$$\frac{1}{0}, \quad \sqrt{-4}, \quad (-3)^{\sqrt{2}},$$

$$\log_2(-3), \quad \arcsin\pi.$$

Поэтому число $x = -{}^1/_5$ не может быть признано корнем уравнения (1); его подстановка в левую часть уравнения дает бессмысленное выражение $\sqrt[-1/5]{0{,}125}$. Другими словами, ответ (2) неверен; на самом деле уравнение (1) имеет единственный корень $x = 3$.

Откуда же возникает в приведенном решении посторонний корень? Дело в том, что уравнения (4) и (5) не равносильны: *выражения*

$$\sqrt[x]{a} \text{ и } a^{\frac{1}{x}} \qquad (6)$$

*тождественны относительно x только на множестве натуральных чисел, больших единицы*, и потому переход от уравнения (4) к уравнению (5) расширяет область допустимых значений переменной и, следовательно, может привести (и в случае уравнения (1) действительно приводит) к появлению посторонних корней. Может привести к появлению посторонних корней и переход, аналогичный переходу от уравнения (3) к уравнению (4): например, уравнения

$$\sqrt[6]{\sqrt[x]{9}} = 3 \text{ и } \sqrt[6x]{9} = 3$$

не равносильны, поскольку число $x = {}^1/_3$ является корнем второго уравнения, но не удовлетворяет первому (выражение $\sqrt[1/3]{9}$ бессмысленно).

Мы не стали бы столь подробно останавливаться на этих прописных истинах, если бы подобные ошибки не встречались во многих книгах и пособиях для поступающих. Так, в уже упомянутом выше «Сборнике задач» из-за невнимания к областям определения выражений (6) даны неверные ответы к следующим уравнениям и системам уравнений: №№ 2.026, 2.159, 2.160, 2.241, 2.261, 2.272, 2.298, 7.001, 7.002, 7.005, 7.008, 7.012, 7.019, 7.055, 7.061, 7.065, 7.166, 7.219, 7.258, 9.051, 9.052, 9.109, 9.155, 9.241, 16.092. По той же причине ошибочны и ответы к задачам №№ 277, 285, 294, 311, 316, 317 из «Сборника задач по элементарной математике» Н. П. Антонова и др. (М., «Наука», 1974), к задачам №№ 24 и 29 на стр. 95 книги «Математика. Поступающим в вузы» под редакцией А. И. Бородина (Киев, «Вища школа», 1975), к задаче № 436 из «Пособия по ма тематике для поступающих в вузы» Б. И. Александрова и др. (М., изд-во МГУ, 1972), к задаче № 11.6 книги «Задачи по элементарной математике повышенной трудности» Е. Б. Ваховского и А. А. Рывкина (М., «Наука», 1971), к задаче 6 на стр. 194, 195 «Пособия по математике для поступающих в вузы» В. В. Зорина (М., «Высшая школа», 1973), к задаче 1 на стр. 50—51 книги «Ошибки в решении конкурсных задач на вступительных экзаменах по математике» В. А. Тупикова (Минск, «Вышэйшая школа», 1974).

Список можно продолжать дальше еще долго. Не будем этого делать, но отметим, что в него попадает и ряд методических книг для учителей: И. Г. Бородуля. «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» (М., «Просвещение», 1968); Г. А. Ястребинский. «Уравнения и неравенства, содержащие параметры» (М., «Просвещение», 1972); С. Е. Ляпин и др. «Сборник задач по элементарной математике» (М., «Просвещение», 1973).

К сожалению, аналогичные ошибки были допущены и в ответах к задачам вариантов вступительных экзаменов различных вузов, которые публиковались в журнале «Квант» (см., например, 1972, № 3, с. 56; 1972, № 7, с. 46; 1974, № 7, с. 58; 1975, № 7, с. 57, 63).

Сказанное достаточно наглядно подтверждает известный факт: формальное оперирование символами, без анализа их точного смысла и исследования законности проводимых преобразований, неизбежно приводит к ошибкам.

*А. Кужель, Т. Чикирисова*

# Поиски и открытия планет

«Когда мы начинали работу над книгой, нашим первоначальным желанием было рассказать читателю о том, как были открыты самые далекие, невидимые невооруженным глазом большие планеты Солнечной системы — Уран, Нептун и Плутон... Но по мере работы над книгой мы все больше убеждались в том, что было бы несправедливо ограничиться рассказом об открытиях Урана, Нептуна и Плутона, не упомянув об открытии ряда других членов Солнечной системы. Разве открытия спутников Юпитера, Сатурна и других больших планет, ...обнаружение кольца астероидов не украшают историю астрономии? Наконец, вопрос о том, существуют ли другие, пока неизвестные небесные объекты, имеющие право называться членами нашей планетной системы, тоже не мог быть нами забыт...»

Такое предисловие предпослали авторы книги «Поиски и открытия планет»*). Они поставили себе задачей популярно рассказать широкому кругу читателей о событиях, связанных с открытием в XIX и XX веках неизвестных ранее планет Солнечной системы, раскрыв при этом роль событий, показав их значимость для развития наших представлений о строении Солнечной системы. Читатель этой книги узнает не только об эволюции научных представлений о строении Солнечной системы, но и о ведущей роли, которую при этом играла небесная механика, о выдающемся вкладе, внесенном в ее развитие трудами основных действующих лиц в истории открытия Нептуна — Адамсом и Леверье. Читатель, интересующийся чисто математическими проблемами работ Адамса и Леверье, не оставит без внимания приложения, в которых авторы дают в обработанном виде вычисления Адамса и Леверье, приведшие в конце концов к открытию Нептуна. Он познакомится и с тем, какой по истине гигантский труд был проделан Ловеллом и Томбо — соавторами открытия десятой планеты Солнечной системы — Плутона.

Можно смело сказать, что подавляющее число читателей, начав читать «Поиски и открытия планет», не оставят книгу, пока не прочтут ее до конца. И не только потому, что сама история открытия новых планет захватывающе интересна. Важное значение книги заключается как раз в том, что она заставляет читателя задумываться об очень многом: о путях и логике развития науки, о роли в научном исследовании субъективных и объективных факторов, о том, как человеческие взаимоотношения сказываются на судьбах открытий и ученых, и о многом другом.

Эта книга рассчитана на самый широкий круг читателей (начиная со школьников старших классов), на всех тех, кто интересуется историей науки вообще и историей астрономии в частности.

*Б. Гельфгат*

---

*) Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов. Поиски и открытия планет. М., «Наука», 1975.

# Новые книги

**В этом номере мы помещаем аннотации на книги по математике и физике, выходящие в IV квартале 1976 года, представляющие интерес для наших читателей.**

## Математика

### Издательство «Наука»

1. Башмаков М. И. *Уравнения и неравенства* (Библиотечка физико-математической школы). Издание 2-е, перераб. Объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 14 к.

Круг рассматриваемых в книге вопросов намеренно ограничен — в ней разбираются почти исключительно алгебраические уравнения и неравенства и довольно мало места отводится интересным и важным задачам на доказательство неравенств. Сложной теории здесь нет, большая часть книжки состоит просто из примеров. С другой стороны, хотя вещи, рассматриваемые в книжке, в общем-то самые привычные, иногда привычки приходится ломать и создавать новые.

Книжка носит ярко выраженный «технический» характер. В ней много задач, требующих только хорошего владения школьным материалом, близки к конкурсным задачам при поступлении в институт. Примеры, показываемые в тексте, требуют внимательного разбора с карандашом в руке.

Заканчивается книжка «Краткими итогами»; в них собраны основные понятия и даются десять полезных «Советов».

Книга рассчитана на школьников 9—10 классов, учителей и лиц, самостоятельно занимающихся математикой.

2. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. *Прямые и кривые* (Библиотечка физико-математической школы). Издание 2-е, перераб. Объем 6 л., тираж 200 000 экз., цена 16 к.

Книга содержит около двухсот задач по элементарной геометрии. Задачи разбиты на несколько циклов, которые включают как традиционные темы: задачи на отыскание геометрических мест (множеств точек), задачи на замечательные точки в треугольнике, задачи на построение, так и довольно трудные задачи на максимум и минимум, в том числе на условный экстремум, олимпиадные задачи. В книге немало поучительных задач, в которых требуется провести небольшие исследования.

Читатель познакомится с использованием в геометрии метода координат и теоретико-множественного языка (понятий пересечения и объединения множеств), преобразований, семейств линий уровня функций на плоскости, кинематики. В сжатой форме рассказывается об эллипсах, гиперболах, параболах, о некоторых кривых, возникающих при движении фигур, и о свойствах касательных к этим кривым. В приложении к книге дается сводка основных формул метода координат.

Книга будет полезна ученикам 8—10 классов, учителям, руководителям математических кружков.

3. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра* (Библиотека математического кружка). Издание 5-е, перераб. Объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 93 к.

Этот сборник задач — I выпуск серии «Библиотека математического кружка», изданный впервые в 1950 году — составлен по материалам одного из старейших кружков — кружка при Московском университете им. М. В. Ломоносова. В отличие от большинства задачников, предназначенных для школьников, он не ставит своей целью углубить или закрепить знания читателя, полученные им в школе. Цель сборника — познакомить читателя с рядом новых для него методов и идей и привить вкус к самостоятельному математическому творчеству. Поэтому в сборнике почти нет задач, для решения которых достаточно только формального знания школьного курса математики. Мало также и наиболее привычных для учащихся типов задач «на сообразительность»: на искусственные методы решения уравнений и систем уравнений, на построение. Зато сборник содержит много задач с нестандартными формулировками, требующих для своего решения новых подходов.

Наибольшее внимание уделено тем разделам элементарной математики, которые находят продолжение в современных научных исследованиях. Некоторые циклы задач в переработанном и приспособленном для школьников виде излагают вопросы, которые обычно относят к «высшей математике» (элементы теории чисел и теории вероятностей, разностные уравнения и т. д.). Отдельные задачи взяты из сочинений классиков математики и из статей, напечатанных в серьезных математических журналах.

Хотя настоящий сборник и может показаться трудным читателю, привыкшему к стандартным задачам, мы уверены, что большинство задач доступны для настойчивого школьника.

### Издательство «Просвещение»

4. Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А. *Международные математические олимпиады.* Издание 4-е, перераб. и дополн. Объем 15 л., тираж 150 000 экз., цена 55 к.

Основным содержанием книги являются тексты задач (с решениями или указаниями) международных математических олимпиад. Помимо этого, в книге приведены наиболее интересные задачи, присланные в жюри международных олимпиад, но не включенные в материалы соревнований, а также некоторые задачи, предлагавшиеся на национальных олимпиадах стран-участниц (Англии, Швеции, Югославии, Венгрии, Румынии, ГДР, Болгарии, Чехословакии, Польши, Советского Союза). Пятое издание книги дополнено материалами последних пяти олимпиад — с XII по XVI.

Книга, безусловно, доставит удовольствие всем учащимся старших классов, любящим решать трудные задачи, и будет полезна руководителям математических кружков.

5. Лаптев Б. Л. *Лобачевский и его геометрия.* Объем 5 л., тираж 80 000 экз., цена 15 к.

В этой брошюре рассказывается о жизни великого русского ученого Лобачевского и дается доступное изложение его геометрических идей. В конце приводится обзор дальнейшего развития неевклидовой геометрии и современных применений геометрии Лобачевского в математике и физике.

Книга адресована учащимся 8—10 классов

## Физика

### Издательство «Наука»

1. Капица П. Л. *Эксперимент, теория, практика.* Издание 2-е. Объем 25 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 07 к.

Эта книга представляет собой сборник статей и выступлений академика П. Л. Капицы. В чрезвычайно живой и остроумной форме Капица рассказывает о своих встречах и совместных работах с выдающимися физиками нашего времени.

Ряд статей обращен непосредственно к молодежи.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

2. Маковецкий П. В. *Смотри в корень!* Издание 3-е, испр. и дополн. Объем 18 л., тираж 380 000 экз., цена 69 к.

В книге собраны оригинальные задачи по физике и смежным с ней областям науки (космонавтике, астрономии и т. д.).

Парадоксальность задач зачастую подчеркивается их юмористическим освещением и шуточными эпиграфами (взятыми из афоризмов Козьмы Пруткова).

Книга предназначена для школьников старших классов и с успехом может быть использована в работе физических кружков.

### Издательство «Мир»

3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике.* Перевод с англ. Вып. I. Современная наука о природе. Законы механики. Вып. II. Пространство, время, движение. Издание 2-е. Объем 25 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 94 к.

Курс физики известного американского физика-теоретика Ричарда Фейнмана завоевал широкое международное признание. Первое издание этого курса в 9 выпусках вышло в Советском Союзе семь лет назад в этом же издательстве. Настоящее издание выйдет в течение 1976—1978 гг.

Простота изложения, прекрасный и ясный язык, отсутствие громоздких математических выкладок делают эти книги доступными для школьников старших классов.

4. Эрдеи-Груз Т. *Основы строения материи.* Перевод с венг. Объем 25 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 46. к.

В популярной форме автор рассматривает вопросы строения вещества: общие положения физики микромира; строение атома, атомного ядра, молекулы; природу химических связей; структуру кристаллических и некристаллических тел. Автор подробно останавливается на вопросах практического использования результатов исследований в области микромира.

### Атомиздат

5. Арцимович Л. А. *Что каждый физик должен знать о плазме.* Объем 8 л., тираж 80 000 экз., цена 30 к.

Эта книга рассчитана на любознательного читателя, желающего получить новейшую информацию о современной области науки — физике плазмы.

Сначала плазма интересовала физиков как своеобразный проводник электрического тока, а также как источник света. Сейчас ее уже рассматривают как естественное состояние вещества, нагретого до очень высокой температуры, и как динамическую систему — объект приложения электромагнитных сил.

Книгу с интересом прочтут все, кто интересуется современной физикой.

6. Старз Дж. *Молекулы жизни.* Перевод с англ. Объем 6 л., тираж 50 000 экз., цена 30 к.

В книге в живой и доступной форме излагаются элементарные понятия биохимии и описываются «молекулы жизни», т. е. те молекулы, которые принимают участие в жизненных процессах.

Книга представляет несомненный интерес для широкого круга читателей.

*И. Клумова,*
*М. Смолянский*

## «Квант» для младших школьников

## Задачи

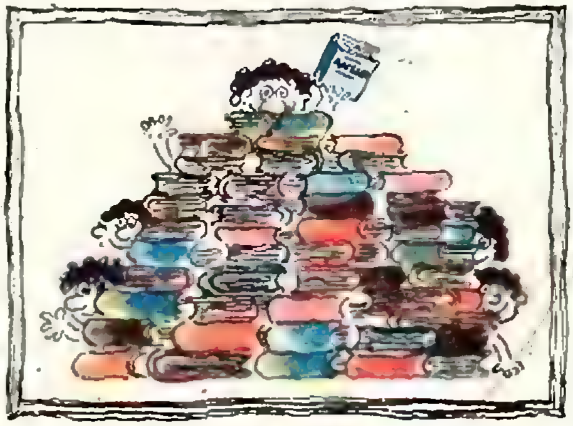
1. Поп и Балда играют на «щелбаны» в следующую игру. Они, не показывая друг другу, пишут каждый последовательность из 1976 знаков «плюс» или «минус». После этого выписывают знаки по кругу: первый знак из набора Попа, первый знак из набора Балды, второй знак из набора Попа, второй знак из набора Балды и так далее. Балда дает Попу столько щелбанов, в скольких местах плюс находится рядом с минусом. Как должен играть Поп, чтобы в наихудшем для себя случае получить поменьше щелбанов?

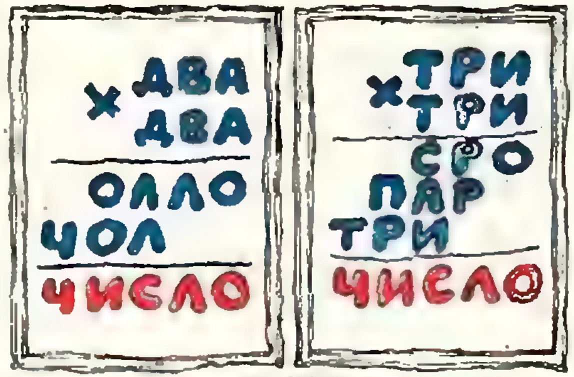
2. Ученики двух седьмых классов купили 737 учебников. Каждый купил одинаковое количество книг. Сколько было семиклассников и сколько учебников закупил каждый из них?

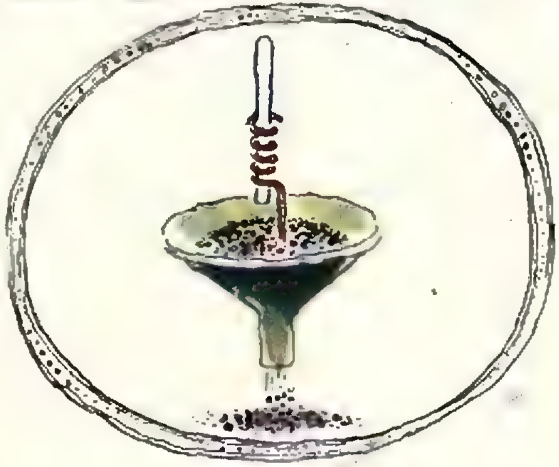
3. На рисунке вы видите два примера на умножение. В каждом примере каждой букве соответствует своя цифра. Какая?

4. Девять чисел $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$, $k$ отличны от нуля. Докажите, что среди чисел $aek$, $dhc$, $bfg$, $-gec$, $-ahf$, $-bdk$ есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное.

5. Представьте себе, что в воронку насыпаны мелкие металлические опилки, которые свободно вытекают из «носика» воронки. В опилки воткнута металлическая проволочка, другой конец которой намотан на стеклянную палочку. Что будет происходить с опилками, если палочку натирать куском шерстяной материи? Чтобы убедиться в правильности своего «предсказания», попробуйте воспроизвести этот несложный опыт.







# ФИГУРЫ КОНГРУЭНТНЫ... ФИГУРЫ НЕКОНГРУЭНТНЫ?

Е. Семёнов

## Степа изобретает

Смотрите, — убеждал своих друзей шестиклассник Степа Мошкин, — я придумал новое отображение плоскости на себя! При этом отображении точка $O$ отображается на себя: $O \to O$ — как при повороте. Всякая другая точка $A$ отображается на такую точку $A_1$, что $A_1$ принадлежит лучу $[OA)$ и $|OA_1| = 2\,|OA|$ *). Теперь возьмем на прямой $p$ точки $A$, $B$, $K$, $D$ и построим их образы $A_1$, $B_1$, $K_1$, $D_1$ (рис. 1). Вы видите, все они лежат на одной прямой $p_1$, т. е. прямая $p$ отображается на прямую $p_1$. Прямая $AC$ отображается на прямую $A_1C_1$, т. е. на себя, и угол $AOB$ отображается на себя. Но самое удивительное не в этом. Все расстояния в придуманном мною отображении удваиваются! Например, $|A_1B_1| = 2\,|AB|$, $|A_1C_1| = 2\,|AC|$, $|OD_1| = 2\,|OD|$ и т. д. Следовательно, прямая $p$ отобразилась на прямую $p_1$ так, что все расстояния увеличились в два раза! Из курса геометрии 6 класса мы помним, что *конгруэнтными фигурами называются такие, которые отображаются одна на другую с сохранением расстояний.* При отобра-

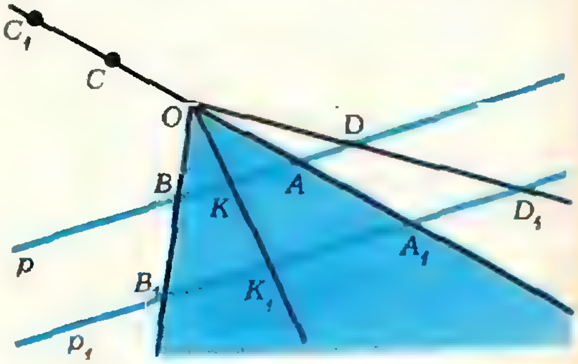


Рис. 1.

---

*) Придуманное Степой отображение изучается в третьей четверти седьмого класса и носит название «гомотетия». Степа Мошкин об этом не знал.

жении фигуры $p$ на фигуру $p_1$ расстояния не сохранились Следовательно, прямая $p$ не конгруэнтна прямой $p_1$! И даже прямая $AC$ не конгруэнтна сама себе, ведь она отобразилась на себя так, что расстояния не сохранились: $|A_1C_1| = 2|AC|$! Аналогично и угол $AOB$ не конгруэнтен сам себе. Так что, — твердо произнес Степа, — прямая может быть не конгруэнтна сама себе; существуют прямые, не конгруэнтные друг другу!

— Это не так! — выкрикнул Гена. — Всякие две прямые конгруэнтны! Всякая фигура конгруэнтна сама себе!

— Почему это? — возразил Степа. — Существуют же неконгруэнтные треугольники, неконгруэнтные параллелограммы, неконгруэнтные окружности! Почему бы не существовать и неконгруэнтным прямым?

Кто же прав в этом споре?

## Вечный путаник Степа Мошкин

Вы уже выяснили, кто прав? Ну конечно же, Степа повторяет старые ошибки — определение конгруэнтных фигур он заменил, не сознавая этого, другим. Ведь в учебнике сказано: *«если фигуру Ф можно отобразить на фигуру $Ф_1$ так, что расстояние между любыми двумя точками фигуры Ф равно расстоянию между соответствующими им точками фигуры $Ф_1$, то говорят, что фигура Ф конгруэнтна фигуре $Ф_1$»*. Иначе это можно сказать так: *если существует отображение одной фигуры на другую, при котором расстояния сохраняются, то эти фигуры называются конгруэнтными.*

А Степа решил, что *конгруэнтными фигурами называются такие, которые отображаются друг на друга только с сохранением расстояний*! Если же существует отображение одной фигуры на другую, не сохраняющее расстояния, то такие фигуры, считает Степа, неконгруэнтны. Правда, слово «только» Степой не было произнесено, но оно им подразумевалось как само собой разумеющееся.

Своим примером Степа показал, что существует отображение фигуры на конгруэнтную ей фигуру, не сохраняющее расстояния. А Гене надо было указать другое отображение прямой $p$ на прямую $p_1$, сохраняющее расстояния, скажем, центральную симметрию с центром в середине отрезка $AA_1$, или осевую симметрию с осью, проходящей через середины отрезков $AA_1$ и $BB_1$, или параллельный перенос, при котором точка $A$ отображается в точку $A_1$. Конечно, и угол $AOB$ конгруэнтен сам себе, — достаточно указать тождественное отображение или осевую симметрию с осью, являющейся биссектрисой угла $AOB$.

## Что же определил Степа?

Степина ошибка ставит интересный вопрос: а существуют ли случаи, в которых и по школьному определению конгруэнтности, и по Степиному получится один и тот же результат? Другими словами, существуют ли фигуры, которые могут быть отображены одна на другую только с сохранением расстояний?

Чтобы ответить на этот вопрос, начнем с простейших случаев. Фигура — это множество точек. Простейшей фигурой является фигура, состоящая из одной точки. Пусть $F_1 = \{A\}$, $F_2 = \{B\}$, где $A$ и $B$ — точки. Ясно, что существует единственное отображение фигуры $F_1$ на фигуру $F_2$, оно точку $A$ отображает на точку $B$:

$$A \to B.$$

Поскольку фигуры $F_1$ и $F_2$ содержат по одной точке, то можно говорить лишь о расстоянии от точки $A$ до точки $A$ и от точки $B$ до точки $B$. Но $|AA| = |BB| = 0$, поэтому все отображения $F_1$ на $F_2$ сохраняют расстояния.

Пусть теперь $F_1 = \{A, B\}$, $F_2 = \{C, D\}$, где $A$, $B$, $C$, $D$ — точки

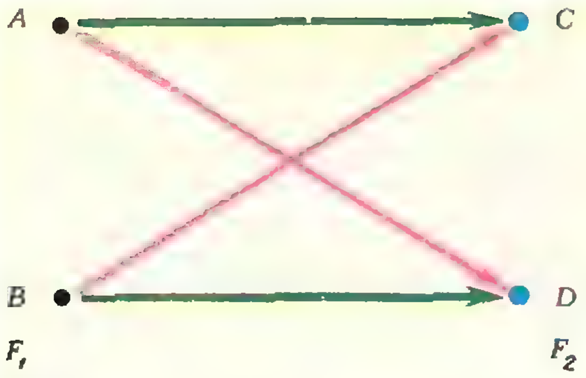


Рис. 2.

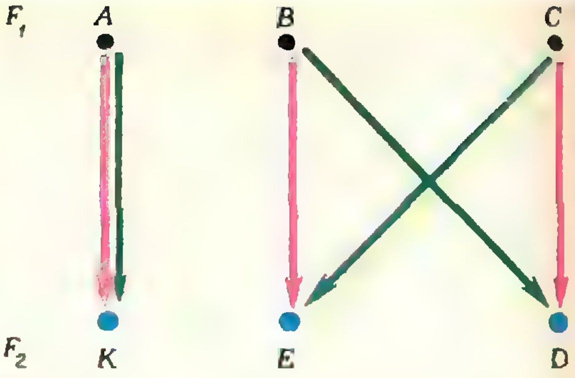


Рис. 3.

и $|AB| = |CD|$. Фигуру $F_1$ можно отобразить на *) фигуру $F_2$ только двумя способами (рис. 2):

1) $A \to C$, $B \to D$;
2) $A \to D$, $B \to C$.

Поскольку $|AB| = |CD| = |DC|$, то оба эти отображения сохраняют расстояния. Поэтому фигура $F_1$ может быть отображена на фигуру $F_2$ только с сохранением расстояний (т. е. эти фигуры конгруэнтны и по определению учебника, и по Степиному определению).

Таким образом, фигуры, отображающиеся друг на друга только с сохранением расстояний, существуют.

Возьмем теперь две фигуры $F_1$ и $F_2$, каждая из которых состоит из трех точек, принадлежащих одной прямой (рис. 3), причем $|AC| = |KD| = 5$ *см*, $|BC| = |ED| = 3$ *см*, $|AB| = |KE| = 2$ *см*. Эти фигуры конгруэнтны друг другу, так как отображение

$A \to K$, $B \to E$, $C \to D$

сохраняет расстояния. Отобразим теперь $F_1$ на $F_2$ так:

$A \to K$, $B \to D$, $C \to E$.

При этом отображении точки $A$ и $B$ отобразились на точки $K$ и $D$, но $|AB| \neq |KD|$, т. е. расстояние не сохранилось. Следовательно, фигуру $F_1$, можно отобразить на фигуру $F_2$ и без сохранения расстояний, т. е. «по Степе» $F_1$ и $F_2$ не конгруэнтны.

Теперь посмотрим, какие фигуры «по Степе» конгруэнтны сами себе. Пусть фигура $F$ состоит из двух точек: $F = \{A, B\}$. Эту фигуру можно отобразить на себя только двумя способами:

1) $A \to A$, $B \to B$;
2) $A \to B$, $B \to A$.

При обоих отображениях расстояния сохраняются: $|AB| = |AB| = |BA|$. Таким образом, при всяком отображении данной фигуры $F$ на себя расстояния сохраняются.

Пусть теперь $F_1 = \{A, B, C\}$ — фигура из трех точек, изображенная на рисунке 3. Отобразим ее на себя так:

$A \to A$, $B \to C$, $C \to B$.

Поскольку $|AC| \neq |AB|$, это отображение не сохраняет расстояний, и по Степиному определению эта фигура сама себе не конгруэнтна.

Чтобы полностью ответить на вопрос «что же определил Степа», ре-

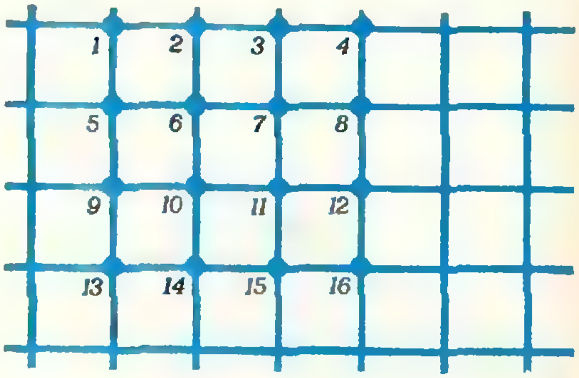


Рис. 4.

---

*) Подчеркнем: *отобразить на* (а не *в*), т.е. отображение предполагается *обратимым*.

ните следующие задачи: Вам может показаться, что при решении некоторых из них достаточно сослаться на «очевидность», но такая «ссылка» не будет решением этих задач. Нужно привести логические рассуждения, опирающиеся на определение конгруэнтных фигур, скажем, доказать, что для указанных в задачах фигур не существует отображения, переводящего одну из них в другую и сохраняющего расстояния.

Задачи

1. Найдите все фигуры $F_1$ и $F_2$, каждая из которых состоит из трех точек и которые можно отобразить друг на друга только с сохранением расстояний.

2. Найдите все фигуры, состоящие из трех точек, которые отображаются на себя только с сохранением расстояний.

3. Можно ли отобразить на себя множество всех вершин квадрата так, чтобы ни одно из расстояний между различными точками не сохранилось?

4. а) Докажите, что для любых двух конгруэнтных фигур на плоскости, состоящих более чем из трёх точек, найдется отображение одной из них на другую, не сохраняющее расстояния.

б) Докажите, что для любой фигуры на плоскости, состоящей более чем из трёх точек, найдется отображение ее на себя, не сохраняющее расстояния.

5. На рисунке 4 изображен кусок листа бумаги в клетку. Цифрами 1, 2, 3 и т. д. обозначены точки пересечения прямых сетки. Конгруэнтны ли фигуры $F_1$ и $F_2$, если

а) $F_1=\{5;\ 7;\ 3\}$; $F_2=\{7;\ 15;\ 16\}$;
б) $F_1=\{10;\ 7;\ 4\}$; $F_2=\{2;\ 7;\ 12\}$;
в) $F_1=\{1;\ 2;\ 6;\ 5\}$; $F_2=\{7;\ 8;\ 12;\ 11\}$;
г) $F_1=\{6;\ 7;\ 11;\ 10\}$, $F_2=\{1;\ 4;\ 16;\ 13\}$;
д) $F_1=\{1;\ 6\}$, $F_2=\{4;\ 7\}$;
е) $F_1=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $F_2=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

В каких случаях $F_1$ можно отобразить на $F_2$ без сохранения хотя бы одного расстояния?

6. Найдите на рисунке 4 фигуру $F_2$, если $F_1 \cong F_2$ и

а) $F_1=\{5;\ 9;\ 12\}$, $15 \in F_2$, $3 \in F_2$;

б) $F_1=\{1;\ 2;\ 5;\ 6;\ 7\}$, $10 \in F_2$, $11 \in F_2$, $12 \in F_2$;

в) $F_1=\{10;\ 7;\ 12;\ 15;\ 11\}$, $6 \in F_2$, $7 \in F_2$.

7. Докажите, что неконгруэнтны

а) фигуры $F_1=\{5;\ 1;\ 2\}$ и $F_2=\{6;\ 3;\ 8\}$ (рис. 4);

б) граница квадрата и окружность;

в) фигура, состоящая из трех различных точек, и фигура, состоящая из четырех различных точек;

г) прямая и фигура, представляющая собой объединение двух лучей с общим началом, не являющихся противоположными;

д) треугольник со сторонами 3, 4, 5 *см* и треугольник со сторонами 6, 7, 8 *см*.

---

# Как устроено атомное ядро

(*Начало см. с. 30, 42, 55*)

Европа может рассматриваться как ядро, состоящее из ряда протонов (которые обладают неодинаковыми размерами и зарядами) и из нескольких нейтронов (без заряда и малой массы). Все они удерживаются на своих местах с помощью колоссальной силы, которая не дает им разлететься и называется географией. Ядро это несимметрично, поскольку содержит на западной своей окраине весьма мощный протон (имеется в виду Великобритания), который обладает «волновыми характеристиками», присущими только ему. На юге располагается нечто такое, что может быть названо нейтрино (Италия). Можно предположить, что частица эта также подчиняется законам квантовой механики. Характерно в этом отношении, что центральная ее часть (Рим) — вечная, тогда как об остальной территории этого нельзя сказать.

Затруднения начинаются с рассмотрения электронов, которые обращаются по орбитам, далеким от ядра. В данном случае роль электронов играют колонии. Они принадлежат, если можно так выразиться, отдельным протонам. Но некоторое время тому назад ядро подвергло их ужасной бомбардировке, что заставило некоторые электроны перераспределиться между протонами. Один весьма влиятельный протон, на математическом языке обычно выражаемый свастикой, стал вести себя в этом отношении весьма и весьма неспокойно, что грозит нарушить устойчивое состояние ядра. Можно, однако, надеяться, что если западный протон увеличит свой заряд (имеется в виду — осуществит перевооружение), то, хотя напряженное состояние между протонами сохранится, ядро в целом станет более устойчивым.

Я полагаю, что осветил эту чрезвычайно сложную ситуацию в достаточной мере и пользуясь терминами, вполне доступными физикам. Я мог бы сказать еще словио и в отношении всемирного закона тяготения Ньютона, поскольку о нем упоминал профессор Андраде. Но я чувствую, сэр, что Вы придерживаетесь собственной точки зрения на этот счет, а мне не хотелось бы трогать то, что для Вас свято.»

## К статье «Графическое задание функции»

1. $X = [-1; 4]$; $Y = [-1; 2]$; $f(1{,}5) = 2$ — наибольшее значение, $f(-1) = -1$ — наименьшее значение; функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической; функция $f$ положительна в промежутках $]1; 2[$ и $]3{,}5; 4]$, отрицательна в промежутках $[-1; 1[$ и $]2; 3{,}5]$, обращается в нуль при $x=1$, $x=2$, $x=3{,}5$; функция $f$ возрастает в промежутках $[0; 1{,}5]$ и $[2{,}5; 4]$, убывает в промежутке $[1{,}5; 2{,}5]$, постоянна в промежутке $[-1; 0]$.

## К статье «Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева»

### Вариант 1

1. $$\sqrt[3]{\frac{4r^3 + h^3\mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha}}.$$

2. $x < -1$; $3/4 < x < 1$.

3. $x = k\pi/7$, $k$ — целое, не кратное 7. Указание. Домножить обе части уравнения на $\sin 2x$, проверив, что корни уравнения $\sin 2x = 0$ не являются корнями исходного уравнения.

### Вариант 2

1. $lh(\sqrt{l^2 + 12h^2} - l)/12$.

2. $x_{1,2} = \log_{4+\sqrt{15}}(31 \pm \sqrt{15}) = \pm 2$.

3. $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = 2k\pi + \pi/2$,

$$x_3 = (-1)^{k+1} \arcsin(3\sqrt{2}/5) + k\pi \quad (k \text{ — целое}).$$

### Физика

1. $t = 2$ *сек*; $v = 25$ *м/сек*
2. $F_н = 0{,}6$ *н*.
3. $k = 0{,}2$.
4. $v = 10{,}5$ *м/сек* $\approx 38$ *км/час*.
5. $t = 23$ °C.
6. $v = 400$ *м/сек*.
7. $R = 3$ *м*.
8. $A = 48 \cdot 10^{-7}$ *дж*.
9. $q = 24$ *к*; $A = 288$ *дж*.
10. $\mathscr{E} = 1{,}1$ *в*.
11. $\mathscr{E}_{инд} = 1{,}26$ *в*.
12. $\Delta l = 0{,}3$ *м*.
13. $F = 0{,}2$ *м*; $D = 5$ *дптр*.
14. $\lambda = 0{,}5$ *мкм*.
15. $E = 2$ *эв*.

## К статье «Фигуры конгруэнтны... фигуры неконгруэнтны?»

1. $F_1$ и $F_2$ — множества вершин двух конгруэнтных равносторонних треугольников.

2. Множество вершин равностороннего треугольника.

3. Нет. Указание. Для вершин квадрата есть шесть расстояний: 4 — по сторонам, 2 — по диагоналям, первые четыре равны друг другу.

4. Указание. Если при любом отображении расстояния сохраняются, то все расстояния между различными точками равны друг другу.

5. а) Да; при отображении 5→7, 7→15, 3→16 расстояния сохраняются.

б) Да; при отображении 10→2, 7→7, 4→12 расстояния сохраняются.

в) Да; при отображении 1→11, 5→12, 6→8, 2→7 расстояния сохраняются.

г) Нет, так как отображения фигуры $F_1$ на фигуру $F_2$, сохраняющего расстояния, в этом случае не существует. Например, на какие бы точки второй фигуры мы ни отображали точки 6 и 7, расстояние между их образами будет больше расстояния $|67|$.

д) Да.

е) Да; всякая фигура может быть отображена на себя с помощью тождественного отображения. В данном случае можно отобразить $F_1$ на $F_2$ с сохранением расстояний и так: 1→4, 4→1, 2→3, 3→2 (проверьте сохранение расстояний и при этом отображении).

6. а) $F_2 = \{15, 3, 14\}$ или $F_2 = \{15, 3, 16\}$, или $F_2 = \{15, 3, 2\}$, или $F_2 = \{15, 3, 4\}$.

б) $F_2 = \{10, 11, 12, 7, 6\}$ или $F_2 = \{10, 11, 12, 8, 7\}$, или $F_2 = \{10, 11, 12, 15, 14\}$, или $F_2 = \{10, 11, 12, 15, 16\}$.

в) $F_2 = \{6, 7, 5, 2, 10\}$ или $F_2 = \{6, 7, 8, 11, 3\}$.

7. а) На какие бы точки фигуры $F_2$ мы ни отображали точки 1 и 5, расстояние $|15|$ не сохраняется.

б) Допустим, что граница квадрата отображена на окружность с сохранением расстояний. Наиболее удаленные друг от друга точки границы квадрата — противоположные вершины квадрата. Наиболее удаленные точки окружности — диаметрально противоположные. Следовательно, длина $2r$ диаметра окружности должна быть равна длине диагонали квадрата. Но на границе квадрата существуют только две пары точек, находящихся друг от друга на расстоянии $2r$, они отобразятся на две пары диаметрально противоположных точек окружности, а на окружности существует бесконечное множество пар диаметрально противоположных точек. На границе квадрата таких пар больше нет, т. е. на другие диаметрально противоположные точки окружности никакая пара точек границы квадрата отобразиться не может. Значит, отобразить границу квадрата на окружность, сохраняя при этом расстояния, невозможно.

в) Поскольку вторая фигура имеет на одну точку больше, чем первая, то отображения первой фигуры на вторую не существует вообще.

г) Указание. Для любых трех точек, являющихся вершинами треугольника, справедливо неравенство $|AB|+|BC|>|AC|$.

д) Наибольшее расстояние между точками первого треугольника — 5 *см*, между точками второго треугольника — 8 *см*. Следовательно, в первой фигуре нет точек, которые могли бы быть отображены на точки второй фигуры, находящиеся друг от друга на расстоянии 8 *см*, то есть сохраняющего расстояния отображения первой фигуры на вторую нет.

### К задачам «Квант» для младших школьников»

(*см. «Квант» № 10*)

1. Поскольку мастер Седов не черноволосый (он отвечает черноволосому) и не седой, то он рыжий; кандидат в мастера не рыжий и не черноволосый, стало быть — седой.

2. 5 команд; 2 очка. Указание. В чемпионате могли участвовать до 7 команд (иначе первый призер набрал бы более 7 очков); сумма очков, набранных вместе и командами в чемпионате, равна $n(n-1)$.

3. $6084=78\cdot78$. Указание. Рассмотрите последние цифры квадратов чисел и воспользуйтесь признаками делимости на 9 и на 3.

4. Для горения необходим приток кислорода. В обычных земных условиях приток кислорода происходит за счет конвекции — вблизи пламени нагретый более легкий воздух и продукты сгорания поднимаются вверх, и на их место притекает более холодный воздух, содержащий кислород. В состоянии невесомости конвекции нет, и пламя гаснет из-за отсутствия кислорода.

### К заметке «Лингвистика + математика»

(*см. «Квант» № 10, с. 55*)

1. 1. Хороший друг красивых сыновей.
   2. Красивый сын хорошего друга.
   3. Хорошие сыновья красивых друзей.

2. Слова *e* и *i* служебные. Слово *e* имеет 3 значения: 1) показатель именного сказуемого; 2) показатель деятеля при пассиве; 3) показатель будущего времени глагола. Слово *i* имеет 2 значения: 1) показатель прошедшего времени глагола; 2) показатель прямого дополнения. Размытые фразы:

1. Это — сильная кошка.

2. Конечно же собака не будет есть бананы.

10. Aore teie uri i hohoni i te mau moa.

11. E tamaa te taata i te maia.

12. Eita teie matie e ai hia e te mau puaa.

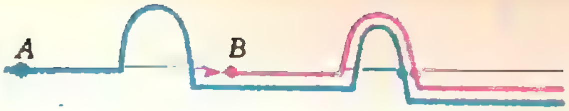


Рис. 1.

### К задачам

(*см. с. 21*)

1. Сколь угодно далеко (см. рис. 1 разными цветами показаны траектории концов отрезка).

2. а) $x=5$, $y=1$, $z=2$; б) $x_1=4$, $y_1=9$, $z_1=1$, $u_1=3$; $x_2=5$, $y_2=8$, $z_2=3$, $u_2=2$; в) $x=3$, $y=4$; г) $x=7$, $y=2$, $z=9$.

3. а) Воспользоваться неравенством $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y}\geqslant1$. б) Воспользоваться выпуклостью функции $y=\log_a x\,(0<a<1)$.

### К задаче «Испорченный квадрат»

(*См. «Квант» № 10, 3 с. обл.*)

См. рис. 2.

### К статье «XXV Олимпиада по физике в Польше»

(*См. «Квант» № 10*)

**Теоретические задачи**

1. Правильные ответы: 1е; 2а; 3 +; 4б; 5 — да; 6 — нет; 7в.

2. При $x\leqslant a$ $$C=\frac{\varepsilon_0a^2}{d}\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3}{\varepsilon_1+\varepsilon_3}+\frac{\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}\right);\qquad F=0.$$

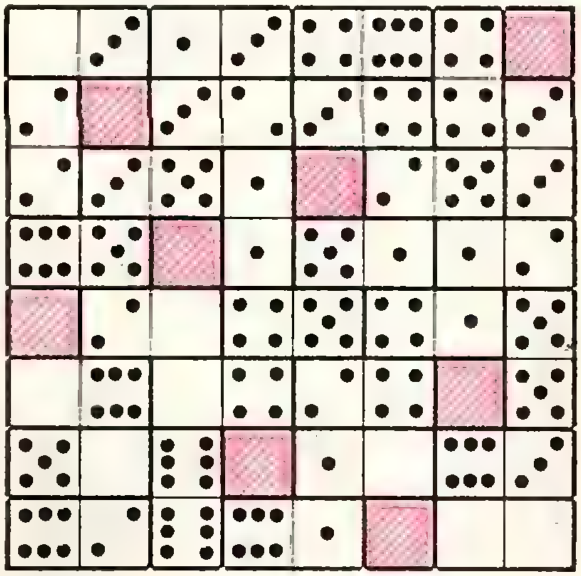


Рис. 2.

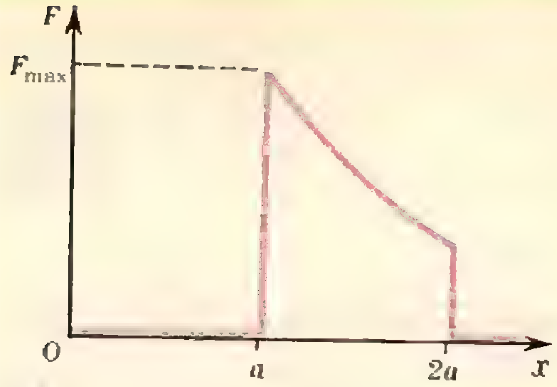


Рис. 3

При $a < x < 2a$

$$C = \frac{(2a-x)\,a\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_3}{d\,(\varepsilon_1+\varepsilon_3)} + \frac{[(x-a)\,\varepsilon_1 + a\varepsilon_2]\,\varepsilon_0\varepsilon_3 xa}{d\,[\varepsilon_3 x + \varepsilon_1 (x-a) + \varepsilon_2 a]};$$

$$F = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_3^2 a^3 U^2}{2d(\varepsilon_1+\varepsilon_3)}\;\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2}{(\alpha x + a\beta)^2}, \quad \text{где } \alpha = \varepsilon_1+\varepsilon_3 \text{ и } \beta = \varepsilon_2-\varepsilon_1.$$

График $F(x)$ представлен на рисунке 3. $F_{max} \approx 2{,}5\cdot 10^{-3}$ *н*. Если конденсатор отключить от источника, то сила уменьшится на величину $\Delta F = \frac{2FC}{U}$.

3. $T_з = \sqrt[4]{\frac{s}{4\sigma}} \approx 278^\circ\text{K}$; $T_c = \sqrt[4]{\frac{4s}{\sigma\alpha^2}} \approx 5760^\circ\text{K}$.

4. а) $r_{12} = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$; б) $R_1 = R_2 = \frac{3}{2}\frac{r}{\sqrt[3]{4}}$, $R = \frac{3}{2}\frac{r}{\sqrt[3]{2}}$.

5. $\alpha_{кр} \approx 26^\circ\ 26'$; $\alpha_ф \approx 25^\circ\ 27'$.

*(Окончание. Начало см. нас. 43)*

*Л. Лознер* (Минск) 3, 4; *С. Люксютов* (Киев) 3—5, 9; *А. Малягин* (Смоленск) 9; *В. Мартынов* (Волгоград) 4; *В. Мельник* (Каменец-Подольский) 9; *Ю. Мельниченко* (Байрам-Али) 7; *И. Мидодишвили* (Цхинвали) 3, 0; *О. Миргабасов* (Черновцы) 4; *И. Морозов* (Горький) 3—7; *А. Морозовский* (Киев) 3, 4, 9; *Ю. Мурзакаев* (Североморск) 9, 2; *Р. Мусалимов* (Байрам-Али) 7; *Ю. Мухарский* (Киев) 3—2; *Ю. Мухин* (Улан-Удэ) 4, 9; *И. Никифоров* (Великие Луки) 9, 2; *В. Николайчик* (Старые Дороги) 3—5, 2; *Б. Нимбуев* (Улан-Удэ) 3; *А. Обезнов* (Макеевка Донецкой обл.) 5; *Е. Огневицкий* (Днепропетровск) 3—5, 0; *К. Оспанов* (Байрам-Али) 9; *А. Охримчук* (Выкса) 3, 5, 7, 9; *Д. Патарая* (Тбилиси) 9, 0, 2; *О. Певзнер* (Днепропетровск) 3; *И. Пелецкий* (Москва) 3; *Н. Писецкий* (Запорожье) 4; *В. Плахотный* (Краснодар) 9; *П. Побыльца* (Ленинград) 3; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 4; *С. Пономарев* (Пермь) 5; *В. Потемкин* (Великие Луки) 3—5; *С. Пряхин* (Долгопрудный) 9; *В. Рубель* (Ставрополь) 3; *А. Рудерман* (Ленинград) 3, 4, 7; *С. Самщяк* (Бар) 3, 7; *Т. Саргазаков* (Новосибирск) 3, 5, 7; *В. Семак* (Кишинев) 3; *А. Сенкевич* (Ош) 2; *Ю. Скопинцев* (Львов) 7; *Ю. Скрынников* (Рустави) 3; *В. Смирнов* (Уфа) 4; *Ю. Смирнов* (Ленинград) 3, 4; *Ю. Смоленцев* (Ессентуки) 3; *В. Сорокин* (Днепропетровск) 3, 2; *С. Соскин* (Киев) 3, 5, 0, 2; *В. Стовба* (Москва) 9; *С. Субботин* (Алма-Ата) 2; *М. Суслов* (Москва) 3—5, 7; *А. Тараненко* (Горловка) 9; *Ю. Тикунов* (Новосибирск) 3, 5; *Ю. Тищенко* (Люберцы) 5; *Г. Трейдерис* (Вильнюс) 5; *К. Третьяченко* (Киев) 3—6; *К. Трутнев* (Казань) 3, 5, 7; *А. Фарбер* (Тамбов) 4; *Н. Федин* (Омск) 3—5, 7; *А. Худошин* (Харьков) 2; *Ю. Целуоти* (Старая Русса) 3; *И. Цуркис* (Калининград) 3; *Р. Шарипов* (Каракуль Бухарской обл.) 3; *Ф. Шарипов* (Сатка) 7, 9, 2; *С. Шаташвили* (Тбилиси) 3; *Э. Шифрин* (Днепропетровск) 3—5; *А. Шульга* (Полтава) 3, 7; *С. Шуралев* (Минск) 9, 2; *Е. Яненко* (Киев) 3—6.

Номер оформили: *Ю. Ващенко, Е. Верентинова, С. Верховский, М. Дубах, Г. Красиков, Л. Полинская, Э. Назаров*

Корректор *В. Сорокина*

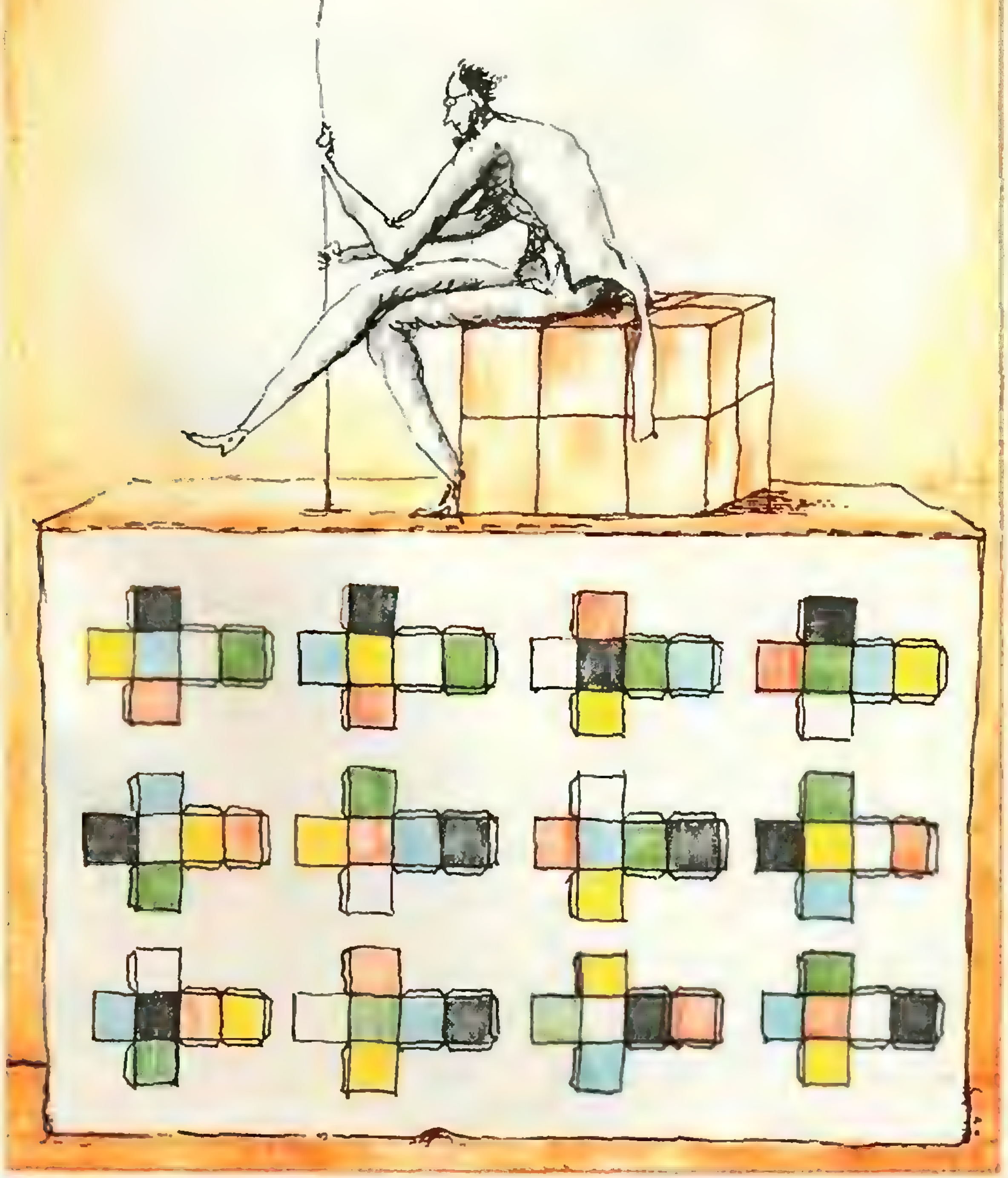
113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 21/VIII-76 г.
Подписано в печать 4/X-76 г.
Бумага 70×100¹/₁₆. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,39 Т-15168
Цена 30 коп. Заказ. 1858 Тираж 313 675 экз.

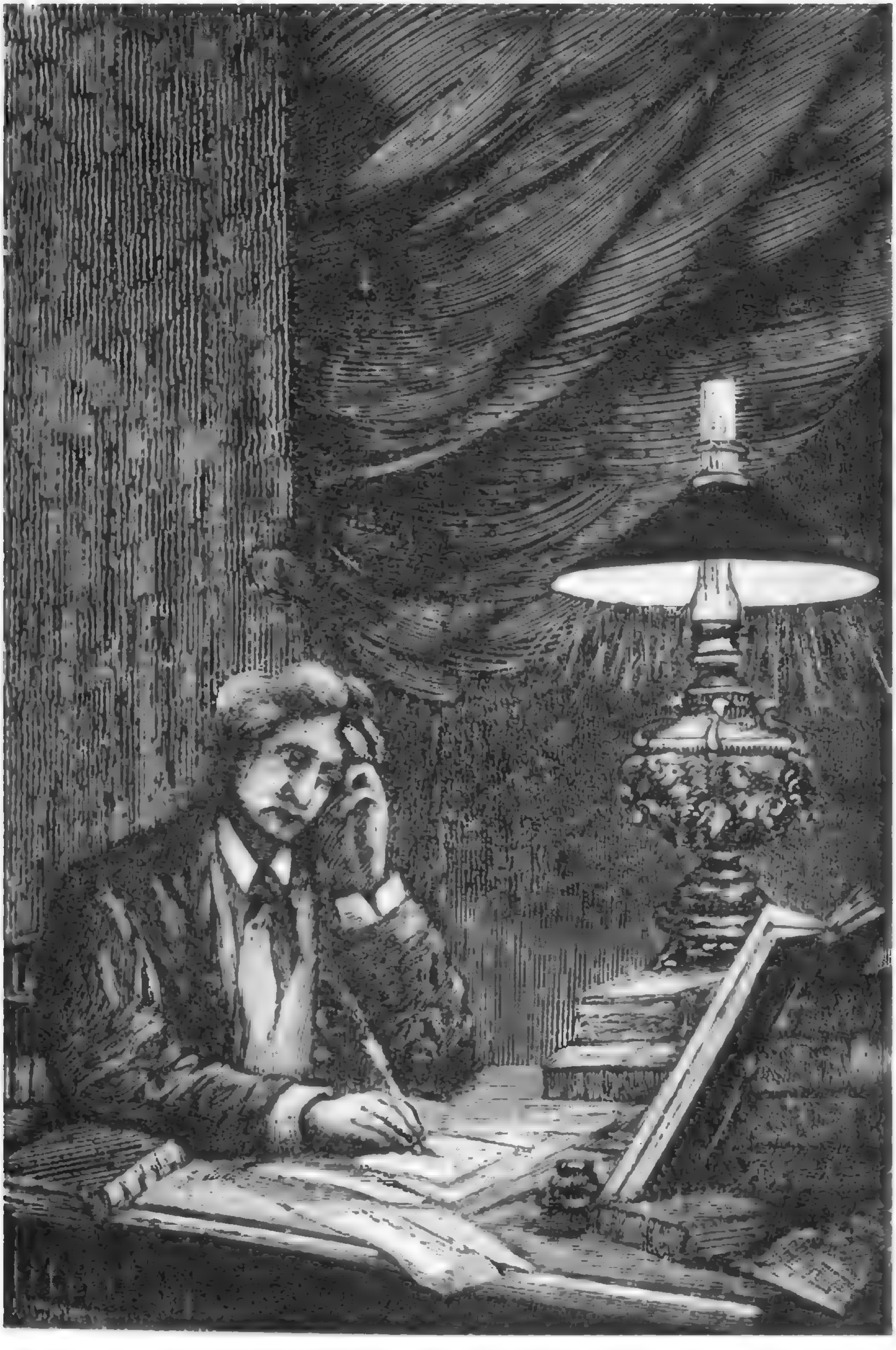
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств.
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области
*Рукописи не возвращаются*

## РАЗНОЦВЕТНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

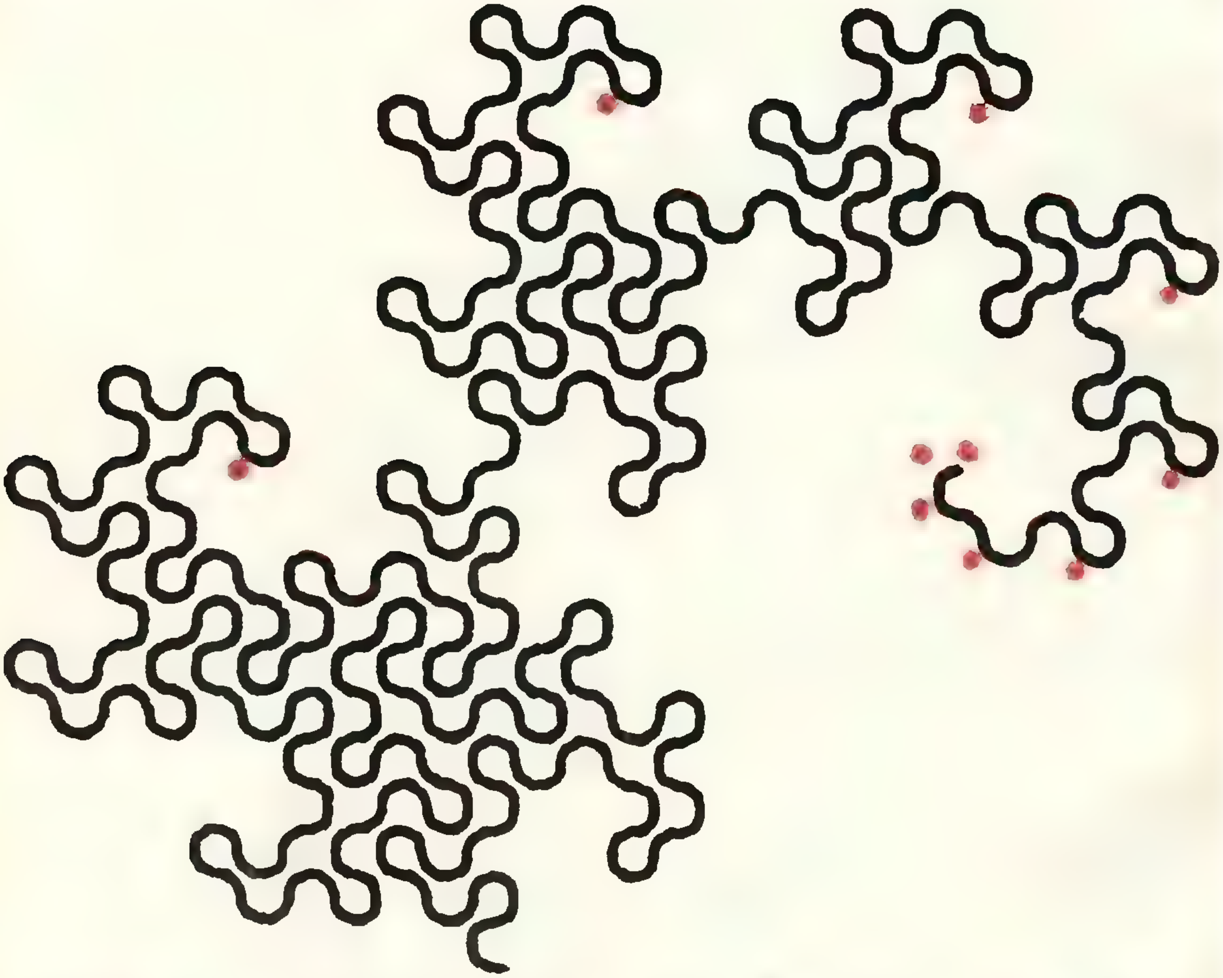
На рисунке вы видите развертку двенадцати кубиков, раскрашенных в 6 цветов: красный, желтый, зеленый, синий, белый и черный. Склейте по этим разверткам кубики, а затем сложите из них прямоугольный параллелепипед 2×2×3 так, чтобы на каждой его боковой грани размером 2×3 присутствовали все шесть цветов. При этом кубики должны соприкасаться одинаково окрашенными гранями.

*Л. Мочалов*





**Цена 30 коп.**
**Индекс 70465**



Замысловатый узор на обложке журнала соткан из четырех одинаковых кривых с общим началом, расположенным в центре. Эти кривые нарисованы с помощью вычислительной машины. Начало одной кривой мы воспроизвели здесь. Правило, по которому построена эта кривая, довольно просто: *начиная с отрезка $AB_1$ длины $d$* (на первой странице обложки $d = 1$ мм) последовательно проделывается такая процедура: *уже построенная часть линии $AB_k$ поворачивается относительно точки $B_k$ на 90° по часовой стрелке.* Так получается новый кусок линии $B_kB_{k+1}$; затем прямой угол с вершиной $B_k$ скругляется — заменяется дугой окружности диаметра $d$. (Точки $A$, $B_1$, $B_2$, ..., на рисунке отмечены красным цветом.) Построенная так кривая — ее изобрели канадские математики Кнут и Дэвис — называется «Кривой Дракона». Она обладает целым рядом удивительных свойств: она никогда не пересекает сама себя, а четыре кривые, выпущенные из одной точки, при неограниченном продолжении заполнят всю плоскость равномерным узором. О некоторых свойствах этой кривой рассказано в «Кванте» № 2 за 1970 год.

# НОМЕР
# 12

Основан в 1970 году

# КВАНТ

1976

12

*Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*

*Издательство «Наука»*
*Главная редакция*
*физико-математической*
*литературы*

Главный редактор
*академик* И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
*академик* А. Н. Колмогоров

**Редакционная коллегия:**
М. И. Башмаков
С. Г. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
*(главный художник)*
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
*(зам. главного редактора)*
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
*(зам. главного редактора)*
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

**Редакция:**
В. Н. Березин
А. Н. Виленкин
И. Н. Клумова
Т. М. Макарова
*(художественный редактор)*
Т. С. Петрова
В. А. Тихомирова
Л. В. Чернова
*(зав. редакцией)*

**В НОМЕРЕ:**

2 *А. Савин.* От школьной задачи — к проблеме
10 *В. Лешковцев.* Выдающийся советский оптик
16 *Д. Рождественский.* Эволюция учения о строении атомов и молекул

**Математический кружок**

19 *А. Толпыго.* Инварианты

**Задачник «Кванта»**

26 Задачи М416—М420; Ф428 — Ф432
28 Решения задач М376 — М378, Ф383 — Ф386

**По страницам школьных учебников**

34 *А. Земляков, Б. Ивлев.* Периодические функции

**Практикум абитуриента**

40 *Н Гольдфарб.* Элементы статики
50 *С. Белый.* Прямоугольный треугольник
55 *А. Диденко, А. Забоев, Г. Пантюхов, Н. Шолохов.* Московский инженерно-физический институт

**Физики шутят**

49 *М. Тульчинский.* Как измерить высоту?

**Международная олимпиада школьников**

57 *З. Моисеева, А. Савин.* XVIII Олимпиада по математике
60 *И. Слободецкий.* IX Олимпиада по физике

**Рецензии, библиография**

64 *В. Рудов.* Всесоюзный конкурс общества «Знание»
65 *М. Смолянский.* Комбинаторика — что это такое?

**«Квант» для младших школьников**

67 Задачи
68 *Л. Финк.* Еще раз о счастливых билетах
71 **Ответы, указания, решения**
78 Напечатано в 1976 году
**Смесь** *(с. 9, 54, 56)*

© *Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1976*

*А. Савин*

# ОТ ШКОЛЬНОЙ ЗАДАЧИ — К ПРОБЛЕМЕ

y
x
МАТЕМАТИКА
5
МАТЕМАТИКА 5

## Расстановки и транспозиции

Как-то раз, перелистывая учебник своего сына «Математика-5», я наткнулся на следующую задачу *).

*Тома «Детской энциклопедии» стояли в таком порядке:* 1, 2, 6, 10, 3, 8, 4, 7, 9, 5. *Как поставить их по порядку, если можно брать два соседних тома и ставить их, не меняя порядка, рядом на новое место* (*в начало, конец или между двумя томами*)?

Довольно быстро мне удалось найти решение. Оно изображено на рисунке 1. Но у меня давно выработалась привычка анализировать решенную задачу, и сразу же возник вопрос: «А если бы тома стояли иначе?». Тут же в голову пришел способ перестановки, не зависящий от первоначальной расстановки томов. Сначала взять 1-й том и том, стоящий справа от него, и поставить их в начало, затем 2-й том и том, стоящий справа от него, и поставить их за 1-м томом и т. д. Если нужный том стоит в конце ряда, то сначала следует взять любую пару из еще не установленных томов и переставить их в конец ряда, после чего перестановка нужного тома окажется возможной.

Я испробовал этот способ на расстановке, предложенной в задаче, и четырьмя перестановками поставил тома в нужном порядке. Затем взял расстановку: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. После шести перестановок (см. рис. 2) пришел к следующей расстановке: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 9. Тут я обнаружил, что дальше метод не действует. Кроме 9-го, остался лишь один 10-й том, и переставлять в конец ряда нечего.

Я проделал перестановку томов еще раз и тем же способом, но ставя в конец ряда уже другие пары. Переставлять пришлось дольше, но результат остался прежним — снова на конце ряда сочетание 10, 9, с которым мой способ не может справиться. И тут я вспомнил, что аналогичная ситуация возникает в знаменитой игре «15» *). Там передвижениями фишек невозможно из положения на рисунке 3 перейти в положение на рисунке 4.

Идея доказательства этого факта основана на операции «транспозиция». *Транспозицией* некоторой последовательности чисел называется перемена местами каких-либо двух из этих чисел. При этом доказывается, что если одна последовательность чисел получается из другой при помощи четного числа транспозиций, то невозможно добиться того же результата с помощью нечетного числа транспозиций, и, наоборот, если последовательность чисел получается из другой нечетным числом транспозиций, то невозможно получить ее четным числом транспозиций.

---

*) В последнем издании учебника «Математика-5» (М., «Просвещение», 1976) эта задача фигурирует под номером 1249.

*) См. «Квант», 1974, № 2, с. 26.

Осталось выяснить, четному или нечетному числу транспозиций соответствует операция, описанная в задаче. Перенос одного тома на новое место эквивалентен серии транспозиций: сначала с ближайшим томом, потом со следующим и т. д., пока он не встанет на свое новое место. Точно так же перенос следующего тома эквивалентен серии транспозиций с теми же томами, что и в первом случае. Общее число транспозиций будет равно удвоенному числу транспозиций при переносе одного тома, поэтому наша операция эквивалентна четному числу транспозиций.

Следовательно, некоторые расстановки томов операцией, указанной в задаче, можно упорядочить, а другие — нельзя. В частности, расстановка 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 9 получается из расстановки 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 нечетным числом транспозиций, и, следовательно, не может быть в нее переведена рассматриваемой операцией.

Обратите внимание, что в наших рассуждениях мы нигде не пользовались тем, что томов 10. С тем же успехом эти рассуждения можно провести для любого другого количества томов.

А вот то, что мы переставляли по два тома сразу, было очень существенно. Действительно, если бы мы переставляли по одному тому, то при любой начальной расстановке такой операцией мы смогли бы расставить тома по порядку. А если переставлять по три тома? А по четыре?...

На половину из этих вопросов можно ответить сразу. Перестановка четного числа томов соответствует четному числу транспозиций, следовательно, такой операцией невозможно перевести одну расстановку в другую, получающуюся из нее нечетным числом транспозиций.

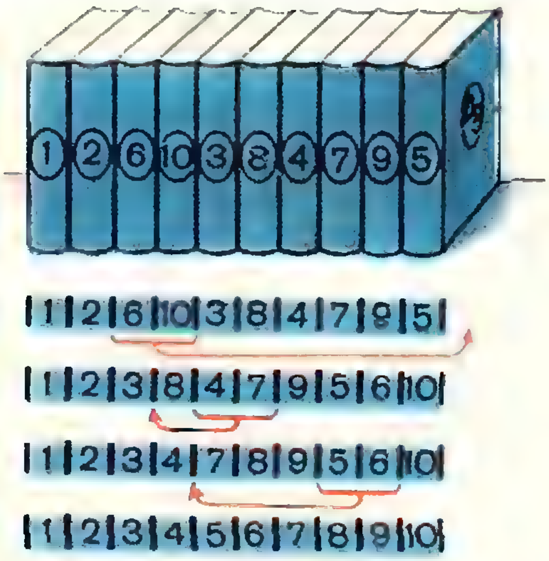

1 2 6 10 3 8 4 7 9 5
1 2 6 10 3 8 4 7 9 5
1 2 3 8 4 7 9 5 6 10
1 2 3 4 7 8 9 5 6 10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Рис. 1.

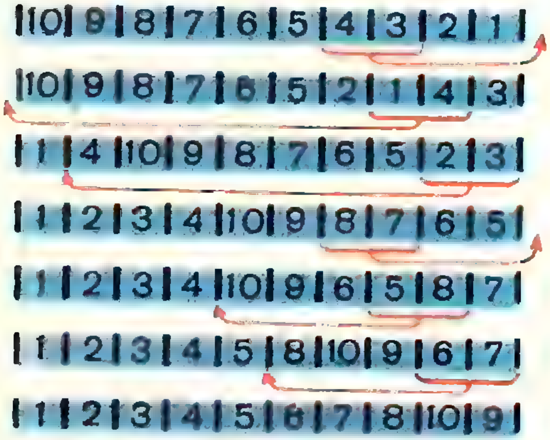

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
10 9 8 7 6 5 2 1 4 3
1 4 10 9 8 7 6 5 2 3
1 2 3 4 10 9 8 7 6 5
1 2 3 4 10 9 6 5 8 7
1 2 3 4 5 8 10 9 6 7
1 2 3 4 5 6 7 8 10 9

Рис. 2.

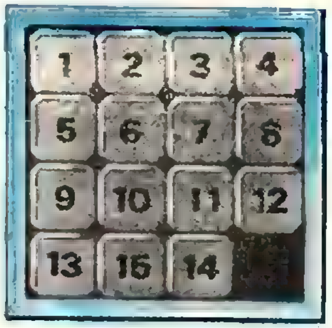

1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 15 14

Рис. 3.

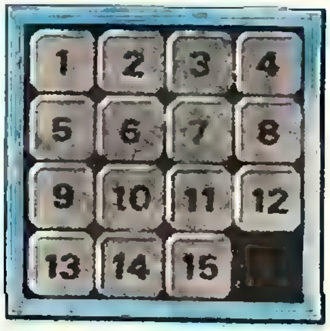

1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15

Рис. 4.

Ну, а если переставлять по три тома? Давайте попробуем! Сколько же для начала взять томов? Три — мало, возьмем четыре. Посмотрим, какие расстановки можно получить из расстановки по порядку: 1, 2, 3, 4 — из нее 2, 3, 4, 1 и 4, 1, 2, 3, из них 3, 4, 1, 2... и все! Такие перестановки называют *циклическими*, потому что они переставляют числа по кругу — если одну расстановку выписать по окружности, то любую другую можно прочитать, начав с некоторого места (рис. 5). Но никакие две из расстановок

1, 2, 3, 4
1, 2, 4, 3
1, 3, 2, 4
1, 3, 4, 2
1, 4, 2, 3
1, 4, 3, 2

нельзя перевести друг в друга циклическими перестановками, а ведь каждой из них соответствуют еще по три расстановки, получающиеся циклическими перестановками. Таким образом, все 24 различные расстановки чисел 1, 2, 3 и 4 (проверьте, что их 24) разбиваются на 6 групп по 4 расстановки в группе, причем нашей операцией мы не можем получить из расстановки одной группы расстановку другой группы.

Сохранится ли такое положение, если мы возьмем не четыре, а пять или больше томов? Оказывается, нет! Решающую роль здесь сыграет следующая последовательность расстановок:

$$1, 2, 3, 4, 5 \to 1, 3, 4, 5, 2 \to$$
$$\to 4, 5, 2, 1, 3 \to 2, 1, 3, 4, 5.$$

Переставляя по три тома, мы поменяли местами первый и второй тома, вернув на место остальные. Таким же образом мы можем переставить любые два соседних тома, причем не только, когда у нас пять томов, но и для любого бо́льшего числа томов. Действительно, если эти два тома — не последние, то взяв еще и следующий за ними том, переставим эту тройку томов вперед, затем поменяем местами первые два тома (как было показано) и снова вернем тройку томов на их старое место. В результате все тома встанут на прежние места, кроме выбранных нами двух томов, которые поменяются местами. Если же мы захотим поменять местами последние два тома, то сначала возьмем три первых тома, поставим их в конец, затем совершим описанную процедуру, и, наконец, поставим на старое место стоявшие в начале тома.

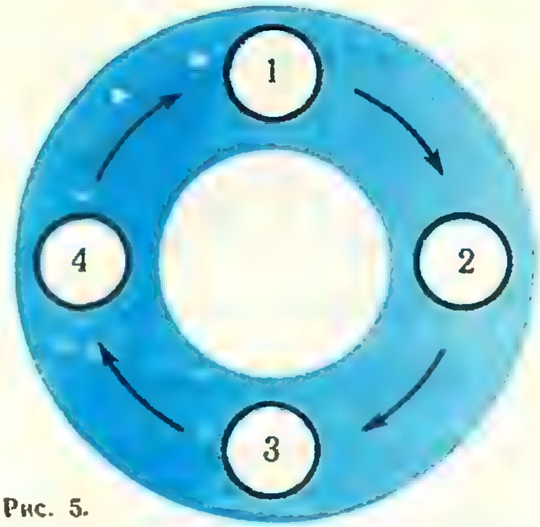


Рис. 5.

Теперь для вас, видимо, не будет неожиданным утверждение: *если число томов не меньше пяти, то любую расстановку этих томов можно перевести в расстановку по порядку, переставляя тома тройками* *). Ведь, последовательно меняя местами соседние тома, можно сначала перевести первый том на первое место, затем второй том — на второе и т. д.

А что будет в случае перестановки по пять томов? По семь томов? Вообще по $2n + 1$ тому? Решения этой проблемы я нигде не встречал.

Можно спросить: «А кому нужны эти перестановки?» Оказывается, нужны, и очень часто, например, теория перестановок играет важнейшую роль при решении вопроса — можно ли корни данного алгебраического уравнения $n$-й степени выразить с помощью радикалов (как это делается для квадратного уравнения). Было выяснено, что уравнения третьей и четвертой степени обладают этим свойством, а для уравнений пятой степени и выше корни, как правило, уже невозможно выразить через коэффициенты с помощью радикалов.

---

*) Тем самым мы решили задачу М404 («Квант», 1976, № 9).

В «Кванте» про это уже рассказывалось, последний раз — в статьях «Группы» и «Алгебра — древняя и современная» («Квант», 1976, № 10). Если вы их читали, то сразу заметите, что рассматриваемые нами перемещения томов — это *подстановки*, порождающие *группу* (правда, не всю группу подстановок $S_n$ — в этом и состоит проблема), а перестановки по кругу четырех элементов образуют *циклическую группу*. Может быть, теория групп вам и поможет (хотя, скорее всего, эта задача решается «комбинаторными» соображениями).

Теперь, пожелав успеха тем, кто решил взяться за окончательное решение поставленной проблемы, поищем в учебнике еще интересные задачи.

## Одно или больше?

*Найдите четыре натуральных числа, таких, что сумма произведения любых трех из них и 1 делится на четвертое число.*

Первое, что приходит в голову,— взять все числа равными 1. Такая четверка чисел действительно удовлетворяет условиям задачи. А нет ли еще решений? Где-то я видел эту задачу. Открываю книжку И. Л. Бабинской «Задачи математических олимпиад» (М., «Наука», 1975) и нахожу ее под номером 142. Ищу ответ. Читаю — «Например, 1, 2, 3, 7». Меня этот ответ не устраивает. Для меня это то же самое, что ответ: «Например, 2» на вопрос: «Какие корни у уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$?».

Нет… где-то еще я видел подобную задачу. Ну конечно, «Сборник задач московских математических олимпиад» (М., «Просвещение», 1965), с. 70, задача 215. Вот она.

215. *Найти все такие тройки чисел $a$, $b$, $c$, отличных от 1, что произведение любых двух чисел тройки, сложенное с единицей, делится на третье число.*

В ответе — единственный набор: 2, 3, 7.

Не правда ли, ответ очень похож на ответ интересующей нас задачи, хотя здесь речь идет не о четырех, а о трех числах. А что будет для двух чисел? Для каких пар чисел сумма каждого из них с единицей делится на другое? Задача с четырьмя числами для пятиклассников, с тремя — для учеников 7—10 классов… Однако наберемся смелости и приступим к решению.

Если одно из этих двух чисел 1, то второе число должно быть делителем числа 2: либо 1, либо 2. Нетрудно проверить, что обе пары (1, 1) и (1, 2) удовлетворяют условию задачи.

Пусть ни одно из чисел не равно 1. Тогда, очевидно, эти числа взаимно просты. Пусть $a<b$, тогда $a+1 \leqslant b$, но $a+1$ делится на $b$, следовательно, $a+1 \geqslant b$. Отсюда вытекает, что $a+1=b$. А так как $b+1$ делится на $a$, то $a+2$ делится на $a$, следовательно, 2 делится на $a$, и поскольку $a \neq 1$, то $a=2$, $b=3$.

Итак, существуют всего три пары таких чисел, что сумма одного из них с единицей делится на другое: (1, 1), (2, 1), (3, 2).

Достаточно простое решение этой задачи наводит на мысль попробовать решить сразу общую задачу:

*«Найти $n$ чисел таких, что произведение любых $n-1$ из них в сумме с единицей делится на оставшееся».*

Докажем две леммы.

Лемма 1. *Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обладают тем свойством, что произведение любых $(n-1)$ из них в сумме с 1 делится на оставшееся. Тогда, добавив к ним число $a_{n+1}=1$, получим набор чисел, произведение любых $n$ из которых в сумме с 1 делится на оставшееся. И, наоборот, если среди $n+1$ чисел есть 1 и произведение любых $n$ из них в сумме с 1 делится на оставшееся, то, убрав из* *этого набора единицу, получим набор из $n$ чисел, произведение любых $n - 1$ из которых в сумме с единицей делится на оставшееся.*

Формулировка леммы громоздка, а доказательство тривиально. Достаточно использовать тот факт, что от умножения числа на единицу это число не меняется, и то, что на единицу делится любое число.

Более содержательной является вторая лемма.

Лемма 2. *Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обладают тем свойством, что произведение любых $(n-1)$ из них в сумме с 1 делится на оставшееся. Тогда, добавив к ним число $a_{n+1} = a_1a_2\ldots a_n + 1$, получим набор чисел, произведение любых $n$ из которых в сумме с единицей делится на оставшееся.*

Для доказательства нужно проверить два утверждения.

Первое — то, что произведение первых $n$ чисел в сумме с единицей делится на $a_{n+1}$ — следует из определения числа $a_{n+1}$.

Второе — для случая, когда число $a_{n+1}$ входит в произведение. Обозначим через $A_i$ произведение первых $n - 1$ чисел без $a_i$: надо показать, что $A_ia_{n+1} + 1$ делится на $a_i$. Для этого достаточно заметить, что $a_{n+1} = a_iA_i + 1$; тогда

$$A_ia_{n+1} + 1 = A_i(A_ia_i + 1) + 1 = a_iA_i^2 + (A_i + 1),$$

и первое слагаемое делится на $a_i$, второе, заключенное в скобки, тоже — по предположению леммы.

Из этих лемм следует, что в задаче с тремя числами будут следующие решения: (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 3, 7); в задаче с четырьмя числами (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 3), (1, 2, 3, 7), (2, 3, 7, 43). Осталось выяснить, нет ли других решений.

Новых решений, содержащих единицы, при $n=3$, очевидно, нет (убрав одну из единиц, мы по лемме 1 получили бы новое решение задачи с двумя числами, а в ней других решений нет). Пусть теперь $(x, y, z)$ — некоторое решение задачи с тремя числами. Легко доказать, что любые два из этих чисел должны быть взаимно простыми. Пусть $2 \leqslant x < y < z$. Запишем соотношения задачи:

$$\begin{cases} xy + 1 = k_1z, \\ xz + 1 = k_2y, \\ yz + 1 = k_3x. \end{cases}$$

Здесь $k_1$, $k_2$, $k_3$ — натуральные числа Перемножив эти соотношения, получим:

$$xyz(xyz + x + y + z) + xy + yz + xz + 1 = k_1k_2k_3xyz.$$

Отсюда следует, что $xy + yz + xz + 1$ делится на $xyz$, т. е.

$$xy + yz + xz + 1 = Axyz,$$

где $A$ — натуральное число. Разделив обе части этого равенства на $xyz$, получим

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = A.$$

Наибольшее значение $A$ получится при наименьших значениях $x$, $y$, $z$, т. е. при $x=2$, $y=3$, $z=4$ (на самом деле $z \geqslant 5$). Отсюда

$$A \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{27}{24},$$

и, поскольку $A$ — натуральное число, то оно равно 1. Итак, нужно найти все натуральные числа $x$, $y$ и $z$ такие, что $2 \leqslant x < y < z$ и

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = 1.$$

Покажем, что $x = 2$. Действительно, если $x \geqslant 3$, то $y \geqslant 4$, $z \geqslant 5$, следовательно,

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{48}{60}.$$

Получили противоречие. Итак, $x=2$. Тогда соотношение запишется так:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2yz}.$$

Выразив отсюда $y$, получим

$$y = 2 + \frac{5}{z-2}.$$

Значит, $z-2$ является делителем числа 5, т. е $z=3$, или $z=7$. В первом случае $y=7$, во втором $y=3$.

Итак, (2, 3, 7) — единственное решение задачи с тремя числами, не содержащее единицы, следовательно, ранее нами были выписаны все решения этой задачи.

Посмотрим, существуют ли другие решения задачи с четырьмя числами.

Очевидно, и здесь достаточно рассмотреть лишь те решения, которые не содержат единиц, т. е. натуральные числа $x$, $y$, $z$, $u$ такие, что $2 \leqslant x < y < z < u$ и

$$xyz + 1 = k_1 u,$$
$$xyu + 1 = k_2 z,$$
$$xzu + 1 = k_3 y,$$
$$yzu + 1 = k_4 x,$$

где $k_1$, $k_2$, $k_3$ и $k_4$ — натуральные числа. Перемножив эти соотношения, получим аналогично предыдущему случаю, что

$$xyz + uxy + xzu + yzu + 1 = Axyzu,$$

где $A$ — натуральное число, или

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} + \frac{1}{xyzu} = A.$$

Поскольку $x \geqslant 2$, $y \geqslant 3$, $z \geqslant 4$, $u \geqslant 5$, то

$$A \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{31}{24},$$

следовательно, $A = 1$. Далее аналогично показывается, что $x = 2$, $y = 3$. Теперь

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{u} + \frac{1}{6zu} = \frac{1}{6},$$

откуда

$$z = 6 + \frac{37}{u - 6}.$$

Значит, $u - 6$ является делителем числа 37, т. е. либо $u = 7$, $z = 43$, либо $u = 43$, $z = 7$. Итак, снова получили лишь имеющееся уже решение. Значит, и в этом случае были перечислены все решения.

Полученный результат наталкивает нас на гипотезу, что и дальше все решения задачи для $n$ чисел будут получаться из решений задачи для $n - 1$ числа с помощью лемм 1 и 2. Увы! Гипотеза эта неверна, во всяком случае для $n = 5$ — кроме решения (2, 3, 7, 43, 1807), получаемого с помощью леммы 2, есть еще одно: (2, 3, 7, 47, 395).

А что будет дальше? Будут ли решения задач для большего количества чисел получаться применением лемм 1 и 2 к этим теперь уже двум решениям, не содержащим единиц, или появится еще одно или даже два? Пока это проблема.

## Сколько делений?

Следующая задача «на смекалку» также фигурирует во многих книгах для школьников.

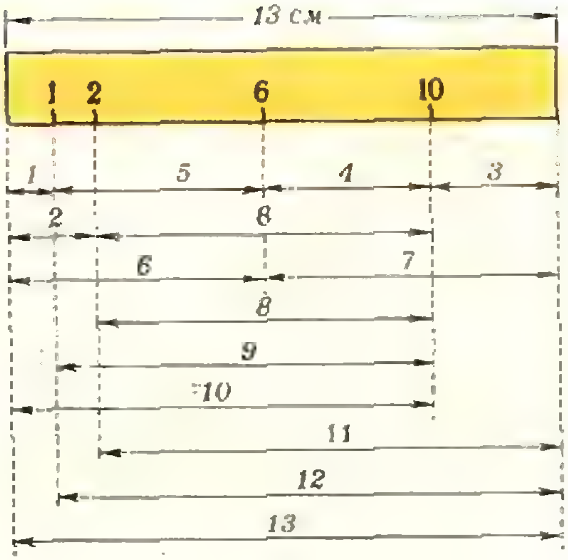


Рис. 6.

*Длина линейки без делений 13 см. Как поставить 4 деления внутри линейки так, чтобы с ее помощью можно было отложить отрезки длиной в 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 см?*

Условие задачи, видимо, нужно пояснить. Поставив деление, отстоящее от конца на 1 *см*, и несколько раз прикладывая линейку, можно отложить любую из заданных длин. Здесь же требуется указать соответствующую длину прямо на линейке, от деления до деления (или до конца линейки).

На рисунке 6 показано одно из решений этой задачи. Естественно попытаться выяснить, есть ли другие решения, но гораздо интереснее такие вопросы: почему именно четыре деления? А если три? Какова наибольшая длина линейки, на которую можно нанести 4 деления с выполнением указанных свойств? И вообще, *какое наименьшее количество делений нужно нанести на линейку длины $n$ (см), чтобы с ее помощью можно было отложить все целочисленные отрезки от 1 см до $n$ (см)?*

Как всегда, начнем с проб. Для линейки длины 1 *см* никаких делений не нужно. При длине в 2 *см* и

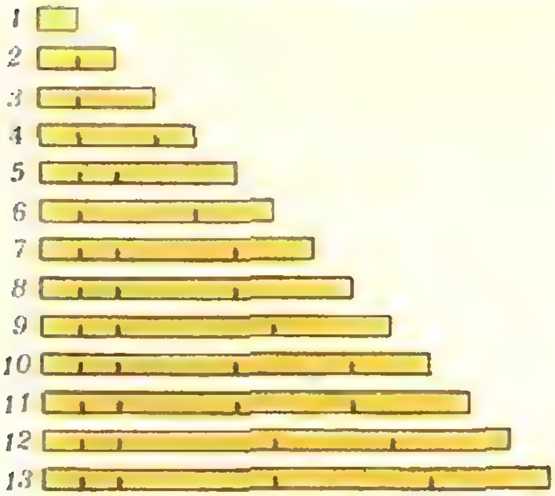


Рис. 7.

3 *см* достаточно одного деления. При длине в 4, 5, 6 *см* двух делений достаточно, а одного мало, при длине в 7, 8, 9 *см* надо три деления (двух не хватит), при длине в 10, 11, 12, 13 *см* — четыре деления (трех не хватит). Эти результаты получены перебором вариантов, соответствующие им расстановки изображены на рисунке 7, но с увеличением длины линейки становится все труднее и труднее проводить полный перебор. Нужны какие-то общие методы. Попробуем сперва оценить число делений (сверху и снизу).

Пусть на линейке длины $n$ (*см*) поставлено $k$ делений. Сколько существует различных отрезков (не отрезков разной длины, а просто различных отрезков) с концами в точках деления или на концах линейки? Так как любая пара из перечисленных точек определяет отрезок, а их $k+2$, то отрезков будет $(k+2)(k+1)/2$. А так как по условию задачи должно получиться $n$ различных длин, а длины некоторых отрезков могут и совпадать, то должно выполняться неравенство

$$n \geqslant \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

Отсюда следует, что на отрезке длины $n$ необходимо поставить не менее $(\sqrt{8n+1}-3)/2$ делений (если это число не целое, то нужно брать ближайшее к нему большее целое число).

А какого количества делений наверняка хватит? Конечно, $(n-1)$-го хватит (можно нанести все сантиметровые деления), но нельзя ли обойтись меньшим числом?

Попробуем такую расстановку $k$ делений: сначала поставим $m$ делений через каждый сантиметр, затем деление через $(m+1)$ (*см*), снова через $(m+1)$ (*см*) и т. д., пока не поставим все $k$ делений. Рассмотрим теперь линейку с правым концом в $(m+1)$ (*см*) от последнего деления. Длину этой линейки $l$ выразим через $k$ и $m$:

$$l = m + (k-m)(m+1) + m + 1 =$$
$$= -m^2 + m(k+1) + (k+1).$$

Используя формулу деления с остатком $s = p(m+1) + q$, нетрудно показать, что при любом $m$ такая расстановка делений удовлетворяет условию задачи.

Отметим еще одно важное свойство такой расстановки делений — если отрезок укоротить справа на любое целое число сантиметров, то точки деления по-прежнему будут удовлет-

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k \geqslant$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| $k$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| $k \leqslant$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 |

Рис. 8.

ворять условию задачи (т. е. можно будет построить все целочисленные отрезки от 1 *см* до новой длины линейки).

Осталось выяснить, насколько большим можно сделать $l$, меняя $m$ (число делений $k$ фиксировано). Для этого запишем формулу для $l$ в виде

$$l=\frac{(k+1)(k+5)}{4}-\left(m-\frac{k+1}{2}\right)^2.$$

Отсюда видно, что $l$ будет наибольшим при наименьшем $\left(m-\frac{k+1}{2}\right)^2$. Значит, если $k$ нечетно, то надо положить $m=\frac{k+1}{2}$, а если $k$ четно, то надо положить $m=\frac{k}{2}$ или $m=\frac{k+2}{2}$. Итак,

$$l\geqslant\frac{(k+1)(k+5)}{4}-\frac{1}{4}=\frac{k^2+6k+4}{4}.$$

Вместо $l$ можно подставить $n$. Выразив теперь $k$ через $n$, получим: $k\leqslant\sqrt{4n+5}-3$ (если это число не целое, то нужно брать ближайшее к нему большее целое число).

На рисунке 8 изображена таблица, в которой для $n$ от 1 до 15 даны точные значения $k(n)$ — наименьшего числа делений, удовлетворяющих условию задачи; полученной нами ранее из формулы $n\geqslant(k+2)(k+1)/2$ оценки снизу и только что выведенной оценки сверху. Видно, что эти значения мало отличаются друг от друга, но с ростом $n$ это отличие становится все больше.

Найти формулу, связывающую точное значение $k$ с $n$, видимо, весьма непросто. Неясно даже, будет ли функция $k(n)$ монотонной, т. е., если для отрезка длины $n$ достаточно $k$ делений, то достаточно ли их будет для отрезка длины $n-1$?

Как видите, от школьной задачки до серьезной и трудной математической проблемы — один шаг.

Попробуйте свои силы в решении этих проблем. Ждем ваших писем

---

# Где ошибка?

Докажем, что $1=2$. С одной стороны,

$$1=\frac{2}{3-1}. \qquad (1)$$

Подставим в правую часть равенства (1) вместо 1 выражение $\frac{2}{3-1}$. Получим

$$1=\frac{2}{3-\frac{2}{3-1}}.$$

Проделав эту «подстановку» еще раз, получим

$$1=\frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-1}}}. \qquad (2)$$

Повторив ту же «подстановку» бесконечное число раз, получим равенство

$$1=\frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-\dots}}}. \qquad (3)$$

С другой стороны,

$$2=\frac{2}{3-2}. \qquad (4)$$

Подставим в правую часть равенства (4) вместо 2 выражение $\frac{2}{3-2}$. Получим

$$2=\frac{2}{3-\frac{2}{3-2}}.$$

Проделав эту «подстановку» еще раз, получим

$$2=\frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-2}}}. \qquad (5)$$

Повторив ту же «подстановку» бесконечное число раз, получим равенство

$$2=\frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{3-\dots}}}. \qquad (6)$$

Правые части равенств (3) и (6) одинаковы. Следовательно, должны быть равны между собой и левые части: $1=2$.

*Ю. Гайдук*

*В. Лешковцев*

# ВЫДАЮЩИЙСЯ СОВЕТСКИЙ ОПТИК

*К 100-летию со дня рождения Д. С. Рождественского*

«Это было в тяжелые годы гражданской войны. Транспорт работал в Петрограде с перебоями. Иногда он совсем замирал. В эти дни за Невской заставой можно было увидеть немолодого седобородого человека, который, опираясь на палку, шел ровным, неторопливым шагом. Он шел пешком с Васильевского острова, с противоположного конца города, где жил в небольшой университетской квартире, чтобы вместе с товарищами принять участие в налаживании производства оптического стекла. Что гнало пожилого профессора в заводскую лабораторию из руководимого им института, где тоже хватало работы? Не тот ли священный огонь науки, что перевоплощает ученого в борца и не дает иссякнуть человеческим силам?» *).

Познакомимся поближе с этим удивительным человеком.

Дмитрий Сергеевич Рождественский родился 7 апреля 1876 года в Петербурге, в семье талантливого русского педагога Сергея Егоровича Рождественского, по учебникам русской истории которого обучалось несколько поколений гимназистов. Он получил хорошее домашнее воспитание, прекрасно владел немецким, английским и французским языками и окончил гимназию с серебряной медалью (подвела четверка по русскому языку и литературе на выпускных экзаменах). Его любимыми предметами были физика, химия и биология, и он сохранил эту любовь на всю жизнь.

В 1894 году он поступил на естественное отделение Петербургского университета и в течение года изучал биологию и химию. Но интерес к физике победил, и сдав положенные экзамены, Рождественский вновь поступил на первый курс теперь уже математического отделения, где изучали также механику, физику и астрономию. Занимаясь в университете, он посещал далеко не все лекции (тогда это разрешалось студентам), но зато много работал самостоятельно. Правда, потом он жалел, что посещал мало лекций, и считал, что надо было бы ходить хотя бы на все лекции по физике, которые сопровождаются демонстрационными опытами. Он придавал очень большое значение этим опытам и однажды, уже будучи профессором в том же университете, отменил в последний момент лекцию, когда убедился, что демонстрационные эксперименты плохо подготовлены.

Потеряв год в начале университетских занятий, он вынужден был сделать то же самое и на последнем курсе. Случилось так, что в 1899 году, перед самой сдачей выпускных экзаменов, в университете началась студенческая забастовка. Царское правительство отдало распоряжение проводить экзамены под охраной поли-

---

*) А. Н. Осиновский, А. Ф. Кононков. Д. С. Рождественский. М., «Просвещение», 1974, с. 3.

Д. С. Рождественский (1876—1940).

ции. Многие студенты, и среди них Д. С. Рождественский, отказались сдавать экзамены в присутствии полицейских. В следующем году он получил диплом с отличием и был оставлен в университете, как тогда говорили, для подготовки к профессорскому званию.

В качестве узкой специальности он выбрал оптику, хотя научных руководителей в этой области физики в университете не оказалось. Более того, большинство университетских профессоров считало, что их дело преподавать, а не заниматься наукой. Но Дмитрий Сергеевич, по его же словам, «наплевал на эти взгляды... и начал работать». Самостоятельность и независимость в науке были главными чертами его личности.

Работать в одиночку, конструируя и собирая необходимую для опытов аппаратуру, было нелегко даже такому упорному и трудолюбивому человеку. Поэтому начатые в 1903 году исследования были оформлены в виде магистерской диссертации и защищены только в 1912 году. Правда, тремя годами позже он уже защитил докторскую диссертацию и вскоре был избран заведующим Физическим институтом Петроградского университета. Это был редкий случай в русской физике, когда кому-то удавалось внести крупный вклад в мировую науку, оставаясь у себя дома, в России. Заканчивая послужной список Д. С. Рождественского, укажем, что в 1925 году он был избран членом-корреспондентом Академии наук, а в 1929 году — академиком.

Чем же обогатил науку этот выдающийся советский ученый?

Он начал свои исследования с изучения аномальной дисперсии света в парах щелочного металла натрия. В знаменитом опыте Ньютона свет, проходя через стеклянную призму, разлагался в цветной спектр. Из этого опыта следует, что показатель преломления зависит от цвета (или от длины волны). Эту зависимость называют дисперсией. Так как призма в опыте Ньютона сильнее всего преломляет фиолетовые лучи и слабее всего красные, мы можем утверждать, что преломление тем сильнее, чем меньше длина волны. Для прозрачных тел в видимой области спектра зависимость показателя преломления от длины волны достаточно хорошо описывается следующей формулой:

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2},$$

где $a$ и $b$ — постоянные величины, характеризующие данное вещество. Такая зависимость называется нормальной дисперсией.

Но еще в 1862 году французский физик Леру, пропуская свет сквозь призму, наполненную парами йода, обнаружил нарушение этой закономерности. Пары йода сильно поглощают свет нескольких определенных длин волн. Разложив свет, который прошел через эти пары, в спектр,

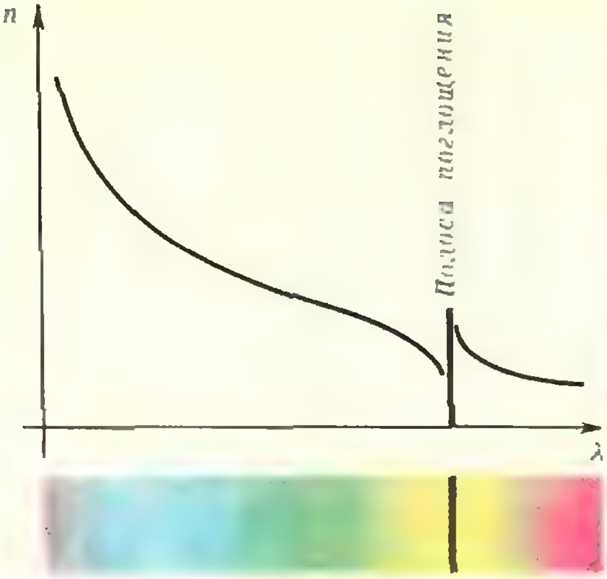


Рис. 1.

мы увидим в нем ряд темных линий — их называют линиями поглощения. Оказалось, что вблизи этих линий коэффициент преломления у более длинных волн выше, чем у более коротких. Аналогичное явление наблюдается при прохождении света сквозь пары натрия (рис. 1) и других веществ, у которых линии поглощения лежат в видимой области спектра. Это явление получило название аномальной дисперсии. Теория аномальной дисперсии была создана немецким физиком Зельмейером еще в 1871 году, но долгое время не имела надежной экспериментальной проверки. Определение показателя преломления вблизи линий поглощения оказалось необычайно сложным делом из-за сильного поглощения света.

Д. С. Рождественский разработал оригинальный метод точного определения показателя преломления не только вблизи линии поглощения, но даже внутри самой линии. Полученные им данные об изменении показателя преломления вблизи линий поглощения паров натрия подтвердили справедливость теории Зельмейера. Но у этой работы был еще более важный результат. Метод Рождественского позволяет точно определить отношение интенсивностей двойных спектральных линий (дублетов), или, как говорили в то время, отношение чисел вибраторов, излучающих каждую из этих линий. Оказалось, что у многих веществ отношение интенсивностей соседних линий в дублетах выражается небольшими целыми числами. Рождественский определил величины этих отношений для большинства дублетов щелочных металлов и показал, что они не зависят ни от температуры, ни от давления паров, и определяются свойствами самих атомов исследуемых веществ. В докторской диссертации он писал об этом так: «Найденные простые отношения должны, очевидно, соответствовать какой-то очень простой черте в строении атомов и молекул. Но в чем заключается эта простота, при современных данных об атомах еще решить невозможно». Напомним читателям, что это было написано в самом начале 1915 года, когда теория атома, предложенная Нильсом Бором, делала еще первые шаги.

Как показала в дальнейшем квантовая механика, отношение интенсивностей характеризует вероятности перехода электронов с одной орбиты атома на другую и является очень важной характеристикой атома. Один из учеников Рождественского профессор В. К. Прокофьев так охарактеризовал значение работ своего учителя: «Излучение атомов, спектральные линии характеризуются двумя величинами: длиной волны и интенсивностью. Закономерности для длин волн спектральных линий установлены Бором в Копенгагене. Метод определения их интенсивностей дан на другом конце Европы — в Петрограде».

Первоначально теория Бора объясняла только строение атома водорода и однократно ионизированного атома гелия, у которого в электронной оболочке остается всего один электрон. В труднейшие годы гражданской войны и интервенции, голода и хозяйственной разрухи, в неимоверно неблагоприятных для занятия наукой условиях, да еще при полной изоляции от всей мировой науки, Д. С. Рождественский нашел основные идеи дальнейшего развития теории Бора. В научном докладе на тему «Спектральный анализ и строение атома», который он прочитал в 1919 году, на праздновании первой годовщины Государственного оптического института, Рождественский четко сформулировал основные положения, благодаря которым теория Бора была применена сначала к спектрам атомов щелочных металлов с одним электроном во внешней оболочке, а затем и к спектрам любых атомов.

Как выяснилось впоследствии, такие же идеи были использованы Арнольдом Зоммерфельдом, Эрвином Шредингером и рядом других выдающихся зарубежных физиков при развитии и совершенствовании теории Бора.

Претворяя в жизнь свои идеи, Рождественский осуществил классический анализ спектра иона магния, линии которого близки к линиям нейтрального атома щелочного металла натрия. Эта работа послужила образцом для многочисленных анализов спектров ионов различных элементов, выполненных в последующие годы.

Д. С. Рождественский внес крупный вклад и в теорию микроскопа. Изобретенный еще в XVII веке, микроскоп вскоре нашел множество разнообразных применений. Однако теория этого важного оптического прибора была создана только в начале нашего века. Геометрическая оптика позволяет рассчитать увеличение микроскопа. Но она не может дать ответ на вопрос о том, каковы предельно малые размеры тела, которые еще можно увидеть при помощи микроскопа. (Ведь мы знаем, например, что обычный микроскоп не позволяет увидеть атомы и молекулы.) Она также ничего не может нам сообщить о характере и происхождении дифракционных и интерференционных полос, сопровождающих (и искажающих) изображение объектов в микроскопе (рис. 2). Для этого нужна теория, учитывающая взаимодействие световых волн, отраженных рассматриваемыми в микроскоп объектами. Автором первой такой теории был немецкий физик-оптик Аббе. Но теория Аббе относилась к специальному случаю, когда рассматриваемый объект освещается пучком когерентных лучей. Такие лучи имеют одинаковую длину волны и неизменную разность фаз колебаний. На практике этот случай обычно не реализуется. Другой предельный случай в теории микроскопа рассмотрел советский физик академик Л. И. Мандельштам. В этом случае изучаемый объект сам светится некогерентным светом. Обе эти теории учитывали только дифракционные явления. Д. С. Рождественский создал теорию микроскопа, работающего в условиях обычного освещения. В ней учитывались также и интерференционные эффекты. При этом он нашел практические пути повышения эффективности микроскопических исследований.

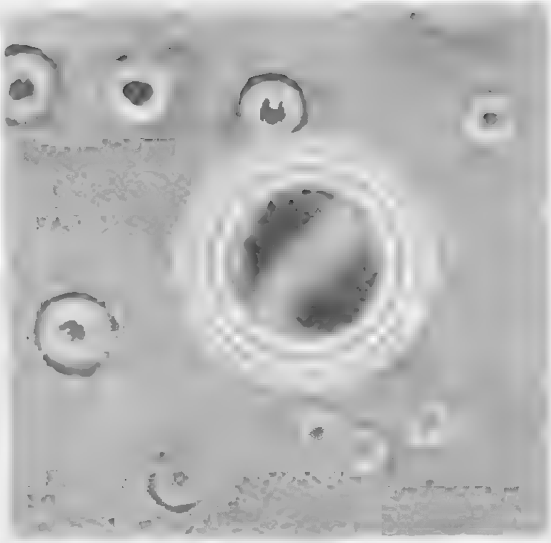


**Рис. 2. Интерференционные круги у крахмального зерна картофеля в воде. Диаметр зерна равен 9 микронам.**

Дмитрий Сергеевич был не только физиком, но и глубоко образованным ботаником. Он много и охотно работал с микроскопом. В статье «Чем овладел и что должен завоевать микроскоп» он писал о Левенгуке: «Он сам плавил стекло, сам шлифовал, сам полировал, сам монтировал лупы между серебряными и золотыми дисками.., сам искал и находил объекты наблюдения. Подчеркиваю это потому, что в микроскопии творит новое и совершенное тот, кто знает, для чего творит и что ищет». Эти же слова могли бы характеризовать и работы Рождественского. Какой бы областью исследований он ни занимался, он стремился войти в нее «до конца», со всеми ее тонкостями и деталями. Так в свое время он глубоко проник во все детали оптического производства и сам учился у мастера-оптика Александрова шлифовать точные оптические поверхности.

Заслуги Д. С. Рождественского в развитии советской физики далеко не исчерпываются его личным вкладом в науку. Он был не только очень крупным ученым, но также прекрасным учителем и организатором науки.

В своей педагогической деятельности Рождественский очень высоко ценил и стремился всячески развивать самостоятельность в работе студентов. В лекциях он старался останавливаться прежде всего на принципиальных проблемах и на том, чего не было в учебниках, чтобы студенты сами потом разбирали более простые и хорошо известные разделы науки.

Смело вовлекая молодежь в самостоятельные научные исследования, он создал талантливую школу советских физиков. К числу его учеников относятся академики А. А. Лебедев, И. В. Обреимов, Д. В. Скобельцын, А. Н. Теренин, В. А. Фок, члены-корреспонденты АН СССР Е. Ф. Гросс, С. Э. Фриш и многие другие известные ученые.

Рождественский принадлежал к числу передовых русских ученых, которые стремились поставить науку на службу народу. Поэтому он с энтузиазмом встретил Великую Октябрьскую социалистическую революцию, понимая, какие огромные возможности развития науки она открывает перед учеными. В первые же месяцы после революции он старательно трудился над объединением усилий разрозненных и весьма малочисленных групп петроградских физиков-оптиков и вскоре внес в Народный комиссариат просвещения детально разработанный проект создания научного центра нового типа — Государственного оптического института (ГОИ). В нем он писал: «...при скромных средствах университетских физических лабораторий, при слабом развитии оптической промышленности в России централизация работников по оптике при государственной широкой поддержке необходима и для чисто научных задач, и для правильного направления и подъема деятельности оптической техники и промышленности. Необходим оптический институт». Проектом предусматривалась также организация при институте двух подчиненных ему предприятий — завода по производству оптического стекла и завода оптической аппаратуры. Советское правительство поддержало эту идею, и 6 мая 1919 года нарком просвещения А. В. Луначарский подписал декрет об учреждении Государственного оптического института.

Шла война. Молодая Красная Армия остро нуждалась в биноклях, стереотрубах, оптических прицелах для орудий. А в стране негде было купить даже простые очки. Царская Россия не имела своей оптической промышленности и ввозила оптические приборы из-за границы, главным образом из Германии, где имелись знаменитые заводы Цейса. Именно на них работал Аббе, который, по словам Рождественского, оптическим снаряжением немецкой армии почти выиграл первую мировую войну. В России же никто даже не знал технологии приготовления оптического стекла. Все это приходилось создавать и разрабатывать заново, практически на пустом месте. Но благодаря Государственному оптическому институту эти работы развивались так успешно, что уже к 1927 году наша страна полностью прекратила закупку оптического стекла за рубежом. Советская оптическая промышленность наладила производство не только биноклей и стереотруб, но и микроскопов, спектрографов, телескопов и другой сложной научной аппаратуры.

Грандиозная научно-техническая революция, происходящая в настоящее время, необычайно усложнила связь науки и производства. Наука теперь играет огромную роль в жизни общества, она стала непосредственной производительной силой, которая готовит революционный переворот во всех современных производствах — и в металлургии, и в машиностроении, и на строительных площадках, и на колхозных и совхозных полях. Эти перемены потребовали коренной перестройки производства, укрупнения и объединения предприятий, создания фирм и научно-производственных объединений. В докладе А. Н. Косыгина на XXV съезде КПСС по этому поводу сказано следующее: «В десятой пятилетке создание производственных объединений в промышленности будет завершено. Объединения — это качественно новое явление в управлении промышленным производством. Они представляют собой не механическое соединение предприятий, а единый производственно-хозяйственный комплекс, в котором органически слиты наука и производство, широко развиты специализация и кооперирование».

Д. С. Рождественский придавал большое значение взаимодействию науки с производством. Так, в 1936 году он писал: «Мы одерживаем над старым миром одну победу за другой. Мы становимся на первое место в ряде отраслей промышленности и непрерывно завоевываем все новые первые места... Теперь на очереди у нас — организовать свою науку, показать нашу силу в науке и, главное, в научной организации промышленности. Особенно в такой промышленности, какова оптическая, так как она не отделима от оптической науки».

Не удивительно, что Государственный оптический институт оказался в числе инициаторов создания научно-производственных объединений. Организованное по его инициативе более 10 лет назад Ленинградское оптико-механическое объединение, в состав которого, кроме ГОИ, входят специальные конструкторские бюро, оптические заводы и другие подразделения, работает весьма успешно. Недавно в объединении создан самый крупный в мире оптический телескоп с диаметром зеркала 6 метров.

Нам хочется закончить эту статью смелой и дальновидной мечтой, которую Д. С. Рождественский высказал еще в 1919 году, в конце своей речи на праздновании первой годовщины ГОИ.

«Видение уже недалекого будущего рисуется глазам. Каждый атом известен, возможности соединений в молекулы исследованы и могут быть рассчитаны во всякий момент. Химия уже более не экспериментальная, а теоретическая наука. Как рядовой архитектор в справочной книжке находит метод расчета построек, так рядовой химик, сидя в своем кабинете, по определенным уравнениям и таблицам находит методы осуществления сложнейших, необходимых для жизни химических соединений. Это власть над природой, подчинение ее человеку в мере почти непостижимой — в ней сущность и душа техники. Ее даст знание атома... мы и предугадать не можем, как преобразится жизнь человека в ближайшие десятилетия, когда загадка атома будет разгадана, когда тысячи, десятки тысяч ученых приложат волю к разрешению наряду с другими задачами этой, быть может, важнейшей, когда наука ежечасно будет приближаться к жизни.»

*Д. Рождественский*

■

# ЭВОЛЮЦИЯ УЧЕНИЯ О СТРОЕНИИ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

**Мы приводим здесь часть доклада, который академик Д. С. Рождественский сделал 15 ноября 1932 года на юбилейной сессии Академии наук, посвященной пятнадцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции. Публикацию подготовил В. Лешковцев.**

Не было эпохи в истории физики, когда развитие ее шло бы так быстро и решительно, как в последние 15—20 лет. В это время была возведена новая и чудесная постройка научной мысли, решена была загадка строения атомов...

Постройка атома воздвигалась быстро в связи с тем, что огромные запасы материалов были уже поднесены и горами лежали в порядке, ожидая строителя. Периодические свойства атомов, после вековой работы химиков уложенные Менделеевым в законченную систему, до сих пор сохранившую почти весь свой первоначальный облик, требовали теоретического обоснования. Десятки тысяч работ по спектральному анализу, точнейшие закономерности в спектрах, казалось, с очевидностью указывали, где и как нужно вести стройку. Но строитель запоздал. И теперь мы знаем, почему.

Лучшие умы того времени безуспешно пытались приложить свои руки к укладке фундамента. Рэлей писал о своем бессилии. Ритц, всю свою недолгую жизнь глубокого исследователя посвятивший теории спектрального анализа, не нашел пути. Несомненно, теоретиками, прославившимися на переломе столетия, было передумано гораздо больше, чем написано, так как бесплодность попыток обнаруживалась с первых же шагов.

Всем известна последняя блестящая теория Дж. Дж. Томсона. Ему удалось построить модель атома химического. Внутри широкой, положительно заряженной по всему объему сферы правильно расставлены электроны. Их силы притяжения и отталкивания взаимно уравновешиваются, они неподвижны. Этого требует классическая электродинамика, так как всякое движение равносильно излучению, потере энергии, а запас энергии в атоме не может не быть постоянным. Эта модель атома удачно подчеркивала восьмикратную периодичность системы Менделеева и потому пользовалась выдающимся успехом. Но перед законами спектрального анализа и она оказалась бессильной. А опыты Резерфорда по рассеянию $\alpha$-частиц ... показали знакомую нам картину легких электронов, окружающих тяжелое ядро в числе, равном номеру элемента.

Но почему не падают электроны на ядро, нейтрализуя его заряд, если движение им воспрещено? Этот узел дано было разрубить Нильсу Бору. В июле 1913 года он провозгласил два принципа, которые не только прочно утвердили познание атома, но и произвели сдвиг в основах физики.

Чтобы сделать это, нужна была смелость, почти дерзость.

Вопреки законам электродинамики, электроны совершают планетарное движение вокруг ядра и все-таки не излучают энергии. Эти особые состояния атома, эти формы движения даются квантовыми законами. Каждое состояние отличается от соседнего на один квант действия.

Так требует первый принцип Бора. Он рвет с классическими законами лучеиспускания, поглощения, дисперсии, в итоге чего получаются две оптики: квантовая оптика атомов и классическая оптика давно изученных явлений...

Второй принцип гласит, что излучение происходит только при переходе электрона из одного состояния в другое и притом так, что излучается строго монохроматическая волна, а излучаемая энергия, деленная на частоту колебаний, опять равна одному кванту действия.

Этот квант действия, впервые введенный в науку Планком, и далее все время будет маяком, который направит на истинный путь, но на первых шагах оба принципа кажутся столь искусственными, столь непривычными, как будто придуманными нарочно, что первое движение — оттолкнуть, не принять их. Но сделать этого уже нельзя. Выведенная между линиями водородного спектра связь, точнейшая формула Бальмера, оправдывается до деталей. Целочисленные законы получают смысл. Непонятные ранее звездные спектры ионизированного гелия уясняются. Даже с самых первых шагов теории периодичность химической валентности, хотя и туманно, намечается. Сразу обрисовался такой комплекс ясного и связанного, что нельзя от него отказаться.

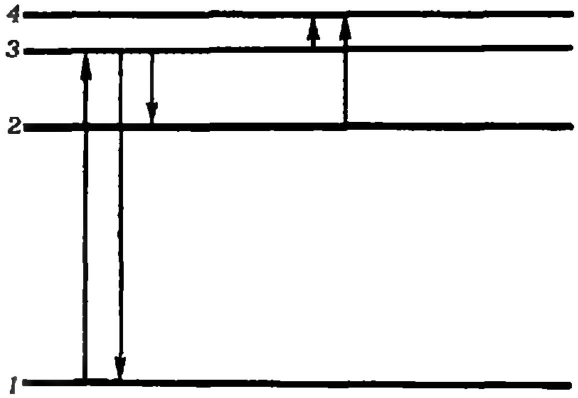
Теперь мы знаем, почему запоздал строитель. Оба принципа Бора революционны. Привести к ним могло только глубокое переживание квантовых основ явлений, длительная ассимиляция идей Планка и, как скоро увидим, Эйнштейна ...

Но новая связь между законами— квантовая связь. С самого начала она отказывается от конкретности. Она ведет баланс энергии, но не анализирует процесса. Квантовые состояния электрона в атоме соответствуют определенным орбитам движения. Каждая орбита характеризуется неизменным запасом энергии, уровнем энергии. Взаимодействия атома с внешним миром происходят, согласно второму принципу, или с излучением, или с поглощением светового кванта. Возможно столкновение с другим электроном, когда скачком две системы обмениваются одним квантом действия, и потому скачком энергия переносится из одной системы в другую. Но при этом полный отказ расчленить этот скачок — излучение, поглощение, столкновение; регистрируется лишь баланс энергии. Это уже много, здесь открывается возможность классифицировать уровни энергии, наблюдать, как идет процесс в ту или другую сторону. Но кинематика и динамика переходных стадий, то, над чем так напряженно работала старая физика, остаются не только туманными, но просто совершенно закрытыми...

В это время с особым значением выступают мысли Эйнштейна о фотоэлектрическом эффекте, высказанные еще в 1905 году. Сущность их следующая. Падая на вещество, свет вырывает из него электроны, и при самом слабом свете скорость вырванных электронов все же одинакова. От интенсивности его зависит лишь число вырванных электронов. Ясно, что здесь мы имеем те же элементарные акты ионизации, выбрасывания электрона одним квантом света на бесконечно удаленный уровень в отдельных атомах. Скорость выбрасываемого электрона вычисляется из баланса энергии в духе второго принципа Бора.

Самый процесс ионизации и здесь остается неизвестным. Свет падает квантами. Они отдельны, индивидуальны, эти мельчайшие комки света. И если это так, то что же такое интенсивность света? Она пропорциональна числу падающих квантов. Эта мысль была отчетливо высказана Эйнштейном. Ее логическое развитие требует признания, что интенсивность света пропорциональна вероятности падения кванта света, а отсюда — что кванты света распространяются по каким-то непонятным пока законам вероятности. Забегая вперед, можно сказать, что подобный ход мысли теперь (в 1932 году) является для нас естественным, но тогда он не был в сознании даже Эйнштейна. Наоборот, он пишет: «... волновая теория света столь прекрасно оправдалась в описании оптических явлений, что она, конечно, никогда не будет заменена другой теорией». И, несомненно, тогда еще не была подготовлена почва; самое понятие о кванте света было революционным. Как известно, квант-комок или квант-игла далеко не сразу были приняты в науке. Они будили сомнение, но не вызывали согласия. Слишком трудно было свойства волны — интерференцию, дифракцию — приписать комку, частице. Бор долго не принимал идеи о кванте света как частице...

Но в первой стадии квантовой теории даже самое понятие о кванте света как частице мало интересовало исследователей. Все мысли заняты были изучением строения атома водорода, анализом действия на него электрического и магнитного полей. В особенности много усилий посвящается изучению упругих и неупругих соударений электронов со всевозможными атомами (знаменитые опыты, начатые Франком и Герцем уже в 1913 году). Они на первых порах служили одним из главных подтверждений принципов Бора. Здесь в особенности стало до конкретности ясно, как каждый атом может существовать в различных состояниях и как налетающий со стороны электрон перекидывает электрон атома с уровня на уровень, всегда отдельным скачком...



Когда мы наблюдаем поглощение и лучеиспускание монохроматического света одной и той же длины волны, то подобный процесс старая оптика трактует как резонанс. Свет синхронно раскачивает электроны, и они лучеиспускают. Иначе в квантовой теории: поглощаемый квант света переводит электрон с уровня на уровень, из состояния *1* в состояние *3* (см. рис.). Побыв в состоянии *3*, электрон самостоятельно перескакивает назад в состояние *1*, теряя такой же монохроматический квант, какой раньше был поглощен. Это кажется мало удачной перефразировкой старого воззрения. Но вот оказывается, что есть атомы — и их немало, а молекулы почти все,— где возврат идет из состояния *3* не только в состояние *1*, но и в совсем новое состояние *2*. Если же прибавить, что новым подходящим квантом можно изловить электрон в состояниях *3* или *2* и перевести в состояние *4* и далее таким образом перекидывать электрон, как футбольный мяч, из состояния в состояние, то ясно, что экспериментатор вполне овладел понятием о многочисленных состояниях атомов: квантовой стороной вопроса...

Забегая несколько вперед, можно сказать, что опыты настолько конкретизировали постулаты Бора, что самое название постулата потеряло смысл; утверждения Бора — теперь ясные и необходимые выводы опыта. Это касается в особенности обмена энергии квантами, второго постулата, плодотворность которого была и остается изумительной.

А. Толпыго

# Инварианты

**В «Кванте» уже писалось о решении задач при помощи подбора инварианта (1976, № 2, с. 32). В данной статье обсуждаются понятие инварианта и ряд возникающих в связи с ним вопросов.**

## 1. Общая постановка задачи

При помощи инвариантов решаются задачи следующего типа: *даны множество $M$* (элементы его мы будем называть «позициями») *и правило, по которому разрешается переходить от одной позиции к другой; можно ли из данной позиции $\alpha$ перейти за несколько шагов в другую данную позицию $\beta$?* Более общая задача: *как для произвольной пары позиций $\alpha$, $\beta$ установить, можно ли из $\alpha$ за несколько шагов перейти в $\beta$?*

Очевидно, описанные ситуации обладают следующим свойством: если из позиции $\alpha$ можно перейти в позицию $\beta$ и из $\beta$ можно перейти в позицию $\gamma$, то из $\alpha$ можно перейти в $\gamma$. Это свойство называется *транзитивностью.*

Рассмотрим конкретную задачу.

Задача 1. *Круг разделен на $n$ секторов, в которых как-то расставлены $n$ фишек. Разрешается одновременно передвинуть любые две фишки: одну — на один сектор по часовой стрелке, другую — на один сектор в противоположном направлении. Можно ли из позиции $\mu$, в которой в каждом секторе стоит по одной фишке, перейти к позиции $\nu$, в которой все фишки собраны в каком-нибудь одном секторе?*

В данной задаче, кроме свойства транзитивности, имеет место также следующее важное свойство: если из позиции $\alpha$ можно перейти в позицию $\beta$, то и из $\beta$ можно перейти в $\alpha$. Это свойство называется *симметричностью.*

Свойство симметричности соблюдается не во всех задачах рассматриваемого типа; например, в шахматах пешки назад не ходят. *В этой статье мы ограничимся задачами, для которых условие симметричности выполнено.*

Условимся считать, что из любой позиции $\alpha$ можно «перейти» в нее же. Это свойство называется *рефлексивностью.*

Назовем позиции $\alpha$ и $\beta$ *эквивалентными*, если по заданным правилам из $\alpha$ можно перейти в $\beta$ (ввиду предположенной симметричности это равносильно тому, что из $\beta$ можно перейти в $\alpha$). Эквивалентность позиций $\alpha$ и $\beta$ мы будем обозначать так: $\alpha \sim \beta$; неэквивалентность — так: $\alpha \nsim \beta$.

Поскольку эквивалентность позиций рефлексивна, симметрична и транзитивна, исходное множество $M$ разбивается на непустые непересекающиеся подмножества (рис. 1): $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots$ В каждом из подмножеств $M_i$ все позиции эквивалентны: если $\alpha \in M_i$ и $\beta \in M_i$, то $\alpha \sim \beta$. Если же позиции $\alpha$ и $\beta$ принадлежат разным подмножествам: $\alpha \in M_i$, $\beta \in M_j$ $(i \neq j)$, то $\alpha$ и $\beta$ не эквивалентны *). Подмножества $M_i$ мы будем называть *орбитами.* Повторим еще раз: если мы находимся в позиции $\alpha$, принадлежащей какой-нибудь орбите $M_i$, то мы можем, перемещаясь по этой орбите, перебраться из позиции $\alpha$ в любую другую позицию, принадлежащую той же

---

*) «Квант», 1972, № 2, с. 2.

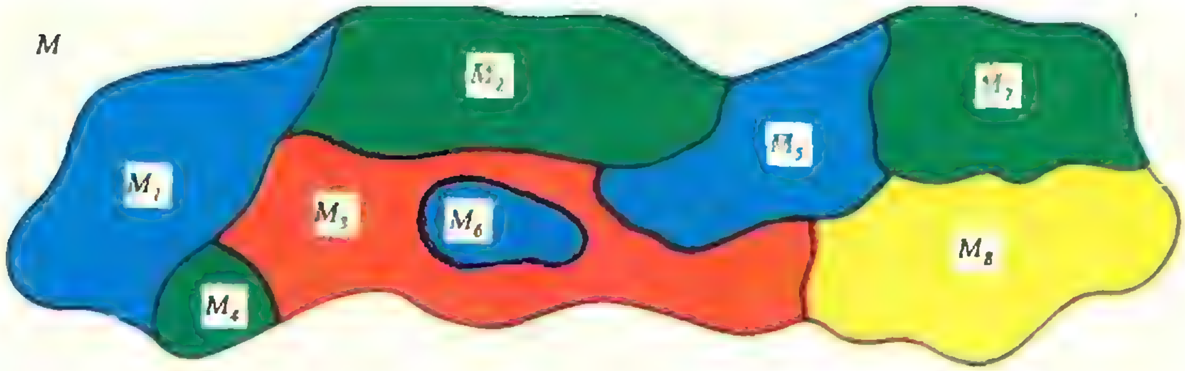


**Рис. 1.**

орбите. С другой стороны, сойти с этой орбиты, т. е. перебраться с позиции $\alpha$ на позицию $\beta$, принадлежащую любой другой орбите, мы не можем.

Орбит может быть как конечное, так и бесконечное число. Впрочем, если множество $M$ конечно, то, разумеется, и число орбит конечно.

## 2. Инвариант

Числовая функция $f$, определенная на множестве «позиций» $M$, называется *инвариантной функцией*, или *инвариантом*, если на эквивалентных позициях она принимает одинаковые значения:

$$\text{если } \alpha \sim \beta, \text{ то } f(\alpha) = f(\beta). \quad (1)$$

Задача 1 (продолжение). Пусть $n = 2m$. Раскрасим секторы через один в синий и белый цвет. Тогда при каждом перемещении число фишек в белых секторах либо не меняется (рис. 2), либо увеличивается на 2 (рис. 3), либо уменьшается на 2 (рис. 4). Для произвольной расстановки $\alpha$ фишек по секторам обозначим через $б(\alpha)$ число фишек в белых секторах. Рассмотрим теперь такую функцию $p$:

$$p(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } б(\alpha) \text{ четно}, \\ 1, & \text{если } б(\alpha) \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Из сказанного выше вытекает, что эта функция $p$ (четность числа фишек в белых секторах) является инвариантом. Поскольку $n = 2m$, для конечной позиции $\nu$ имеем $p(\nu) = 0$.

Если $m = 2k + 1$, то $\frac{n}{2}$ нечетно.

Значит, для начальной позиции $\mu$ имеем $p(\mu) = 1$. Из $p(\mu) \neq p(\nu)$ вытекает, что позиции $\mu$ и $\nu$ не эквивалентны. Таким образом, в этом случае ($n = 2m$, $m = 2k + 1$) из позиции $\mu$ нельзя перейти в позицию $\nu$.

Ну, а если $m = 2k$? Тогда $\frac{n}{2}$ четно и $p(\mu) = p(\nu) = 0$. В этом случае инвариант $p$ не дает возможности установить, эквивалентны позиции $\mu$ и $\nu$ или нет.

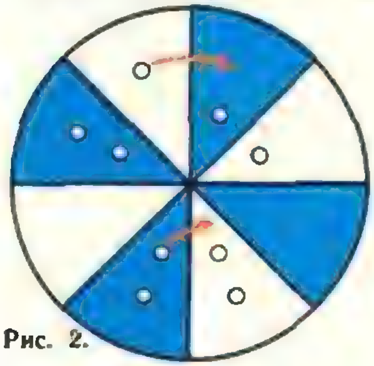


**Рис. 2.**

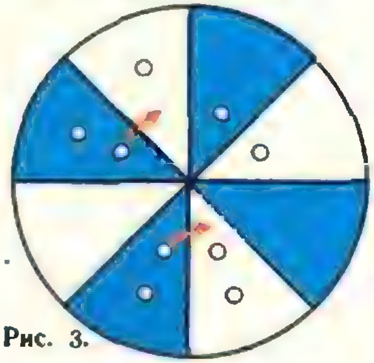


**Рис. 3.**

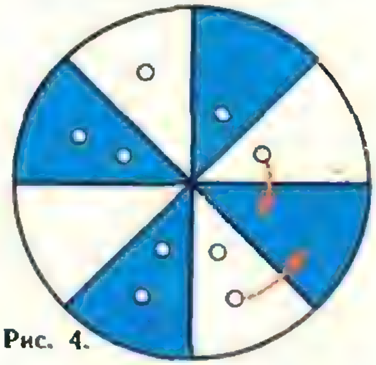


**Рис. 4.**

Дело в том, что если $f$ — инвариант, то из $f(\alpha) = f(\beta)$, вообще говоря, ничего не вытекает. Если $f(\alpha) \neq f(\beta)$, то позиции $\alpha$ и $\beta$ не эквивалентны (это следует из (1)). Если же $f(\alpha) = f(\beta)$, то позиции $\alpha$ и $\beta$ могут быть как эквивалентными, так и не эквивалентными: инварианту не запрещается на разных орбитах принимать одинаковые значения. (Например, постоянная функция, т. е. функция, которая на всех элементах из $M$ принимает одно и то же значение, тоже инвариантна.)

Как же быть? Попробуйте для какого-нибудь $n$ вида $4k$ перейти от позиции $\mu$ к позиции $\nu$... Почему-то не удается. Попробуем найти другой, более тонкий инвариант.

Занумеруем секторы (скажем, по часовой стрелке) от 1 до $n$. Для произвольной расстановки $\alpha$ фишек по секторам обозначим через $a_k(\alpha)$ количество фишек в $k$-м секторе при расстановке $\alpha$. Рассмотрим теперь такую функцию $q$:

$$q(\alpha) = 1 \cdot a_1(\alpha) + 2 \cdot a_2(\alpha) + 3 \cdot a_3(\alpha) + \ldots + n \cdot a_n(\alpha). \qquad (2)$$

Является ли функция $q$ инвариантом? Произвольное допустимое перемещение (рис. 5) затрагивает 4 слагаемых суммы (2):

$$\ldots + i \cdot a_i(\alpha) + (i+1) \cdot a_{i+1}(\alpha) + \ldots + (j-1) \cdot a_{j-1}(\alpha) + j \cdot a_j(\alpha) + \ldots \qquad (3)$$

При перемещении, изображенном на рисунке 5, сумма (3) превратится, очевидно, в сумму

$$\ldots + i \cdot [a_i(\alpha) - 1] + (i+1) \cdot [a_{i+1}(\alpha) + 1] + \ldots + (j-1) \cdot [a_{j-1}(\alpha) + 1] + j \cdot [a_j(\alpha) - 1] + \ldots$$

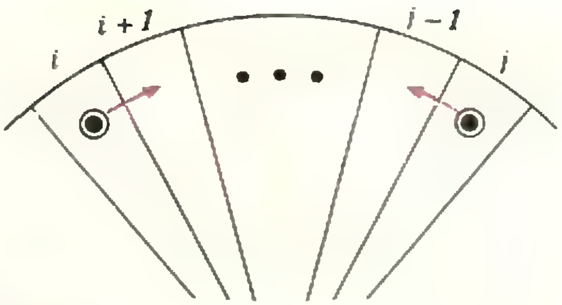


**Рис. 5.**

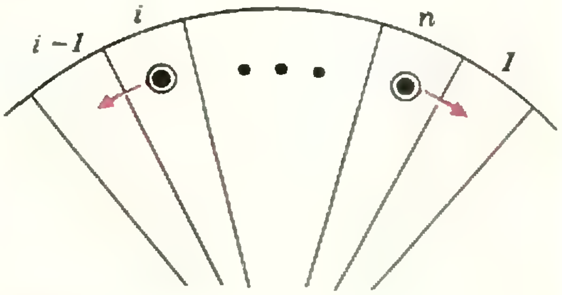


**Рис. 6.**

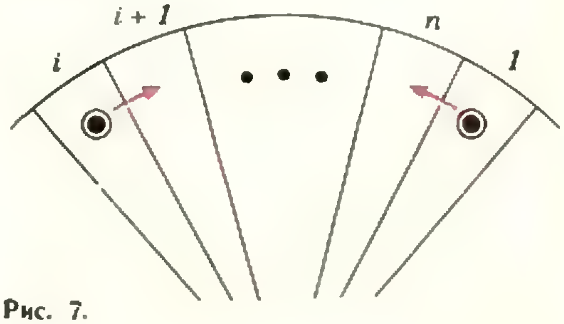


**Рис. 7.**

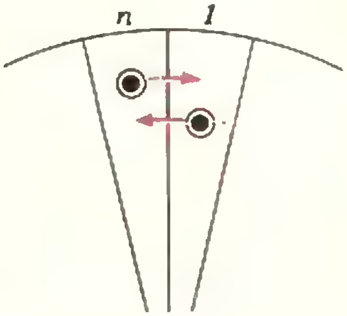


**Рис. 8.**

Легко проверяется, что обе суммы равны. Итак, $q$ — инвариант! Нет, *мы забыли, что $n$-й сектор граничит* с первым. Значит, есть еще 3 возможности (рис. 6—8). Подсчет, аналогичный только что сделанному, показывает, что в случае, изображенном на рис. 6, $q(\alpha)$ уменьшится на $n$, а в случае рисунка 7 — увеличится на $n$. В третьем случае $q(\alpha)$, конечно, не изменится. Итак, за одно перемещение значение функции $q$ может измениться, но только на $n$. Следовательно, функция $r$, значение которой на расстановке $\alpha$ равно остатку от деления числа $q(\alpha)$ на $n$, есть инвариант.

Для позиции $\nu$ (если все $n$ фишек собраны в $l$-м секторе)

$$\begin{cases} a_1(\nu) = a_2(\nu) = \ldots = a_{l-1}(\nu) = \\ \qquad = a_{l+1}(\nu) = \ldots = a_n(\nu) = 0, \\ a_l(\nu) = n. \end{cases}$$

Значит, $q(\nu) = l \cdot n$ и $r(\nu) = 0$ (каковы бы ни были $n$ и $l$). С другой стороны,

$$a_1(\mu) = a_2(\mu) = \ldots = a_n(\mu) = 1.$$

Значит,

$$q(\mu) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Если $n = 2m$, то $q(\mu) = n \cdot m + m$ и $r(\mu) = m \neq 0$. Следовательно, при четном $n$ получаем $r(\mu) \neq r(\nu)$. Итак, при четном $n$ позиции $\mu$ и $\nu$ не эквивалентны.

Если же $n = 2m + 1$, то $q(\mu) = n \cdot (m+1)$ и $r(\mu) = 0$. Таким образом, при нечетном $n$ мы опять имеем: $r(\mu) = r(\nu)$. Получается, что при нечетном $n$ вопрос об эквивалентности позиций $\mu$ и $\nu$ снова остается открытым.

### 3. Универсальный инвариант

Назовем инвариант $f$ *универсальным*, если на неэквивалентных позициях он принимает различные значения:

если $\alpha \nsim \beta$, то $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Таким образом, для универсального инварианта $f$

если $f(\alpha) = f(\beta)$, то $\alpha \sim \beta$.

Универсальный инвариант на каждой орбите принимает свое значение. Поскольку для универсального инварианта

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta),$$

универсальный инвариант для любой пары позиций позволяет установить, эквивалентны они или нет.

Как проверить, что некоторый инвариант $f$ универсален? Общего метода не существует. Иногда может помочь следующая простая

Теорема. *Если* a) *существуют такие $l$ позиций $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l$, что каждая позиция $\alpha \in M$ эквивалентна одной из них и* b) *инвариант $f$ принимает, по крайней мере, $l$ различных значений, то $f$ — универсальный инвариант и позиции $\delta_i, \delta_j$ $(i \neq j)$ попарно не эквивалентны.*

Из a) вытекает, что существует не более $l$ орбит. Из b) вытекает, что существует не менее $l$ орбит. Следовательно, существует ровно $l$ орбит. Снова из b) вытекает теперь, что инвариант $f$ принимает ровно $l$ значений и, значит, $f$ универсален. Наконец, из a) вытекает, что позиции $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l$ принадлежат разным орбитам и, таким образом, попарно не эквивалентны.

Задача 1 (окончание). Докажем, что инвариант $r$ универсален. Обозначим через $\delta_i$ такую расстановку фишек: одна фишка — в $i$-м секторе, все остальные — в $n$-м секторе. Под $\delta_n$ мы будем, разумеется, понимать расстановку, при которой все $n$ фишек — в $n$-м секторе.

Легко сообразить, что любая расстановка эквивалентна одной из позиций $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. В самом деле, пусть $\alpha$ — произвольная расстановка фишек. Попытаемся собрать все $n$ фишек в $n$-м секторе. Для этого будем передвигать первую фишку, пока не загоним ее в $n$-й сектор; одновремено, в соответствии с правилами, мы будем перемещать вторую фишку в противоположную сторону. Затем загоним в $n$-й сектор вторую фишку, двигая в противоположную сторону третью фишку, и так далее — вплоть до $(n-1)$-й фишки. Когда мы загоним $n-1$ фишек в $n$-й сектор, $n$-я фишка будет в каком-то $i$-м секторе $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Это и означает, что $\alpha \sim \delta_i$.

Посчитаем $r(\delta_i)$. При $i \neq n$:

$$\begin{cases} a_1(\delta_i) = a_2(\delta_i) = \ldots = a_{i-1}(\delta_i) = \\ \quad = a_{i+1}(\delta_i) = \ldots = a_{n-1}(\delta_i) = 0, \\ \quad a_i(\delta_i) = 1, \\ \quad a_n(\delta_i) = n - 1. \end{cases}$$

Следовательно, $q(\delta_i) = i \cdot 1 + n \cdot (n-1)$ и $r(\delta_i) = i$. Кроме того, $q(\delta_n) = n \cdot n$ и $r(\delta_n) = 0$. Итак, инвариант $r$ принимает по крайней мере $n$ значений.

По теореме инвариант $r$ универсален и позиции $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ попарно не эквивалентны.

Поскольку $r$ — универсальный инвариант,

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow r(\alpha) = r(\beta).$$

В предыдущем параграфе мы посчитали, что

$$r(\mu) = r(\nu) \Leftrightarrow n \text{ — нечетное.}$$

Следовательно, $\mu \sim \nu$ тогда и только тогда, когда $n$ — нечетное. Задача, наконец, решена полностью.

Упражнение 1. Докажите, не используя понятия инварианта, что при нечетном $n$ позиции $\mu$ и $\nu$ эквивалентны.

Упражнение 2. Проверьте, что любая функция от инварианта снова является инвариантом: если $f$ — инвариант и $g$ — произвольная числовая функция, то и функция $h$

$$h(\alpha) = g(f(\alpha)) \qquad (4)$$

тоже инвариантна.

Упражнение 3. Докажите, что любой инвариант можно представить в виде функции от любого универсального инварианта: если $h$ — инвариант, а $f$ — универсальный инвариант, то существует такая числовая функция $g$, что выполняется (4).

Упражнение 4. Определим через универсальный инвариант $r$ из задачи 1 два новых инварианта: $f(\alpha) = [r(\alpha)]^2$; $g(\alpha) = [r(\alpha) - 2]^2$. Докажите, что инвариант $f$ универсален, а инвариант $g$ не универсален.

Упражнение 5. Пусть $f$ — универсальный инвариант. Каким условиям должна удовлетворять числовая функция $g$, чтобы инвариант $h$, определенный равенством (4), был универсальным?

Задача 2. *Даны 20 карточек. На двух карточках написана цифра 0, на двух — цифра 1, ..., на двух последних — цифра 9. Можно ли расположить эти карточки в ряд так, чтобы карточки с 0 лежали рядом, между карточками с 1 лежала ровно одна карточка, ..., между карточками с 9 лежало ровно 9 карточек?*

Эту задачу можно решить без всяких инвариантов. Однако для нас она интересна тем, что у нее есть два принципиально разных решения, использующих инварианты.

Представим себе 20 ящиков, расположенных в ряд. Переформулируем теперь нашу задачу следующим образом: можно ли расположить карточки по ящикам так, чтобы выполнялись два условия:

a) карточки с 0 лежат в соседних ящиках, карточки с 1 — через один ящик, ..., карточки с 9 — через девять ящиков;

b) в каждом ящике лежит по одной карточке?

Очевидно, порознь выполнить каждое из условий очень легко. Это и приводит к двум решениям.

Первое решение. Положим в первый ящик 10 карточек: одну — с 0, одну — с 1, ..., одну — с 9. Затем вторую карточку с 0 положим во второй ящик, вторую карточку с 1 — в третий ящик, ..., вторую карточку с 9 — в одиннадцатый ящик. Условие a) выполняется. Мы хотим попытаться, не нарушая его, так переложить карточки, чтобы условие b) тоже выполнялось. Разрешим перекладывать любые две «одноименные» (с одной и той же цифрой) карточки через одинаковое число ящиков. Нетрудно заметить, что при произвольном разрешенном перемещении сдвиг в сумме происходит на четное число ящиков. Это подсказывает идею взять в качестве инварианта остаток от деления на 2 суммы номеров ящиков, в которых лежат карточки.

Упражнение 6. Закончить намеченное решение.

Второе решение. Положим в первый и второй ящики карточки с 0, в третий и четвертый — карточки с 1, ..., в девятнадцатый и двадцатый — карточки с 9. На этот раз выполнено условие b). Разрешим менять местами любые две карточки. При таком перемещении расстояние между восемью парами «одноименных» карточек не меняется, между двумя — меняется; таким образом, сумма всех этих расстояний...

Упражнение 7. Закончить решение.

## 4. Полная система инвариантов

Иногда вместо универсального инварианта проще найти и использовать полную систему инвариантов. Система инвариантов $\langle f_1, f_2, \ldots, f_k \rangle$ называется *полной*, если равенства

$$\begin{cases} f_1(\alpha) = f_1(\beta), \\ f_2(\alpha) = f_2(\beta), \\ \quad\vdots \\ f_k(\alpha) = f_k(\beta) \end{cases} \qquad (5)$$

имеют место одновременно тогда и только тогда, когда позиции α и β эквивалентны.

В чем суть этого определения? Если позиции α и β эквивалентны, то, поскольку $f_1, f_2, \dots, f_k$ — инварианты, каждое из равенств системы (5) все равно выполняется. «В эту сторону» полнота еще ни при чем. Если бы инварианты $f_1, f_2, \dots, f_k$ были универсальными, то эквивалентность позиций α и β вытекала бы из любого равенства системы (5). Нам не дана их универсальность, но зато требуется, чтобы одновременное выполнение равенств системы (5) влекло эквивалентность позиций α и β. Именно в этом суть понятия полноты. Таким образом, хотя некоторые из инвариантов $f_1, f_2, \dots, f_k$ могут на неэквивалентных позициях α, β принимать одинаковое значение, значения набора $\langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ на них различны.

Полная система инвариантов — это обобщение понятия универсального инварианта: если $f$ — универсальный инвариант, то система $\langle f \rangle$, состоящая из одного инварианта, конечно, полна.

Задача 3. *В таблице 2×2 записываются целые числа. Разрешается, во-первых, в любом столбце одновременно: к одному числу прибавить 2, из другого — вычесть 2 и, во-вторых, в любой строке одновременно: к одному числу прибавить 3, из другого — вычесть 3. Какие таблицы эквивалентны?*

Рассмотрим три функции: для любой таблицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

обозначим через $p(\alpha)$ сумму $a + b + c + d$, через $q(\alpha)$ — остаток от деления числа $a + b$ на 2 и через $r(\alpha)$ — остаток от деления числа $a + c$ на 3. Функции $p$, $q$, $r$ являются инвариантами. Не очень трудно доказать, что произвольная таблица α эквивалентна таблице

$$\begin{pmatrix} 0 & q(\alpha) \\ r(\alpha) & p(\alpha) - q(\alpha) - r(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, из равенств

$$\begin{cases} p(\alpha) = p(\beta), \\ q(\alpha) = q(\beta), \\ r(\alpha) = r(\beta) \end{cases} \qquad (6)$$

вытекает, что таблицы α и β эквивалентны одной и той же таблице и, значит, эквивалентны между собой. И обратно: эквивалентность таблиц α и β влечет равенства (6), поскольку $p$, $q$ и $r$ — инварианты. Таким образом, $\langle p, q, r \rangle$ — полная система.

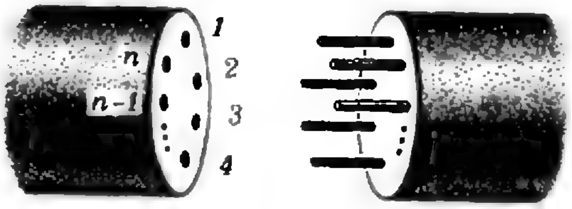


Рис. 9.

Упражнение 8. Решите задачу для таблиц $n \times n$, в которых разрешаются те же преобразования, что и в задаче 3. Естественно ожидать полную систему из $2n-1$ инвариантов.

Упражнение 9. Если $f_1, f_2, \dots, f_k$ — инварианты и $g$ — числовая функция от $k$ аргументов, то функция $h$:

$$h(\alpha) = g(f_1(\alpha), f_2(\alpha), \dots, f_k(\alpha)) \qquad (7)$$

является инвариантом (ср. с упражнением 2). Проверьте.

Упражнение 10. Если $h$ — инвариант, а $\langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ — полная система инвариантов, то существует такая числовая функция $g$ от $k$ аргументов, что выполняется (7) (ср. с упражнением 3). Докажите.

Упражнение 11. Множество $M$ — множество точек числовой плоскости, то есть множество пар $\langle x, y \rangle$ действительных чисел. Единственный допустимый переход: $\langle x, y \rangle \to \langle y, x \rangle$. Пусть

$$\begin{cases} f_1(x, y) = xy, \\ f_2(x, y) = x + y. \end{cases}$$

Доказать, что $\langle f_1, f_2 \rangle$ — полная система инвариантов.

Упражнение 12. Множество $M$ — множество точек пространства или множество троек $\langle x, y, z \rangle$ действительных чисел. Разрешены переходы $\langle x, y, z \rangle \to \langle y, x, z \rangle$ и $\langle x, y, z \rangle \to \langle x, z, y \rangle$. Пусть

$$f_1(x, y, z) = xyz,$$
$$f_2(x, y, z) = xy + yz + zx,$$
$$f_3(x, y, z) = x + y + z.$$

Доказать, что $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ — полная система инвариантов.

Упражнение 13. Множество $M$ состоит из всевозможных наборов (или кортежей) $\langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$ действительных чисел ($n$ фиксировано). Разрешается менять местами любые два соседних числа. Найти полную систему инвариантов.

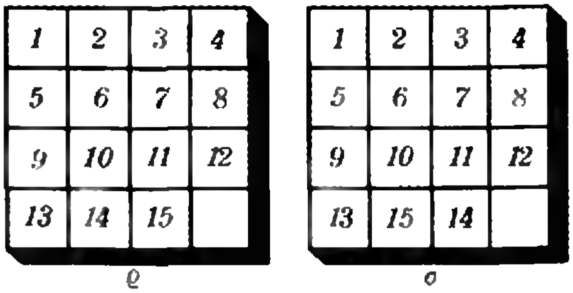


Рис. 10.

В отличие от задач 1 — 3, которые были просто задачами олимпиадного типа, упражнения 11—13 играют важную роль в алгебре многочленов. Инварианты в них интересны не для решения вопроса об эквивалентности (который ясен и без них), а сами по себе — как полезные функции.

### Упражнения

14. Даны розетка с $n$ дырками и электронная лампа с $n$ штырями. Дырки занумерованы от 1 до $n$ (рис. 9). Можно ли занумеровать штыри от 1 до $n$ так, чтобы при любом включении в розетку один из штырей попадал в дырку со своим номером?

15. Многие знают «игру в 15»: в коробочке 4×4 лежат 15 шашек с номерами от 1 до 15; разрешается за один ход передвинуть в пустую клетку одну из шашек, соседних с ней. Можно ли превратить положение $\rho$ в положение $\sigma$ (рис. 10)?

Найдите для этой игры универсальный инвариант.

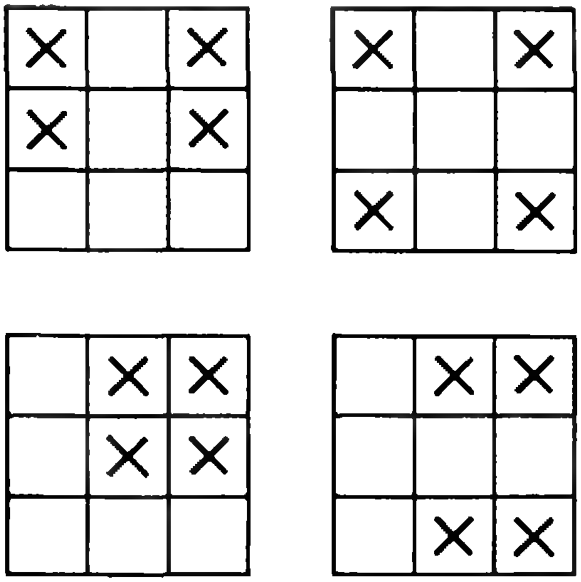


Рис. 11.

16. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

17. Испанский король решил перевесить по-своему портреты своих предшественников в круглой башне замка. Однако он хочет, чтобы за один раз меняли местами только два портрета, висящих рядом, причем это не должны быть портреты королей, один из которых царствовал сразу после другого. Кроме того, ему важно лишь взаимное расположение портретов, и два расположения, отличающиеся поворотом круга, он считает одинаковыми. Доказать, что, как бы сначала ни висели портреты, король может по этим правилам добиться любого нового их расположения.

18. Все целые числа от 1 до $2n$ выписаны в строчку. Затем к каждому числу прибавили номер того места, на котором оно стоит. Доказать, что среди полученных сумм найдутся хотя бы две, дающие при делении на $2n$ одинаковый остаток.

19. Вернемся к задаче 1 с фишками в круге и разрешим теперь двигать две фишки как в разные стороны, так и в одну сторону. Найти для этой задачи универсальный инвариант.

20. В таблице 3×3 расставлены числа $+1$ и $-1$. Разрешается менять знак одновременно у всех элементов строки или столбца. Докажите, что:

a) число орбит равно 16;

b) каждая орбита содержит ровно 32 элемента;

c) произведение всех чисел любого квадрата 2×2 в таблице является инвариантом;

d) произведения чисел в четырех квадратах, указанных на рисунке 11, образуют полную систему инвариантов.

Решать эти задачи можно в любом порядке; ясно, что одни помогают другим.

21. Вектор $\langle a, b\rangle$, где $a$, $b$ — целые числа, разрешается заменять одним из векторов $\langle a+b, b\rangle$, $\langle a-b, b\rangle$, $\langle b, a\rangle$.

Найти универсальный инвариант (ср. с задачей М420).

22. Пару векторов $\langle a, b\rangle$, $\langle c, d\rangle$, где $a$, $b$, $c$, $d$ — целые числа, разрешается заменять на одну из пар $\langle a+b, b\rangle$, $\langle c+d, d\rangle$; $\langle a-b, b\rangle$, $\langle c-d, d\rangle$; $\langle b, a\rangle$, $\langle d, c\rangle$. Найти полную систему инвариантов.

# задачник Кванта

## Задачи

### М416 — М420; Ф428 — Ф432

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 февраля 1977 г. по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М416» или «... Ф428». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачи Ф428, Ф429 и Ф432 предлагались на IX Международной олимпиаде по физике.

**М416.** На плоскости даны $n$ точек $A_1, \ldots, A_n$, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Какое наибольшее число отрезков с концами в этих точках можно провести так, чтобы не получилось ни одного треугольника с вершинами в этих точках?

*А. Григорян, М. Примак, С. Фишбейн*

**М417.** На поверхности куба с ребром 1 расположена замкнутая ломаная линия. На каждой грани куба находится по крайней мере одно звено ломаной. Докажите, что длина ломаной не меньше $3\sqrt{2}$.

*В. Произволов*

**М418.** Докажите, что для любого натурального $n$ выполняются неравенства:

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right) \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \leqslant$$

$$\leqslant 1+n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right).$$

**М419.** В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежат не менее 10 из данных точек.

*А. Гейн*

**М420.** а) Из дроби $\frac{a}{b}$ разрешается получить любую из трех дробей $\frac{a-b}{b}$, $\frac{a+b}{b}$, $\frac{b}{a}$. Можно ли такими преобразованиями из дроби $\frac{1}{2}$ получить дробь $\frac{67}{91}$?

б)* Из пары дробей $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ разрешается получить любую из трех пар $\left(\frac{a+b}{b}, \frac{c+d}{d}\right)$, $\left(\frac{a-b}{b}, \frac{c-d}{d}\right)$,

$\left(\frac{b}{a}, \frac{d}{c}\right)$. Можно ли из пары дробей $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{7}\right)$ получить следующие пары: $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$; $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$; $\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{8}\right)$; $\left(\frac{5}{19}, \frac{13}{50}\right)$; $\left(\frac{39}{50}, \frac{60}{77}\right)$? (Здесь мы рассматриваем дробь $a/b$ просто как пару взаимно простых чисел: допускаются «дроби», у которых в числителе или знаменателе стоят отрицательные числа или нуль.)

в)* Постарайтесь выяснить, какие вообще дроби (соответственно пары дробей) можно получить из данных в задачах а) и б).

*Г. Гуревич,*
*Б. Макаревич*

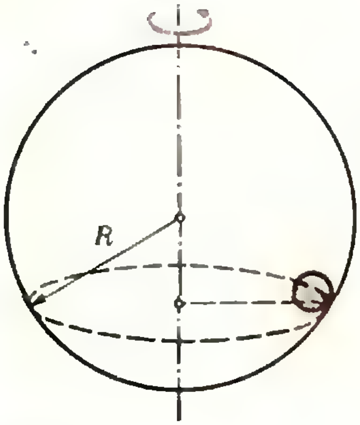


Рис. 1.

**Ф428**. Сфера радиуса $R = 0{,}5$ *м* вращается вокруг ее вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью $\omega = 5$ *рад/сек* (рис. 1). Вместе со сферой на ее внутренней поверхности вращается небольшое тело, находящееся на высоте, равной половине радиуса.

1) Определить минимальное значение коэффициента трения, при котором это состояние возможно.
2) Определить минимальное значение коэффициента трения, если угловая скорость сферы равна $\omega = 8$ *рад/сек*.
3) Исследовать устойчивость состояний в случае вышенайденных значений коэффициента трения при: а) малых изменениях положения тела; б) малых изменениях угловой скорости сферы.

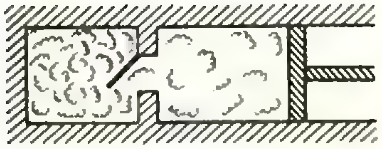


Рис. 2.

**Ф429**. Стенки цилиндра, поршень и внутренняя перегородка площадью 1 *дм*$^2$ изготовлены из теплоизоляционного материала (рис. 2). Клапан в перегородке открывается в том случае, если давление справа больше давления слева. В начальном состоянии в левой части цилиндра длиной 11,2 *дм* находится 12 *г* гелия, в правой части, имеющей ту же длину, — 2 *г* гелия, с обеих сторон температура равна 0°С. Внешнее давление равно $10^5$ *н/м*$^2$. Удельная теплоемкость гелия при постоянном объеме $c_V = 3{,}15 \cdot 10^3$ *дж/(кг·град)*, а при постоянном давлении $c_p = 5{,}25 \cdot 10^3$ *дж/(кг·град)*.

Медленно передвигаем поршень по направлению *к перегородке (с небольшой остановкой в момент* открытия клапана) и осторожно доводим поршень до перегородки. Чему равна произведенная нами работа?

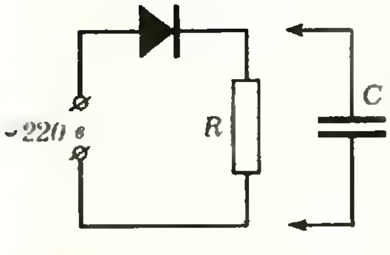


Рис. 3.

**Ф430**. На рисунке 3 показана простейшая схема выпрямителя. Диод считается идеальным: его сопротивление в прямом направлении равно нулю, в обратном — бесконечно велико. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая на сопротивлении $R$, при подсоединении параллельно ему конденсатора $C$ такой емкости, что за период колебаний напряжения сети ($U = 220$ *в*, $f = 50$ *гц*) заряд конденсатора практически не меняется?

*В. Скороваров*

**Ф431**. В дифференциальном вороте, схематически изображенном на рисунке 4, используется цепь, каждый метр которой содержит $N$ звеньев. Шкивы верхнего блока снабжены зубцами, которые продеваются в звенья цепи, причем шкив большего диаметра имеет $n$ зубцов, а шкив меньшего диаметра $n - 1$. Трение в системе таково, что силы, необходимые для подъема или опускания груза, отличаются в $k$ раз. Предполагая, что трение от направления движения не зависит, найти эти силы.

**Ф432**. В стеклянном шаре имеется воздушный сферический пузырек. Необходимо найти способы измерения диаметра этого пузырька. Шар должен остаться целым. Способы должны быть описаны как можно точнее.

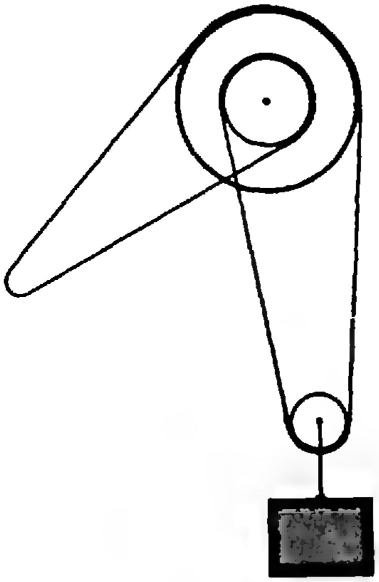


Рис. 4.

# Решения задач

## М376 — М378; Ф383 — Ф386

*М376. а) В ряд расположено 30 клеток. На самой правой клетке стоит белая фишка, на самой левой — черная. Каждый из двух играющих по очереди передвигает свою фишку на одно поле — вперед или назад. (Пропускать ход нельзя.) Проигравшим считается тот, у кого нет хода. Кто выигрывает: начинающий или его партнер? б) Решите задачу, заменив 30 на N.*

В этой задаче речь идет о «неинтересной» игре, где проигрыш того или другого партнера никак не зависит от их стратегии: все зависит от начального положения фишек.

Будем называть *расстоянием* между двумя фишками число клеток, расположенных между ними. При $N = 30$ в начальной позиции расстояние между фишками — 28. Ясно, что после каждого *полухода* (хода одного из партнеров) это расстояние уменьшается или увеличивается на единицу. Таким образом, при $N = 30$ и вообще при четном $N$ расстояние может стать равным нулю после четного числа полуходов. Поэтому выиграть может только второй — только после его хода фишки могут оказаться рядом. Он действительно выиграет, если будет все время ходить вперед.

По тем же причинам при нечетном $N$ может выиграть только первый (начинающий).

*Н. Васильев*

◆

*М377. Дан треугольник ABC. Найти на стороне AC такую точку D, чтобы периметр треугольника ABD равнялся длине стороны BC.*

Эта задача — на построение циркулем и линейкой; публикуя ее, мы надеялись получить именно такое, чисто геометрическое решение. Многие же читатели искали точку $D$, составляя уравнения и проводя довольно громоздкие вычисления.

Предположим, что искомая точка $D$ найдена, т. е. что $P_{\angle ABD} = |BC|$ (см. рис. 1). Тогда если от точки $D$ отложить отрезок $DK$, равный по длине отрезку $BD$, то длина отрезка $AK$ будет равна разности длин сторон $BC$ и $AB$ треугольника $ABC$.

Из этого замечания ясно, как решать задачу. На стороне $AC$ от точки $A$ отложим отрезок $AK$: $|AK| = |BC| - |AB|$,

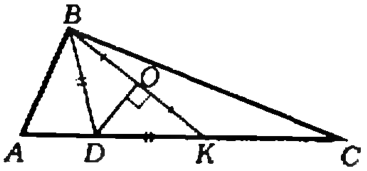


Рис. 1.

и соединим точку $K$ с вершиной $B$. Из середины $O$ отрезка $BK$ восставим перпендикуляр; точка пересечения этого перпендикуляра со стороной $AC$ и будет искомой точкой ($[OD] \perp [BK]$ и $O$ — середина $[BK]$; следовательно, $|BD| = |DK|$).

Осталось выяснить, всегда ли задача имеет решение. В треугольнике $ABD$: $|AD| + |BD| > |AB|$, то есть $P_{\triangle ABC} = |AD| + |BD| + |AB| > 2|AB|$. Следовательно, задача имеет решение, если $|BC| > 2|AB|$.

*С. Охитин*

◆

**М378.** *Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде*

*а)* $x^3 + y^3 + z^3$, *где* $x$, $y$, $z$ *— целые числа;*

*б)* $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n$, *где* $x_1, \ldots, x_n$ *— натуральные числа.*

*в) Докажите, что любое рациональное число можно представить в виде* $x^3 + y^3 + z^3$, *где* $x$, $y$, $z$ *— рациональные числа.*

а) Легко проверить, что если $x$ — целое число, то либо $x^3$, либо $x^3 + 1$, либо $x^3 - 1$ делится на 9. Действительно, если $x = 3k$, то это очевидно; если $x = 3k + 1$, то $x^3 - 1 = (x - 1)^3 + 3x(x - 1) = (3k)^3 + 9kx$; если же $x = 3k - 1$, то $x^3 + 1 = (x + 1)^3 + 3x(x + 1) = (3k)^3 + 9kx$. Иначе наше утверждение можно сформулировать так: при делении куба целого числа на 9 в остатке могут получиться только 0, 1 и $-1$. Отсюда сразу видно, что сумма трех кубов при делении на 9 может дать в остатке только 0, $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$. Поэтому все числа вида $9k \pm 4$ в виде суммы трех кубов целых чисел представлены быть не могут.

б) Возьмем все натуральные числа, меньшие числа $N^n$ (где $N > 1$ — какое-то натуральное число). Если $a = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n$ (где $x_i$ — натуральные числа), и $a < N^n$, то $x_i \leqslant N - 1$. Из $n$ чисел $x_1, \ldots, x_n$, каждое из которых может принимать $(N - 1)$ значений $(1, 2, \ldots, N - 1)$, можно составить $(N - 1)^n$ наборов (см., например, «Квант», 1971, № 1, статью Н. Я. Виленкина «Комбинаторика»). Среди сумм, составленных из $n$-х степеней чисел этих наборов, будут и одинаковые; так что количество чисел $a$ вида $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n$, меньших $N^n$, не более $(N - 1)^n$. Следовательно, $[N^n - (N - 1)^n] = A_N$ натуральных чисел, меньших $N^n$, нельзя представить в виде суммы $n$-х степеней ровно $n$ натуральных чисел. Число $A_N$ можно сделать как угодно большим, поскольку $A_N > N^{n-1}$ и $n > 1$. Из этого следует, что натуральных чисел, не представимых в виде $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n$, — бесконечно много.

в) Доказательство утверждения, сформулированного в пункте в), впервые было получено в 1825 году. Выглядит оно потрясающе: для рационального числа $a$ непосредственно пишется его представление в виде суммы трех кубов рациональных чисел:

$$a = \left(\frac{a^3 - 3^6}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6}\right)^3 + \left(\frac{-a^3 + 3^6a + 3^6}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6}\right)^3 + \left(\frac{a^2 + 3^4a}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6}\right)^3. \quad (*)$$

Непонятно, правда, как до такой формулы можно «додуматься» (впрочем, может быть, кому-нибудь из наших читателей это и удалось). Мы лишь можем предложить вам проверить, что эта формула верна.

Однако задачей о сумме трех кубов математики занимались не для того, чтобы получить формулу (*); сама по себе она, хоть и выглядит внушительно, мало поучительна. Гораздо важнее было понять, что «скрывается» за этим тождеством. Но это уже совсем специальный вопрос; им занимается один из самых трудных разделов математики — *алгебраическая геометрия*.

*И. Глуманов*

**Ф383.** *Цепочка массы $m$ и длины $l$ надета на гладкий круговой конус с углом при вершине $2\alpha$. Конус вместе с цепочкой вращается с угловой скоростью $\omega$ вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью симметрии конуса. Плоскость цепочки горизонтальна. Найти натяжение цепочки.*

Рассмотрим силы, действующие на малый участок цепочки длины $\Delta l$. Это сила тяжести $\mathbf{G} = mg\frac{\Delta l}{l}$, сила $\mathbf{N}$ нормальной реакции поверхности конуса и силы натяжения цепочки $\mathbf{F}$, действующие на участок $\Delta l$ со стороны соседних участков (рис. 2). Сумма проекций всех сил на вертикальную ось $OY$ должна быть равна нулю, поскольку цепочка вообще не перемещается в вертикальном направлении:

$$N\sin\alpha - G = 0. \qquad (1)$$

Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось $OX$ обеспечивает центростремительное ускорение элемента цепочки:

$$2F\sin\varphi - N\cos\alpha = \frac{m}{l}\Delta l\omega^2 r. \qquad (2)$$

Здесь $r = \frac{l}{2\pi}$ и $\sin\varphi = \frac{\Delta l}{2r} = \pi\frac{\Delta l}{l}$ (рис. 3). Решая совместно уравнения (1) и (2), получим

$$F = \frac{m}{2\pi}\left(\frac{g}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\omega^2 l}{2\pi}\right).$$

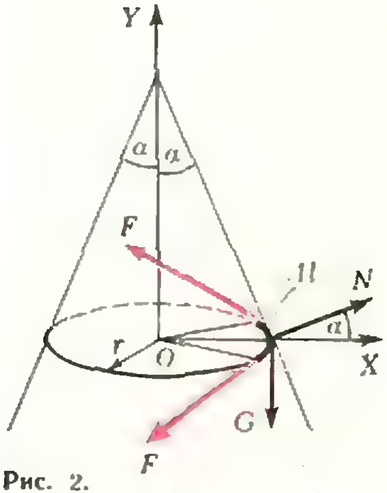


Рис. 2.

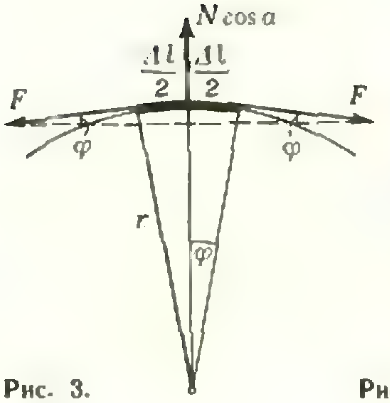


Рис. 3.

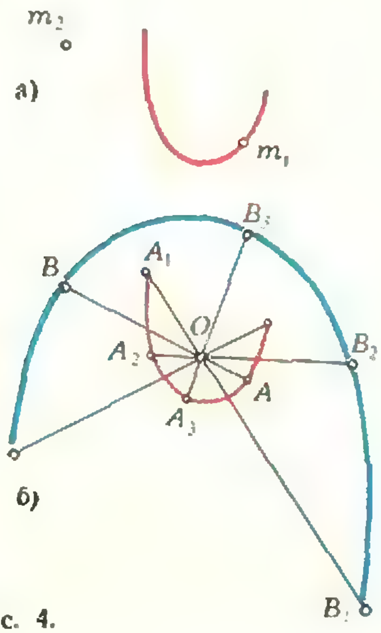


Рис. 4.

◆

**Ф384.** *Две взаимодействующие между собой частицы 1 и 2 с массами $m_1$ и $m_2$ соответственно образуют замкнутую систему. На рисунке 4, а показана траектория частицы 1 и положение обеих частиц в момент времени, когда скорость частицы 1 равна $\mathbf{v}$, а скорость частицы 2 равна $-3\mathbf{v}$. Построить траекторию частицы 2, если $\frac{m_1}{m_2} = 3$.*

По условию задачи импульс (количество движения) данной системы равен нулю:

$$m_1\mathbf{v} + m_2(-3\mathbf{v}) = 0,$$

поскольку $m_1 = 3m_2$. Равенство нулю импульса замкнутой системы означает, что ее центр масс все время остается неподвижным.

В случае двух частиц центр масс расположен на отрезке, соединяющем частицы, и делит этот отрезок в отношении, обратном отношению масс. Поэтому построение траектории частицы *2* сводится к следующему (рис. 4, *б*). Проводим отрезок $AB$, соединяющий частицы *1* и *2* в заданный момент времени (когда $\mathbf{v}_{m_2} = -3\mathbf{v}_{m_1}$). Делим этот отрезок на четыре части и откладываем одну часть от частицы *1*. Найденная точка $O$ определяет положение неподвижного центра масс. Далее соединяем произвольную точку траектории частицы *1* (например, точку $A_1$) с центром масс отрезком $A_1O$ и продолжаем этот отрезок на расстояние $OB_1 = 3A_1O$. Найденная точка $B_1$ будет соответствующей точкой траектории частицы *2*. Проведя такое построение для всех точек траектории частицы *1*, получим траекторию частицы *2*.

◆

**Ф385.** *Большая тонкая проводящая пластина площади $S$ и толщины $d$ помещена в однородное электрическое поле $\mathbf{E}$, перпендикулярное пластине. Какое количество тепла выделится в проводнике, если поле выключить?*

При внесении проводящей пластины в электрическое поле под действием этого поля происходит перераспределение свободных зарядов в пластине. На противоположных сторонах пластины, перпендикулярных направлению внешнего поля, скапливаются заряды противоположных знаков. Внутри пластины напряженность поля равна нулю. Это означает, что свободные заряды, распределенные по поверхности пластины, создают поле, напряженность которого внутри пластины равна $-\mathbf{E}$, а вне пластины равна нулю.

Сразу после исчезновения внешнего поля внутри пластины остается только поле поверхностных зарядов, которое обладает энергией

$$W = \frac{E^2}{2}\varepsilon_0 Sd.$$

Под действием этого поля происходит «обратное» перераспределение зарядов по всему объему пластины. При этом вся энергия электрического поля выделится в виде тепла:

$$Q = \frac{E^2}{2}\varepsilon_0 Sd.$$

◆

**Ф386.** *В вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника, катет которого равен $a$, расположены одинаковые металлические шарики радиусов $r$ ($r \ll a$). Шарики заряжены зарядом $q$ каждый. Шарики 1 и 2 соединяют проводником, затем проводник убирают. Затем так же поступают с шариками 2 и 3 и, наконец, с шариками 3 и 1. Какие заряды установились на шариках?*

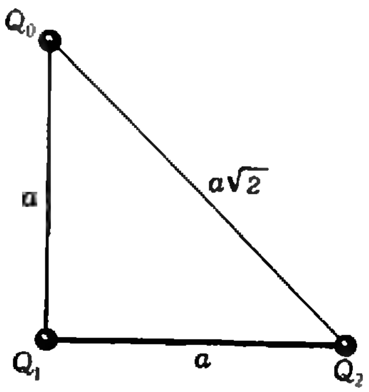


Рис. 5.

Решение задачи зависит от того, какой из шариков находится в вершине прямого угла.

Поэтому удобнее решить сначала две вспомогательные задачи. Первая задача — о распределении суммарного заряда $Q$ двух маленьких шариков, расположенных на концах катета. Шарики соединяют проводником в присутствии такого же шарика с зарядом $Q_0$, находящегося в третьей вершине равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 5). Пусть после соединения заряды шариков станут $Q_1$ и $Q_2$. Соединенные шарики будут иметь один и тот же потенциал, который можно определить согласно принципу суперпозиции как сумму потенциалов, созданных каждым зарядом в отдельности. Условие $r \ll a$ позволяет не заботиться о том, как именно распределены заряды $Q_1$, $Q_2$, $Q_0$ по поверхностям шариков.

Система уравнений

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a\sqrt{2}},$$

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

приводит к решению

$$Q_1 = \frac{Q}{2} - \frac{(2-\sqrt{2})r}{4(a-r)}Q_0 = \frac{Q}{2} - kQ_0,$$

$$Q_2 = \frac{Q}{2} + \frac{(2-\sqrt{2})r}{4(a-r)}Q_0 = \frac{Q}{2} + kQ_0,$$

где $$k = \frac{(2-\sqrt{2})r}{4(a-r)} \approx \frac{(2-\sqrt{2})r}{4a} \text{ (так как } r \ll a).$$

Вторая вспомогательная задача — о распределении суммарного заряда $Q$ двух шариков, расположенных на концах гипотенузы. При соединении этих шариков в присутствии такого же шарика с зарядом $Q_0$, расположенного в вершине

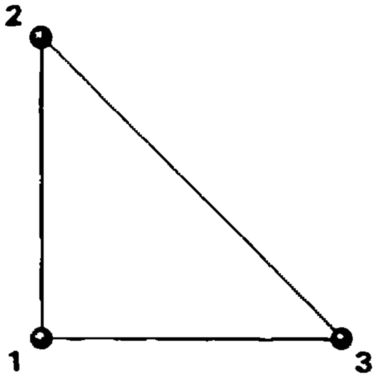


Рис. 6.

прямого угла, в силу симметрии суммарный заряд шариков распределяется между ними поровну:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q}{2}.$$

Решение двух вспомогательных задач позволяет быстро найти решение трех основных. Рассмотрим, например, случай, когда в вершине прямого угла находится шарик *1* (рис. 6). Тогда до всех соединений

$$q_1 = q,\ q_2 = q,\ q_3 = Q_0 = q.$$

Суммарный заряд шариков *1* и *2* равен $Q = 2q$. Заряд в третьей вершине $Q_0 = q$. Поэтому после соединения шариков *1* и *2* будем иметь:

$$Q_1 = \frac{Q}{2} - kQ_0 = q - kq,\ Q_2 = q + kq,\ q_3 = q.$$

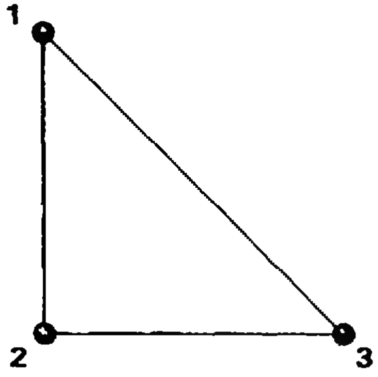


Рис. 7.

Теперь уберем проводник между шариками *1* и *2* и соединим шарики *2* и *3*. Суммарный заряд шариков *2* и *3* до соединения *2—3* равен

$$Q = (q + kq) + q = 2q + kq.$$

Эти шарики расположены на концах гипотенузы. Следовательно, после соединения *2—3* распределение зарядов будет таким:

$$q_1 = q - kq,\ q_2 = \frac{Q}{2} = q + \frac{k}{2}q;\ q_3 = q + \frac{k}{2}q.$$

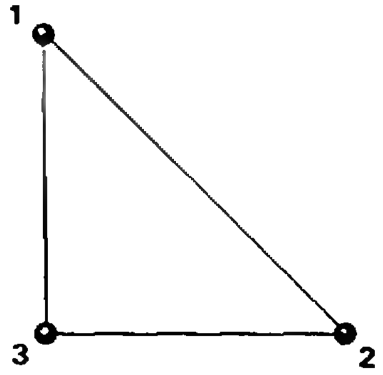


Рис. 8.

Суммарный заряд шариков *3* и *1* после убирания проводника равен

$$Q = \left(q + \frac{k}{2}q\right) + (q - kq) = 2q - \frac{k}{2}q,$$

заряд в последней вершине (*2*) равен $Q_0 = q_2 = q + \frac{k}{2}q$. Поэтому после соединения *3—1* заряды распределятся так:

$$q_1 = \frac{Q}{2} - kQ_0 = \left(q - \frac{k}{4}q\right) - k\left(q + \frac{k}{2}q\right) =$$

$$= q\left(1 - \frac{5}{4}k - \frac{1}{2}k^2\right),$$

$$q_2 = Q_0 = q\left(1 + \frac{1}{2}k\right),$$

$$q_3 = \frac{Q}{2} + kQ_0 = q\left(1 + \frac{3}{4}k + \frac{1}{2}k^2\right).$$

Подставляя значение $k \approx \frac{(2 - \sqrt{2})r}{4a}$ и пренебрегая членами, содержащими величину $\frac{r}{a}$ в степени выше первой, окончательно получим:

$$q_1 \approx q\left(1 - \frac{5(2 - \sqrt{2})r}{16a}\right),$$

$$q_2 \approx q\left(1 + \frac{(2 - \sqrt{2})r}{8a}\right),$$

$$q_3 \approx q\left(1 + \frac{3(2 - \sqrt{2})r}{16a}\right).$$

Результаты для случаев, изображенных на рисунках 7 и 8, сведены в таблицы:

| (Рис. 7) | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|
| До всех соединений | $q$ | $q$ | $q$ |
| После соединения *1—2* | $q+kq$ | $q-kq$ | $q$ |
| После соединения *2—3* | $q+kq$ | $q-\frac{3}{2}kq-k^2q$ | $q+\frac{1}{2}kq+k^2q$ |
| После соединения *3—1* | $q\left(1+\frac{3}{4}k+\frac{1}{2}k^2\right)$ | $q\left(1-\frac{3}{2}k-k^2\right)$ | $q\left(1+\frac{3}{4}k+\frac{1}{2}k^2\right)$ |
| Приближенное значение | $q\left(1+\frac{3(2-\sqrt{2})r}{16a}\right)$ | $q\left(1-\frac{3(2-\sqrt{2})r}{8a}\right)$ | $q\left(1+\frac{3(2-\sqrt{2})r}{16a}\right)$ |

| (Рис. 8) | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ |
|---|---|---|---|
| До всех соединений | $q$ | $q$ | $q$ |
| После соединения *1—2* | $q$ | $q$ | $q$ |
| После соединения *2—3* | $q$ | $q+kq$ | $q-kq$ |
| После соединения *3—1* | $q\left(1+\frac{1}{2}k+k^2\right)$ | $q(1+k)$ | $q\left(1-\frac{3}{2}k-k^2\right)$ |
| Приближенное значение | $q\left(1+\frac{(2-\sqrt{2})r}{8a}\right)$ | $q\left(1+\frac{(2-\sqrt{2})r}{4a}\right)$ | $q\left(1-\frac{3(2-\sqrt{2})r}{8a}\right)$ |

*Б. Буховцев*

*А. Земляков, Б. Ивлев*

# Периодические функции

*«Все это было, было, было...»*
*А. Блок*

**Эта заметка должна помочь старшеклассникам лучше разобраться в том, что такое периодические функции. Понятие периодичности, весьма важное как в математике, так и в физике, долгое время относилось к числу наиболее трудных в школьном курсе математики. По сути же это понятие не сложно, нужно лишь как следует вникнуть в смысл определения периодичности.**

**Учебники «Алгебра и начала анализа» для IX и X классов (под ред. А. Н. Колмогорова) в дальнейших ссылках обозначаются просто IX и X.**

Напомним, что функция $f$ называется *периодической* функцией, если существует хотя бы одно число $T \neq 0$ такое, что выполнены следующие два условия:

(А) *если* $x \in D(f)$, *то* $x+T \in D(f)$ *и* $x-T \in D(f)$;

(Б) *для любого* $x \in D(f)$
$f(x) = f(x+T) = f(x-T)$;
при этом число $T$ называется *периодом* функции $f$ (ср. IX, п. 69). Менее формально можно сказать так: периодическими называются такие функции, значения которых повторяются через некоторый промежуток $T$ значений аргумента:
$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \ldots = f(x-T) = f(x-2T) = \ldots$
(поясните, как из определения — из условий (А) и (Б) — вывести выписанную цепочку равенств). Очевидно, график периодической функции отображается сам на себя при параллельных переносах $\vec{a} = \vec{r}(T, 0)$ и $-\vec{a} = \vec{r}(-T, 0)$ на расстояние $T$ вдоль оси $Ox$ (см. рис. 1; это свойство графика периодической функции $f$ можно было бы принять за определение периодичности $f$ — объясните).

С периодическими или с «приближенно периодическими» процессами приходится часто встречаться как в природе, так и в технике, и именно поэтому важно изучать периодические функции в математике. Примеры таких процессов — смены дня и ночи или времен года, связанные с приближенно периодическими вращениями Земли около своей оси и около Солнца; приливы и отливы и смена фаз Луны; движение поршня в цилиндре двигателя внутреннего сгорания и т. д.

## Примеры периодических функций

1°. В курсе X класса подробно изучаются функции вида
$f_\omega(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$, где $A, \omega > 0$, — они связаны с так называемыми *гармоническими колебаниями*. Как известно, функция $f_\omega$ периодическая и имеет периоды

$$\pm\frac{2\pi}{\omega},\quad \pm 2\cdot\frac{2\pi}{\omega},\quad \pm 3\cdot\frac{2\pi}{\omega},\ldots$$

т. е. все целые кратные $nT_0$ ($n \in \mathbf{Z}$) наименьшего положительного периода $T_0 = 2\pi/\omega$ этой функции (рис. 2).

2°. Конечно, любая постоянная функция
$f(x) = c$ (при любом $x \in \mathbf{R} = D(f)$) является периодической, причем ее периодами будут любые числа $T \neq 0$ (а наименьшего положительного периода не существует).

3°. Согласно определению, если функция $f$ периодична и $T > 0$ — ее период, то для любой точки $x_0 \in D(f)$ точки $x_0 + T$, $x_0 - T \in D(f)$, далее, точки $x_0 + 2T$ и $x_0 - 2T$ тоже принадлежат $D(f)$, и т. д.; таким образом, если $f$ определена в точке $x_0$, то она должна быть определена во всех точках $x_n = x_0 + nT$, где $n \in \mathbf{Z}$ (т. е. $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Значения $f$ во всех этих точках должны быть одинаковы: $f(x_n) = c$ не зависит от $n$. Если считать, что при всех остальных значениях $x$ (т. е. при $x \neq x_n$) функция $f$ вовсе не определена, то мы получаем по существу простейший пример периодической функции:

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{при } x = x_n = x_0 + nT,\ n \in Z, \\ \text{не определена при остальных } x. \end{cases}$$

График $f$ — бесконечное множество точек вида $(x_n, c)$ на одинаковых расстояниях друг от друга. Периодами $f$ являются целые кратные $nT$ числа $T$ — наименьшего положительного периода (рис. 3).

4°. Укажем совсем общий способ построения периодических функций с данным периодом $T > 0$ — точнее, способ построения их графиков. Зададим функцию $f$ на полуинтервале $[0, T)$ произвольно, а затем применим к графику $f$ над этим промежутком (при $0 \leqslant x < T$) всевозможные параллельные переносы вида $n\vec{a} = \vec{r}(nT, 0)$, где $n$ — целые числа (рис. 4, *а*, *б*). Очевидно, при этом получится график периодической функции $f$ с периодом $T$.

Задача 1. Может ли периодом функции $f$, построенной описанным выше образом, оказаться число $T_0$, меньшее $T$ $(0 < T_0 < T)$? Если может, приведите пример.

Наши дальнейшие планы таковы. Во-первых, мы рассмотрим некоторые важные свойства периодических функций. Далее на примерах покажем, как установить периодичность или непериодичность конкретных функций, заданных формулами, и как отыскивать периоды. Наконец, мы сформулируем ряд задач разнообразного характера, касающихся периодических и непериодических функций. (*Непериодическими* — пишется слитно — принято называть функции, не являющиеся периодическими.)

Известные из курса IX класса примеры периодических функций (т. е., по сути, тригонометрические функции) приводят к следующему наблюдению: если у периодической функции $f$ существует *наименьший положительный* период, т. е. такой период $T_0$, что любое число $t$, большее нуля и меньшее $T_0$, уже не является периодом $f$, то все остальные периоды функции $f$ суть целые кратные $T_0$ — числа вида $T = nT_0$, где

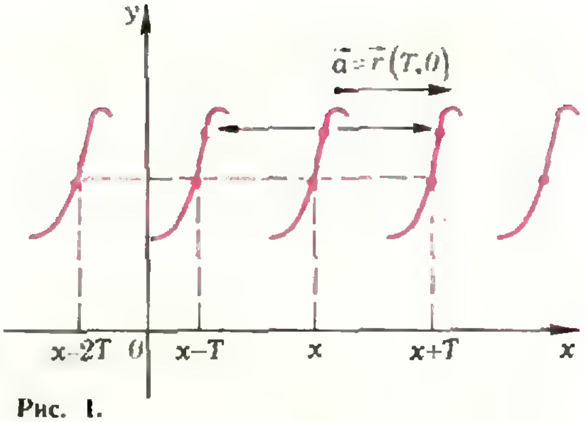


Рис. 1.

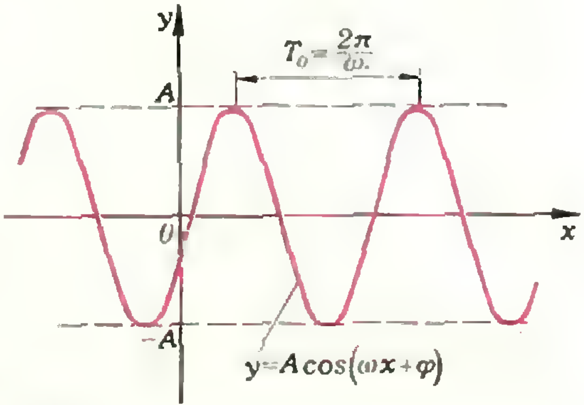


Рис. 2.

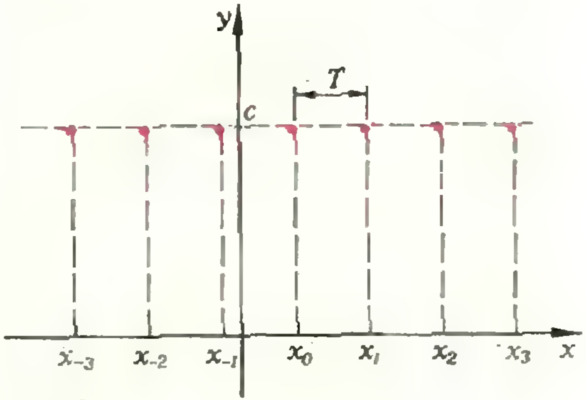


Рис. 3.

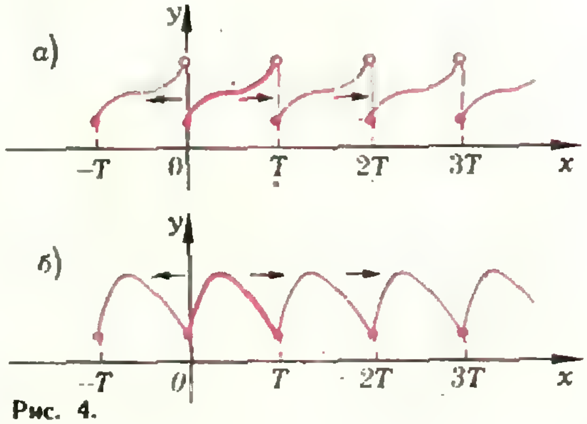


Рис. 4.

$n$ — целое. Это верно для любой периодической функции, у которой существует наименьший положительный период (у периодической функции $f$ может и не существовать такого периода — см. пример 2°, а также задачу 10).

Теорема 1. *Если $T_0$ — наименьший положительный период периодической функции $f$, то произвольный период $T$ этой функции $f$ представляется в виде $T = nT_0$, где $n$ — целое. Обратно, любое число $T$ указанного вида является периодом $f$ (при этом удобно считать периодом $f$ также и число $0 = 0 \cdot T_0$).*

Доказательство (ср. IX, с. 186).

*Замечание*: если числа $T_1$ и $T_2$ являются периодами функции $f$, то и их *сумма* $T_1 + T_2$ и *разность* $T_1 - T_2$ будут периодами $f$. (Убедитесь в этом самостоятельно.)

Отсюда сразу ясно, что если $T_0$ — период $f$, то все целые кратные $T_0$ — числа $T = nT_0$, $n \in \mathbf{Z}$, — являются периодами $f$. Пусть теперь $T_0$ — наименьший положительный период $f$, а $T$ — произвольный период $f$. Допустим, что $T$ не представляется в виде $T = nT_0$, где $n$ — целое. Тогда число $T$ заключено строго между какими-то соседними целыми кратными числа $T_0$ (рис. 5):

$$nT_0 < T < (n+1)T_0.$$

Вычитая из всех частей этого неравенства число $nT_0$, получим: $nT_0 - nT_0 < T - nT_0 < (n+1)T_0 - nT_0$, т. е. $0 < T' = T - nT_0 < T_0$. С одной стороны, поскольку $T_0$ — наименьший период $f$, число $T'$, заключенное между 0 и $T_0$, не может быть периодом функции $f$; с другой стороны, согласно сделанному выше замечанию, число $T' = T - nT_0$ является периодом $f$ (как разность периодов $T$ и $nT_0$). Полученное противоречие показывает, что $T = nT_0$, и теорема полностью доказана.

Итак, если у функции $f$ существует наименьший положительный период и нам удалось его найти, то тем самым найдены и все остальные периоды $f$ — это будут целые кратные наименьшего.

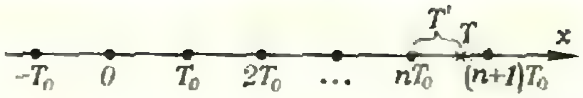


Рис. 5.

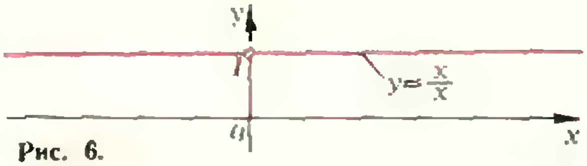


Рис. 6.

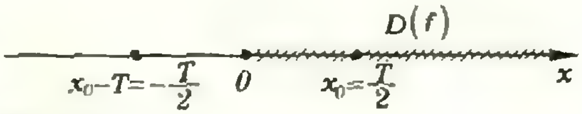


Рис. 7.

**Важное замечание.** В учебнике X на с. 173—174 приведено определение периодической функции, несколько отличное от определения из п. 69 учебника IX. Именно, в учебнике X условие периодичности (Б) $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$ заменено на более слабое требование:

(Б$_0$) *для любого $x \in D(f)$ выполнено $f(x) = f(x+T)$.*

Оказывается, из (А) и (Б$_0$) следует (Б). В самом деле, пусть функция $f$ удовлетворяет условию (А) и условию (Б$_0$). Тогда из (А) следует, что для $x \in D(f)$ число $x_1 = x - T \in D(f)$. Отсюда по свойству (Б$_0$) получаем:

$$f(x_1) = f(x_1 + T),$$

т. е. $f(x - T) = f(x)$.

Вернемся к примерам.

5°. Функция

$$f(x) = \frac{x}{x} = \begin{cases} 1 \text{ при } x \neq 0, \\ \text{не определена при } x = 0 \end{cases}$$

непериодична. Действительно, условие (А) не может быть выполнено ни при каком $T \neq 0$: число $x_0 = T \in D(f)$, а $x_0 - T = 0 \notin D(f)$ (рис. 6).

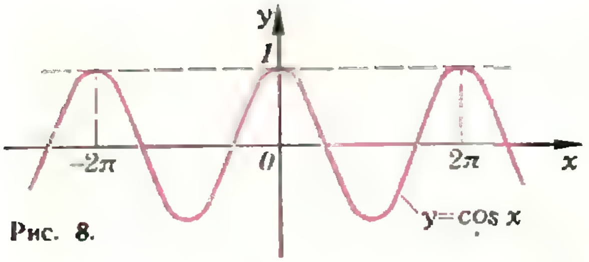


Рис. 8.

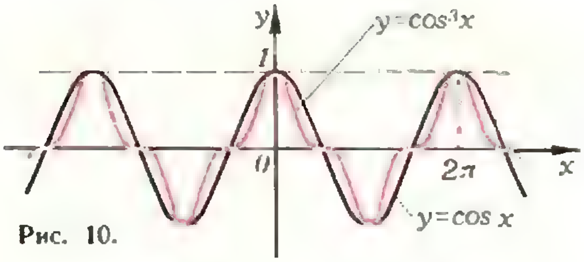


Рис. 10.

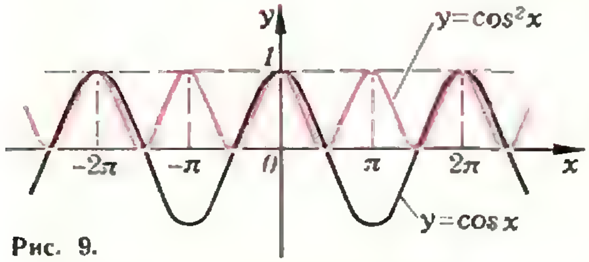


Рис. 9.

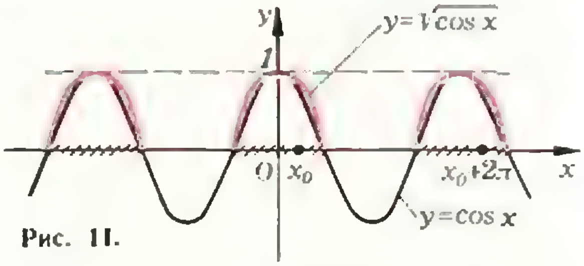


Рис. 11.

6°. Функция $f(x) = \cos\sqrt{x}$ также непериодична — опять не выполнено условие (А):

$$D(f) = \{x \mid x \geqslant 0\},$$

и если $T > 0$, то $x_0 = T/2 \in D(f)$, но $x_0 - T = -T/2 < 0$ и не принадлежит $D(f)$; аналогично рассматривается случай $T < 0$ (рис. 7).

7°. Квадратичная функция $f(x) = x^2$ определена всюду: $D(f) = \mathbf{R}$, — и поэтому условие (А) для нее выполнено при любом $T$. Если же при некотором $T \neq 0$ выполнено и условие (Б$_0$), то при любом $x \in \mathbf{R}$ должно быть верно соотношение $x^2 = (x+T)^2$. Взяв $x = 0$, получим: $0^2 = (0+T)^2$, т. е. $T^2 = 0$, или $T = 0$, *в противоречие с условием* $T \neq 0$. Следовательно, условие (Б$_0$) не выполнено ни при каком $T \neq 0$, и функция $f(x) = x^2$ — непериодическая.

8°. Функция $f(x) = \cos x$ (рис. 8), как известно, периодична: ее периодом является, например, $T_0 = 2\pi$. Это наименьший период, так как $\cos x = 1$ лишь при $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, т. е. *значение* 1 *функции* $f$ *повторяется через* $2\pi$; поэтому периода, меньшего $2\pi$, у $f$ не может быть (в противном случае значение 1 функция принимала бы в точках, отстоящих друг от друга менее, чем на $2\pi$).

Из теоремы 1 выводим, что периодами функции $f(x) = \cos x$ являются целые кратные $2\pi$ и только они. (Обратите внимание на то, *как* мы доказывали, что период $2\pi$ — наименьший. Подобное рассуждение помогает и во многих других случаях.)

9°. *Общее замечание.* Если $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T$, то, какова бы ни была функция $F$, *сложная функция* $y = F(f(x))$ является периодической, причем $T$ будет и ее периодом. (Обоснуйте это: ср. с. X, с. 175.) Например, функции $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\sqrt{\cos x}$ (см. рисунки 9—11 — на рисунках 8—11 по техническим причинам на координатных осях выбраны разные масштабы) — периодические с периодом $2\pi$ (здесь $F(z) = z^2, z^3, \sqrt{z}$ соответственно). Независимо от сформулированного замечания, рассмотрим функцию $y = \cos^2 x$ и непосредственно проверим для нее условия периодичности (А) и (Б$_0$).

10°. Функция $f(x) = \cos^2 x$ (рис. 9) всюду определена, поэтому условие (А) выполнено автоматически. Далее, $f$ имеет $2\pi$ своим периодом: так как $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, то $\cos^2(x + 2\pi) = \cos^2 x$, т. е. $f(x + 2\pi) = f(x)$.

*Вопрос:* является ли $T_0 = 2\pi$ наименьшим периодом $f(x) = \cos^2 x$?

Попробуем на него ответить. Рассмотрим те $x$, при которых $f(x) = 1$, т. е. $\cos^2 x = 1$; тогда $\cos x = 1$

или $\cos x = -1$, откуда $x = \pi n$, то есть значение 1 повторяется через $\pi$, а не через $2\pi$! Может быть, наименьшим периодом $f$ будет $\pi$?

Преобразуем $\cos^2 x$ по известным формулам:

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}.$$

Функция $y = \cos 2x$ периодична с периодом $\pi$ (поясните); следовательно, и функции $(1/2)\cos 2x$ и $(1/2)\cos 2x + 1/2 = f(x)$ будут иметь период $\pi$. Поскольку значение 1 у функции $f$ повторятся через $\pi$ (см. выше), число $\pi$ будет наименьшим периодом $f$.

То же самое можно получить и с помощью формулы приведения: $\cos(x + \pi) = -\cos x$, поэтому $\cos^2(x + \pi) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$.

11°. *Общее замечание.* Если функция $f(x)$ периодична с периодом $T$, то любая сложная функция вида

$$F(x) = af(Ax + B) + b$$

$$(A \neq 0,\ B,\ a,\ b \text{ — постоянные})$$

является периодической, причем ее периодом будет число $T' = T/A$. (Обоснуйте это; ср. с X, с. 175.) Например, функция вида $a\cos(Ax + B) + b$ периодична с периодом $2\pi/A$.

Сформулируем теперь ряд задач.

Задача 2 Выясните, какие из указанных ниже функций периодичны, а какие — нет:

а) $\sin|x|$, б) $|\sin x|$, в) $\dfrac{\sin x}{\sin x}$.

Задача 3. Докажите, что следующие функции непериодичны:

а) $\dfrac{1}{x}$, в) $\sin[(\sqrt{x})^2]$, д) $x^2 + \sin x$,

б) $\sin\dfrac{1}{x}$, г) $x^2 + 3x + 17$, е) $\sin\sqrt{|x|}$.

Задача 4. Докажите, что следующие функции периодичны, и найдите их наименьший положительный период:

а) $\sin^2 x$, в) $\sin^6 x$,

б) $\sin^4 x$, г) $\sin\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{3}$,

д) $\sin 2x + \sin 3x$,

е) $\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \sin\sqrt{2}x$.

Очевидно, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ периодичны с одинаковым периодом $T$, то их сумма $s(x) = f(x) + g(x)$ тоже будет периодической функцией, причем $T$ является ее периодом*).

Задача 5. Функции $f(x)$ и $g(x)$ всюду определены и имеют одинаковый наименьший положительный период $T_0$. Верно ли, что $T_0$ является наименьшим и для суммы $f(x) + g(x)$? Придумайте две такие (всюду определенные) функции $f$ и $g$, период суммы которых был бы ровно в 2 раза меньше $T_0$.

Пусть периодические функции $f$ и $g$ имеют наименьшие положительные периоды $T_1$ и $T_2$, соответственно, и $T_1 \neq T_2$.

*Вопрос.* В каком случае у функций $f$ и $g$ существует общий (конечно, уже не наименьший) период $T$?

*Ответ.* Если у $f$ и $g$ есть общий период $T$, то по теореме 1 $T = mT_1 = nT_2$, где $m$ и $n$ — целые; отсюда следует, что $T_2/T_1 = m/n$ — рациональное число. Обратно, если отношение $T_2/T_1$ рационально, $T_2/T_1 = m/n$, то $mT_1 = nT_2 = T$ — общий период функций $f$ и $g$.

Все наши рассуждения показывают справедливость такого утверждения.

Теорема 2. *Если наименьшие положительные периоды периодических функций $f$ и $g$ соизмеримы, то есть отношение $T_2/T_1$ рационально, то и сумма этих функций $f(x) + g(x)$ периодична.*

Оказывается, что если отношение наименьших периодов всюду определенных и непрерывных функций $f$ и $g$ иррационально, то функция $f + g$ будет непериодической. То же самое можно сказать и о произведении периодических функций (мы ограничимся лишь тем, что приведем несколько соответствующих примеров; общее же доказательство сформулированного утверждения довольно сложно).

Задача 6. Докажите, что следующие функции (произведения и суммы периодических!) не являются периодическими:

а) $\cos x \cdot \cos\sqrt{2}x$, в) $\sin x \cdot \sin\sqrt{2}x$,

б) $\cos x + \cos\sqrt{2}x$, г) $\sin x + \sin\sqrt{2}x$.

---

*) Здесь есть небольшая тонкость: область определения суммы $f(x) + g(x)$ — это пересечение $D = D(f) \cap D(g)$, и может случиться так, что $D = \varnothing$. *Нигде не определенную функцию* удобно считать периодической, причем ее периодом следует считать любое число.

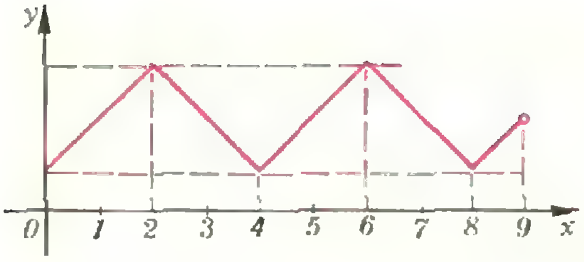


Рис. 12.

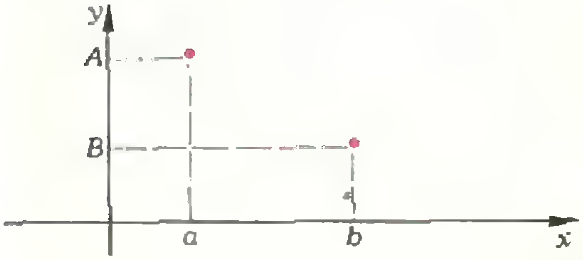


Рис. 13.

Замечание. Функции из задачи 6 относятся к очень важному, особенно в физических приложениях, классу *почти-периодических* функций. Такие функции $f$ удовлетворяют следующему условию: для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ существует «почти-период» — число $T \neq 0$ такое, что при произвольном $x$ значение $f(x+T)$ равно $f(x)$ с точностью до $\varepsilon$, то есть $|f(x+T) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Грубо говоря, это объясняется тем, что иррациональные числа с любой точностью можно приблизить рациональными; заметим, что чем меньше $\varepsilon$, тем больше будет «почти-период» $T$.

В физике величины измеряются приближенно, поэтому об их иррациональности говорить не приходится. С почти-периодическими процессами в природе сталкиваются тогда, когда рассматривают периодические явления, отношение периодов которых не целое, а дробь с большим знаменателем.

Пример. При составлении календаря одновременно нужно учесть обращение Земли вокруг Солнца (с периодом в 1 астрономический год) и вращение Земли около собственной оси (с периодом 1 сутки). Из соображений удобства календарь должен быть периодическим, причем желательно, чтобы его период был общим периодом того и другого вращения. Отношение астрономического года к суткам приближенно равно $m = 365{,}242199$. Если считать это значение точным, то общий период рассматриваемых процессов чересчур велик — 1 миллион лет! Поэтому еще Юлий Цезарь ввел «почти-период» в 4 года, что соответствует значению $m \approx 365{,}25 = 365\,{}^1/_4$, а римский папа Григорий XIII в 1582 году узаконил «почти-период» календаря в 400 лет, принятый и в настоящее время. Он соответствует приближению $m \approx 365{,}2425 = 365\,{}^{97}/_{400}$. Подробнее обо всем этом написано в статье Н. М. Бескина «Цепные дроби», «Квант», 1970, № 1.

Вернемся к периодическим функциям.

Задача 7. Может ли:

а) сумма двух всюду определенных непериодических функций быть периодической функцией?

б) сумма двух всюду определенных непериодической и периодической функций быть периодической функцией?

[К пункту а): придумайте две всюду определенные непериодические функции такие, что их сумма является периодической с наименьшим положительным периодом $2\pi$.]

Задача 8. Функция $f$ задана на полуинтервале $[0, 9[$ своим графиком, как показано на рисунке 12. Доопределите функцию $f$ при всех остальных $x \in \mathbf{R}$ так, чтобы получилась периодическая функция с наименьшим положительным периодом: а) 4, б) 9, в) 10, г) $4\pi$.

Задача 9. Функция $f$ задана в двух точках: $f(a) = A$, $f(b) = B$, причем $A \neq B$ (рис. 13). Доопределите функцию до периодической (не обязательно всюду определенной!). Какие наименьшие положительные периоды могут быть у такой (доопределенной) функции?

Задача 10. Существует ли периодическая функция, у которой:

а) все иррациональные числа являются периодами, а все рациональные не являются?

б) напротив, все рациональные числа являются периодами, а все иррациональные — нет?

*Н. Гольдфарб*

# Элементы статики

В статике изучается равновесие твердых тел, находящихся под действием сил. Под равновесием тела следует понимать состояние, при котором тело не получает ускорений, то есть движется равномерно и прямолинейно или, в частности, находится в состоянии покоя в инерциальной системе отсчета. (В практических задачах систему, связанную с Землей, считают инерциальной.)

Какие силы действуют на тело, находящееся в равновесии? Прежде всего надо назвать силу тяжести. Сила тяжести, действующая на данное твердое тело, представляет собой равнодействующую сил тяжести, действующих на его частицы. Линия действия силы тяжести проходит через центр масс тела — центр тяжести.

Далее, на тело действуют реакции связей — силы, препятствующие перемещению тела в каком-нибудь направлении. Направление действия реакции связей противоположно тому направлению, в котором связь препятствует перемещению данного тела. Реакции связей — это силы упругости и силы трения. Особенность их в том, что абсолютное значение их, а иногда и направление, наперед не известны и зависят от формы тел, состояния поверхностей, а также от других сил, действующих на тело.

Правильное определение направления сил реакции играет при решении задач статики очень важную роль.

Поэтому рассмотрим, как направлены реакции некоторых видов связей.

1. Тело опирается на гладкую поверхность или опору. Трение отсутствует. Когда соприкосновение тела с опорой происходит в одной точке, сила реакции поверхности приложена в точке касания тел и направлена либо по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис. 1, *а*), либо по нормали к поверхности тела или к поверхности опоры (рис. 1, *б*). Такую реакцию называют нормальной.

2. Связь осуществляется гибкой нитью. Сила реакции нити всегда направлена вдоль нити от той точки, в которой нить прикрепляется к телу (рис. 1, *в*).

3. Шарнирная связь — цилиндрический шарнир, в котором ось шарнира перпендикулярна плоскости действия сил (рис. 1, *г*). Реакция такого шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной к его оси (в плоскости рисунка).

Рассмотренные виды связи являются идеальными, или связями без трения.

4. При наличии трения между телом и поверхностью связь, кроме нормальной реакции, дает еще дополнительную реакцию — силу трения $F_{\text{тр}}$. Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную возможному перемещению тела по поверхности. Если тело, на которое действуют силы, покоится, то сила трения покоя всякий раз имеет то значение, которое необходимо для предотвращения скольжения. Максимальная величина силы трения покоя определяется, как известно, из условия

$$F_{\text{тр. max}} = \mu N,$$

где $\mu$ — коэффициент трения, а $N$ — сила нормальной реакции поверхности. Таким образом, в зависимости от других сил, действующих на тело, сила трения покоя может принимать все значения от нуля до $F_{\text{тр. max}}$. При этом полная сила $\mathbf{R} = \mathbf{F}_{\text{тр}} + \mathbf{N}$ реакции поверхности (рис. 1, *д*) будет меняться от значения $N$ до некоторого максимального значения $R_{\text{max}}$, определяемого условием $\mathbf{R}_{\text{max}} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{тр max}}$. Угол $\varphi$, который составляет сила $\mathbf{R}$ с нормалью к поверхности, будет изменяться от нуля до некоторого предельного значения $\varphi_0$, задаваемого условием

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{F_{\text{тр. max}}}{N} = \mu$$

(этот угол называют углом трения).

В статике твердого тела рассматриваются две основные задачи:

1. Определение условий, при которых тело под действием сил может находиться в равновесии.

2. Нахождение действующих на тело сил (в большинстве случаев — реакций связей), когда тело заведомо находится в равновесии.

Мы ограничимся рассмотрением только таких систем, в которых все действующие на тело силы лежат в одной плоскости, — так называемых плоских систем сил.

Любое движение твердого тела можно представить как наложение двух видов движения — поступательного и вращательного (вокруг некоторой оси). Тело будет оставаться в состоянии покоя, если не будет причин, приводящих к возникновению поступательного движения или вращения.

При поступательном движении тела можно рассматривать движение одной точки тела — его центра масс.

Если сумма сил, приложенных к телу, равна нулю, то центр масс будет сохранять свою скорость неизменной и, в частности, будет покоиться, если он был в покое. Но

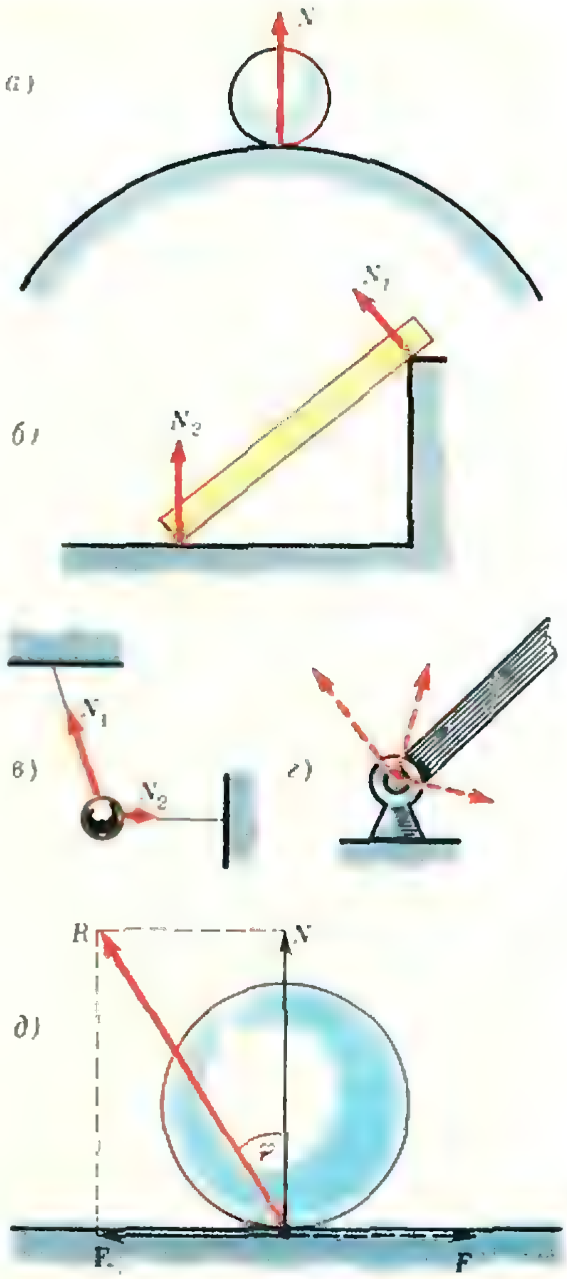


Рис. 1.

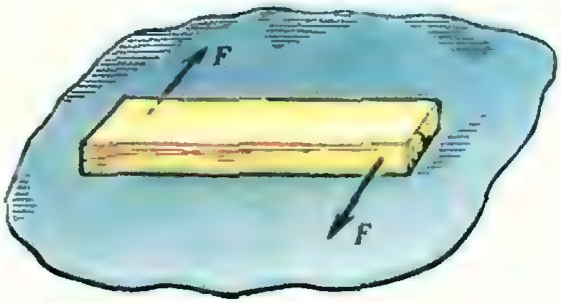


Рис. 2.

это еще не означает, что тело будет находиться в равновесии.

Рассмотрим следующую задачу.

### Задача 1

К бруску, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, в двух его точках приложены две силы, равные по абсолютной величине и направленные в противоположные стороны (рис. 2). (Такая система сил называется парой сил.) Относительно какой точки будет поворачиваться брусок?

Решение. Опыт подсказывает, что брусок будет поворачиваться. Но так как сумма сил, действующих на тело, равна нулю, то центр масс его будет оставаться в покое, а пара сил вызовет вращение бруска вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной к плоскости, в которой лежат силы.

В общем случае, когда сумма сил, приложенных к телу, равна нулю ($\Sigma\ \mathbf{F}_i = 0$), а линии, вдоль которых действуют силы, не пересекаются в одной точке, центр масс сохраняет состояние движения неизменным, в частности, покоится, но само тело будет поворачиваться вокруг оси, проходящей через центр масс.

Для характеристики вращательного действия силы в статике вводится новое понятие — момент силы.

Рассмотрим твердое тело, способное вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку *O* (рис. 3). Допустим, что к телу приложены силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$, линии действия которых лежат в вертикальной плоскости. Опыт показывает, что вращательное действие каждой из этих сил зависит не только от величины силы, но и от расстояния от оси до линии действия силы. Это расстояние называют плечом силы.

Моментом силы относительно оси называется алгебраическая величина, равная произведению абсолютной величины силы на расстояние от оси вращения до линии действия силы.

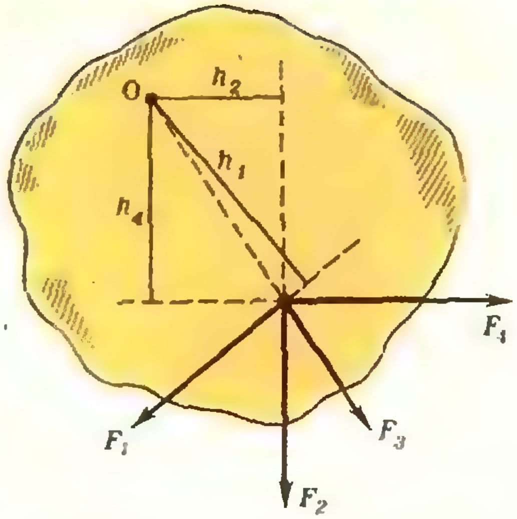


Рис. 3.

В случае плоской системы сил можно вместо момента силы относительно оси, перпендикулярной к плоскости действия сил, говорить о моменте силы относительно точки, имея в виду точку пересечения этой оси с плоскостью.

Внешние силы, например $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_4$ на рисунке 3, могут вращать тело вокруг оси *O* в противоположные стороны, поэтому моменту силы приписывают знак «+» или «—». Условно принято моменты сил, стремящиеся повернуть тело против часовой стрелки, брать со знаком «+», а по часовой — со знаком «—» (в соответствии с правилом отсчета углов).

Момент пары сил равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил на расстояние между линиями действия сил (плечо).

**Докажите, что момент пары сил равен сумме моментов сил пары относительно любой точки плоскости.**

Пару сил, не изменяя ее вращательного действия на данное твердое тело, можно переносить и произвольно поворачивать в плоскости действия сил.

Введя момент силы, можно сформулировать общие условия равновесия для плоской системы сил.

Для равновесия тела необходимо и достаточно, чтобы были одновременно равны нулю векторная сумма приложенных к телу сил и алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки $O$ плоскости:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0, \qquad (*)$$

$$\sum_i M_O(F_i) = 0. \qquad (**)$$

При выполнении первого условия ускорение центра масс тела равно нулю; при выполнении второго условия угловая скорость вращения всех точек тела остается неизменной и, в частности, если тело покоилось, угловая скорость его точек остается равной нулю *).

Векторное равенство (*) может быть представлено в виде двух скалярных:

$$\sum_i F_{ix} = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = 0,$$

где $F_{ix}$ и $F_{iy}$ соответственно проекции силы $F_i$ на оси координат $X$ и $Y$, лежащие в плоскости действия сил.

При решении задач для получения уравнений в наиболее простой форме рекомендуется одну из координатных осей проводить перпендикулярно возможно большему числу неизвестных сил, а моменты сил находить относительно точки, в которой пересекается возможно большее число неизвестных сил.

Если действующие на тело силы, расположенные в плоскости, взаимно параллельны, то число уравнений равновесия сократится до двух. Действительно, если направить одну из осей координат, например ось $X$, перпендикулярно линиям действия сил, то проекция каждой из сил на эту ось будет равна нулю, и тело будет находиться в равновесии, если

$$\sum_i F_{iy} = 0, \qquad \sum_i M_O(F_i) = 0$$

(ось $Y$ параллельна силам). Можно еще и по-другому записать условие равновесия тела, на которое действуют параллельные силы:

$$\sum_i M_A(F_i) = 0, \ \sum_i M_B(F_i) = 0,$$

при этом точки $A$ и $B$ не должны лежать на прямой, параллельной силам.

Для тела, способного вращаться вокруг закрепленной оси, единственным условием равновесия будет равенство нулю алгебраической суммы моментов приложенных к нему сил относительно этой оси. Это правило называется правилом моментов.

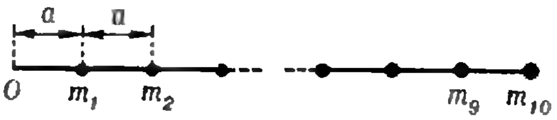


Рис. 4.

**Задача 2**

На невесомом стержне, разделенном на 10 равных частей, нанизаны десять шариков, массы которых равны последовательно 1, 2, 3, ... , 9, 10 *г* так, что их центры совпадают с точками делений (рис. 4). Определить, в каком месте должен опираться стержень на опору, чтобы находиться в равновесии.

Решение. Для выполнения условия (*) равновесия стержня необходимо, чтобы в точке опоры на стержень действовала сила реакции опоры, направленная вверх и равная по абсолютной величине

$$R = \Sigma F_i = \Sigma m_i g = 55 \ g \ (дин).$$

Чтобы выполнялось условие (**) равновесия, точка опоры должна находиться на таком расстоянии $x$ от точки $O$ стержня, чтобы $\Sigma(m_i g \cdot x_i) - Rx = 0$, где $x_i$ — расстояние от точки $O$ до шарика с массой $m_i$:

$$a \cdot m_1 g + 2\, a \cdot m_2 g + \dots + 10a \cdot m_{10} g = Rx.$$

---

*) Момент силы в случае вращательного движения является аналогом силы в случае поступательного движения. При поступательном движении ускорение центра масс пропорционально приложенной силе, при вращательном движении изменение угловой скорости в единицу времени — угловое ускорение — пропорционально моменту силы.

Из этих равенств находим

$$x = \frac{385\,ag}{55\,g} = 7\,a,$$

то есть точка опоры совпадает с центром шарика массы $m_7$.

Рассмотренная задача по существу есть задача на определение центра тяжести для случая линейного расположения точечных масс.

**Докажите, что положение центра тяжести системы, состоящей из n материальных точек, массы которых $m_1, m_2, \ldots, m_n$, лежащих на одной прямой и имеющих координаты соответственно $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, определяется координатой**

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M},$$

**где $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ — масса всей системы.**

Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с радиусом Земли, силы тяжести, действующие на отдельные частицы тела, можно считать параллельными друг другу и сохраняющими для каждой из частиц постоянную величину при любых поворотах тела. Равнодействующая всех элементарных сил тяжести есть сила тяжести, действующая на все тело. Абсолютная величина ее равна

$$Mg = \Sigma m_i g,$$

и приложена эта сила к центру масс, так как любое тело, падающее свободно (под действием только силы тяжести), движется поступательно. Поэтому центр масс называют центром тяжести тела.

Итак, центром тяжести твердого тела называется точка, в которой приложена равнодействующая сил тяжести, действующих на частицы данного тела.

Нужно отметить, что центр тяжести может лежать и вне пределов данного тела (например, для кольца, согнутого тонкого стержня и т. п.).

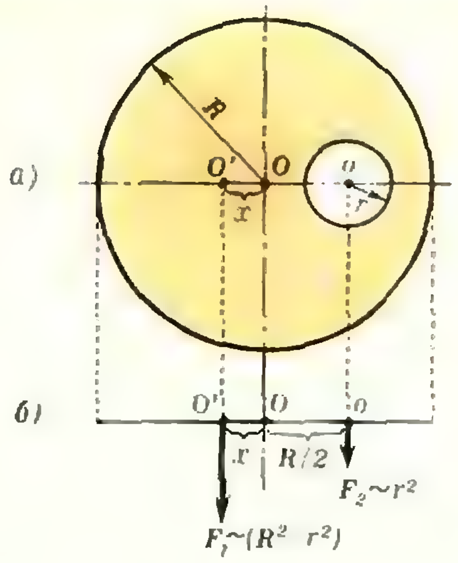


Рис. 5.

Найти центр тяжести однородного тела часто помогают соображения симметрии. Если тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести лежит соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии. Так, центр тяжести однородного круглого кольца, круглого диска, тонкого стержня, прямоугольной пластины, шара находится в их центре симметрии.

### Задача 3

Найти центр тяжести круглой однородной пластины радиуса $R$ с круглым вырезом радиуса $r$, центр которого находится на середине радиуса $R$ (рис. 5).

Решение. В силу симметрии центр тяжести пластины лежит на линии, проходящей через центры большого ($O$) и маленького ($o$) кругов. Пусть он находится в точке $O'$ на расстоянии $x$ от центра большого круга (см. рис. 5, *а*). «Дополним» фигуру до сплошного однородного круга. Центр тяжести при этом переместится в точку $O$. Следовательно, сумма моментов сил тяжести первоначальной фигуры и сплошного круга радиуса $r$ относительно точки $O$ равна нулю (см. рис. 5, *б*):

$$\rho g \pi (R^2 - r^2)\, x = \rho g \pi r^2 \frac{R}{2}$$

($\rho$ — плотность материала пластины).

Отсюда

$$x = \frac{r^2 R}{2(R^2 - r^2)}$$

— центр тяжести пластины — находится слева от точки $O$ на расстоянии $\frac{r^2 R}{2(R^2 - r^2)}$ от нее.

Приступая к разбору следующих задач, укажем некоторые дополнительные легко доказуемые положения, которыми мы будем пользоваться.

Силу, приложенную к твердому телу, можно переносить по линии ее действия, при этом не изменяется ее момент относительно точки или оси.

Если на тело действует система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, то мы можем перенести силы вдоль линий их действия в точку пересечения и сложить их, пользуясь правилом параллелограмма. Если равнодействующая сила будет равна нулю и начальная скорость тела также равна нулю, то тело будет находиться в покое.

Если на тело действуют три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости, и под действием этих сил тело находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке (это положение носит название теоремы о трех силах).

## Задача 4

Груз массы $m$ подвешен с помощью двух нитей так, что одна нить образует с вертикалью угол $\alpha$, а другая проходит горизонтально (рис. 6). Найти силы натяжения нитей.

Решение. На тело действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и силы $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ натяжения нитей. Спроектируем эти силы на оси координат $X$ и $Y$ и запишем условия равновесия (см. рис. 6):

по оси $X$ —

$$T_2 - T_1 \sin\alpha = 0$$

по оси $Y$ —

$$T_1 \cos\alpha - mg = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$T_1 = \frac{mg}{\cos\alpha}, \quad T_2 = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

## Задача 5

Груз массы $m$ перемещают с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с помощью троса. Коэффициент трения о плоскость равен $\mu$.

а) Найти силу $T$ натяжения троса, если он направлен под углом $\alpha$ к горизонту (рис. 7).

б) При каком угле $\alpha$ сила натяжения троса будет наименьшей? Чему она будет равна?

Груз считать материальной точкой.

Решение. а) На груз действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$, сила $\mathbf{N}$ нормальной реакции плоскости, сила натяжения троса $\mathbf{T}$, максимальная сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр max}}$ (так как имеет место скольжение). Запишем условия равновесия груза (см. рис. 7):

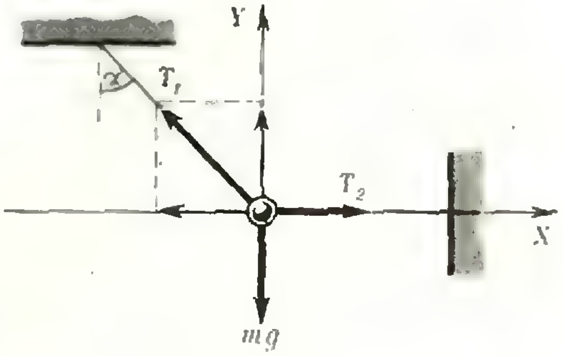


Рис. 6.

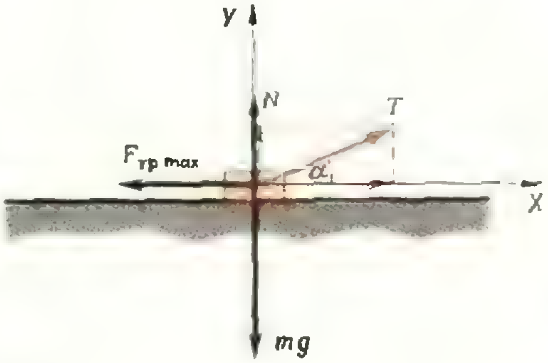


Рис. 7.

по оси $X$ —

$$T\cos\alpha - F_{\text{тр}\cdot\max} = 0, \qquad (1)$$

по оси $Y$ —

$$T\sin\alpha + N - mg = 0. \qquad (2)$$

Из (2) находим $N = mg - T\sin\alpha$. Тогда $F_{\text{тр}\cdot\max} = \mu N = \mu(mg - T\sin\alpha)$. Подставив это значение в (1), найдем

$$T = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Примечание. При решении этой задачи абитуриенты допускают ошибку, считая $F_{\text{тр}} = \mu mg$.

б) Из (3) следует, что сила $T$ будет минимальной, когда величина знаменателя $(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)$ максимальна. Обозначив $\mu$ через $\operatorname{tg}\varphi$, можно знаменатель преобразовать так:

$$\cos\alpha + \operatorname{tg}\varphi\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi}(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi) =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\cos(\alpha - \varphi).$$

Это выражение максимально при $\alpha - \varphi = 0$, откуда $\alpha = \varphi = \operatorname{arctg}\mu$.

Учитывая, что $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ и $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, подставив найденное значение $\operatorname{tg}\alpha$ в (3), получим

$$T_{\min} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

### Задача 6

Лестница опирается на вертикальную стену и горизонтальный пол (рис. 8). Центр тяжести лестницы находится на середине ее длины. Коэффициенты трения в точках $A$ и $B$ соответственно равны $\mu_1 = 0{,}5$, $\mu_2 = 0{,}4$. Определить наименьший угол наклона лестницы к горизонту, при котором она может оставаться в равновесии.

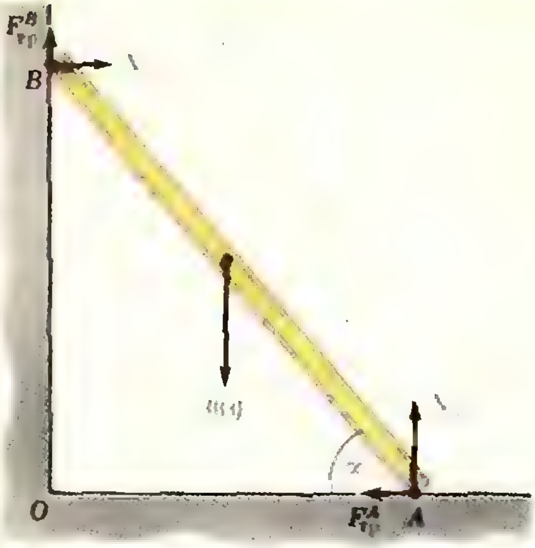


Рис. 8.

Решение. Силы, действующие на лестницу, изображены на рисунке 8. Это — сила тяжести $mg$ и силы реакции со стороны пола и стены, равные соответственно

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{N}_A + \mathbf{F}^A_{\text{тр}}, \quad \mathbf{R}_B = \mathbf{N}_B + \mathbf{F}^B_{\text{тр}}.$$

Под действием этих сил лестница находится в состоянии равновесия.

Обозначим длину лестницы через $2l$. Приравнивая нулю суммы проекций всех сил на оси $X$ и $Y$ и сумму моментов сил относительно точки $A$, получим следующие три уравнения:

$$N_B - F^A_{\text{тр}} = 0, \qquad (1)$$

$$N_A + F^B_{\text{тр}} - mg = 0, \qquad (2)$$

$$mgl\cos\alpha - N_B\cdot 2l\sin\alpha - F^B_{\text{тр}}\cdot 2l\cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

Так как угол $\alpha$ — наименьший угол наклона лестницы, при котором лестница находится на границе между покоем и скольжением, то силы трения будут максимальными, и это дает еще два уравнения:

$$F^A_{\text{тр}} = \mu_1 N_A, \qquad (4)$$

$$F^B_{\text{тр}} = \mu_2 N_B. \qquad (5)$$

Решая уравнения (1)—(5) совместно, получаем для $\alpha_{\min}$:

$$\alpha_{\min} = \operatorname{arctg}\frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1} = 38{,}6^\circ.$$

Эту же задачу можно решить другим способом — графическим. Снача-

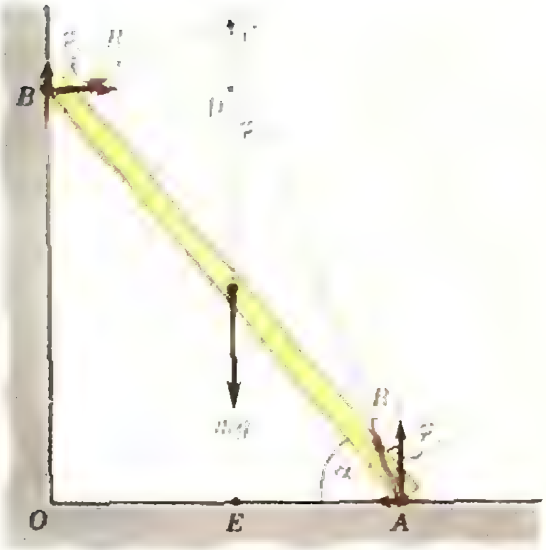


Рис. 9.

ла построим линии действия полных сил реакций $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_B$ в точках $A$ и $B$ (рис. 9). Для этого отложим от нормали к полу в точке $A$ угол

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{F_{\text{тр}}^A}{N_A} = \operatorname{arctg}\mu_1 \text{ (угол трения)}$$

в направлении против часовой стрелки (направление возможного вращения под действием силы $R_A$). Такой угол составляет с нормалью к полу в точке $A$ линия действия силы $R_A$. Аналогичным образом получим линию действия силы $R_B$.

Так как лестница находится в равновесии под действием трех сил: $m\mathbf{g}$, $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_B$, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке (точка $C$). Точку пересечения линий действия сил $m\mathbf{g}$ и $\mathbf{N}_B$ обозначим $D$. Рассмотрим треугольник $BDC$. Из этого треугольника имеем

$$\frac{CD}{BD} = \operatorname{tg}\varphi_2 = \mu_2. \qquad (6)$$

Но $BD = l\cos\alpha$, $CD = CE - DE = CE - BO$. Из треугольника $CEA$ находим

$$CE = EA\operatorname{ctg}\varphi_1 = l\cos\alpha\operatorname{ctg}\varphi_1 = \frac{1}{\mu_1}\,l\cos\alpha.$$

Из треугольника $BOA$

$$BO = 2l\sin\alpha.$$

Следовательно, $CD = \frac{1}{\mu_1}l\cos\alpha - 2l\sin\alpha$. Подставив значения $CD$ и $BD$ в (6), получим

$$\frac{\frac{1}{\mu_1}l\cos\alpha - 2l\sin\alpha}{l\cos\alpha} = \mu_2,$$

или

$$\frac{1}{\mu_1} - 2\operatorname{tg}\alpha = \mu_2.$$

Отсюда

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1}.$$

В заключение предлагаем вам самостоятельно решить несколько задач.

### Упражнения

1. Докажите, что центр тяжести однородного треугольника лежит в точке пересечения его медиан. (Примечание. Доказательством геометрической теоремы о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, может являться утверждение, что для всякого тела центр тяжести — это однозначно определенная точка.)

2. Однородная цилиндрическая труба массы $m$ и радиуса $r$ подвешена горизонтально на тросе, охватывающем трубу «поперек» (рис. 10). Длина хорды $AB$, соединяющей крайние точки дуги, по которой трос соприкасается с трубой, равна $b$. Определить силу $T$ натяжения троса.

3. Однородный цилиндр $A$ массы $m$ и радиуса $r$ опирается на гладкую поверхность цилиндра $B$ радиуса $R$ и удерживается в равновесии при помощи нити $CD$ длины $l$, закрепленной в верхней точке цилиндра $B$ (рис. 11). Определить силу натяжения нити и силу реакции цилиндрической поверхности.

4. Определить наименьшую величину силы, которую надо приложить в горизонтальном направлении к верхней грани кубического ящика массы $m$ для кантования его по горизонтальной поверхности. Чему равна сила давления на упор $A$ (рис. 12) в начале кантования?

5. На наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha$, находится тело массы $m$. Определить наименьшую силу $F_{\min}$, которую надо приложить к телу, чтобы сдвинуть его вверх, и угол $\beta$, который должна составлять эта сила с плоскостью, если коэффициент трения равен $\mu$. Какова будет при этом сила давления $F_{\text{давл}}$ тела на плоскость?

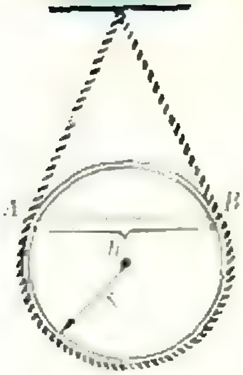


Рис. 10.

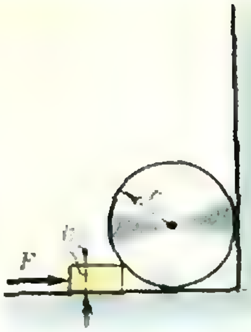


Рис. 13.

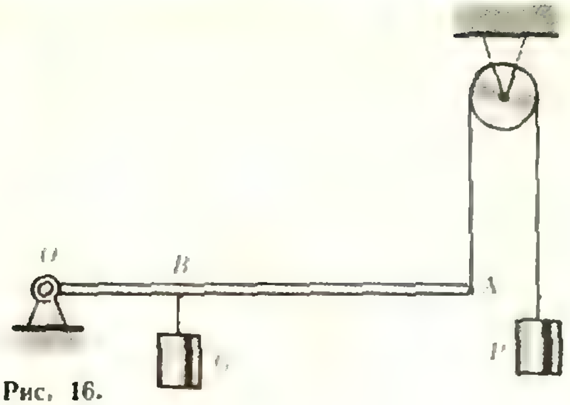


Рис. 16.

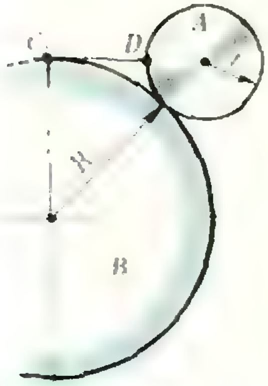


Рис. 11.

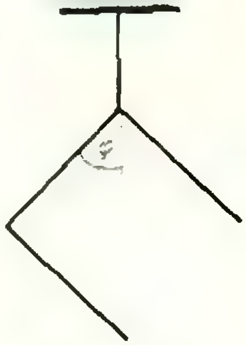


Рис. 14.

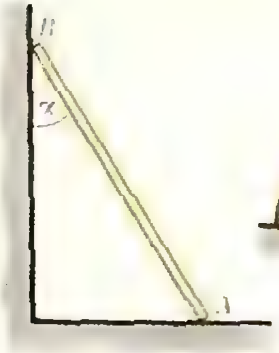


Рис. 17.

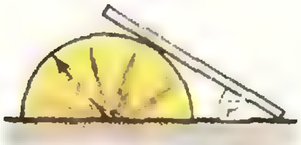


Рис. 19.

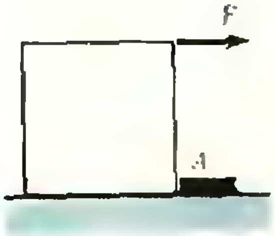


Рис. 12.

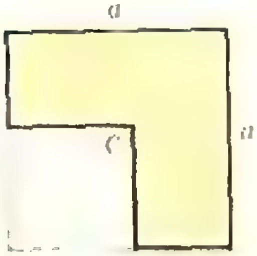


Рис. 15.

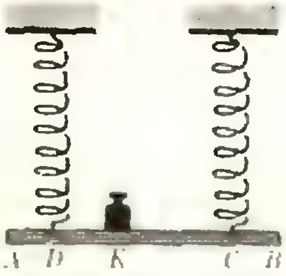


Рис. 18.

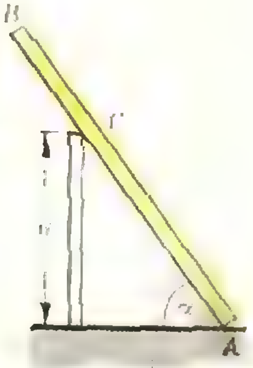


Рис. 20.

6. Гладкий шар радиуса $r$ и массы $m$ покоится на горизонтальном полу, касаясь вертикальной стены. С какой силой $F$ следует прижать к нему брусок высоты $h$ (рис. 13), чтобы шар приподнялся над полом?

7. Проволочную квадратную рамку, от которой отрезана одна сторона, подвесили так, как показано на рисунке 14. Определить угол $\varphi$.

8. От однородной квадратной пластины со стороной $a$ отрезают квадратный кусок так, как показано на рисунке 15. Какой должна быть длина $a_1$ стороны отрезаемого квадрата, чтобы центр тяжести оставшейся пластины находился в точке $C$?

9. Однородный стержень $OA$ закреплен шарнирно в точке $O$. В точке $B$ на расстоянии $b$ от точки $O$ к стержню подвешен груз $G$ массы $m$. Стержень удерживается в равновесии в горизонтальном положении с помощью груза $P$, прикрепленного к нему с помощью нити, перекинутой через блок (рис. 16). При какой длине стержня масса груза $P$ может быть минимальна? Линейная плотность стержня равна $\gamma$. Блок считать идеальным.

10. Однородная балка длины $l$ и массы $m$ опирается на гладкую вертикальную стену и шероховатый горизонтальный пол. Коэффициент трения о пол равен $\mu$. Определить, при каком угле $\alpha$ с вертикалью балка находится в равновесии. Найти давление на опоры в точках $A$ и $B$ при максимальном угле $\alpha$ (рис. 17).

11. Балка $AB$ длины $l=2$ *м* и массы $m=40$ *кг* подвешена на двух пружинах. Пружины в свободном состоянии имеют одинаковые длины, коэффициент упругости левой пружины в два раза больше, чем правой. Определить массу груза, который надо положить на балку в точке $K$ (рис. 18), чтобы балка заняла горизонтальное положение, если $AD = BC = 30$ *см* и $DK = 20$ *см*.

12. Однородный стержень длины $2l$ опирается на горизонтальную плоскость и неподвижный полуцилиндр радиуса $r$ (рис. 19). Коэффициент трения стержня о цилиндр и о плоскость равен $\mu$. Каково наибольшее значение угла $\varphi$, при котором стержень находится в равновесии?

13. Труба $AB$ длины $l$ опирается концом $A$ на горизонтальную плоскость, а в точке $C$ — на гладкую вертикальную опору высотой $a = l/2$ (рис. 20). Найти наименьшую величину коэффициента трения между трубой и плоскостью, при котором возможно равновесие, если угол наклона трубы к горизонту $\alpha=60°$.

**Физики шутят**

# Как измерить высоту?

**Ниже описывается несколько (восемь) способов решения следующей важной как в теоретическом, так и прикладном отношении задачи: «Как определить высоту многоэтажного здания при помощи достаточно длинной веревки и ртутного барометра с высотой корпуса один метр».**

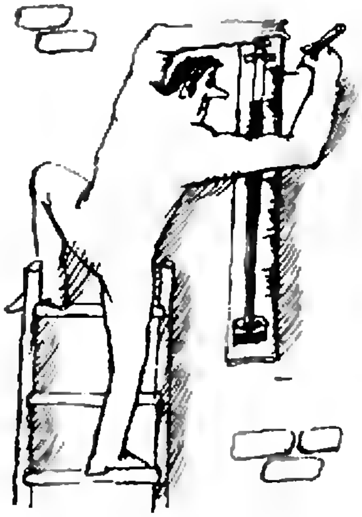
**Описанные методы могут быть применены при решении широкого класса аналогичных задач (измерение высоты Эйфелевой башни, телевышки в Останкине, Джомолунгмы и т. п.).**

Первый способ (тривиальный). Подняться с барометром на крышу здания, привязать к барометру веревку, опустить барометр до мостовой, а затем поднять его. Измерить длину понадобившейся для этого веревки.

Второй способ (прямой). Держа барометр вертикально, подниматься по лестнице и отмечать длину прибора на стене. Подсчитав количество отметок, получить высоту здания.

*Примечание.* Если указанным способом измерить высоту одного этажа и полученную величину умножить на число этажей, то будет допущена слишком большая погрешность.

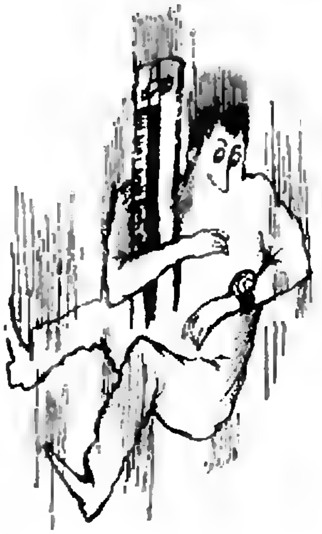
Третий способ (аэростатический). Измерить атмосферное давление у подножия и на уровне крыши здания. По изменению показаний барометра определить высоту здания.



Четвертый способ (геометрический). Вынести барометр в солнечный день на улицу. Установить его вертикально. Измерить длину его тени и длину тени здания. Из подобия треугольников вычислить искомую высоту здания.

Пятый способ (социологический). Опросить всех жильцов дома и усреднить названные ими значения высоты. В качестве приза предложить барометр.

Шестой способ (кинематический). Зная число ударов своего пульса в минуту, измерить число его ударов за время падения вертикально ориентированного барометра с крыши здания. По формуле $h = gt^2/2$ вычислить высоту здания.



Седьмой способ (официально - бюрократический). Обратиться к инженеру ЖЭКа, в ведении которого находится данное здание. По документам узнать высоту здания. (Барометр отсутствует, так как был разбит в предыдущем «кинематическом» опыте.)

Восьмой способ (педагогический)... Может быть, наши читатели предложат свой способ и пришлют его описание в редакцию журнала?

*М. Тульчинский*

*С. Белый*

# Прямоугольный треугольник

**На вступительных экзаменах по математике довольно часто предлагаются задачи, связанные с прямоугольными треугольниками. Что же нужно знать о прямоугольном треугольнике, кроме теоремы Пифагора, чтобы успешно решать такие задачи? Об этом и пойдет речь в настоящей статье.**

Утверждение 1. *Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы.*

Отсюда вытекает следующее соотношение:

$$m = R = \frac{c}{2},$$

где $m$ — длина медианы, проведенной к гипотенузе, $R$ — радиус описанной окружности, $c$ — гипотенуза (см. рис. 1 — он поможет вам доказать это утверждение).

Это соотношение часто используется при решении задач.

Пример 1 (МГУ, химфак, 1974). *В прямоугольном треугольнике $ABC$ с катетами 3 и 4 (см) вершина $C$ прямого угла соединена с серединой $D$ гипотенузы $AB$. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники $ACD$ и $BCD$.*

В силу утверждения 1 точка $D$ — центр описанной окружности, поэтому $|DA| = |DC| = |DB|$. Следовательно, треугольники $ACD$ и $BCD$ — равнобедренные (см. рис. 2). Центры окружностей, вписанных в треугольники $ACD$ и $BCD$, лежат на биссектрисах углов $ADC$ и $BDC$. Но биссектрисы в равнобедренных треугольниках являются и высотами, поэтому $ECFD$ — прямоугольник, а $O_1DO_2$ — прямоугольный треугольник. Следовательно, чтобы определить $|O_1O_2|$, достаточно найти $|O_1D|$ и $|O_2D|$. Сделаем это с помощью свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника: если $|AC| = 3$, $|BC| = 4$, то $|AB| = 5$ (по теореме Пифагора), $|CE| = 1{,}5$, $|CD| = 2{,}5$, $|DE| = 2$, $|EO_1| : |O_1D| = |CE| : |CD| = 1{,}5 : 2{,}5$, откуда $|EO_1| = 0{,}75$, $|O_1D| = 5/4$; аналогично $|O_2D| = 5/6$ и, наконец,

$$|O_1O_2| = \sqrt{|O_1D|^2 + |O_2D|^2} = 5\sqrt{13}/12 \text{ (см)}.$$

Пример 2 (ЛГУ, 1970). *Внутри прямоугольного треугольника $ABC$ ($\hat{C} = 90^\circ$) взята точка $O$ так, что треугольники $OAB$, $OBC$ и $OAC$ равновелики. Найти $|OC|$, если известно, что $|OA|^2 + |OB|^2 = a^2$ ($a > 0$).*

По условию задачи треугольники $OAB$, $OBC$ и $OAC$ равновелики. Это сразу же наводит на мысль, что $O$ — точка пересечения медиан треугольника $ABC$, так как обратное утверждение хорошо известно. Этот факт, действительно, нетрудно доказать (от противного) для любого треугольника. Дальнейшие вычисления очевидны (см. рис. 3):

$$|OA| = \frac{2}{3}|AA'| = \frac{2}{3}\sqrt{|AC|^2 + \frac{|BC|^2}{4}},$$

$$|OB| = \frac{2}{3}|BB'| = \frac{2}{3}\sqrt{|BC|^2 + \frac{|AC|^2}{4}},$$

$$|OC| = \frac{2}{3}|CC'| = \frac{2}{3}\cdot\frac{|AB|}{2} = \frac{|AB|}{3},$$

$$|OA|^2 + |OB|^2 = \frac{4}{9}\cdot\frac{5|AB|^2}{4} = 5|OC|^2,$$

$$|OC| = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

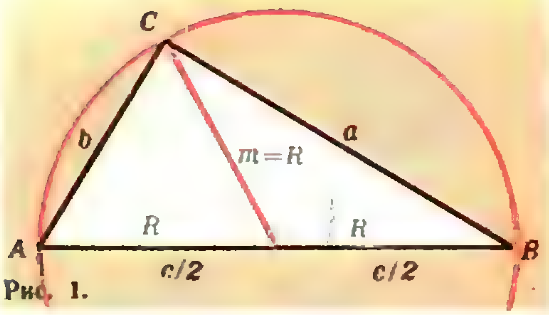


Рис. 1.

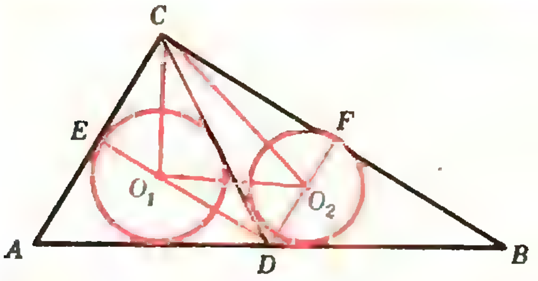


Рис. 2.

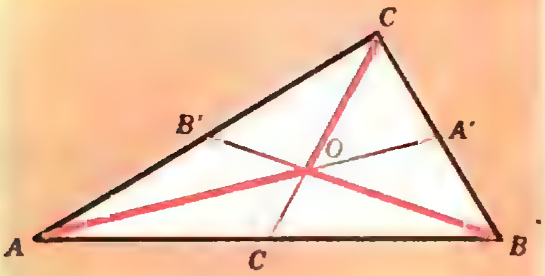


Рис. 3.

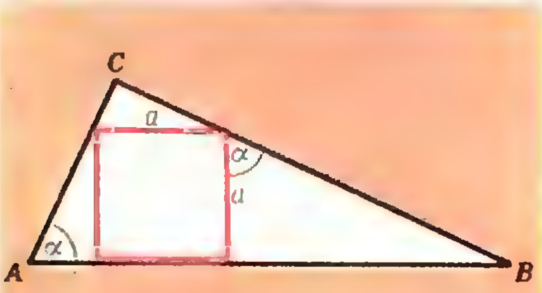


Рис. 4.

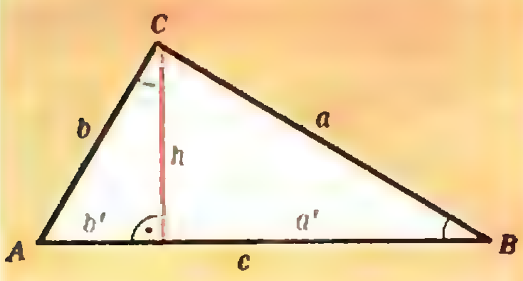


Рис. 5.

Пример 3 (МГУ, химфак, 1973). *В прямоугольный треугольник $ABC$ вписан квадрат так, что две вершины его лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах. Радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, относится к стороне квадрата как $13:6$. Найти углы треугольника $ABC$.*

Пусть $\hat{A} = \alpha$, сторону квадрата обозначим через $a$ (см. рис. 4). Тогда $|AB| = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha + a + a\,\mathrm{tg}\,\alpha$, и

$$\frac{a\,\mathrm{ctg}\,\alpha + a + a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2a} = \frac{13}{6},$$

откуда $\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha + 1 = 13/3$, $3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 10\,\mathrm{tg}\,\alpha + 3 = 0$, $\alpha_1 = \mathrm{arctg}\,3$, $\alpha_2 = \mathrm{arctg}\,{}^1/_3$. Но углы $\alpha_1$ и $\alpha_2$ дополняют друг друга до прямого. Таким образом, углы треугольника $ABC$ равны $\mathrm{arctg}\,3$, $\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{arctg}\,{}^1/_3$.

Утверждение 2. *Высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит его на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному.*

Из этого утверждения вытекают следующие соотношения (обозначения см. на рис. 5):

$$h^2 = a'b', \quad a^2 = a'c, \quad b^2 = b'c,$$

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{a'}{b'}.$$

Добавим к ним еще формулы для вычисления площади прямоугольного треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch = mh = Rh.$$

Пример 4 (МФТИ, 1962). *В прямоугольном треугольнике $ABC$ из вершины прямого угла $C$ проведена высота $CD$. Известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники $ACD$ и $BCD$, равны $r_1$ и $r_2$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$.*

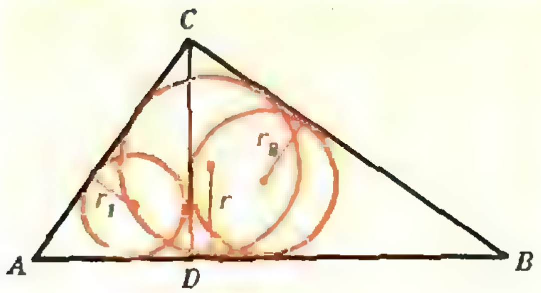


Рис. 6.

Согласно утверждению 2 треугольники $ADC$, $CDB$ и $ACB$ подобны (см. рис. 6). А в подобных треугольниках радиусы вписанных окружностей (как, впрочем, и любые другие соответственные линейные элементы) относятся как соответственные стороны. Поэтому

$$\frac{|AC|}{r_1}=\frac{|BC|}{r_2}=\frac{|AB|}{r}=k.$$

Отсюда, используя теорему Пифагора, получим: $r_1^2k^2+r_2^2k^2=r^2k^2$, $r^2=r_1^2+r_2^2$, $r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$.

Замечание. Полученная формула $r^2=r_1^2+r_2^2$ носит общий характер: *для любых соответственных линейных элементов* $x$, $y$, $z$ *треугольников* $ADC$, $CDB$, $ACB$ (рис. 6) *справедлива зависимость* $x^2+y^2=z^2$.

Для доказательства этого утверждения достаточно вместо $r_1$, $r_2$, $r$ подставить соответственно $x$, $y$, $z$.

Пример 5 (МФТИ, 1969). *В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса* $CD$ *прямого угла* $C$. *Известно, что* $|AD|=m$, $|BD|=n$. *Найти высоту, опущенную из вершины угла* $C$.

Пусть $x$ и $y$ — длины проекций катетов на гипотенузу (рис. 7). Тогда $\frac{x}{y}=\frac{|AC|^2}{|BC|^2}$. Но

$$\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{m}{n}$$

(по свойству биссектрисы). Получается система

$$\begin{cases} x+y=m+n, \\ \frac{x}{y}=\frac{m^2}{n^2}. \end{cases}$$

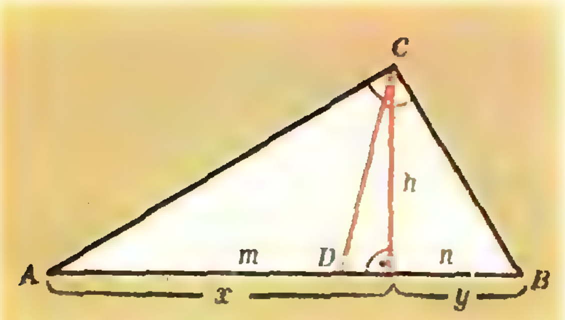


Рис. 7.

Найдя из этой системы $x$ и $y$, по формуле $h=\sqrt{xy}$ определим высоту:

$$h=\frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}.$$

Утверждение 3 (обратное теореме Пифагора). *Если в треугольнике квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник прямоугольный.*

Это утверждение вытекает из теоремы косинусов, в ряде случаев оно бывает очень полезным.

Пример 6. *Пусть* $a$, $b$ — *катеты прямоугольного треугольника* $ABC$, $c$ — *гипотенуза*, $h$ — *длина высоты, опущенной из вершины* $C$. *Доказать, что треугольник со сторонами* $h$, $c+h$, $a+b$ *является прямоугольным.*

Легко проверить, что $(a+b)^2+h^2=(c+h)^2$, так как это равносильно равенству $ab=ch$. Отсюда и следует утверждение задачи.

Хорошо известна формула $r=\frac{S}{p}$ (или $S=pr$), где $S$ — площадь треугольника, $p$ — полупериметр, $r$ — радиус вписанной окружности. Для прямоугольного треугольника радиус вписанной окружности можно вычислять по более простой формуле:

$$r=\frac{a+b-c}{2}.$$

Отметим также формулу

$$2r+2R=a+b$$

(последние две формулы эквивалентны). Попробуйте доказать эти формулы самостоятельно.

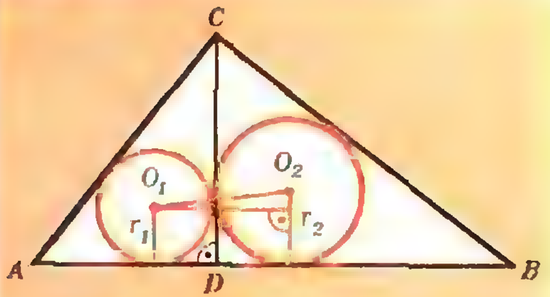


Рис. 8.

Пример 7 (МГУ, химфак, 1974). *В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $|AC|=3$ и $|BC|=4$ проведена высота CD. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD.*

Пусть $r_1$ и $r_2$— радиусы окружностей, вписанных в треугольники $ACD$ и $BCD$ соответственно (рис. 8). Тогда

$$|O_1O_2| = \sqrt{(r_1+r_2)^2+(r_1-r_2)^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{r_1^2+r_2^2}.$$

Но $\sqrt{r_1^2+r_2^2}=r$, где $r$— радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$ (см. пример 4), поэтому

$$|O_1O_2| = \sqrt{2}\cdot r = \sqrt{2}\cdot\frac{|BC|+|AC|-|AB|}{2} = \sqrt{2}.$$

И, наконец, приведем еще одно утверждение, которое также бывает полезным для решения задач.

Утверждение 4. *В прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из вершины того же угла.*

Доказательство этого утверждения ясно из рисунка 9.

Пример 8 (МГУ, ВМК, 1973). *В прямоугольном треугольнике ABC длина высоты, опущенной на гипотенузу, равна a, биссектрисы прямого угла — b. Найти площадь треугольника ABC.*

Проведем медиану $CM$ (см. рис. 9) и положим $\widehat{DCL}=\alpha$; тогда, согласно

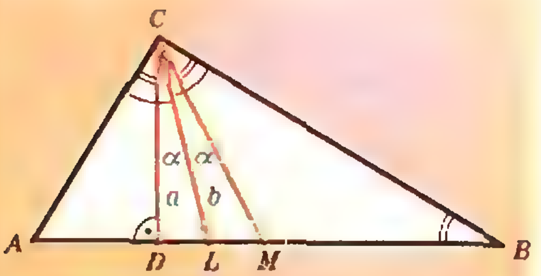


Рис. 9.

утверждению 4, и $\widehat{LCM}=\alpha$. Далее,

$$\cos\alpha=\frac{a}{b},\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 = \frac{2a^2-b^2}{b^2},\quad |CM| = \frac{a}{\cos 2\alpha} = \frac{ab^2}{2a^2-b^2}.$$

Теперь можно найти площадь треугольника $ABC$:

$$S=|CD|\cdot|AM|=|CD|\cdot|CM|=\frac{a^2b^2}{2a^2-b^2}.$$

Вы, наверное, уже обратили внимание, что все рассмотренные выше задачи решались алгебраическим методом. Это не удивительно, так как приведенные выше формулы представляют собой мощный арсенал для составления всевозможных уравнений. Однако не следует думать, что все задачи на прямоугольные треугольники решаются алгебраически — иногда полезно предварительно сделать некоторые дополнительные построения.

Пример 9 (МФТИ, 1971). *Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояния от концов гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C, соответственно равны m и n. Найти катеты |AC| и |BC|.*

Проведем высоту $CD$ (см. рис. 10) и заметим, что $\widehat{ACD}=\widehat{ABC}=\widehat{ACE}$ (последние два угла измеряются половиной одной и той же дуги $AC$). Поэтому треугольники $AEC$ и $ADC$ конгруэнтны (по гипотенузе и остро-

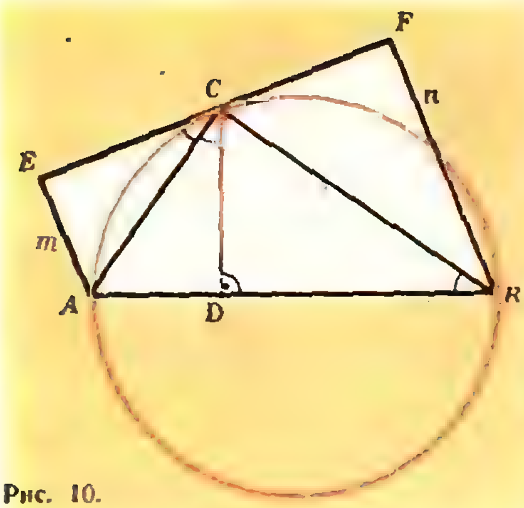


Рис. 10.

му углу). Следовательно, $|AD| = |AE| = m$. Аналогично можно доказать, что $|BD| = |BF| = n$. Теперь

$$|AC| = \sqrt{|AD|\cdot|AB|} = \sqrt{m^2 + mn},$$

$$|BC| = \sqrt{|BD|\cdot|AB|} = \sqrt{n^2 + mn}.$$

### Упражнения

1 (МФТИ, 1963). Из вершины прямого угла $B$ прямоугольного треугольника $ABC$ опущена высота $BD$. Доказать, что ее длина равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники $ABC$, $ABD$ и $BCD$.

2 (МФТИ, 1963). Сумма катетов прямоугольного треугольника равна $l$, а длина высоты, опущенной из вершины прямого угла, равна $h$. Найти площадь треугольника.

3 (МФТИ, 1971). Периметр прямоугольного треугольника $ABC$ ($\widehat{C} = 90^\circ$) равен 72 *см*, а разность длин медианы $CK$ и высоты $CM$ равна 7 *см*. Найти площадь треугольника $ABC$.

4 (МГУ, химфак, 1973). В прямоугольный треугольник $ABC$ вписан квадрат $CEKM$ так, что точка $K$ лежит на гипотенузе $AB$, а $E$ и $M$ — на катетах. Сторона этого квадрата относится к радиусу круга, вписанного в треугольник $ABC$, как $(2 + \sqrt{2}):2$. Найти углы треугольника.

5 (МГУ, ВМК, 1973). В прямоугольном треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $CL$ прямого угла. Из вершины $A$ ($\widehat{A} > 45^\circ$) на $[CL]$ опущен перпендикуляр $AD$. Найти площадь треугольника $ABC$, если $|AD| = a$, $|CL| = b$.

6 (МГУ, химфак, 1974). В прямоугольном треугольнике $ABC$ с острым углом $30^\circ$ проведена высота $CD$ из вершины прямого угла $C$. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники $ACD$ и $BCD$, если меньший катет треугольника $ABC$ равен 1.

7 (МГУ, ф-т почвоведения, 1974). В прямоугольном треугольнике $ABC$ ($\widehat{C} = 90^\circ$) $|CA| = 4$. На катете $CB$ взята точка $D$ так, что $|CD| = 1$. Окружность радиуса $\sqrt{5}/2$ проходит через точки $C$ и $D$ и касается в точке $C$ окружности, описанной около треугольника $ABC$. Найти площадь треугольника $ABC$.

8 (МГУ, экономический ф-т, 1974). В равнобедренный прямоугольный треугольник $ABC$ ($\widehat{B} = 90^\circ$) вписан прямоугольник $MNKB$ так, что две его стороны $MB$ и $KB$ лежат на катетах, а вершина $N$ — на гипотенузе $AC$. В каком отношении точка $N$ должна делить гипотенузу, чтобы площадь прямоугольника составляла 18% площади треугольника?

9 (НГУ, 1971). В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса $r$. Радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен $R$. Найти длину гипотенузы.

10. В прямоугольном треугольнике $ABC$ из вершины прямого угла $C$ проведена высота $CD$. Периметр треугольника $ADC$ равен $a$, а треугольника $BDC$ — $b$. Найти периметр треугольника $ABC$.

---

## Задачи наших читателей

1. Доказать, что

$$1^{100} + 2^{100} + 3^{100} + \ldots + 999\,999^{100}$$

делится на 100 000.

2. Доказать, что если $a$ — нечетная цифра, то $a^{36} - 1$ делится на 1976.

*М. Штеренберг*
(г. Саратов)

3. Вычислить сумму

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}.$$

*С. Сефибеков*
(с. Кашкент
Дагестанской АССР)

4. Пусть $a$, $b$, $c$ — длины сторон треугольника, $p$ — его полупериметр, $p_a = p - a$, $p_b = p - b$, $p_c = p - c$; $r_a$, $r_b$, $r_c$ — радиусы вневписанных окружностей. Доказать следующие соотношения между элементами этого треугольника:

а) $\dfrac{p_a^2}{r_b r_c} + \dfrac{p_b^2}{r_c r_a} + \dfrac{p_c^2}{r_a r_b} = 1$;

б) $\dfrac{p_a p_b}{r_c^2} + \dfrac{p_b p_c}{r_a^2} + \dfrac{p_c p_a}{r_b^2} = 1$.

*У. Алла*
(г. Выру Эстонской ССР)

5. Решить уравнения

а) $\overline{xyz} = \overline{yz}^2$;

б) $x^y = \overline{yx}$;

в) $x^{y+2} = \overline{yx}$.

*И. Михалкович*
(Минская обл.)

# Московский инженерно-физический институт

Московский ордена Трудового Красного Знамени инженерно-физический институт (МИФИ) организован в 1942 году. В создании института принимали участие крупнейшие ученые нашей страны во главе с И. В. Курчатовым. МИФИ готовит инженеров-исследователей широкого профиля по ряду новейших направлений науки. Срок обучения — 5 лет и 6 месяцев.

МИФИ — один из ведущих вузов страны. В составе МИФИ — пять факультетов, есть один филиал, работает подготовительное отделение. При институте созданы факультет повышения квалификации преподавателей вузов страны по физике, Всесоюзная школа по ядерной физике и кафедра физики, на которую возложена подготовка и передача по центральному телевидению лекций по общей физике для студентов-заочников и учебных передач по физике и математике для поступающих в вузы.

Факультет экспериментальной и теоретической физики готовит инженеров-физиков и инженеров-математиков для исследовательской работы в области теоретической и экспериментальной физики, разработки современных физических установок и систем.

Факультет технической физики выпускает инженеров-физиков, специализирующихся в области теоретического и экспериментального исследования ядерных, теплофизических, газодинамических, молекулярно-кинетических и электромагнитных процессов, конструирования и эксплуатации физических установок и приборов, а также в области создания и исследования новых материалов.

Факультет автоматики и электроники выпускает инженеров-физиков, специализирующихся в области создания и эксплуатации электрофизических установок, систем автоматического управления технологическими и физическими процессами, разработки электронных устройств современных технических систем.

Факультет кибернетики готовит инженеров-системотехников и инженеров-математиков по разработке и математическому обеспечению современных быстродействующих электронных вычислительных машин и автоматизированных систем управления.

Специальный факультет физики (СФФ) организован при МИФИ и Физическом институте им. П. Н. Лебедева АН СССР в 1972 году. Он является новой формой обучения и готовит инженеров-физиков по новейшим направлениям физики. На факультет зачисляются студенты из немосковских высших учебных заведений, имеющие образование в объеме двух с половиной курсов физических и физико-математических факультетов и проявившие склонность к научной работе. Обучение на СФФ производится по индивидуальным планам. В настоящее время на СФФ занимаются студенты из 28 университетов и 4 политехнических институтов.

Филиал МИФИ в г. Обнинске готовит инженеров-теплофизиков по разработке и эксплуатации атомных электростанций и установок, инженеров-системотехников по проектированию и эксплуатации автоматизированных систем управления, инженеров-математиков по применению средств вычислительной техники.

Подготовительное отделение работает на правах отдельного факультета. Передовые рабочие, колхозники и демобилизованные воины в течение одного учебного года занимаются математикой, физикой, русским языком и литературой, они получают стипендию на правах студентов младших курсов. После успешно сданных выпускных экзаменов слушатели этого отделения зачисляются на 1-й курс МИФИ без дополнительных вступительных экзаменов.

Свыше тысячи слушателей обучаются на подготовительных платных курсах и курсах рабочей молодежи.

Ниже приводятся некоторые варианты письменного вступительного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике 1976 года. Устные вопросы формулируются в соответствии с программой для поступающих в вузы.

### Математика

Вариант 1

1. От пристани $A$ одновременно отправились вниз по течению реки катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 *км*, затем повернул обратно и вернулся в $A$ через 14 часов. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения реки, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 *км* от $A$.

2. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точка пересечения медиан

треугольника лежит на этой окружности. Найти угол при основании равнобедренного треугольника.

3. Решить неравенство $3^{\sqrt{x}} > 2^{a}$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Сумма первых $n$ членов арифметической прогрессии равна половине суммы следующих $n$ членов этой прогрессии. Найти отношение суммы первых $3n$ членов прогрессии к сумме ее первых $n$ членов.

2. В правильную треугольную усеченную пирамиду с двугранным углом $\alpha$ при основании вписан усеченный конус. Определить боковую поверхность конуса, если апофема боковой грани пирамиды равна сумме радиусов оснований конуса, а радиус меньшего основания конуса равен $r$.

3. Решить неравенство

$$0{,}3^{\log_{1/3}\log_2 \frac{3x+6}{3x^2+2}} > 1.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ 3 \lg x = \lg y. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Если двухзначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найти это число.

2. Куб с ребром $a$ вписан в правильную четырехугольную пирамиду так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах, а четыре другие вершины — на основании пирамиды. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $\alpha$. Определить объем пирамиды.

3. Решить уравнение

$$\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2}\left(\frac{a^2-4}{2a-x}\right) = 1.$$

4. Решить уравнение

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}\cos 2x.$$

**Физика**

1. Если к источнику тока подключить последовательно два различных вольтметра, то их показания будут $U_1 = 6$ *в* и $U_2 = 3$ *в*. Если подключить один первый вольтметр, то он покажет напряжение $U' = 8$ *в*. Пренебрегая сопротивлением соединительных проводов, определить э. д. с. $\mathscr{E}$ источника тока.

2. В однородном магнитном поле расположен виток с сопротивлением $R = 0{,}5$ *ом* и площадью $S = 100$ *см*$^2$. Нормаль к плоскости витка составляет угол $\alpha = 60°$ с вектором индукции **B**. За время $\tau = 0{,}5$ *сек* индукция поля увеличилась с постоянной скоростью от $B_1 = 0{,}1$ *тл* до $B_2 = 0{,}6$ *тл*. Найти количество теплоты, которое выделилось в витке за это время.

3. При облучении некоторого металла светом сначала с длиной волны $\lambda_1 = 0{,}3$ *мкм*, а затем — с $\lambda_2 = 0{,}6$ *мкм* обнаружили, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в $n = 2$ раза. Найти работу выхода электрона с поверхности этого металла.

*А. Диденко, А. Забоев, Г. Пантюхов, Н. Шолохов*

# Головоломки

## Магическое домино

Из 28 костей домино сложите прямоугольник 7×8 такой, что если не учитывать семи «пустых» квадратов, образующих последний столбец, то из 49 клеток составлен «магический квадрат» (в котором суммируются очки половинок костей) — суммы очков по горизонталям, вертикалям и двум диагоналям одинаковы и равны 24.

*Л. Мочалов*

## 1976

Расставьте в этих клетках числа от 1 до 27 (четыре числа уже стоят) так, чтобы суммы чисел в каждом горизонтальном ряду были равны друг другу и суммам каждых восьми чисел, стоящих вокруг чисел 1, 9, 7, 6.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |
| | 1 | | 9 | | 7 | | 6 | |
| | | | | | | | | |

*Я. Алексеев*

# МЕЖДУНАРОДНЫЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

*З. Моисеева,*
*А. Савин*

## XVIII Олимпиада по математике

XVIII Международная математическая олимпиада проходила в июле 1976 г. в г. Линце (Австрия). В ней принимали участие команды 18 стран: Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, Вьетнама, ГДР, Греции, Кубы, Нидерландов, Польши, Румынии, СССР, США, Финляндии, Франции, Чехословакии, Швеции, Югославии. (В качестве наблюдателей присутствовали представители ФРГ.) Команда каждой страны состояла из восьми школьников и двух руководителей, кроме Кубы, команда которой состояла из трех школьников и руководителя.

Для большинства участников XVIII Международная олимпиада явилась естественным продолжением национальных олимпиад. У нас в стране после республиканских олимпиад их победители участвовали в специальных отборочных соревнованиях. Затем с учетом результатов, показанных ребятами на всесоюзных олимпиадах этого и прошлых лет, и был определен окончательный состав команды. В нее вошли: *Юрий Буров* (школа № 2 г. Москвы), *Александр Гончаров* (школа № 13 г. Никополя Днепропетровской обл.), *Петр Гриневич* (школа № 204 г. Москвы), *Сергей Миронов* (школа № 6 г. Сафонова Смоленской обл.), *Никита Нецветаев, Борис Соломяк* и *Сергей Финашин* (все — ФМШ № 45 г. Ленинграда), *Татьяна Хованова* (школа № 444 г. Москвы).

Поездке на Международную олимпиаду предшествовал месячный учебно-тренировочный сбор, по традиции проводимый в школе памяти В. И. Ленина в Горках Ленинских. Поскольку состав команды был определен заранее, сбор этого года носил чисто тренировочный характер,— ребята работали без дополнительной нервной нагрузки, вызываемой в прошлые годы неизвестностью: кто же из них поедет на Международную олимпиаду. В результате команда оказалась в хорошей форме.

Во время сбора было проведено три тренировочных соревнования. Для интересующихся читателей приводим задачи одного из них.

1. Построить треугольник по центрам вписанного, описанного и вневписанного кругов.

2. Все корни некоторого многочлена с комплексными коэффициентами лежат в

открытой полуплоскости, граница которой проходит через точку 0. Доказать, что все коэффициенты многочлена отличны от нуля.

3. Решить уравнение

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}}$$

(знак дроби употреблен $n$ раз).

4. Доказать, что если в треугольнике перпендикуляры, восставленные из оснований биссектрис, пересекаются в одной точке, то треугольник равнобедренный.

5. Дано: $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 9}{10x_n}$.

Доказать, что

$$1-10^{-10} < x_{100} < 1+10^{-10}.$$

Кроме решения различного рода задач, на сборах было уделено большое внимание и теоретической подготовке участников. В прошлые годы «ахиллесовой пятой» нашей команды были задачи на многочлены, поскольку эта тема в школьных программах практически отсутствует. В этом году вопросам алгебры многочленов, областям Дирихле, теории графов и некоторым другим вопросам было уделено достаточно много времени, что позволило нашей команде на олимпиаде успешно справиться с задачами такого рода.

9 июля советские школьники прибыли в Вену, откуда на следующий день вместе с командами других стран поехали к месту проведения XVIII Международной математической олимпиады в г. Лиенц, столицу Восточного Тироля. Маршрут этой экскурсии протяженностью около 600 км проходил по живописным местам южной части Австрии. Надолго в памяти ребят останутся романтические альпийские пейзажи (более 50% территории Восточного Тироля расположено выше 2000 м над уровнем моря): луга, пересеченные множеством бурлящих безымянных ручейков и речушек, белоснежные вершины гор, леса.

Соревнования проводились 12 и 13 июля. В каждый из дней школьникам предлагалось по три задачи, на решение которых отводилось по 4 часа (тексты задач помещены в конце статьи, в скобках указано, какой страной была предложена задача и сколько очков давалось за ее полное решение; указания к решению задач помещены в конце журнала).

Работы, как всегда, проверялись руководителями команд, а окончательная оценка выставлялась совместно с координаторами — австрийскими математиками. Работа координаторов и жюри была завершена к 17 июля.

Нужно отметить, что реальная трудность задач несколько разошлась с оценкой жюри. Наиболее сложной оказалась пятая задача, по которой участники соревнований собрали лишь 15% возможного числа очков. Следующей по сложности оказалась вторая задача (26%), затем третья (38%), первая (52%), четвертая (62%) и шестая (65%). Разной оказалась и трудность отдельных задач для команд разных стран. Видимо, успехи школьников различных стран при решении той или иной задачи тесно связаны с программой их обучения в школе. Так, англичане и французы традиционно хорошо решают задачи на многочлены и экстремумы, шведы — экстремальные задачи и т. п. Почти все команды успешно справились с шестой задачей, в которой нужно было увидеть некоторую закономерность и доказать ее методом математической индукции, исключение составили лишь те страны, где этот метод доказательства не нашел широкого применения в программах и учебниках (Финляндия, Голландия, Греция, Куба). Немногие школьники справились с пятой задачей (система линейных уравнений), не заметив под алгебраической оболочкой ее комбинаторный характер.

Наши школьники выступили довольно ровно по всем задачам и набрали по первой задаче 90% возможного числа очков, по второй — 79%, по третьей — 72%, по четвертой — 95%,

**Команда СССР на XVIII Международной математической олимпиаде (слева направо) стоят: Н. Нецветаев, С. Миронов, А. Гончаров, Б. Соломяк, С. Финашин, Ю. Буров, П. Гриневич; сидят: Т. Хованова, З. И. Моисеева (зам. руководителя команды), А. П. Савин (руководитель команды), С. Конягин (участник международных олимпиад 1972, 1973 г., тренер команды).**

по пятой — 57% и по шестой — 81%.

Утром 18 июля участники олимпиады на автобусах отправились в Вену, познакомившись по дороге со старинным городом Зальцбургом, а на следующий день осмотрели Вену и ее окрестности, посетили музей истории искусств.

Торжественное закрытие олимпиады проходило 20 июля в Ратуше. Призеры получили дипломы и ценные подарки.

**I премию**

получили девять участников, набравшие от 40 до 34 очков: *Л. Пьер* (Франция, 40 очков), *Т. Хованова* (СССР, 39), *М. Клейман* (США, 38), *А. Гончаров* и *С. Финашин* (оба СССР, по 37), *Д. Рикард* (Великобритания, 35), *Н. Нецветаев* (СССР, 34), *К. Гриль* (Австрия, 34), *Р. Месон* (Великобритания, 34).

**II премию**

получили 28 школьников, набравших от 31 до 23 очков. Среди них трое советских ребят: *Б. Соломяк* (31 очко), *П. Гриневич* (26) и *С. Миронов* (24).

**III премию**

получили 44 участника, набравшие от 22 до 15 очков. Среди них советский школьник *Ю. Буров* (22 очка).

В неофициальном командном зачете первые десять мест распределились так: СССР (250 очков), Великобритания (214), США (188), Болгария (174), Австрия (167), Франция (165), Венгрия (160), ГДР (142), Польша (138), Швеция (120). При этом лишь в командах СССР, Болгарии и Австрии все восемь участников получили награды.

Необходимо заметить, что олимпиада прошла организованно, в духе дружбы и взаимопонимания. Участники рассказали о своих странах, узнали многое о других, обменялись памятными подарками, значками, сувенирами. Эта олимпиада несомненно оказала большое влияние на воспитание молодежи в духе дружбы и взаимного уважения людей различных национальностей и рас.

### Задачи XVIII Международной математической олимпиады школьников

#### 1-й день

1 Площадь плоского выпуклого четырехугольника равна 32 *см*$^2$, а сумма длин двух противоположных сторон и одной диагонали равна 16 *см*. Указать все значения, которые может принимать длина другой диагонали. (Чехословакия, 5 очков.)

2. Пусть $P_1(x) = x^2-2$, $P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x))$ $(k=2, 3, \dots)$. Доказать, что для любого натурального $n$ все корни уравнения $P_n(x) = x$ вещественны и различны. (Финляндия, 7 очков.)

3. Прямоугольная коробка может быть полностью наполнена единичными кубами (ребра кубов параллельны ребрам коробки). Если же заполнять коробку кубами объема 2 с ребрами, параллельными ребрам коробки, то максимальное число таких кубов заполнит лишь ровно 40% объема коробки. Указать внутренние размеры всех коробок, для которых это имеет место ($\sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$). (Нидерланды, 8 очков.)

#### 2-й день

4. Найти наибольшее значение, которое может принять произведение нескольких натуральных чисел, сумма которых равна 1976. (США, 6 очков.)

5. В системе $p$ уравнений с $q=2p$ неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pq}x_q = 0 \end{cases}$$

коэффициенты $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. Доказать, что существует решение $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ этой системы такое, что все $x$ — целые, для некоторого $j$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$ $x_j \neq 0$ и для всех $j$ $(1 \leqslant j \leqslant q)$ $|x_j| \leqslant q$. (Нидерланды, 7 очков.)

6. Последовательность $\{u_n\}$ определена следующим образом: $u_0=2$, $u_1=5/2$, $u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1$ $(n \geqslant 1)$. Доказать, что при $n \geqslant 1$

$$[u_n] = 2^{(2^n-(-1)^n)/3},$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее $x$ (Великобритания, 7 очков.)

*И. Слободецкий*

# IX Олимпиада по физике

С 1 по 7 июля в Будапеште проходила очередная IX Международная олимпиада по физике среди школьников. Такие олимпиады начали проводиться с 1967 года. Первая Международная олимпиада была организована по инициативе Польской народной республики. В ней приняли участие школьники пяти социалистических стран: Болгарии, Венгрии, Польши, Румынии и Чехословакии. Уже в следующем, 1968 году, к участникам олимпиады из этих стран присоединились учащиеся Германской демократической республики, Советского Союза и Югославии. С тех пор команда нашей страны участвует во всех олимпиадах. А в 1970 году Москва принимала у себя участников IV Международной физической олимпиады.

Олимпиада включает в себя решение трех теоретических задач и выполнение одной экспериментальной работы. Теоретический и экспериментальный туры проводятся в разные дни. На решение задач и выполнение эксперимента дается по 5 часов. Все задачи готовятся страной, проводящей олимпиаду. Эта страна обеспечивает и проверку работ, но результаты проверки окончательно утверждаются Международной комиссией, состоящей из руководителей всех команд. Председателем Международной комиссии в этом году был академик Академии наук Венгрии Г. Маркс.

По статуту олимпиады задачи составляются на основе специальной программы. Эта программа, в основном, включает все те вопросы, которые изучаются в средних школах всех стран-участниц. Но имеются и некоторые дополнения. Например, тема «Вращательное движение твердых тел», которую не изучают школьники *нашей страны.*

В этом году в олимпиаде участвовали команды из 10 стран: Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР, Франции, ФРГ, Чехословакии и Швеции. На олимпиаде также присутствовал наблюдатель из Финляндии. Каждая команда, как всегда, состояла из 5 участников.

В состав команды СССР вошли победители Всесоюзной олимпиады, показавшие хорошие результаты на трехнедельных тренировочных сборах в Горках Ленинских:

*Владимир Булатов* — выпускник физико-математической школы-интерната № 45 при Ленинградском государственном университете;

*Андрей Голубенцев* — выпускник средней школы № 13 г. Саратова;

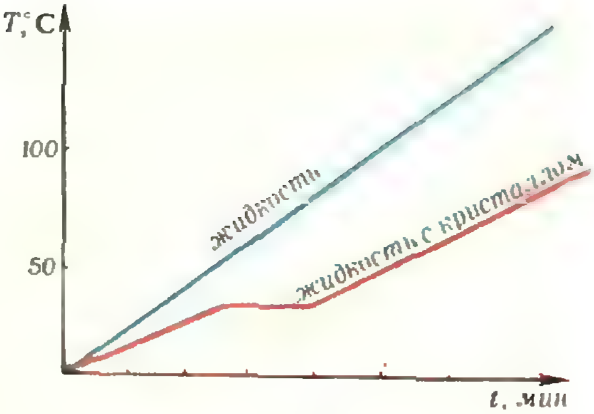
*Владимир Кривцун* — выпускник средней школы № 27 г. Харькова;

*Валерий Старшенко* — выпускник средней школы № 28 г. Запорожье;

*Ильдар Хамитов* — выпускник физико-математической школы-интерната № 45 при Ленинградском государственном университете.

Конечно, во время олимпиады проходили интересные встречи, были организованы экскурсии по Дунаю, вдоль озера Балатон и в веселый Будапештский Луна-парк. Но главное — это решение задач.

Какие же задачи достались участникам олимпиады? Все теоретические задачи помещены в «Задачнике «Кванта» (см. задачи Ф428, Ф429 и Ф432 в этом номере журнала). По трудности они примерно такие же, как задачи заключительного тура Всесоюзной олимпиады. За решение каждой теоретической задачи максимально можно было получить 10 очков. Наибольшее количество очков (9 и 10) за решение первой задачи получили 13 участников, второй — 14 и третьей — 8.



За выполнение экспериментальной работы можно было получить до 20 очков. Задача была такой:

На рабочем столе имеются: часы, термометр, нагревательный элемент на 12 *в*, две пробирки с жидкостью известной удельной теплоемкости $c_0 = 0{,}5$ *кал/(г·град)* и кристаллический материал $X$ с неизвестными тепловыми свойствами. Количество жидкости в пробирках и масса кристалла $X$ известны. Материал $X$ в жидкости не растворяется

Исследуйте тепловые свойства материала $X$ в интервале от комнатной температуры до 80°C и определите его характерные тепловые константы. Результаты измерений представьте в виде таблиц и графиков.

Вы можете распоряжаться только теми приборами и материалами, которые находятся на столе. Испорченные Вами приборы и использованные материалы не заменяются.

Эту задачу нельзя назвать трудной, однако до конца довели ее немногие. Если за теоретические задачи примерно 20% участников набрали 27—30 очков, то за экспериментальную работу получили 19—20 очков лишь 4 участника, т. е. меньше 10%.

Приведем краткое решение экспериментальной задачи.

В ходе выполнения работы нужно построить графики зависимости от времени температуры чистой жидкости (подогреваемой нагревателем) и жидкости вместе с кристаллическим материалом $X$ (см. рисунок). Из рисунка видно, что второй график имеет почти горизонтальный участок; это свидетельствует о наличии фазового перехода, т. е. плавления кристалла $X$. Пользуясь этими графиками, можно определить температуру плавления кристалла, удельную теплоемкость кристалла и расплава и удельную теплоту плавления кристалла. Так как масса кристалла была невелика, естественно было считать, что при нагревании пробирки теплоотвод (учитывая и нагревание самой пробирки) во всех случаях один и тот же. Неизменен, разумеется, и приток тепла от нагревателя.

Температура плавления кристалла определяется непосредственно из графика.

Удельную теплоемкость кристалла надо было вычислить, составив уравнения теплового баланса для чистой жидкости и для жидкости с кристаллом. При нагревании в пробирке чистой жидкости выполняется равенство

$$c_0\, m_ж \Delta T = \Delta W t. \qquad (1)$$

Здесь $m_ж$ — масса жидкости, $\Delta W$ — разность между мощностью источника (притоком тепла) и мощностью потерь (теплоотводом), $t$ — время и $\Delta T$ — изменение температуры жидкости за это время. Аналогично при нагревании жидкости с кристаллом

$$c_0 m_ж \Delta T_1 + c_к m_к \Delta T_1 = \Delta W t_1, \qquad (2)$$

где $c_к$ — удельная теплоемкость кристалла, $m_к$ — его масса, $t_1$ — новое время и $\Delta T_1$ — новое изменение температуры.

Обозначим $\Delta T/t$ и $\Delta T_1/t_1$ через $\alpha$ и $\alpha_1$ соответственно. На рисунке $\alpha$ и $\alpha_1$ — тангенсы углов наклона графиков зависимости температуры в пробирке от времени (естественно, до момента начала плавления). Уравнения (1) и (2) можно переписать так:

$$c_0 m_ж \alpha = \Delta W, \qquad (1')$$

$$c_0 m_ж \alpha_1 + c_к m_к \alpha_1 = \Delta W. \qquad (2')$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$1 + \frac{c_н}{c_0}\,\frac{m_к}{m_ж} = \frac{\alpha}{\alpha_1},$$

откуда

$$c_к = c_0\,\frac{m_ж}{m_к}\,\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_1}.$$

Определив по графикам $\alpha$ и $\alpha_1$, нетрудно найти $c_к$.

Аналогично можно было определить удельную теплоемкость расплава.

Для того чтобы найти удельную теплоту плавления кристалла $\lambda$, надо было составить еще одно уравнение теплового баланса:

$$\lambda m_к = \Delta W t_2, \qquad (3)$$

где $t_2$ — время плавления кристалла. Разделив это уравнение на уравнение (1′), получим

$$\frac{\lambda m_к}{c_0 m_ж} = \alpha t_2,$$

откуда

$$\lambda = c_0\,\frac{m_ж}{m_к}\,\alpha t_2.$$

Все эти расчеты можно было провести и более аккуратно. Во-первых, из-за неравномерности нагрева температура жидкости и кристалла во время плавления несколько повышалась (см. рисунок). Поэтому в левой части уравнения (3) должны присутствовать члены $c_0 m_ж \Delta T_2$ и $c_к m_к \Delta T_2$ ($\Delta T_2$ — соответствующее изменение температуры за время $t_2$). Правда, не совсем ясно, как быть со вторым членом, — при плавлении кристалла меняется его удельная теплоемкость. Впрочем, им совсем можно было пренебречь, что не вносило большой ошибки. Во-вторых, можно было учесть в явном виде теплоемкость самой пробирки. Для этого было бы достаточно, например, построить график изменения температуры со временем для пробирки с другим количеством жидкости.

При определении тепловых параметров кристалла $X$ считалась удовлетворительной точность до 20%. Получить ее, в принципе, было несложно. Однако многим участникам олимпиады это оказалось не под силу.

Результаты олимпиады таковы:

**I премию**

получили участники олимпиады, набравшие от 42 до 47,5 очков. Это — *В. Булатов* (СССР), *В. Кривцун* (СССР), *К. Кульпа* (Польша), *Р. Лубис* (Польша), *А. Порсон* (Франция), *Г. Попеску* (Румыния) и *И. Хамитов* (СССР).

**II премию**

получили 7 участников, набравшие от 37 до 42 очков. Среди них *А. Голубенцев*.

**III премию**

получили 12 участников, набравшие от 30 до 37 очков.

**Грамоты**

получили 13 участников, набравших от 23 до 30 очков. Среди них *В. Старшенко*.

Абсолютным победителем олимпиады стал польский школьник *Р. Лубис*. Он получил высшую оценку — 20 очков — за экспериментальную работу и 27,5 очков за теоретические задачи. Такие же результаты по теоретическому туру были у членов нашей команды В. Кривцуна и И. Хамитова, а также у М. Хегнера из ГДР. Однако на экспериментальном туре В. Кривцун и И. Хамитов потеряли по 5 очков, а М. Хегнер — 10 очков.

Официального командного первенства на олимпиаде не проводилось. Но, конечно, все подсчитывали, сколько очков набрала каждая команда, сколько премий и грамот получили ее члены. В частности, наша команда получила три первые премии, одну вторую премию и одну грамоту. Члены нашей команды набрали в сумме 192,75 очка. Команда Румынии набрала 181 очко, команда ГДР — 174 очка.

В заключение хочется отметить очень хорошую организацию IX Международной олимпиады по физике. Этим участники олимпиады обязаны Министерству народного образования Венгрии, Физическому обществу им. Р. Этвеша и кафедре атомной физики Будапештского университета. Очень хорошо были проверены все работы, несмотря на их многоязычие. У Международного комитета почти не было претензий по оценкам. На олимпиаде царил дух доверия, взаимопонимания и дружбы.

**Советские школьники Владимир Булатов, Владимир Кривцун и Ильдар Хамитов, получившие I премию, во время выполнения экспериментальной работы.**

*Фото Ласло Кемени*

# Всесоюзный конкурс общества «Знание»

Общество «Знание» ежегодно проводит Всесоюзный конкурс на лучшую научно-популярную книгу и брошюру, в котором принимают участие центральные и республиканские издательства. В 1976 году на конкурс поступили 191 книга и 282 брошюры, изданные в 1975 году. Среди них были 42 книги и брошюры, посвященные различным проблемам физики, математики, астрономии и космонавтики. Жюри конкурса под председательством академика А. Л. Яншина отметило некоторые из них почетными дипломами и денежными премиями.

Диплом второй степени получила научно-популярная книга члена-корреспондента АН СССР И. С. Шкловского «Звезды: их рождение, жизнь и смерть», о которой мы уже рассказали в рецензии В. Бронштэна «Как рождаются, живут и умирают звезды», опубликованной в восьмом номере нашего журнала.

Второй такой же диплом присужден научно-популярной книге профессора Н. Я. Виленкина «Популярная комбинаторика», выпущенной издательством «Наука» (см. рецензию М. Смолянского «Комбинаторика — что это такое?» в этом номере журнала).

Еще один диплом второй степени присужден сборнику научно-популярных статей под названием «Школьникам о современной физике. Физика твердого тела», выпущенному издательством «Просвещение». Об этом сборнике мы подробно рассказали в двенадцатом номере нашего журнала за 1975 год (см. рецензию Б. М. Яворского «Школьникам о физике твердого тела»).

Очень интересна также книга Р. С. Гутера и Ю. Л. Полунова «От абака до компьютера» из серии «Жизнь замечательных идей», выходящей в издательстве «Знание». В ней рассказывается история вычислительной техники с древнейших времен до наших дней. Но не только техники, а и ее творцов — Морлэнда, Бэрроуза, Стэнхоупа, Бэббеджа, Айкена и многих других математиков и механиков. Эта книга также получила диплом второй степени.

Поощрительный диплом получила книга «Поиски и открытия планет», написанная докторами физико-математических наук Е. А. Гребениковым и Ю. А. Рябовым (издательство «Наука»). Рассказ о ней помещен в предыдущем номере нашего журнала. Такой же награды удостоена книга Л. А. Левинова и Г. В. Сапгира «Приключения Кубарика и Томатика, или веселая математика» (ч. I), рассчитанная на дошкольников. Книга выпущена издательством «Просвещение».

Жюри отметило также несколько научно-популярных брошюр по физике, математике и астрономии, выпущенных издательством «Знание».

Диплом первой степени присужден брошюре «Современная культура и математика», написанной академиком В. М. Глушковым, академиком АН УССР Б. В. Гнеденко и кандидатом физико-математических наук А. И. Коронкевичем.

Брошюра содержит три статьи по общим проблемам математики. Первая статья называется «Математика в истории человечества», вторая — «Об источниках нового в математике» и третья — «Роль математики в современной науке». Она издана в серии «Математика, Кибернетика».

Диплом второй степени присужден брошюре члена-корреспондента АН СССР Г. Т. Зацепина и кандидата физико-математических наук В. С. Березинского «Нейтринная астрофизика». В необычайно живой, почти художественной форме в ней рассказано о сложных проблемах поиска и регистрации нейтрино — этих, казалось бы, совершенно неуловимых элементарных частиц.

Нейтринная астрофизика — новая область современной науки. Она позволяет решать проблемы, кажущиеся совершенно невероятными. До недавних пор астрономы регистрировали электромагнитные волны и частицы, рождающиеся на поверхностях небесных тел. Теперь, благодаря нейтринной астрофизике, они получают возможность заглядывать в недра этих тел. Ведь нейтрино рождаются внутри звезд в результате происходящих там термоядерных реакций. Так как нейтрино способны проходить без столкновений огромные толщи вещества, они уносят с собой неискаженную информацию о процессах, происходящих внутри звезд. Мы до сих пор не знаем, как выглядят недра Земли на глубине более двух десятков километров. А нейтринные телескопы принесут нам сведения о состоянии звездных недр.

Такой же диплом получила брошюра члена редакционной коллегии нашего журнала «Квант» профессора Я. А. Смородинского «Тяготение», о которой мы рассказали в десятом номере нашего журнала (см. рецензию В. Лешковцева «Новое о гравитации»). Она вышла в серии «Физика».

Трем брошюрам присуждены поощрительные дипломы.

Брошюра доктора физико-математических наук А. Г. Постникова называется «Культура занятий математикой (из записок ученого)». Она представляет собой явление, необычайно редкое в нашем книжном мире. Используя богатый личный опыт, а также опыт известных ему ученых, автор исследует многочисленные проблемы психологии математического творчества. Как правильно оценить свои способности, как их развивать и совершенствовать, как лучше организовать свои занятия — множество интересных мыслей пробуждает эта брошюра даже у тех читателей, которые не намерены связывать свою жизнь с математикой. Ну, а те, кто любит математику, непременно должны ее прочитать. Она выпущена в серии «Математика. Кибернетика».

Вторая брошюра — «Переменные звезды» — написана членом редакционной коллегии нашего журнала кандидатом физико-математических наук Ю. Н. Ефремовым. Она вышла в серии «Космонавтика. Астрономия».

Третья брошюра — Жидкие кристаллы» — написана доктором физико-математических наук И. Г. Чистяковым и кандидатом физико-математических наук Л. К. Вистинь. Она вышла в серии «Новое в жизни, науке, технике». В ней рассказывается о необычном состоянии многих органических веществ, при котором текучесть, свойственная жидкости, сочетается с упорядоченностью молекул, присущей твердым кристаллам. Авторы описывают физические свойства жидких кристаллов, а также их практические применения.

*В. Рудов*

---

# Комбинаторика — что это такое?

В прошлом году увидела свет новая книга известного ученого и популяризатора науки Н. Я. Виленкина — «Популярная комбинаторика» *).

В 1969 году в Главной редакции физико-математической литературы издательства «Наука» была напечатана его же книга «Комбинаторика». Она получила всемирное признание и была переведена на многие языки (английский, немецкий, испанский, польский, венгерский, чешский, эстонский).

Рецензируемая книга очень мало напоминает свою предшественницу. Из шести глав три написаны заново, а остальные три — полностью переработанный текст из книги «Комбинаторика».

Начинается «Популярная комбинаторика» главой из истории комбинаторики и ее приложений. Здесь рассказано о первых магических квадратах, о фигурных числах, о комбинаторных работах астрологов, занимавшихся сочетаниями планет, о том, как схоласт Раймонд Люллий пытался создать машину, дающую различные сочетания понятий, и о комбинаторных задачах, возникавших в азартных играх. Автор рассказывает о том, как комбинаторика выделилась в самостоятельную ветвь математики, о работах Паскаля, Ферма, Лейбница и Эйлера. Без сомнения, большой интерес вызовут у читателя рассказы о приложениях комбинаторики к разгадке древних письменностей, к изучению генетического кода, к открытию периодической системы Менделеева. Жаль только, что автор совсем не останавливается на применениях комбинаторики к технике и на комбинаторике кристаллических решеток.

Вторая глава посвящена классификации комбинаторных задач.

Следуя известной книге Бержа, автор делит комбинаторные проблемы следующим образом:

1. Найти конфигурацию элементов, обладающую заранее заданными свойствами.
2. Доказать существование (или отсутствие) конфигурации с заданными свойствами.
3. Найти общее число конфигураций с заданными свойствами.
4. Описать все способы решения данной комбинаторной задачи, дать алгоритм их перечисления.
5. Из всех решений данной комбинаторной задачи выбрать оптимальное (по тем или иным параметрам).

На примере магических квадратов и задачи о ферзях он показывает, как ищутся конфигурации с заданными свойствами, потом рассказывает об общем принципе решения проблем оптимизации: если решение является оптимальным в целом, то оно должно быть оптимальным в любой своей части (этот принцип лежит в основе так называемого динамического программирования *)). На примере «игры в 15» показывается, как можно доказать невозможность решения некоторой задачи. Рассмотрев известную олимпиадную задачу о научной переписке:

*Шесть ученых переписываются друг с другом по двум научным темам. Каждый переписывается с каждым по одной теме. Докажите, что найдутся трое ученых, переписывающихся между собой по одной и той же теме,*

---

*) Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. М., «Наука», 1975.

*) «Квант», 1972, № 3, с. 6.

— автор разбирает потом ее различные обобщения и усложнения: переписку 17 ученых по трем темам, придание различного веса отдельным темам и т. д., подводя читателя к формулировке общей теоремы Рамсея. Следует пожалеть, что объем и характер книги не дали возможности привести в общем виде доказательство этой замечательной теоремы.

Далее разбирается *теорема о различных представителях* (или, как ее еще называют, *теорема о деревенских свадьбах*), которая дана с полным доказательством. Эта теорема дает автору повод поговорить о графах и комбинаторных задачах теории графов. Кончается глава более известным материалом теории графов — эйлеровыми маршрутами (обходом графа, при котором ни одно ребро не проходится дважды), гамильтоновыми путями (замкнутыми путями, проходящими по одному разу через каждую вершину графа), задачей о четырех красках и т. д. Как и все последующие главы, она содержит много разнообразных задач (всего в книге приведено более 400 задач). К сожалению, большинство задач второй главы носит олимпиадный характер. Они могут создать впечатление, что и задачи последующих глав будут столь же трудны, хотя это совсем не так — многие задачи третьей, четвертой и пятой глав совсем простые.

В третьей главе изложена «классическая комбинаторика» — размещения, перестановки и сочетания как с повторениями, так и без них. При изложении этих вопросов автор систематически использует язык теории множеств и понятие кортежа. Это позволило ему четко определить основные понятия. Хотя, как и во всей книге, изложение ведется путем разбора более или менее занимательных задач, на самом деле эта глава представляет собой учебное пособие по комбинаторике, написанное достаточно четко и систематично. Переход на теоретико-множественный язык позволил естественно включить сюда разбор *формулы включений и исключений* (формулы перекрытий), позволяющей найти число элементов в объединении нескольких конечных множеств, если известно число элементов в каждом множестве, а также в пересечении любого набора этих множеств.

Следующая глава называется «Комбинаторика раскладок и разбиений». Об этих вопросах шла речь и в предыдущей книге автора, но теперь изложение стало четче и компактнее. Появился новый материал, например, рассказано о числах Белла, то есть о числе различных возможностей разбить данное конечное множество на непересекающиеся подмножества, а также о числах Стирлинга 1-го рода, то есть о числе способов разложить $n$ различных предметов в $m$ неразличимых ящиков так, чтобы все ящики были непустыми.

Была в предыдущей книге и глава «Комбинаторные задачи с ограничениями». Но теперь, вместо разбора отдельных, почти не связанных друг с другом задач, дано изложение общих понятий и формул. В частности, автор дает общую формулу для вычисления так называемых *ладейных многочленов*. Он восстанавливает историческую справедливость, отмечая, что ладейные числа (число способов поставить на доску данной формы $n$ ладей так, чтобы ни одна пара ладей не могла взять друг друга) были введены и изучены советским математиком С. Е. Аршоном за десять лет до того, как этими числами стали заниматься американские математики Капланский и Риордан. Заканчивается глава задачами о мажордоме короля Артура и об очереди в кассу.

Последняя, шестая, глава книги рассказывает о комбинаторных задачах, связанных с теорией групп — о комбинаторике орбит. Типичной задачей такого рода является отыскание числа способов покрасить вершины куба в $k$ цветов. Общий способ решения таких задач основан на некоторых понятиях теории групп *). Хотя автору удалось найти более простое изложение этого метода, чем встречающееся в большинстве книг по комбинаторике (в популярной литературе этот метод, насколько нам известно, никогда не излагался), конец главы несколько труден для читателя, которому адресована книга.

Таким образом, в целом получилась очень интересная и живо написанная книга по комбинаторике. Однако приходится сожалеть, что задачи, приведенные в книге, даны не только без решений, но и без ответов.

Новая книга Н. Я. Виленкина по комбинаторике будет интересна школьникам старших классов, интересующимся математикой, учителям и всем, кому приходится иметь дело с комбинаторными задачами. В 1976 году она удостоена второй премии Всесоюзного конкурса на лучшее произведение научно-популярной литературы.

В настоящее время тираж книги полностью разошелся. Мы надеемся, что издательство «Наука» выпустит второе издание этой полезной книги, расширив ее объем, что даст возможность включить решения приведенных в ней задач и другой материал, исключенный при подготовке книги.

*М. Смолянский*

---

*) О группах можно прочитать в «Кванте», 1976, № 10.

## «Квант» для младших школьников

# Задачи

1. По случаю избрания Мирафлореса *президентом Анчурии* был устроен роскошный обед. За круглый стол сели 666 гостей, большинство из которых были лысыми. Назовем двоих сидящих по обе стороны от каждого гостя — его соседями; двоих сидящих через одного от него по обе стороны,— его «вторыми соседями» и т. д.

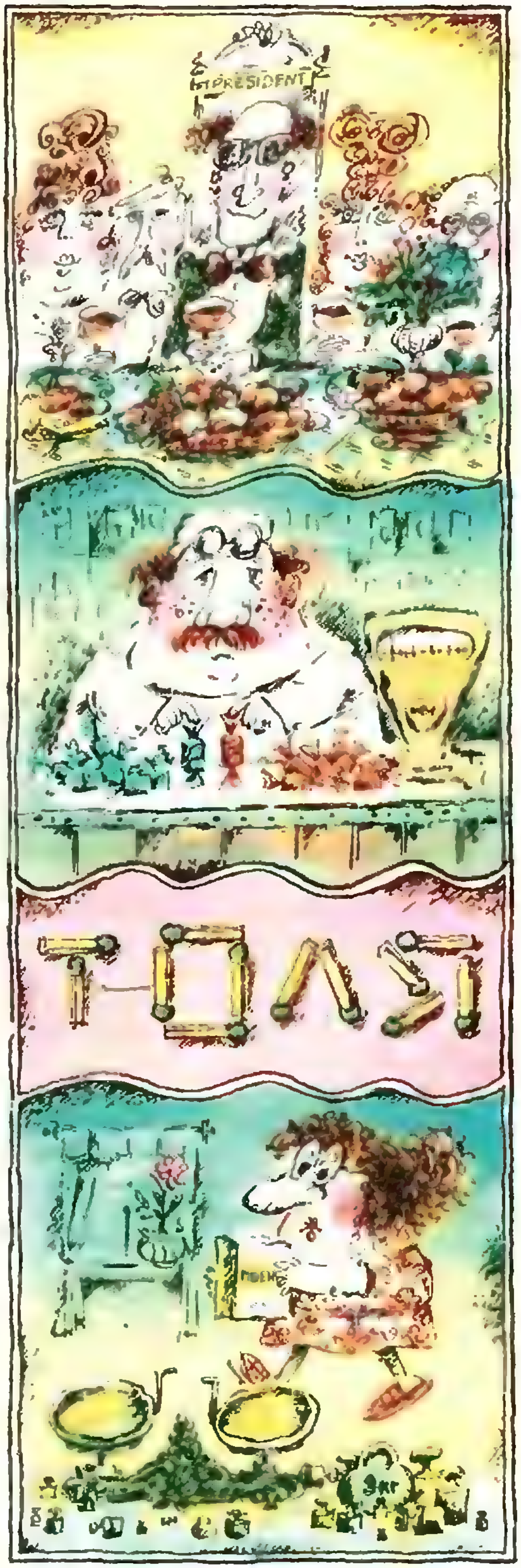
Мирафлорес заметил, что для каждого лысого ровно один из его вторых и один из его четвертых соседей — лысые. Сколько лысых было на обеде?

2. В магазине есть на равную сумму конфеты стоимостью 2 рубля за килограмм и стоимостью 3 рубля за килограмм. По какой цене надо продавать смесь из этих конфет?

3. Из спичек было сложено слово «ТОЛЯ» (см. рисунок). Переложите ровно одну спичку так, чтобы получилось женское имя.

4. Дана доска 19×19 клеток. На каждой клетке поставлено по шашке. Можно ли переставить шашки так, чтобы каждая шашка оказалась на соседней клетке (по горизонтали или по вертикали, но не по диагонали)?

5. Имеются неправильные весы с двумя чашками и сколько угодно разных правильных гирь. Как отвесить на этих весах один килограмм крупы?



*Л. Финк*

# Еще раз о счастливых билетах

Вчера мой племянник Миша вбежал ко мне с возгласом: «Дядя, я, кажется, решил!»

— Что ты решил?

— Задачу о счастливом билете. Помнишь, как-то в трамвае мы с тобой пытались посчитать, сколько существует «счастливых» трамвайных билетов, у которых сумма первых трех цифр номера равна сумме последних трех цифр?

— Как же, помню. Об этом нашем разговоре даже напечатали в «Кванте» (см. № 7 за 1975 г., с. 67—70). Значит, ты нашел точное число счастливых билетов, не пользуясь при этом методом перебора?

— Почти.

— Что значит «почти»? Почти точное число?

— Нет, число-то точное. Но я все-таки пользуюсь методом перебора. Правда, просматриваю не миллион шестизначных чисел, а в тысячу раз меньше.

— Расскажи-ка, как ты это делаешь.

— Я вычислил, сколько счастливых билетов имеют заданную сумму первых и последних трех цифр, равную определенному числу, например $k$. Обозначим количество трехзначных номеров с суммой цифр, равной $k$, через $N(k)$. Чтобы получить счастливый билет с суммой трех первых и трех последних цифр, равной $k$, можно выбрать любой из этих $N(k)$ трехзначных номеров для левой половины номера билета и любой другой (или тот же самый) — для правой. Например, с суммой цифр $k = 1$ есть три трехзначных номера: 001, 010 и 100. Комбинируя их, получим 9 шестизначных номеров счастливых билетов:

001001 001010 001100
010001 010010 010100
100001 100010 100100

В общем же случае счастливых билетов с суммой цифр, равной $k$ в каждой «половинке», будет $[N(k)]^2$. Наименьшее возможное значение $k$ равно 0 (для номера 000), а наибольшее — 27 (для номера 999). Просуммировав значения $[N(k)]^2$ по $k$ от 0 до 27, мы получим число всех возможных счастливых билетов. Сделав это, я нашел ответ — число счастливых билетов $C = 55\,252$. То есть в среднем один из 18 билетов является счастливым.

Миша радовался так, будто оторвал сразу несколько счастливых билетов.

Поздравляю тебя с решением, — сказал я. — Вот только мне не ясно, каким образом ты определял значения $N(k)$

— Очень просто. Выписал тысячу трехзначных чисел от 000 до 999 и подсчитал сумму цифр у каждого. Я справился с этим без всяких вычислительных машин — всего за одно воскресенье, — гордо ответил Миша.

— Что же, похвально. Но, пожалуй, полезнее было бы поискать формулу или правило, позволяющее находить $N(k)$ без перебора.

— Я пробовал, дядя, честное слово! Но ничего не получилось.

— Давай попытаемся вместе. Для начала слегка изменим обозначение: вместо $N(k)$ будем писать $N_3(k)$.

— А что означает эта тройка внизу?

— То, что мы рассматриваем трехзначные номера.

— Но это и так ясно!

— Дело не в этом. Мы обобщим задачу и будем искать $N_n(k)$ — количество $n$-значных номеров с суммой цифр, равной $k$.

— Дядя, я не могу решить задачу для трехзначных номеров, а ты хочешь решать ее и для четырехзначных, и для пятизначных ... Ведь это значительно труднее!

— Конечно, труднее, если пользоваться перебором. Но легче, если рассуждать логически. Между прочим, в истории математики известно немало задач, решить которые удалось лишь после того, как они были сформулированы в общем виде. Попробуй для начала найти $N_1(k)$.

— Сейчас подумаю. Нужно определить, сколько однозначных чисел имеет сумму цифр $k$. Но для однозначного числа сумма цифр совпадает с самим числом. Тут и решать нечего. Есть одно однозначное число с суммой цифр, равной нулю, — это 0; одно однозначное число с суммой цифр, равной единице, — это 1, одно число с суммой цифр, равной двум, — 2, и т. д. Значит $N_1(k) = 1$, если $k$ принимает значения от 0 до 9, а при других значениях $k — N_1(k) = 0$.

— Отлично! Пойдем дальше. Предположим теперь, что мы уже знаем значения $N_{n-1}(k)$ для всех $k$. Попробуем выразить через них $N_n(k)$. Другими словами, попробуем найти количество $n$-значных номеров с суммой цифр, равной $k$, предполагая, что для $(n — 1)$-значных номеров задача уже решена.

— Ясно, — ответил Миша. Значения $N_1(k)$ мы уже знаем; поэтому нужно найти только способ перехода от $n — 1$ к $n$. Тогда мы сможем последовательно определить значения $N_2(k)$, $N_3(k)$, и т. д. Ну что же, попробуем. Пусть первой цифрой $n$-значного номера является число $l$. Чтобы сумма цифр этого номера была равна $k$, остальные его цифры должны в сумме дать $k — l$. Таких $(n — 1)$-значных номеров существует $N_{n-1}(k — l)$. Цифра $l$ может быть любым целым однозначным числом, не превосходящим $k$ (то есть $0 \leqslant l \leqslant 9$, $l \leqslant k$), и каждой из этих цифр соответствует $N_{n-1}(k — l)$ $n$-значных номеров с суммой цифр, равной $k$, причем все эти номера различны. Значит, всего таких номеров будет

$$N_n(k) = N_{n-1}(k) + N_{n-1}(k-1) + N_{n-1}(k-2) + N_{n-1}(k-3) + N_{n-1}(k-4) + N_{n-1}(k-5) + N_{n-1}(k-6) + N_{n-1}(k-7) + N_{n-1}(k-8) + N_{n-1}(k-9); \quad (*)$$

причем, если $k < 9$, то для $l > k$ соответствующие значения $N_{n-1}(k — l)$ мы будем считать равными нулю.

По формуле (*) можно вычислить значения $N_n(k)$ для всех $k$, если известны значения $N_{n-1}(k)$. А так как значения $N_1(k)$ мы уже знаем, то задача решена!

— Совершенно верно, — сказал я. Формулы, аналогичные формуле (*), называются *рекуррентными*. Конечно, чтобы по формуле (*) вычислить все значения $N_3(k)$, нужно потрудиться, но не целый день, а минут 10—15. Но дело не во времени, а в получении регулярного, непереборного решения. Пользуясь полученной формулой, можно вычислить количество счастливых билетов не только для наших трамваев, но и для трамваев с восьмизначными, десятизначными и вообще $2n$-значными номерами. Помнится, я читал в одном фантастическом романе, что в автобусах главной планеты системы $\alpha$ Центавра для билетов используются именно восьмизначные номера. Давай-ка найдем, чаще ли жителям этой планеты попадаются счастливые билеты, чем нам?

Миша взял листок бумаги и начал рисовать таблицу. Прежде всего он заполнил столбец для $n = 1$ единицами при $k$ в пределах от 0 до 9. Остальные клетки этого столбца можно было заполнить нулями, но он решил их не писать. Столбец для $n = 2$ Миша получил по рекуррентной формуле (*), сложив соответствующие значения $N_1(k)$, $N_1(k — 1)$, ..., $N_1(0)$

Так, $N_2(6) = N_1(6) + N_1(5) + N_1(4) + N_1(3) + N_1(2) + N_1(1) + N_1(0) = 7$. Затем по той же формуле были построены столбцы для $n = 3$ и $n = 4$.

**Таблица значений $N_n(k)$**

| $k$ \ $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 3 | 6 | 10 |
| 3 | 1 | 4 | 10 | 20 |
| 4 | 1 | 5 | 15 | 35 |
| 5 | 1 | 6 | 21 | 56 |
| 6 | 1 | 7 | 28 | 84 |
| 7 | 1 | 8 | 36 | 120 |
| 8 | 1 | 9 | 45 | 165 |
| 9 | 1 | 10 | 55 | 220 |
| 10 |  | 9 | 63 | 282 |
| 11 |  | 8 | 69 | 348 |
| 12 |  | 7 | 73 | 415 |
| 13 |  | 6 | 75 | 480 |
| 14 |  | 5 | 75 | 540 |
| 15 |  | 4 | 73 | 592 |
| 16 |  | 3 | 69 | 633 |
| 17 |  | 2 | 63 | 660 |
| 18 |  | 1 | 55 | 670 |
| 19 |  |  | 45 | 660 |
| 20 |  |  | 36 | 633 |
| 21 |  |  | 28 | 592 |
| 22 |  |  | 21 | 540 |
| 23 |  |  | 15 | 480 |
| 24 |  |  | 10 | 415 |
| 25 |  |  | 6 | 348 |
| 26 |  |  | 3 | 282 |
| 27 |  |  | 1 | 220 |
| 28 |  |  |  | 165 |
| 29 |  |  |  | 120 |
| 30 |  |  |  | 84 |
| 31 |  |  |  | 56 |
| 32 |  |  |  | 35 |
| 33 |  |  |  | 20 |
| 34 |  |  |  | 10 |
| 35 |  |  |  | 4 |
| 36 |  |  |  | 1 |

— Теперь, — сказал Миша закончив таблицу, — можно подсчитать число счастливых билетов с двузначными, четырехзначными, шестизначными и восьмизначными номерами. Для этого все числа в $n$-м столбце моей таблицы нужно возвести в квадрат и сложить.

Проделав это, Миша получил:
*для двузначных номеров* $C = 10$,
*для четырехзначных* $C = 670$,
*для шестизначных* $C = 55\,252$,
*для восьмизначных* $C = 4\,840\,030$.

— Таким образом, — подытожил Миша, — на планете системы $\alpha$ Центавра на 100 миллионов билетов приходится чуть больше чем 4,8 миллиона счастливых. В среднем — примерно один счастливый билет из 21, а не из 18, как у нас. Им потруднее, чем нам, добывать свое «счастье».

— Вот теперь, — сказал я, — можно считать поставленную задачу решенной.

— А нет ли других способов ее решения? — спросил Миша.

— Вероятно, есть. Может быть, их придумают читатели «Кванта» и поделятся с нами? Не обязательно стараться найти точное число счастливых билетов, можно ограничиться оценкой или приближенной формулой, если эти оценки обеспечивают небольшую относительную погрешность. Вот, например, одна простая формула, выражающая количество $2n$-значных счастливых билетов при любом $n$ с относительной погрешностью не более 4 %:

$$C \approx 10^{2n}/\sqrt{33\pi n}.$$

С увеличением $n$ относительная погрешность быстро уменьшается.

— Как ты получил эту формулу, дядя?

— Сейчас это объяснить трудно. Я воспользовался методами теории вероятностей; надеюсь, что через несколько лет ты с этой теорией познакомишься.

## К статье «Периодические функции»

1. На рисунке 1 показано, как описанная в примере 4° конструкция дает функцию с периодом $T_0 = T/2$. (Постройте аналогично функцию с периодом $T_0 = T/3$.)

2. а) Функция $f(x) = \sin|x|$ непериодична.

б) Функция $f(x) = |\sin x|$ периодична с наименьшим положительным периодом $\pi$.

в) Функция

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x} = \begin{cases} 1 \text{ при } \sin x \neq 0, \text{ т. е. } x \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ \text{не определена при } x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

периодична с наименьшим положительным периодом $\pi$. (Нарисуйте графики функций из задачи 2.)

3. а) и б). Функции $f(x) = 1/x$ и $g(x) = \sin(1/x)$ непериодичны, поскольку их область определения есть множество $\{x \mid x \neq 0\}$: и не выполнено условие (А) (ср. с примером 5°).

в) Функция

$$f(x) = \sin[(\sqrt{x})^2] = \begin{cases} \sin x \text{ при } x \geqslant 0, \\ \text{не определена при } x < 0 \end{cases}$$

непериодична — не выполнено условие (А) (ср. с примером 6°). [Отметим, что для $T_0 = 2\pi$ при любом $x \in D(f)$ тем не менее выполнено условие $(\text{Б}_0)$: $f(x) = f(x+T)$; эта функция, так сказать, «периодична в одну сторону — вправо».]

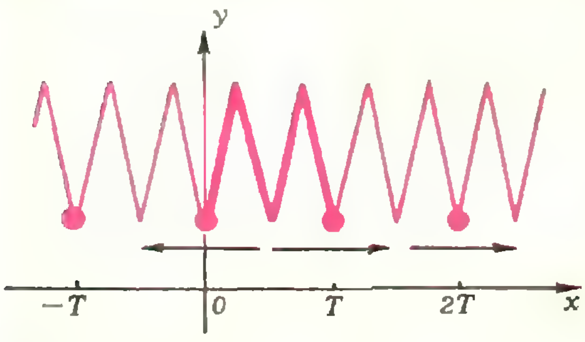


Рис. 1.

г) Если функция $f(x) = x^2 + 3x + 17$ периодична и $T \neq 0$ — ее период, то при любом $x \in D(f) = \mathbf{R}$ должно быть выполнено соотношение $f(x+T) = f(x)$, т. е.

$$(x+T)^2 + 3(x+T) + 17 = x^2 + 3x + 17,$$

$$\text{или } 2Tx + T^2 + 3T = 0.$$

Подставив сюда $x = 0$ и $x = 1$, получим два уравнения, которым должно удовлетворять число $T$:

$$T^2 + 3T = 0 \text{ и } T^2 + 5T = 0.$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем: $2T = 0$, и $T = 0$, в противоречие с условием $T \neq 0$. Значит, $f$ непериодична.

д) Функция $f(x) = x^2 + \sin x$ обращается в нуль при $x = 0$ и не может быть равна нулю при $|x| > 1$ (ибо тогда $x^2 > 1$ и $\sin x \geqslant -1$, откуда $f(x) = x^2 + \sin x > 1 + (-1) = 0$). Следовательно, $f$ непериодична [если бы $f$ была периодична с периодом $T$, то $f(x) = 0$ при $x = nT$ (поясните!), т. е. $f$ обращалась бы в нуль при сколь угодно больших значениях $x$, а это противоречит вышесказанному].

е) Функция $f(x) = \sin\sqrt{|x|}$ всюду определена, поэтому, конечно, условие периодичности (А) выполнено. Допустим, что $f$ периодична с периодом $T$. Рассмотрим нули функции $f$, т. е. $x$ такие, что $f(x) = 0$. Мы имеем:

$$\sin\sqrt{|x|} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x|} = \pi n,$$

$$\text{где } n \in \mathbf{Z},\ n \geqslant 0,$$

поэтому $|x| = \pi^2 n^2$, то есть $x = \pm a_n = \pm\pi^2 n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Заметим, что расстояние по числовой оси между соседними нулями $a_n$ и $a_{n+1}$ (или $-a_n$ и $-a_{n+1}$) равно

$$a_{n+1} - a_n = \pi^2 (n+1)^2 - \pi^2 n^2 = \pi^2 (2n+1)$$

и стремится к бесконечности с ростом $n$. С другой стороны, из предполагаемой периодичности $f$ следует, что

$$f(nT) = f(0) = 0 \text{ и } f(\pi^2 + nT) = f(\pi^2) = f(a_1) = 0,$$

т. е. у функции $f$ имеется бесконечно много нулей $nT$ и $\pi^2 + nT$ на одном и том же расстоянии $\pi^2$ друг от друга. Очевидно, это противоречит вышесказанному (поясните!) Следовательно, функция $f$ непериодична. [Попробуйте аналогичным образом доказать непериодичность функции $f(x) = \sin(x^2)$.]

4. а) $\pi$, б) $\pi$, в) $2\pi$, г) $12\pi$, д) $2\pi$, е) $2\sqrt{2}\pi$.

5. Сформулированное утверждение неверно. Например, функции

$$f(x) = \cos x + 1 \text{ и } g(x) = 1 - \cos x$$

имеют наименьший период $2\pi$, и их сумма $f(x) + g(x) = 2$ — постоянная функция, периодом которой является любое число. Второй пример: функции

$$f(x) = \cos x + \cos 2x \text{ и } g(x) = 1 - \cos x$$

имеют наименьший период $2\pi$ (поясните), а их сумма

$$f(x)+g(x)=1+\cos 2x$$

имеет наименьший период в 2 раза меньше — $T_0=\pi$.

**6.** а) Заметим, что функция $f(x)=\cos x\cdot\cos(\sqrt{2}x)$ принимает значение $y=1$ только при $x=0$. В самом деле,

$$\cos x\cdot\cos\sqrt{2}x=1\Leftrightarrow\left[\begin{cases}\cos x=1,\\ \cos\sqrt{2}x=1\end{cases}\right.$$

$$\left.\text{или}\begin{cases}\cos x=-1,\\ \cos\sqrt{2}x=-1\end{cases}\right].$$

В первом случае имеем: $x=2\pi m$ и $\sqrt{2}x=2\pi n$, где $m,n\in\mathbf{Z}$. Если $x\neq 0$ удовлетворяет обоим этим соотношениям (при каких-то $m$ и $n$), то после деления второго уравнения на первое получим:

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m},\ \text{т. е. } \sqrt{2}\text{ — рациональное число.}$$

Противоречие показывает, что первая система имеет единственное решение $x=0$. Вторая система вообще не имеет решений, что доказывается аналогичным образом.

Итак, $f(x)=1$ только при $x=0$, и поэтому функция $f$ периодической быть не может (в противном случае $f(T)=f(0)=1$!).

б) Выражение для функции $f(x)=\cos x+\cos\sqrt{2}x$ можно преобразовать к виду

$$f(x)=2\cos\frac{x+\sqrt{2}x}{2}\cos\frac{x-\sqrt{2}x}{2}=$$

$$=2\cos\frac{1+\sqrt{2}}{2}x\cdot\cos\frac{1-\sqrt{2}}{2}x.$$

Далее, как в задаче а), доказывается, что $f(x)=2$ лишь при $x=0$, и поэтому $f$ непериодична. (Отметим, что число $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ иррационально. Докажите это рассуждением от противного.)

Другой способ — сразу заметить, что $f(x)=2$, лишь если $\cos x=\cos\sqrt{2}x=1$; тем самым задача сводится к уже разобранной.

в) Заметим, прежде всего, что рассуждения пункта а) для функции $f(x)=\sin x\times\sin\sqrt{2}x$ не проходят (попробуйте!). Поступим иначе.

Рассмотрим нули функции $f$, то есть $x$ такие, что $f(x)=0$.

Имеем:

$$\sin x\cdot\sin\sqrt{2}x=0\Leftrightarrow[\sin x=0\ \text{или}\ \sin\sqrt{2}x=0]$$

то есть $x=a_m=\pi m$ или $x=b_n=\dfrac{\pi n}{\sqrt{2}}$, где $m,n\in\mathbf{Z}$.

Допустим, что функция $f$ периодична с периодом $T\neq 0$. Поскольку $f(T)=f(0+T)=f(0)=0$, либо $T=a_{m_0}$, либо $T=b_{n_0}$ (для некоторых $m_0$, $n_0$, отличных от 0).

Разберем сначала случай $T=a_{m_0}$. Так как $f(b_1+T)=f(b_1)=0$, то число $b_1+T=b_1+a_{m_0}$ должно равняться либо $a_m$, либо $b_n$. В первом случае

$$b_1+a_{m_0}=a_m,\ \text{т. е. } \frac{\pi}{\sqrt{2}}+\pi m_0=\pi m,$$

откуда $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=m-m_0$ и $\sqrt{2}=\dfrac{1}{m-m_0}\in\mathbf{Q}$ — противоречие. Во втором случае

$$b_1+a_{m_0}=b_n,\ \text{т. е. } \frac{\pi}{\sqrt{2}}+\pi m_0=\frac{\pi n}{\sqrt{2}},$$

откуда $\dfrac{n-1}{\sqrt{2}}=m_0$ и $\sqrt{2}=\dfrac{n-1}{m_0}\in\mathbf{Q}$ — опять противоречие.

Аналогичным образом мы приходим к противоречию и в случае, когда $T=b_{n_0}$ (рассмотрите его самостоятельно).

г) Формулу, задающую функцию $f(x)=\sin x+\sin\sqrt{2}x$, можно преобразовать к виду

$$f(x)=2\sin\frac{1+\sqrt{2}}{2}x\cdot\cos\frac{1-\sqrt{2}}{2}x.$$

Далее рассуждаем, как в предыдущей задаче в).

**7.** а) Сумма двух непериодических функций может быть периодической функцией. Приведем два примера:

1) $f(x)=x^2$, $g(x)=1-x^2$, $f(x)+g(x)=1$;

2) $f(x)=x^2+\sin x$, $g(x)=1-x^2$, $f(x)+g(x)=1+\sin x$ (поясните).

б) Сумма периодической и непериодической функций может оказаться периоди-

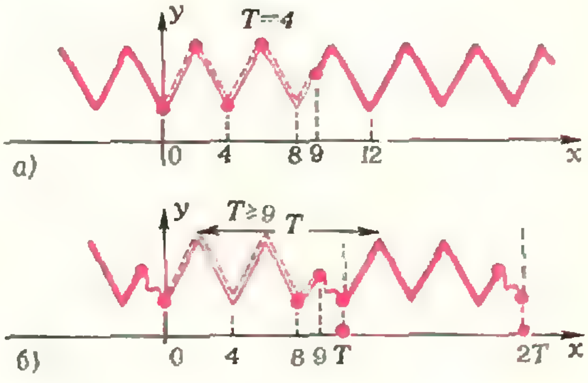


Рис. 2.

ческой! Пример:

$$f(x) = \sin x + \sin \sqrt{2}\, x,$$
$$g(x) = 1 - \sin(\sqrt{2}\, x),$$
$$f(x) + g(x) = 1 + \sin x.$$

8. На рисунках 2 *а*) и *б*) показано, как данную функцию доопределить до периодической с периодом 4 и с произвольным периодом $T \geqslant 9$.

9. Пусть $T > 0$. Рассмотрим числа $a_m = a + mT$ и $b_n = b + nT$, где $m$ и $n$ — целые, и положим $f(a_m) = f(a) = A$ и $f(b_n) = f(b) = B$ при любых $m, n \in \mathbf{Z}$ (см. рис. 3). Если эти соотношения задают функцию, т. е. *не может случиться так*, что $x = a_m = b_n$ и $f(x) = A \neq f(x) = B$, то эта функция будет периодической с наименьшим периодом $T$ (ср. с примером 3°). Если же для некоторых $m$ и $n$ все-таки $a_m = b_n$, то исходную функцию (заданную в двух точках) нельзя продолжить до периодической с периодом $T$ (поясните). Соотношение $a_m = b_n$ означает, что $a + mT = b + nT$, т. е. $(m-n)T = b - a$

и $T = \dfrac{b-a}{k}$, $k = m - n \in \mathbf{N}$.

Итак, нашу функцию можно продолжить до периодической с наименьшим положительным периодом $T$ при любом $T > 0$, кроме $T = (b-a)/k$, где $k \in \mathbf{N}$. (Попробуйте аналогичным образом проанализировать ту же задачу в случае, когда $f(a) = f(b)$, т. е. $A = B$!).

10. а) Такой функции не существует. Действительно, предположив противное, среди периодов такой функции $f$ мы имели бы иррациональные числа $T_1 = \sqrt{2}$ и $T_2 = 2 - \sqrt{2}$. Но тогда, согласно замечанию из доказательства теоремы 1, их сумма $T_1 + T_2$, т. е. рациональное число 2, являлась бы периодом $f$, в противоречие с условием.

б) Такие функции существуют — например, так называемая *функция Дирихле*:

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{при рациональном } x, \\ 1 & \text{при иррациональном } x \end{cases}$$

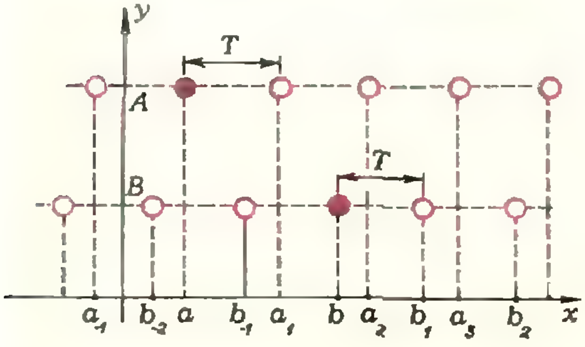


Рис. 3.

(ср. с X, с. 174, пример 3). Докажите, что любое рациональное число является периодом этой функции, а любое иррациональное — не является.

## К статье «Элементы статики»

2. $T = \dfrac{mgr}{b}$.

3. На рисунке 4, *а* указаны силы, действующие на цилиндр $A$: $m\mathbf{g}$ — сила тяжести, $\mathbf{N}$ — сила нормальной реакции поверхности цилиндра $B$, $\mathbf{T}$ — сила натяжения нити $CD$. Цилиндр $A$ находится в равновесии, следовательно, *линии действия этих сил пересекаются* в одной точке. Так как линии действия сил $m\mathbf{g}$ и $\mathbf{N}$ пересекаются в точке $O'$, то и линия действия силы $\mathbf{T}$ должна проходить через эту точку, т. е. должна быть направлена вдоль радиуса $r$.

Построим треугольник, сторонами которого являются силы $m\mathbf{g}$, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{T}$ (рис. 4, *б*). Этот треугольник подобен треугольнику $COO'$. Из подобия треугольников имеем

$$\frac{T}{O'C} = \frac{mg}{CO} = \frac{N}{OO'},$$

или

$$\frac{T}{l+r} = \frac{mg}{R} = \frac{N}{R+r}.$$

Отсюда

$$T = \frac{l+r}{R} mg, \quad N = \left(1 + \frac{r}{R}\right) mg.$$

Аналитический метод решения этой задачи привел бы к громоздким вычислениям.

4. $F_{\min} = \dfrac{mg}{2}$; $F_{\text{давл}} = \dfrac{mg\sqrt{5}}{2}$.

5. $F_{\min} = \dfrac{\mu \cos\alpha + \sin\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}}\, mg$, $\beta = \operatorname{arctg}\mu$; $F_{\text{давл}} = \dfrac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{1+\mu^2}\, mg$.

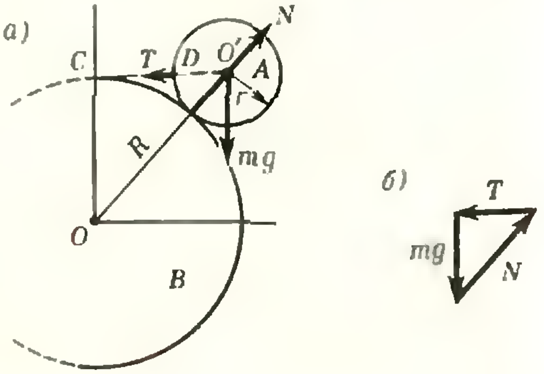


Рис. 4.

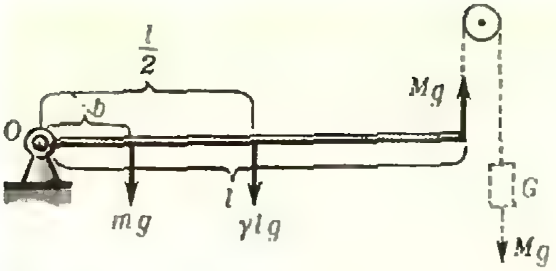


Рис. 5.

6. $F > mg\frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h}$.

7. $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

8. $a_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a \approx 0{,}618\,a$.

9. На рисунке 5 указаны силы, действующие на стержень. Запишем уравнение моментов сил относительно точки $O$:

$$Mgl-\gamma gl\frac{l}{2}-mgb=0,$$

где $M$ — масса груза $P$. Отсюда $M = \gamma\frac{l}{2}+\frac{mb}{l}$. При $M = M_{\min}$ сумма $\gamma\frac{l}{2}+\frac{mb}{l}$ должна быть минимальной. Так как $\left(\gamma\frac{l}{2}\right)\cdot\left(\frac{mb}{l}\right)=\gamma\frac{mb}{2}=\text{const}$ (при заданных условиях не зависит от $l$), то сумма $\gamma\frac{l}{2}+\frac{mb}{2}$ минимальна, когда

$$\gamma\frac{l}{2}=\frac{mb}{l},\ \text{т. е. } l=\sqrt{\frac{2mb}{\gamma}}.$$

10. $\alpha \leqslant \operatorname{arctg} 2\mu$; $F^A_{\text{давл}} = mg$, $F^B_{\text{давл}} = \mu mg$.

11. $M_{\text{груза}} = 35$ *кг*.

12. $\varphi_{\max} = \arcsin\sqrt{\frac{\mu r}{(1+\mu^2)\,l}}$.

13. $\mu=\frac{\sin 2\alpha \sin\alpha}{2(1-{}^1/_2\sin 2\alpha\cos\alpha)}\approx 0{,}48$.

## К статье «Прямоугольный треугольник»

2. $\frac{1}{2}h\left(\sqrt{h^2+l^2}-h\right)$. 3. 144 $см^2$.

4. 45°, 45°, 90°. 5. $a^2b\,(2a-b)$.

6. $\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$. 7. 4. 8. 9:1. 9. $R-r$.

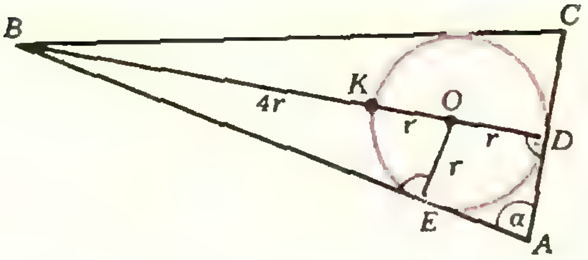


Рис. 6.

10. $\sqrt{a^2+b^2}$.

## К статье «Московский инженерно-физический институт»

### Математика

Вариант I

1. Обозначим скорость катера в стоячей воде через $y$ (*км/час*), а скорость течения реки (плота) — $x$ (*км/час*). Из условий задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{96}{y+x}+\frac{96}{y-x}=14, & (1)\\ \frac{96}{y+x}+\frac{72}{y-x}=\frac{24}{x}. & (2)\end{cases}$$

Для ее решения введем новую неизвестную $z = y/x$. Умножив второе уравнение системы на $x$, найдем

$$\frac{96}{z+1}+\frac{72}{z-1}=24,$$

откуда после простых преобразований получаем квадратное уравнение $z^2-7z=0$. Но $z\neq 0$, поэтому $z=7$. Подставив $y=7x$ в первое уравнение системы, имеем:

$$\frac{6}{x}+\frac{8}{x}=7,$$

откуда $x=2$.

Ответ: скорость катера 14 *км/час*, скорость течения реки 2 *км/час*.

2. Пусть $ABC$ — рассматриваемый равнобедренный треугольник ($|AB|=|BC|$), $O$ — центр вписанной окружности (рис. 6). Медиана $BD$ пересекает окружность в двух точках: $K$ и $D$. Так как точка $D$ лежит на стороне основания треугольника, то, согласно условию, $K$ — точка пересечения медиан треугольника $ABC$ и $|BK|:|DK| = 2:1$. Обозначим радиус вписанной окружности через $r$, а величину угла при основании треугольника $ABC$ через $\alpha$, тогда $|DK| = 2r$, $|BK| = 4r$, $|BO| = 5r$. Соединим центр вписанной окружности с точкой касания $E$ и рассмотрим треугольник $BOE$. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому треугольник $BOE$ — прямоугольный. Из треугольника

$ABD$ имеем $\widehat{ABD} = \pi/2 - \alpha$, а из треугольника $BEO$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{|OE|}{|BO|} = \frac{1}{5}.$$

Отсюда $\alpha = \arccos\frac{1}{5}$.

**3.** О. Д. З.: $x \geqslant 0$. Перепишем неравенство так:

$$3^{\sqrt{x}} > 3^{a\log_3 2}.$$

Отсюда $\sqrt{x} > a\log_3 2$. Но $\log_3 2 > 0$, поэтому $x \geqslant 0$ при $a < 0$, $x > (a\log_3 2)^2$ при $a \geqslant 0$.

**4.** Из первого уравнения системы находим $\sin x = -\cos y$. Подставив полученное значение $\sin x$ во второе уравнение системы, найдем $\cos^2 y = 1/4$. Таким образом, исходная система распадается на две:

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \cos y = \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = (-1)^{k+1}\pi/6 + k\pi$, $y_1 = \pm\pi/3 + 2l\pi$; $x_2 = (-1)^k\pi/6 + k\pi$, $y_2 = \pm 2\pi/3 + 2l\pi$ ($k$, $l$ — целые).

Вариант 2

**1.** 6. **2.** $\pi r^2/\sin^4(\alpha/2)$. **3.** $-1/2 < x < 2$. **4.** $x_1 = \pi/6 + 2k\pi$, $y_1 = \pi/3 + 2n\pi$; $x_2 = 7\pi/6 + 2k\pi$, $y_2 = 4\pi/3 + 2n\pi$; $x_3 = -\pi/6 + 2k\pi$, $y_3 = 2\pi/3 + 2n\pi$; $x_4 = 5\pi/6 + 2k\pi$, $y_4 = 5\pi/3 + 2n\pi$ ($k$, $n$ — целые).

Вариант 3

**1.** 63. **2.** $a^3(2 + \lg\alpha)^3\operatorname{ctg}^2\alpha/6$. **3.** При $0 < a < 1$, $1 < a < 2$, $a = 3$ одно решение: $x = a + 2$; при $2 < a < 3$, $a > 3$ два решения: $x_1 = a + 2$, $x_2 = a - 2$; при других $a$ решений нет. Указание. См. рис. 7 (черным отмечены области, не входящие в О.Д.З., красным — решения уравнения). **4.** $x = \pi \pm \arccos(1/2\sqrt{2}) + 2k\pi$ ($k$ — целое).

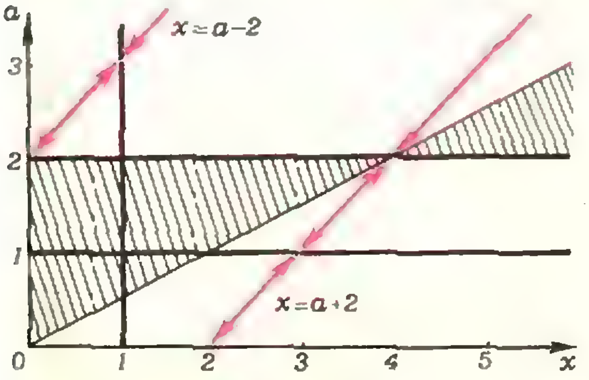


Рис. 7.

**Физика**

**1.** $\mathscr{E} = \frac{U_2U'}{U' - U_1} = 12$ *в*.

**2.** $Q = \frac{(B_2 - B_1)^2S^2\cos^2\alpha}{\tau R} = 25$ *мкдж*.

**3.** $A = \frac{hc(n^2 - \lambda_2/\lambda_1)}{\lambda_2(n^2 - 1)} \approx 2{,}2\cdot 10^{-19}$ *дж* $\approx 1{,}4$ *эв*.

**К статье «XVIII Олимпиада по математике»**

**1.** Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, удовлетворяющий условиям задачи. Обозначим $|AB| = a$, $|BD| = b$, $|CD| = c$. По условию $a + b + c = 16$ (*см*). Оценим площадь четырехугольника $ABCD$: $32 \leqslant \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc$ (поскольку $S_{\square ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}$), причем равенство достигается, лишь если $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} = 90°$. Но $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}b(a + c) = \frac{1}{2}b(16 - b) = 32 - \frac{1}{2}(8 - b)^2 \leqslant 32$, причем равенство достигается, лишь если $b = 8$ (*см*). Значит, $b = 8$ (*см*), $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} = 90°$, а отсюда легко следует, что $|AC| = 8\sqrt{2}$ (*см*).

**2.** Сделаем замену $x = 2\cos\alpha$, тогда $P_1(x) = 2\cos 2\alpha$, $P_2(x) = (2\cos 2\alpha)^2 - 2 = 2\cos 4\alpha$ и далее по индукции несложно показать, что $P_n(x) = 2\cos(2^n\alpha)$.

Данное уравнение перепишется в виде $2\cos(2^n\alpha) = 2\cos\alpha$, откуда $\sin\frac{(2^n - 1)\alpha}{2} \times \sin\frac{(2^n + 1)\alpha}{2} = 0$, $\alpha_1 = \frac{2k\pi}{2^n - 1}$, $\alpha_2 = \frac{2l\pi}{2^n + 1}$, $x_1 = 2\cos\frac{2k\pi}{2^n - 1}$, $x_2 = 2\cos\frac{2l\pi}{2^n + 1}$ ($k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1$, $l = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$). Осталось доказать, что все эти корни различны, так как многочлен $P_n(x) - x$ имеет степень $2^n$ и не может иметь больше чем $2^n$ корней. Различие корней внутри серий следует из монотонности функции $\cos\alpha$, а различие корней из разных серий следует из взаимной простоты чисел $2^n - 1$ и $2^n + 1$.

Второе решение этой задачи может быть получено из такого замечания: когда $x$ пробегает отрезок $[-2; 2]$, $P_1(x)$ дважды пробегает этот отрезок, сначала убывая от 2 до $-2$, а затем возрастая от $-2$ до 2. Отсюда несложно вывести, что у уравнения $P_n(x) = x$ вдвое больше вещественных корней, чем у уравнения $P_{n-1}(x) = x$.

**3.** Из условия задачи следует, что ребра коробки имеют целочисленные длины. Обозначим их через $a$, $b$ и $c$ и будем считать, что $a \leqslant b \leqslant c$. Поскольку на отрезке длины $x$ помещается не более $[x/\sqrt[3]{2}]$ отрезков длины $\sqrt[3]{2}$, то кубики объема 2, помещенные («встык») в коробку, образуют прямоугольный параллелепипед, максимальные размеры которого будут $\left[a/\sqrt[3]{2}\right]$, $\left[b/\sqrt[3]{2}\right]$, $\left[c/\sqrt[3]{2}\right]$. По условию

$$2\left[a/\sqrt[3]{2}\right]\cdot\left[b/\sqrt[3]{3}\right]\cdot\left[c/\sqrt[3]{2}\right] = 0{,}4\,abc,$$

откуда

$$\frac{a}{\left[a/\sqrt[3]{2}\right]}\cdot\frac{b}{\left[b/\sqrt[3]{2}\right]}\cdot\frac{c}{\left[c/\sqrt[3]{2}\right]} = 5. \qquad (*)$$

Проследим за изменением величин $\left[n/\sqrt[3]{2}\right]$ и $n/\left[n/\sqrt[3]{2}\right]$ при возрастании $n$:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left[n/\sqrt[3]{2}\right]$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| $n/\left[n/\sqrt[3]{2}\right]$ | — | 2 | 3/2 | 4/3 | 5/3 | 3/2 | 7/5 | 4/3 | 9/7 | 10/7 |

Замечаем, что при $n \geqslant 6$ будет $n/\left[n/\sqrt[3]{2}\right] \leqslant 3/2$ (поскольку при $n > 7$ из неравенства

$$\left[n/\sqrt[3]{2}\right] > n/\sqrt[3]{2} - 1$$

следует $n/\left[n/\sqrt[3]{2}\right] < \sqrt[3]{2}\cdot\left(1/\left[n/\sqrt[3]{2}\right] + 1\right)$, а при $n = 6$, $n = 7$ неравенство следует из таблицы), поэтому $2 \leqslant a < 6$ (иначе левая часть $(*)$ не превосходит $(^3/_2)^3 = 27/8 < 5$).

Теперь видим, что $n/\left[n/\sqrt[3]{2}\right]$ либо равно 2, либо равно 5/3, либо не больше $^3/_2$. Но не больше $^3/_2$ может быть лишь один из сомножителей в $(*)$, так как иначе третий сомножитель должен быть больше 2. Значит, два из чисел $a$, $b$, $c$ могут принимать лишь значения 2, 5. Теперь перебором вариантов находим два ответа: $a_1 = 2$, $b_1 = 3$, $c_1 = 5$; $a_2 = 2$, $b_2 = 5$, $c_2 = 6$ (надо еще учесть, что $n/\left[n/\sqrt[3]{2}\right] \neq 5/4$, так как в случае равенства будет $4n = 5\left[n/\sqrt[3]{2}\right]$, $64n^3 = 125\left[n/\sqrt[3]{2}\right]^3 \leqslant 125n^3/2$, $128n^3 \leqslant 125n^3$).

**4.** Пусть наибольшее значение произведения достигается для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(a_1 + \ldots + a_n = 1976)$. Тогда $2 \leqslant a_i \leqslant 4$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, так как $a + 1 > a \cdot 1$, и если $a_k \geqslant 5$, то $a_k < 3\,(a_k - 3)$. Далее заменим каждый сомножитель, равный 4, двумя сомножителями, равными 2, от этого произведение не изменится. Заметим еще, что $2 + 2 + 2 = 3 + 3$, но $2\cdot 2\cdot 2 < 3\cdot 3$. Теперь $a_i$ принимают значение 2 или 3, причем значение 2 принимают не более двух $a_i$. Но $1976 = 658\cdot 3 + 2$, поэтому произведение равно $2\cdot 3^{658}$.

**5.** Посмотрим, сколько существует различных наборов целых чисел

$$(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_q)$$

таких, что $|t_j| \leqslant p$ для всех $j = 1, 2, \ldots, q$. Очевидно, их ровно $(2p+1)^q = (2p+1)^{2p}$, поскольку каждое $t_j$ может принимать значения от $-p$ до $p$, а количество чисел $t_j$ равно $q$.

Рассмотрим далее набор чисел

$$(b_1, b_2, \ldots, b_p),$$

где

$$b_i = a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \ldots + a_{iq}t_q,$$

и посмотрим, какое количество может быть различных таких наборов при $|t_j| \leqslant p$. Заведомо $|b_i| \leqslant pq$ для всех $i = 1, 2, \ldots, p$, поэтому количество наборов $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ не больше, чем $(2pq+1)^p = (4p^2+1)^p$. Но $(2p+1)^{2p} = (4p^2+4p+1)^p > (4p^2+1)^p$, поэтому каким-то двум наборам $(t_1, t_2, \ldots, t_q)$ и $(t'_1, t'_2, \ldots, t'_q)$ соответствует один и тот же набор $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ («принцип Дирихле»), то есть для любого $i$ выполнено равенство

$$a_{i1}t_1 + a_{i2}t_2 + \ldots + a_{iq}t_q = \\ = a_{i1}t'_1 + a_{i2}t'_2 + \ldots + a_{iq}t'_q \; (= b_i).$$

Но тогда набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$, где $x_k = t_k - t'_k$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$, удовлетворяет данной в условии задачи системе уравнений, причем хоть одно из $x_i$ отлично от нуля (поскольку наборы $(t_1, \ldots, t_q)$ и $(t'_1, \ldots, t'_q)$ различны) и

$$|x_j| = |t_j - t'_j| \leqslant |t_j| + |t'_j| = \\ = 2p = q \; (j = 1, 2, \ldots, q).$$

**6.** Рассмотрим несколько первых значений $u_n$ и попробуем представить их целую

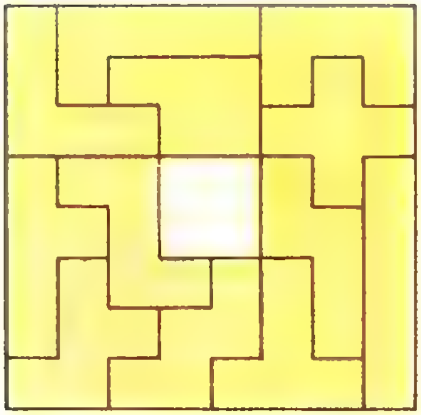


**Рис. 8.**

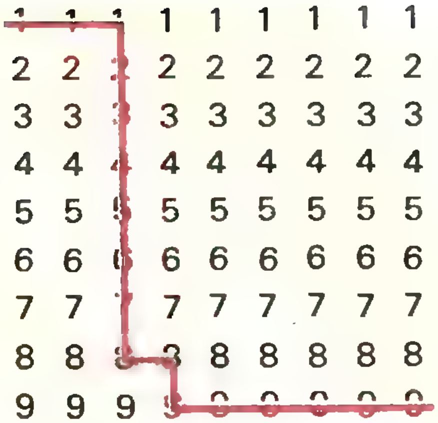


**Рис. 9.**

часть в виде, указанном в условии задачи:

$$u_0 = 2 = 1+1 = 2^{(2^0-(-1)^0)/3}+2^{-(2^0-(-1)^0)/3};$$

$$u_1 = 2+{}^1/_2 = 2^{(2^1+1)/3} + 2^{-(2^1+1)/3};$$

$$u_2 = {}^5/_2 = 2^{(2^2-1)/3} + 2^{-(2^2-1)/3};$$

$$u_3 = 8+{}^1/_8 = 2^{(2^3+1)/3} + 2^{-(2^3+1)/3}.$$

Естественно предположить, что всегда

$$u_n = 2^{(2^n-(-1)^n)/3} + 2^{-(2^n-(-1)^n)/3}.$$

Это легко доказывается по индукции, а отсюда следует утверждение задачи.

### К задачам «Квант» для младших школьников»

*(см. «Квант» № 11)*

1. Рассмотрим два соседних знака из набора Попа. Между ними встанет один знак из набора Балды. Если знаки Попа различны, то какой бы знак ни написал Балда, Поп получит на этом один щелбан. Если же знаки Попа одинаковы, то в лучшем случае (когда знак Балды совпадает с его знаками) он не получит ни одного щелбана, но зато в худшем случае (когда знак Балды отличается от его знаков) он получит целых два щелбана. Значит, Попу надо чередовать знаки, тогда он получит ровно 1976 щелбанов.

2. 737 = 67×11 (оба эти числа — простые). Поэтому в классах 67 учеников, каждый из которых купил 11 книг.

3. 209×209 = 43 681; 153×153 = = 23 409.

4. Произведение шести указанных в условии тройных произведений равно $-a^2b^2c^2d^2e^2f^2g^2h^2k^2$, т. е. отрицательно. Значит, шесть рассматриваемых чисел не могут быть все положительными или все отрицательными.

5. При каждом движении шерстяного лоскута по стеклянной палочке наэлектризованные опилки будут разлетаться в стороны, высыпаясь из воронки в виде «шатра».

*(см. с. 67)*

1. Легко заметить, что от каждого лысого идет (через одного) следующая цепочка лысых (Л) и нелысых (Н):

...ЛЛНЛЛНЛЛН...,

поэтому среди 333 гостей, сидящих через одного, будет 222 лысых. Поскольку лысых большинство, такая же цепочка будет для гостей, сидящих между рассмотренными, поэтому всего лысых 444.

2. 2 р. 40 к. за килограмм.

3. ТОЛЯ→ЮЛЯ.

4. Нельзя. Указание. Раскрасим доску под «шахматную» и поставим на белые поля белые шашки, а на черные — черные. После перестановки белые шашки должны стоять на черных полях, а черные — на белых, но числа белых и черных полей на доске 19×19 различны.

5. Поставить на одну чашку весов килограммовую гирю и уравновесить ее с помощью имеющихся правильных гирь. Затем заменить килограммовую гирю таким количеством крупы, чтобы весы оставались в равновесии.

### К головоломкам

**«Звезда из домино»**

*(см. «Квант» № 11 с. 31)*

0:0, 0:5, 5:6, 6:2;
1:1, 1:3, 3:5, 5:5;
2:2, 2:0, 0:6, 6:6;
3:3, 3:2, 2:5, 5:1;
4:3, 3:6, 6:1, 1:0;
5:4, 4:4, 4:0, 0:3;
6:4, 4:2, 2:1, 1:4;

### «Восстановите пентамино», «Четыре и сто»

*(см. 4-ю с. обл.).*

См. рис. 8. 9.

### К задачам

*(см. с. 54)*

3. Указание. $x^3+6x^2+11x+6 = (x+1)(x+2)(x+3)$.

5. а) $\overline{xyz} = 625$; б) $\overline{yx} = 25$; в) $\overline{yx} = 32$.

# Напечатано в 1976 году

| | | |
|---|---|---|
| Навстречу XXV съезду КПСС | 2 | 2 |

**Статьи по математике**

| | | |
|---|---|---|
| *Алейников Б., Бузыцкий П., Дубсон М.* Симплекс-метод | 7 | 2 |
| *Александров П.* Николай Иванович Лобачевский | 2 | 5 |
| *Башмакова И.* Пьер Ферма | 8 | 3 |
| *Башмаков М.* Что такое вектор? | 4 | 2 |
| *Болтянский В.* Загадка «Аксиомы параллельных» | 3 | 2 |
| *Виленкин Н., Лишевский В.* Нильс Хенрик Абель | 5 | 2 |
| *Гамаюнов В.* Тайна геометрических чертежей | 1 | 8 |
| *Гиндикин С.* Волшебный мир Анри Пуанкаре | 3 | 9 |
| *Гиндикин С.* «Великое искусство» | 9 | 2 |
| *Есаян А.* ЭВМ опровергает | 8 | 28 |
| *Земляков А.* Математика биллиарда | 5 | 17 |
| *Клумова И., Фукс Д.* Формула существует, но ... | 9 | 11 |
| *Колмогоров А.* Группы преобразований | 10 | 2 |
| *Краснодемская А.* Графическое решение кубических уравнений | 9 | 18 |
| *Левин В.* Парабола и неравенства | 4 | 14 |
| *Леонард Беве.* Мини-геометрия | 6 | 2 |
| *Мартынов Б.* Теорема Ферма для многочленов | 8 | 12 |
| *Норден А.* Великое открытие Лобачевского | 2 | 16 |
| *Овчинников С.* Плоские переключательные схемы | 1 | 12 |
| *Резников А.* Формула Кардано и геометрия | 9 | 17 |
| *Савин А.* От школьной задачи — к проблеме | 12 | 2 |
| *Савченко В.* Полуправильные многогранники | 1 | 2 |
| *Садовский Л., Аршинов М.* Группы | 10 | 6 |
| *Саннинский В.* Артиллерия и математика | 5 | 33 |
| *Тьмеладзе З.* Нелинейное программирование | 1 | 28 |
| *Хапланов М.* Трансцендентные числа | 1 | 24 |
| *Цинман Л.* «Парадокс исследователя» | 11 | 9 |
| *Ширшов А.* Модель Кэли — Клейна геометрии Лобачевского | 3 | 18 |
| *Ярмоленко В.* Складывание фигур | 11 | 15 |

**Статьи по физике**

| | | |
|---|---|---|
| *Блиох П.* В фокусе линзы | 10 | 13 |
| *Волькенштейн М.* Квантование и стоячие волны | 3 | 26 |
| *Воробьев И.* Троянцы | 5 | 11 |
| *Гегузин Я.* Классические опыты с кристаллами | 4 | 6 |
| *Гельфер Я., Лешковцев В.* Амедео Авагадро | 8 | 21 |
| *Дозоров А.* Зачем трансформатору сердечник? | 7 | 14 |
| *Дозоров А.* Электрические мультиполи | 11 | 2 |
| *Иоффе А.* Броуновское молекулярное движение | 9 | 20 |
| *Казарян Э., Саакян Р.* Об одном методе решения задач по электростатике | 7 | 9 |
| *Кикоин А.* Температура, теплота, термометр | 6 | 13 |
| *Коткин Г.* Всплывающий воздушный пузырек и закон Архимеда | 1 | 19 |
| *Лешковцев В.* Выдающийся советский оптик | 12 | 10 |
| *Новиков В.* Энергия магнитного поля контура с током | 5 | 27 |
| *Рождественский Д.* Эволюция учения о строении атомов и молекул | 12 | 16 |
| *Смородинский Я.* Лобачевский и физика | 2 | 22 |
| *Смородинский Я.* Сверхтяжелые элементы — открытие или ошибка? | 11 | 13 |
| *Туриянский Л.* Принцип Ферма | 8 | 17 |

**У нас в гостях журнал «Человек и закон»**

| | | |
|---|---|---|
| *Шестопал Я.* Наука читает невидимые следы | 1 | 35 |

**У нас в гостях журнал «Земля и Вселенная»**

| | | |
|---|---|---|
| *Гиндилис Л.* Модель контакта | 9 | 31 |
| *Шпилевский А.* Новая интерпретация таинственного радиоэха | 9 | 26 |

**Лаборатория «Кванта»**

| | | |
|---|---|---|
| *Головей М.* «Водяная улитка» Архимеда | 1 | 40 |
| *Головей М.* Фигура Гайдингера | 7 | 18 |
| *Горбушина Д., Майер В.* Прохождение света через плоскопараллельную пластинку | 9 | 36 |
| *Майер В.* Опыты по полному внутреннему отражению | 3 | 34 |
| *Майер В.* Поучительный опыт с кумулятивной струей | 4 | 20 |
| *Майер В.* Волны на бумаге | 5 | 39 |
| *Майер В.* Беспокойная дуга | 6 | 23 |
| *Майер В., Мамаева Е.* Опыты с порошковыми фигурами | 8 | 30 |
| *Майер В., Назаров Н.* Автоматический сифон | 11 | 19 |
| *Натанзон А., Плоткин М.* Маятник с вибрирующим подвесом | 2 | 28 |
| *Соскин С.* Капиллярные волны в струе | 10 | 21 |

**Математический кружок**

*Балк М.* Поиск решения 9 39
*Белага Э.* Алгебра — древняя и современная 10 24
*Васильев Н.* Сложение фигур 4 22
*Готман Э.* Задачи на доказательство 7 21
*Ионин Ю., Курляндчик Л.* Поиск инварианта 2 32
*Мордкович А., Смышляев В.* Антье 5 43
*Понарин Я.* Вычисление площадей 7 25
*Рыжик В.* Давайте складывать точки ... 1 44
*Толпыго А.* Инварианты 12 19
*Тоом А.* Решения задачи ВЗМШ 6 24
*Шарыгин И.* Теоремы Чевы и Менелая 11 22

**Задачник «Кванта»**

Задачи

М361 — М420; Ф373 — Ф432 1—12

Решения задач

М321 — М384; Ф333 — Ф386 1—12

**По страницам школьных учебников**

*Гейдман Б.* Осевая симметрия 9 56
*Гутенмахер В., Ивлев Б., Раббот Ж.* Сложение гармонических колебаний 11 44
*Земляков А.* Осторожно: максимум! 10 42
*Земляков А., Ивлев Б.* Периодические функции 12 34

**Практикум абитуриента**

*Белый С.* «Ключ» к решению — подобные треугольники 5 57
*Белый С.* Прямоугольный треугольник 12 50
*Гольдфарб Н.* Элементы статики 12 40
*Диденко А., Дубровский Г.* Применение диаграмм тепловых процессов 3 58
*Дорофеев Г., Розов Н.* Чертеж в геометрической задаче 6 49
*Ирошников Е.* Воспоминания ... о предстоящих экзаменах 9 59
*Ляховский В.* Логарифмические и показательные ... 3 51
*Мышкис А., Садовский Л.* Прикладная математика 6 41
*Перевалов Г.* Графическое задание функции 11 47
*Розов Н., Степанова В.* Читатели советуют 4 40
*Суконник Я., Горнштейн П.* Простой ответ к «сложной» задаче 2 46
*Суконник Я., Горнштейн П.* Наш выбор — теорема синусов! 10 47
*Шарыгин И.* Достраивание тетраэдра 1 60

* * *

*Беговатов Е., Галиуллин Р., Лаптев Б.* Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова (Ленина) 6 59
Белорусский институт инженеров железнодорожного транспорта 7 40
*Бурмистрова Н., Евграфова Н.* Московский электротехнический институт связи 5 62
*Голубов Э., Емлин Р.* Уральский государственный университет им. А. М. Горького 6 61
*Горев И.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 6 57
*Диденко А., Забоев А., Пантюхов Г., Шолохов Н.* Московский инженерно-физический институт 12 55
Донецкий государственный университет 7 37
Донецкий политехнический институт 7 41
*Забоев А., Пантюхов Г., Шолохов Н.* Московский инженерно-физический институт 1 65
*Козел С., Чехлов В., Шелагин А.* Московский физико-технический институт 2 58
*Коноваленко В., Стельмахович Т., Черняевский А.* Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина) 5 65
*Ляховский В.* Завод-втуз при Московском автомобильном заводе им. И. А. Лихачева 11 53
Марийский политехнический институт им. А. М. Горького 7 43
*Меледин Г.* Новосибирский государственный университет 4 47
*Молотков И., Осипов В., Славянов С., Товстик П.* Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова 4 46
Московский институт управления им. С. Орджоникидзе 7 38
Московский институт электронного машиностроения 7 39
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина 7 44
Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской 7 45
*Назаретов А.* Московский технологический институт 6 62
*Нестеренко Ю., Потапов М., Склянкин А., Тяпунина Н.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 3 63
*Саржевский А., Галко С.* Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина 6 58
Ярославский политехнический институт 7 43

### Всесоюзные и Международные олимпиады школьников

*Березин В., Кованцова Л.* Математическая олимпиада на Украине 9 66
*Березин В., Тихомирова В.* Московская городская олимпиада школьников 7 48
*Лиманов Л.* Задачи олимпиады по математике 11 59
*Моисеева З., Савин А.* XVIII Олимпиада по математике 12 57
*Петрова Т., Чернова Л.* Олимпиада по физике 11 63
Победители X Всесоюзной олимпиады школьников 11 66
*Савин А., Смолянский М., Тихомирова В.* Всероссийская олимпиада школьников 9 63
*Слободецкий И.* IX Олимпиада по физике 12 60
*Смолянский М., Стеценко В., Турецкий Е.* Олимпиада по математике 11 56

### Рецензии, библиография

*Белага Э.* «Математические машины» 7 50
*Бронштэн В.* Как рождаются, живут и умирают звезды 8 47
*Гельфгат Б.* Поиски и открытия планет 11 70
*Зорич И.* Мир звуков 9 67
*Кармазина П., Меллер И.* «АЛГОЛ 60» 7 51
*Клумова И., Смолянский М.* Новые книги 4 50
*Клумова И., Смолянский М.* Новые книги 7 52
*Клумова И., Смолянский М.* Новые книги 9 69
*Клумова И., Смолянский М.* Новые книги 11 71
*Кужель А., Чикирисова Т.* Чему равен $\sqrt[0.5]{4}$? 11 69
*Левитан Е.* Интересующимся космонавтикой 8 48
*Лешковцев В.* Плазма — четвертое состояние вещества 1 67
*Лешковцев В.* Над чем думают физики? 6 64
*Лешковцев В.* Новое о гравитации 10 52
*Рахлин И.* Научно-популярные книги по астрономии 9 68
*Смолянский М.* Комбинаторика — что это такое? 12 65

### Информация

*Антошин А.* Заочная физическая школа при МГУ. 8 53
*Асланян В., Кирьянов А., Чугунова Т.* Заочная физико-техническая школа при МФТИ 1 70
*Березин В.* Заочные физико-математические школы 8 50
*Митрофанов А.* Экзамены по физике в Англии 5 67
*Пшеничнер Б.* III Всесоюзный слет юных астрономов 8 52
*Раббот Ж.* Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу 1 68
*Рудов В.* Всесоюзный конкурс общества «Знание» 12 64
*Халамайзер А.* Экзамены по математике в ГДР 5 69

### Физики шутят

*Джон Слейт.* Как расщепить атомное ядро в домашних условиях 8 54
Как устроено атомное ядро 11 8
*Тульчинский М.* Как измерить высоту? 12 49

### «Квант» для младших школьников

Задачи 1—12
*Бендукидзе А.* О двоичной системе счисления 6 67
*Бендукидзе А.* Может ли часть равняться целому? 9 72
*Дейнега А.* Логические задачи и неравенства 10 57
*Кордемский Б.* Считайте обдуманно 10 60
*Орлов А.* «Все», «некоторые» и отрицание 2 61
*Орлов А.* Поиск предмета 7 55
*Розенталь А.* Встречи в океане 5 74
*Розенталь А.* Правило «крайнего» 8 57
*Савин А.* Как нарисовать пятиконечную звезду? 1 74
*Семенов Е.* Ошибки Степы Мошкина 3 69
*Семенов Е.* Фигуры конгруэнтны ... фигуры неконгруэнтны? 11 74
*Финк Л.* Еще раз о счастливых билетах 12 68
*Фладе Л.* Необходимо или достаточно? 4 53

### Уголок коллекционера

*Лешковцев В.* Подвиг, который будет жить в веках 4 64
*Алтыкис В.* 75 лет Нобелевским премиям 12 3с. обл

Номер оформили художники:
М. Дубах, Г. Красиков, А. Пономарева,
И. Смирнова, Э. Смирнов.

Корректор Л. С. Сомова

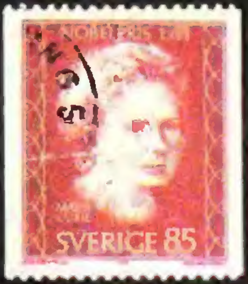
113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 22/IX—76
Подписано в печать 1/XI—76
Бумага 70×100 $^{1}/_{16}$. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,57 Т-20306
Тираж 313 685 экз.
Цена 30 коп. Заказ 2135

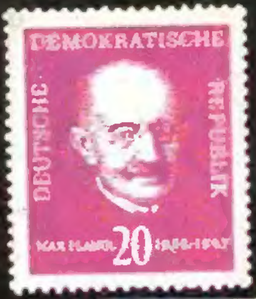
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

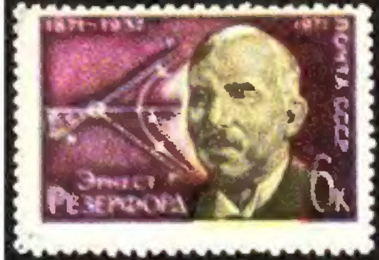
*Рукописи не возвращаются*

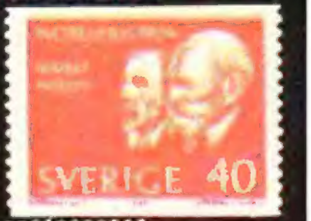
Уголок коллекционера

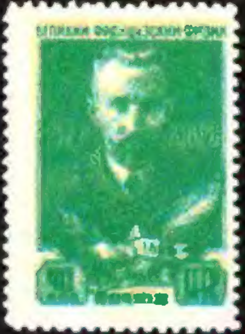
## 75 ЛЕТ НОБЕЛЕВСКИМ ПРЕМИЯМ

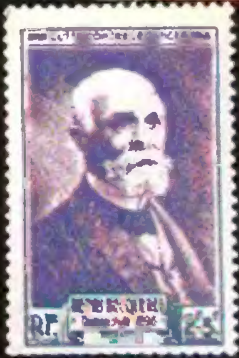


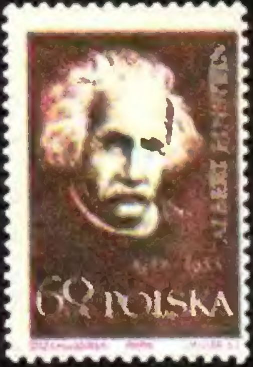


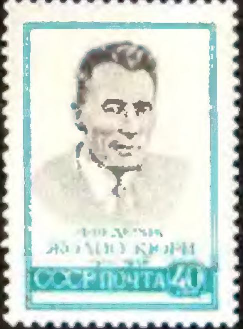


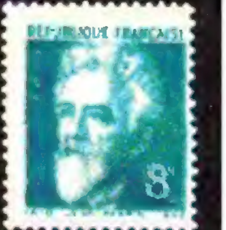


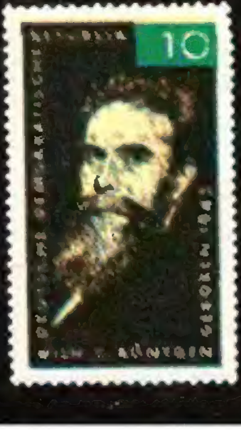


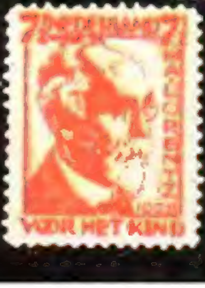










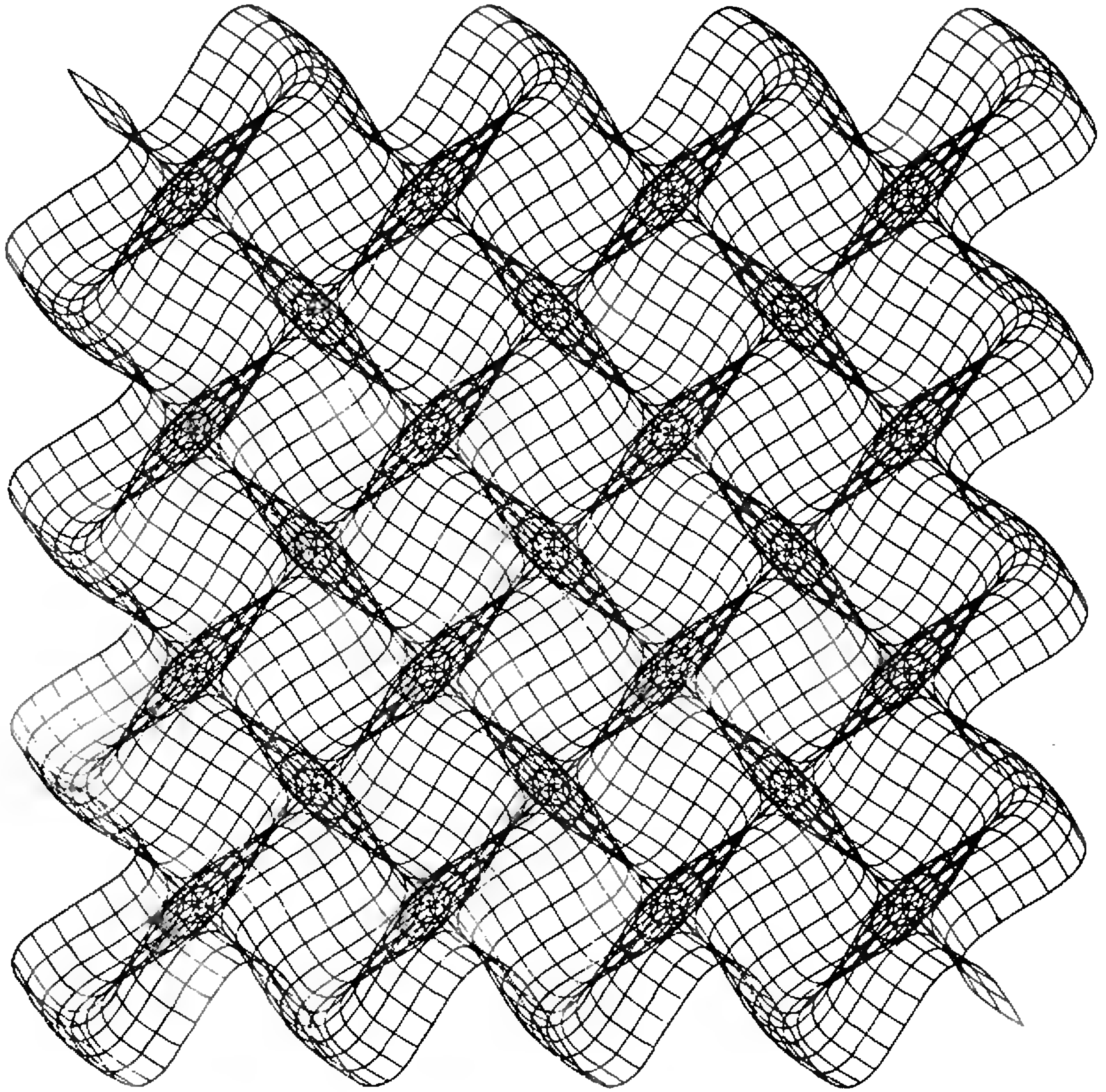


Каждый год, начиная с 1901 года, 10 декабря король Швеции в торжественной обстановке вручает лауреатам Нобелевские премии. Эти международные премии получили свое название по имени их учредителя Альфреда Нобеля, шведского инженера-химика, изобретателя и промышленника, который для этих целей завещал весь свой капитал. Ежегодно присуждается пять Нобелевских премий за работы по физике, химии, физиологии или медицине, литературе, а также за деятельность по укреплению мира между народами. Кроме того, в 1968 году Государственный банк Швеции учредил ежегодную премию памяти Нобеля за работы в области экономических наук. Наиболее высокий престиж имеют Нобелевские премии в области науки. В числе лауреатов по физике — виднейшие ученые разных стран, такие как Рентген, Лоренц, Беккерель, Пьер и Мария Кюри, Планк, Эйнштейн, Бор, де Бройль, Гейзенберг, Дирак, Ферми.

В 1958 году Нобелевскую премию по физике получили советские ученые И. Е. Тамм, И. М. Франк и П. А. Черенков за открытие и объяснение явления свечения, известного под названием «эффект Черенкова». За исследование по теории конденсированных сред, особенно жидкого гелия, премия по физике 1962 года была присуждена Л. Д. Ландау. Н. Г. Басов и А. М. Прохоров вместе с американским ученым Ч. Таунсом получили в 1964 году Нобелевскую премию по физике за фундаментальные исследования в области квантовой радиофизики.

На фото приведены марки, посвященные лауреатам Нобелевских премий.

*А. Алтыкис*



Периодические функции играют важную роль в анализе. Характерным примером периодических функций является знакомая вам синусоида. На этом рисунке изображен орнамент, сконструированный из синусоид, выполненный ЭВМ.

Постарайтесь разобраться в этом орнаменте. О периодических функциях и их основных свойствах вы можете прочитать в статье на с. 34

На рисунке, приведенном на обложке, изображена скатерть, сшитая из шелковых лоскутков. Несколько этих лоскутков образуют правильную пятиконечную звезду. Обнаружить эту спрятанную звезду не так-то просто.

Не могли бы вы найти звезду и отделить ее от остальной части скатерти?

Индекс 70465

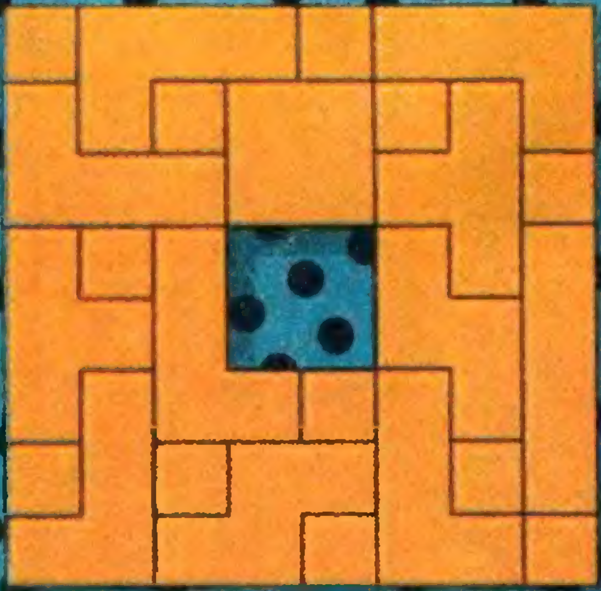
## ВОССТАНОВИТЕ ПЕНТАМИНО

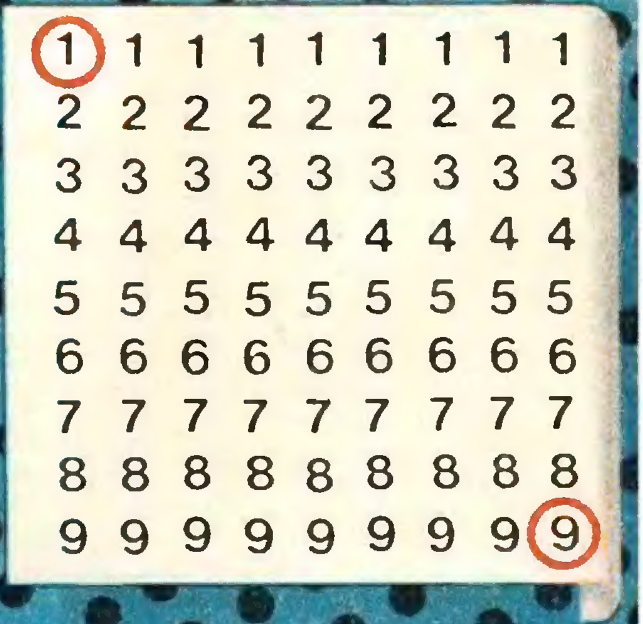
В квадрате (с вырезанным центром) уложены 12 тетрамино (фигуры из 4 клеток) и 12 квадратиков (рисунок сверху). Сотрите 12 перегородок, отделяющих квадраты от тетрамино, так, чтобы этот же квадрат (без центра) был заполнен 12 пентамино (фигуры из 5 клеток), изображенными внизу.

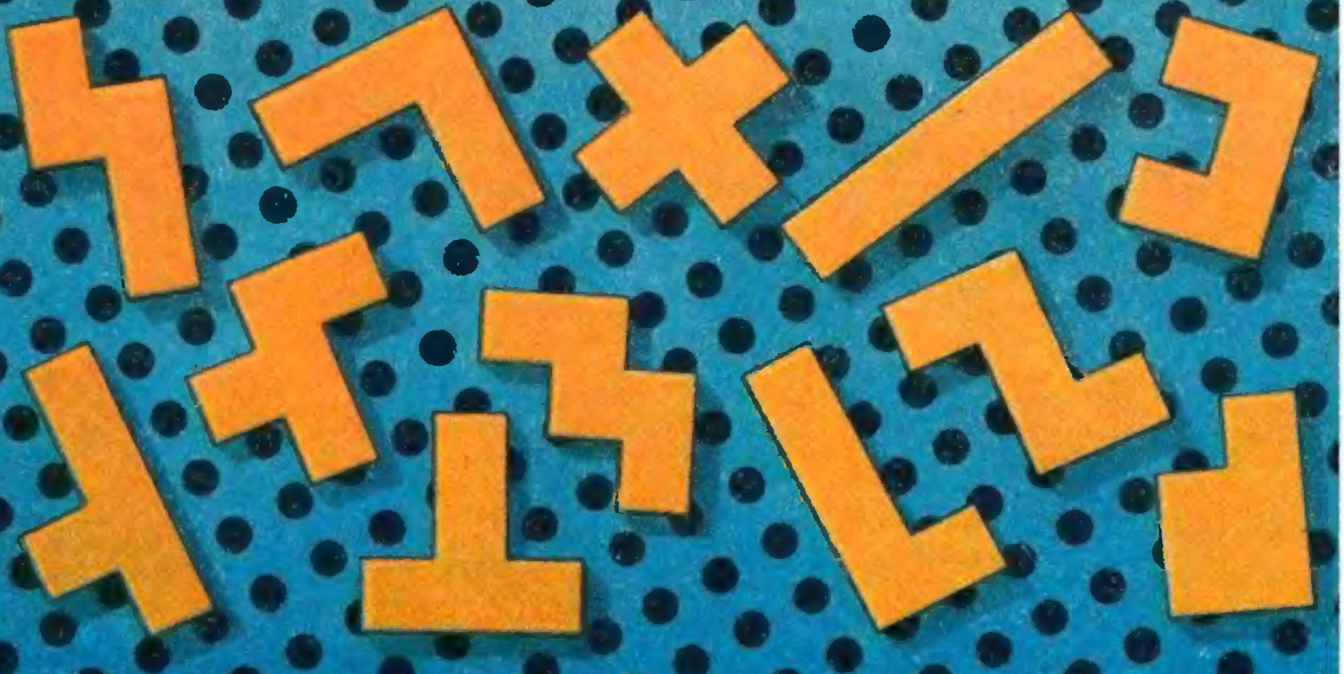
## ЧЕТЫРЕ И СТО

Начиная с цифры 1 в верхнем левом углу проведите ломаную в нижний правый угол с цифрой 9. При этом двигаться от цифры к цифре можно только либо вправо, либо вниз; количество «поворотов» должно быть равно 4; сумма цифр, перечеркнутых ломаной, должна равняться 100.

*Л. Мочалов*





| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ① | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | ⑨ |